Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Направление: 01.03.01 - Математика

Профиль: общий

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

«Некоммутативные пространства типа L_p, ассоциированные с операторами»

Студентка 4 курса

Группы 05-502

"___"____________2019 г. ____________Холматова З.Ш.

Научный руководитель

Кандидат физ. - мат. наук

"___"____________2019 г. ____________Новиков А.А.

Заведующий кафедрой

Доктор физ. - мат. наук, профессор

"___"____________2019 г. ____________Насыров С.Р.

Казань - 2019

Содержание

1 Введение

Теория интегрирования – один из наибольших пластов математики. Начиная с 1930х годов в ней начинается формироваться теория некоммутативного интегрирования. Отсчет развития некоммутативного интегрирования можно начинать с цикла работ Дж. фон Неймана и Ф. Мюррея.[11, 12, 19, 13] Формирование общей теории интегрирования относительно унитарно-инвариантных мер в полуконечных алгебрах фон Неймана было осуществлено И. Сигалом в 1953 г.[17] Дальнейшее развитие теории некоммутативных пространств L_p относительно весов и следов шло в сторону как создания новых конструкций, так и в сторону доказательства эквивалентности предлагаемых конструкций. Первой из всех можно считать описанную в работе Уффе Хаагерупа [8] и развитую Марианной Терп [18] конструкцию интерполяционных пространств L_p. В работах Тони Фальконе и Масамичи Такесаки [4, 5, 6] была приведена реализация универсальных пространтсв L_p, связанных непосредственно с алгеброй фон Неймана. В этой конструкции операторы и веса вкладывались в скрещенное произведение алгебры и постранства функционалов, на основе чего из функционалов и операторов возникали объекты одной и той же природы. Как непосредственное применение их идеи о равноправии операторов и функционалов можно рассматривать конструкции $L_1(a)$ и $L_\infty(a)$ пространств функционалов, интегрируемых относительно операторов, полученные научным руководителем работы.[16]

Близкими по конструкции к интерпояционным пространствам также являются индуктивые и проективные пределы топологических векторных пространств. [2, 3, 7, 10, 14] В частности, например, через проективный предел определяется пространство бесконечно дифференцируемых функций, а пространство функций непрерывных на вещественной прямой можно представить как индуктивный предел. В то же время, мало известно о том, может ли существовать предел произвольной последовательности банаховых пространств, между которыми, быть может, и нет никаких соотношений вложимости. При рассмотрении такой произвольной последовательности мы естественным образом можем получить ассоциированную с ней решетку путем пересечения пространств и взятия прямой суммы пространств, получая при этом двухиндексное семейство банаховых пространств.

Тема некоммутативных пространств интегрируемых операторов или интегрируемых билинейных форм является традиционной темой для Казанского федерального университета и представлена в нем работами, начиная с 1968 года. [1]

2 Определения и обозначения

Определение 1. Банаховым пространством называется полное нормированное векторное пространство.

Через $\mathcal{B}^{k,n}$ обозначим двухиндексное семейство банаховых пространств. $\tau^{k,n}$ – топология, порожденная нормой $\|\cdot\|_{k,n}$, на пространстве $\mathcal{B}^{k,n}$.

Определение 2. Пусть (X_0, X_1) – пара банаховых пространств. Для $t > 0$ и $x \in X_0 + X_1$ пусть

$$K(x, t; X_0, X_1) = \inf\left\{\|x_0\|_{X_0} + t\,\|x_1\|_{X_1} \;\middle|\; x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\right\}.$$

K-методом интеполирования называется нахождение пространства $K_{\theta,q}(X_0, X_1)$ как линейного подпространства $X_0 + X_1$ для которого

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(x,t;X_0,X_1)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty.$$

Определение 3. Некоммутативным пространством $L_{p,q}(a)$ для $p, q \in (1, +\infty)$ называется интерполяционное пространство $K_{(p-1)/p,q}(L_1(a), L_\infty(a))$

Определение 4. Некоммутативным пространством $L_p(a)$ называется интерполяционное пространство $L_{p,p}(a)$.

3 Предварительные сведения

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{B}_1$ *и* $\mathcal{B}_2$ *– банаховы пространства и* $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$*. Тогда*

$$\mathrm{id} : x \in \mathcal{B}_1 \mapsto x \in \mathcal{B}_2$$

является непрерывным.

Доказательство. Пусть x_n – последовательность из $\mathcal{B}_1$, сходящаяся к $x \in \mathcal{B}_1$, т.е. $\|x_n - x\|_1 \to 0$. Тогда $\|x_n - x\|_2 \to 0$. □

4 Смешанные пределы

Пусть $k_1 < k_2$ и $n_1 < n_2$, $k_i, n_i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^{k_1,n_1} & \subset & \mathcal{B}^{k_1,n_2} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{B}^{k_2,n_1} & \subset & \mathcal{B}^{k_2,n_2} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} \|\cdot\|_{k_1,n_1} & \succ & \|\cdot\|_{k_1,n_2} \\ \curlywedge & & \curlywedge \\ \|\cdot\|_{k_2,n_1} & \succ & \|\cdot\|_{k_2,n_2} \end{array}.$$

Заметим, что

$$\begin{array}{ccc} \tau^{k_1,n_1}\big|_{k_2} & \supset & \tau^{k_1,n_2}\big|_{k_2,n_1} \\ \cap & & \cap \\ \tau^{k_2,n_1} & \supset & \tau^{k_2,n_2}\big|_{n_1} \end{array},$$

где $\tau\big|_{k_2} \equiv \tau\big|_{n_1} \equiv \tau\big|_{k_2,n_1} := \{X \cap \mathcal{B}^{k_2,n_1} \mid X \in \tau\}$.

Рассмотрим пределы

$$\mathfrak{B}^k = \bigcup_{n>0} \mathcal{B}^{k,n} \text{ и } \mathfrak{B}_n = \bigcap_{k>0} \mathcal{B}^{k,n}$$

с топологиями τ^k и τ_n, соответственно. Топология τ^k - сильнейшая топология на $\mathfrak{B}^k$, такая что отображения

$$\varphi_n^k : x \in (\mathcal{B}^{k,n}, \|\cdot\|_{k,n}) \mapsto x \in \mathfrak{B}^k \tag{1}$$

непрерывны и топология τ_n - наислабейшая топология на $\mathfrak{B}_n$, что отображения

$$\psi_k^n : x \in \mathfrak{B}_n \mapsto x \in (\mathcal{B}^{k,n}, \|\cdot\|_{k,n}) \tag{2}$$

непрерывны.

Лемма 1. *Пусть $k < n, k, n \in \mathbb{N}$. Тогда*

(i) $\mathfrak{B}^k \supset \mathfrak{B}^n$*;*

(ii) $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{B}_n$.

Доказательство. (i) Имеем

$$\mathfrak{B}^n = \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{B}^{n,\gamma},\ \mathfrak{B}^k = \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{B}^{k,\gamma} \text{ и } \mathcal{B}^{n,\gamma} \subset \mathcal{B}^{k,\gamma}.$$

Это означает, что если $x \in \mathfrak{B}^n$, то существует γ_0, такой что
$x \in \mathcal{B}^{n,\gamma_0} \subset \mathcal{B}^{k,\gamma_0}$. Следовательно, $x \in \mathfrak{B}^k$.

(ii) Если $x \in \mathfrak{B}_k$, то $\forall \gamma > 0$ $x \in \mathcal{B}^{\gamma,k} \subset \mathcal{B}^{\gamma,n}$. Поэтому

$$x \in \bigcap_{\gamma>0} \mathcal{B}^{\gamma,n} = \mathfrak{B}^n.$$

$\square$

Определение 5. Будем называть верхним пределом

$$\overline{\mathfrak{L}} = \overline{\lim} \mathcal{B}^{k,k} \equiv \bigcap_{k>0} \bigcup_{n\geq k} \mathcal{B}^{n,n}$$

Определение 6. Нижним пределом будем называть

$$\underline{\mathfrak{L}} = \underline{\lim} \mathcal{B}^{k,k} \equiv \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} \mathcal{B}^{n,n}$$

Предложение 1.

$$\overline{\mathfrak{L}} \supset \underline{\mathfrak{L}}.$$

Доказательство. Если $k_1 < k_2$, то $\mathcal{B}^{k_1,n} \supset \mathcal{B}^{k_2,n}$. Следовательно,

$$\overline{\mathfrak{L}} = \bigcap_{k>0} \bigcup_{n>0} \mathcal{B}^{k,n} = \bigcap_{k>0} \bigcup_{n\geq k} \mathcal{B}^{k,n} \supset \bigcap_{k>0} \bigcup_{n\geq k} \mathcal{B}^{n,n}.$$

Если $n_1 < n_2$, то $\mathcal{B}^{k,n_1} \subset \mathcal{B}^{k,n_2}$. Следовательно,

$$\bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} \mathcal{B}^{n,n} \supset \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} \mathcal{B}^{n,k} = \bigcup_{k>0} \bigcap_{n>0} \mathcal{B}^{n,k} = \underline{\mathfrak{L}}.$$

$\square$

Определение 7. Семейство $\mathcal{B}^{k,n}$ называется сходящимся, если $\underline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{L}}$, и обозначается $\mathcal{B}^{k,n} \xrightarrow{k,n} \mathfrak{L}$.

Лемма 2. *Пусть* $k < n, k, n \in \mathbb{N}$ *и*

$$\tau^k|_n := \{X \cap \mathfrak{B}^n \mid X \in \tau^k\},$$

т.е. топология индуцированная τ^k *на* $\mathfrak{B}_n$. *Тогда*

$$\tau^k|_n \subset \tau^n.$$

Доказательство. Пусть $X_0 \in \tau^k|_n$, т.е. $X_0 = X \cap \mathfrak{B}^k$, где $X \in \tau^k$. Тогда $(\varphi^k_\gamma)^{-1}(X)$ открыто в $(\mathcal{B}^{k,\gamma}, \|\cdot\|_{k,\gamma})$. Вложение

$$m^{n,k}_\gamma : x \in (\mathcal{B}^{n,\gamma}, \|\cdot\|_{n,\gamma}) \mapsto x \in (\mathcal{B}^{k,\gamma}, \|\cdot\|_{k,\gamma})$$

непрерывно. Поэтому

$$(\varphi^k_\gamma m^{n,k}_\gamma)^{-1}(X) = (m^{n,k}_\gamma)^{-1}(\varphi^k_\gamma)^{-1}(X)$$

открыто в $(\mathcal{B}^{n,\gamma}, \|\cdot\|_{n,\gamma})$ для любого $\gamma > 0$.

Топология τ^n - сильнейшая топология, такая что всякое вложение φ^n_γ непрерывно. Если $X_0 \notin \tau^n$, то существует топология

$$\tau = \tau^n \cup \{X_0 \cap Y \mid Y \in \tau^n\} \cup \{X_0 \cup Y \mid Y \in \tau^n\}$$

сильнее, чем топология τ^n, $X_0 \in \tau$. Покажем, что для любого $A \in \tau$ прообраз $(\varphi^n_\gamma)^{-1}(A)$ открыт.

Рассмотрим три случая $A \in \tau^n$, $A = X_0 \cap Y$, $A = X_0 \cup Y$ $(Y \in \tau^n)$.

1) Если $A \in \tau^n$, то $(\varphi^\beta_\gamma)^{-1}(A)$ открыто.

2) Если $A = X_0 \cap Y$, то

$$(\varphi^n_\gamma)^{-1}(X \cap \mathfrak{B}^n \cap Y) =$$

$$= (\varphi^n_\gamma)^{-1}\left(X \cap \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{B}^{n,\gamma}\right) \cap (\varphi^n_\gamma)^{-1}(Y) =$$

$$= \left(\bigcup_{\gamma>0} (\varphi^n_\gamma)^{-1}\left(X \cap \mathcal{B}^{n,\gamma}\right)\right) \cap (\varphi^n_\gamma)^{-1}(Y) =$$

$$= \left(\bigcup_{\gamma>0} \left(\varphi^k_\gamma m^{n,k}_\gamma\right)^{-1}(X)\right) \cap (\varphi^n_\gamma)^{-1}(Y).$$

открыто, так как открыты $\left(\varphi^k_\gamma m^{n,k}_\gamma\right)^{-1}(X)$ и $\left(\varphi^n_\gamma\right)^{-1}(Y)$.

3) Если $A = X_0 \cup Y$, то

$$(\varphi_\gamma^n)^{-1}\left((X \cap \mathfrak{B}^n) \cup Y\right) =$$

$$= (\varphi_\gamma^n)^{-1}\left(X \cap \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{B}^{n,\gamma}\right) \cup (\varphi_\gamma^n)^{-1}(Y) =$$

$$= \left(\bigcup_{\gamma>0} (\varphi_\gamma^n)^{-1}\left(X \cap \mathcal{B}^{n,\gamma}\right)\right) \cup (\varphi_\gamma^n)^{-1}(Y) =$$

$$= \left(\bigcup_{\gamma>0} \left(\varphi_\gamma^k m_\gamma^{n,k}\right)^{-1}(X)\right) \cup (\varphi_\gamma^n)^{-1}(Y).$$

открыто, так как открыты $\left(\varphi_\gamma^k m_\gamma^{n,k}\right)^{-1}(X)$ и $\left(\varphi_\gamma^n\right)^{-1}(Y)$.

Поскольку мы получили противоречие с максимальностью топологии τ^n, то $X_0 \in \tau^n$. □

Лемма 3. *Пусть $k < n, k, n \in \mathbb{N}$ и*

$$\tau_n|_k := \{X \cap \mathfrak{B}_k \mid X \in \tau_n\}$$

- топология, индуцированная топологией τ_n на $\mathfrak{B}_k$. Тогда

$$\tau_k \supset \tau_n|_k.$$

Доказательство. Топология τ_k определяется семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{\gamma,k}\}_{\gamma=1}^{\infty}$, а топология $\tau_n|_k$ определяется семейством $\{\|\cdot\|_{\gamma,n}\}_{\gamma=1}^{\infty}$. Нетрудно заметить, что $\|\cdot\|_{\gamma,n} \prec \|\cdot\|_{\gamma,k}$. □

Для $\underline{\mathfrak{L}}$ определим топологию $\overline{\tau}$, которая является сильнейшей топологией, такой что любое вложение

$$\Phi_k : x \in (\mathfrak{B}_k, \tau_k) \mapsto x \in (\underline{\mathfrak{L}}, \overline{\tau}) \tag{3}$$

непрерывно.

С другой стороны, определим топологию $\underline{\tau}$, которая будет наислабейшей топологией на $\overline{\mathfrak{L}}$, такой что любое вложение

$$\Psi_k : x \in (\overline{\mathfrak{L}}, \underline{\tau}) \mapsto x \in (\mathfrak{B}^k, \tau^k) \tag{4}$$

будет непрерывно.

Теорема 2. *Вложение*

$$\Lambda : x \in (\underline{\mathfrak{L}}, \overline{\tau}) \mapsto x \in (\overline{\mathfrak{L}}, \underline{\tau}) \tag{5}$$

является непрерывным.

Доказательство. Заметим, что

$$\forall n_0 > 0 \ \overline{\tau}|_{n_0} = \bigcap_{n \geq n_0} \tau_n|_{n_0} \text{ и } \underline{\tau} = \bigcup_{k>0} \tau^k|_\infty.$$

В то же время,

$$\tau_n = \bigcup_{k>0} \tau^{k,n}|_\infty \text{ и } \forall n_0 > 0 \ \tau^k|_{n_0} = \bigcap_{n \geq n_0} \tau^{k,n}|_{n_0}.$$

Достаточно доказать, что для любого $n_0 > 0$ имеет место включение

$$\overline{\tau}|_{n_0} \supset \underline{\tau}|_{n_0}, \text{ где } \tau|_{n_0} = \{X \cap \mathfrak{B}_{n_0} \mid X \in \tau\}.$$

Поэтому

$$\overline{\tau}|_{n_0} = \bigcap_{n \geq n_0} \left(\bigcup_{k>0} \tau^{k,n}|_\infty \right) |_{n_0}$$

и

$$\underline{\tau}|_{n_0} = \left(\bigcup_{k>0} \tau^k|_\infty \right) |_{n_0}.$$

Заметим, что редукция приводит к пространству $\mathfrak{B}_{n_0}$ и может быть записана следующим образом:

$$\overline{\tau}|_{n_0} = \bigcap_{n \geq n_0} \left(\bigcup_{k>0} \left(\tau^{k,n}|_{n_0} \right) \right) \text{ и } \underline{\tau}|_{n_0} = \bigcup_{k>0} \left(\tau^k|_{n_0} \right).$$

Но тогда $\tau^k|_{n_0} = \bigcap_{n \geq n_0} \tau^{k,n}|_{n_0}$. Поэтому

$$\overline{\tau}|_{n_0} = \bigcap_{n \geq n_0} \left(\bigcup_{k>0} \left(\tau^{k,n}|_{n_0} \right) \right) \supset$$

$$\supset \bigcup_{k>0} \left(\bigcap_{n \geq n_0} \left(\tau^{k,n}|_{n_0} \right) \right) = \underline{\tau}|_{n_0}.$$

$\square$

5 Приложение к L_p-пространствам

Пусть a – ограниченный оператор. Тогда в соответсвии с результатами работы [15] получаем, что для всяких $\alpha < \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L_1(a^\alpha) \hookrightarrow L_1(a^\beta); \; L_\infty(a^\alpha) \hookleftarrow L_\infty(a^\beta).$$

Также обратим внимание, что для a такого, что $\|a\| \leq 1$ и каждой пары $\alpha < \beta$ верны неравенства

$$K(x, t; L_1(a^\beta), L_\infty(a^\alpha)) < K(x, t; L_1(a^\alpha), L_\infty(a^\alpha))$$

$$K(x, t; L_1(a^\alpha), L_\infty(a^\alpha)) < K(x, t; L_1(a^\alpha), L_\infty(a^\beta))$$

В таком случае получаем, что

$$\begin{array}{ccc} L_1(a^\alpha) + L_\infty(a^\alpha) & \hookrightarrow & L_1(a^\beta) + L_\infty(a^\alpha) \\ \uparrow & & \uparrow \\ L_1(a^\alpha) + L_\infty(a^\beta) & \hookrightarrow & L_1(a^\beta) + L_\infty(a^\beta) \end{array}$$

а также пространства $L_p(a^\alpha)$ с индексом $\alpha \in (0, +\infty)$ образуют последовательность, которую можно исследовать в смысле предыдущей секции.

6 Заключение

К сожалению, пока остается неясным критерий равенства верхнего и нижнего пределов. Очевидно, что равенство достигается не всегда. Например, если пересечением двух банаховых пространств из изначальной последовательности будет тривиальное пространство. Примером достижения равенства можно считать стационарную последовательность банаховых пространств.

Список литературы

[1] Bikchentaev A.M., Sherstnev A.N. Studies on Noncommutative Measure Theory in Kazan University (1968–2018) / A.M. Bikchentaev, A.N. Sherstnev // International Journal of Theoretical Physics – May 2019 – DOI: 10.1007/s10773-019-04156-x

[2] Eskandarian, Z. Locally Convex Limit Spaces of Measurable Functions with Order Units and Its Duals / Z. Eskandarian // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2018. – V.39 – I.2 – pp. 195–199

[3] Esterle, J. Countable inductive limits of Frechet algebras / J. Esterle // Journal d'Analyse Mathématique – 1997 – V. 71, I.1 – pp. 195–204

[4] Falcone, T. The non-commutative flow of weights on a von Neumann algebra / A.J. Falcone, M. Takesaki // J. Funct. Anal. – 2001 – V.182 – №1 – p. 170–206

[5] Falcone, T. Operator valued weights without structure theory / A.J. Falcone, M. Takesaki // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999 – V.351 – №1 – p. 323–341

[6] Falcone, T. L_2-von Neumann modules, their relative tensor products and the spatial derivative / A.J. Falcone // Illinois J. Math. – 2000 – V.44 – №2 – p. 407-437

[7] Garcia-Lafuente, J. M. On the completion of (LF)-spaces / J. M. Garcia-Lafuente // Monatshefte für Mathematik – 1987 – V.103 – I.2 – p. 115–120

[8] Haagerup, U. L_p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra / U. Haagerup // Colloques Int. CNRS – 1979 – №274 – p. 175–184

[9] Kothe, G. *Topological Vector Spaces I* – NY:Springer – 1969.

[10] Kunzinger, M. Barrelledness, Baire-like-and (LF)-spaces / M. Kunzinger // - 1993 - Longman Scientific and Technical

[11] Murray, F.J. On rings of operators / F.J. Murray, J. von Neumann // Ann. Math. – 1936 – V.37 – №1 – p. 116–229

[12] Murray, F.J. On rings of operators II / F.J. Murray, J. von Neumann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937 – V.41 – No2 – p. 208–248

[13] von Neumann, J. On rings of operators III / J. von Neumann // Ann. Math.– 1940 – V.41 – No1 – p. 94–161

[14] Novikov A.A., Eskandarian Z., Inductive and projective limits of Banach spaces of measurable functions with order unities with respect to power

parameter / A.A. Novikov, Z. Eskandarian // Russian Mathematics – 2016 – V. 60 – I. 10 – p. 67–71

[15] Novikov, A. C^*-algebra Positive Element Invertibility Criteria in Terms of L_1-norms Equivalence and L_∞-norms Equivalence // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2019 – Vol. 40 – No. 5 – pp. 549–552

[16] Novikov A., L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra / A. Novikov //Positivity. - 2017. - Vol 21., Is. 1. - P.359-375.

[17] Segal, I.E. A non-commutative extension of abstract integration / I.E. Segal // Ann. Math. – 1953 – V.57 – №3 – 401–457

[18] Terp, M. L_p-spaces associated with von Neumann algebras / M. Terp // Københavns Univ. Math. Inst. Rapp. № 3a+3b – 1981 – 100 p.

[19] von Neumann, J. On rings of operators III / J. von Neumann // Ann. Math. – 1940 – V.41 – №1 – p. 94–16 Math. – 1943 – V.44 – №4 – p. 716–808