**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ И ТЕХНОЛОГИЙ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Направление: 44.03.05 – Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль: Математика и иностранный язык (английский)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

# РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA

Студент 5 курса
Группы 05-306
«_____» ______________ 2018 г. Дюпина А.Э.

Научный руководитель
К.п.н, доцент
«_____» ______________ 2018 г. Фалилеева М.В.

Заведующий кафедрой
Д.п.н., профессор
«_____»______________ 2018 г. Шакирова Л.Р.

Казань - 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Повышение качества математического образования (МО) является одним из приоритетных направлений современной государственной политики [14]. Развитие российского математического образования в настоящее время немыслимо без использования средств компьютерной математики. В соответствии с Концепцией развития российского математического образования, благодаря использованию ИКТ в образовательном процессе увеличивается доля математических рассуждений, развивается самостоятельность и повышается мотивация учащихся, устанавливаются связи математических моделей с реальностью, расширяется круг задач, которые можно решить при помощи компьютера [14].

Многолетняя практика проведения ЕГЭ и ОГЭ по математике, а также результаты математических олимпиад, показывают, что учащиеся затрудняются в решении геометрических задач, требующих навыков продуктивного мышления. Геометрическое мышление (ГМ) является одним из ключевых компонентов математического образования, поэтому повышение качества МО напрямую связано с развитием этого вида мышления.

Анализ отечественной и зарубежной литературы по данной теме позволяет сделать вывод о том, что в настоящее время отсутствует общепринятое определения геометрического мышления, а также нарушены границы между геометрическим и пространственным видами мышления. Исследования, доказывающие или опровергающие эффективность применения программы GeoGebra в процессе обучения студентов геометрии с целью повышения уровня ГМ, не имеют экспериментальной базы.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения качества геометрического образования на всех ступенях образования, поскольку низкий уровень математической подготовки абитуриентов, поступающих на педагогические направления, сказывается на результатах их дальнейшей профессиональной педагогической деятельности.

**Объект исследования:** процесс обучения в педагогическом вузе или педагогических отделениях университетов.

**Предмет исследования:** особенности организации обучения геометрии с компьютерным экспериментом студентов педагогического отделения университета.

**Цель исследования:** изучить возможности применения программы GeoGebra в обучении геометрии с целью повышения уровня геометрического мышления студентов.

**Задачи исследования:**

1. Исследовать психолого-педагогическую литературу по данной теме.
2. Рассмотреть и проанализировать известные формулировки определения геометрического мышления.
3. Изучить возможности применения компьютерного эксперимента в обучении геометрии.
4. Разработать методику развития геометрического мышления посредством применения программы GeoGebra в обучении.
5. Проанализировать результаты опытно-экспериментальной работы, сформулировать выводы по методике организации занятий.

Для решения поставленных цели и задач исследования использовались следующие методы:

– теоретические: анализ литературы и Интернет-источников;

– эмпирические: наблюдение, анализ, эксперимент, сравнение и обобщение полученных экспериментальных данных.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

В главе рассмотрены различные подходы к определению геометрического мышления, проанализированы две основные теории развития ГМ (Теория Стадий Пиаже и Теория ван Хиле), дано теоретическое описание технологии развития геометрического мышления с помощью компьютерного эксперимента.

## 1.1. Понятие геометрического мышления

Развитие геометрического мышления является важной задачей математического образования. Вопрос о том, каким образом наиболее эффективно можно развить ГМ учащихся, остается открытым. Для ответа на этот вопрос целесообразно разобраться в сути понятия «геометрическое мышление».

Мониторинг российских Интернет-источников информации позволил сформулировать вывод о том, что до сих пор нет четких границ между понятиями геометрического и пространственного мышления, не установлена взаимосвязь между этими видами мышления. Зачастую авторы статей, найденных в Сети, взаимозаменяют понятия геометрического и пространственного мышления, которые не являются равноценными. Поиск определения в англоязычных Интернет-источниках также не дал результатов.

Дальнейший анализ отечественной и зарубежной учебной и методической литературы, научных статей лишь подтвердил предположение о размытости границ между геометрическим и пространственным мышлением. Для пространственного мышления существует множество эквивалентных определений, четкое и однозначное определение геометрического мышления не сформулировано. Тем не менее, проблема развития пространственного и геометрического мышления ставится авторами большого количества работ в области методики преподавания геометрии в России и за рубежом.

В результате более глубокого анализа современных трудов нами были выделены несколько наиболее близких нам определений геометрического мышления:

1. Геометрическое мышление – это мышление понятиями; это мышление довольно высокой степени абстракции и поэтому оно представляет собой совокупность мышления пространственного, предусматривающего оперирование пространственными образами, и мышления логического, направленного на установление соответствующих отношений между этими образами [14, С.2].

2. Под геометрическим мышлением принято понимать процесс отражения закономерностей окружающего мира, выражающих форму, величину и пространственные отношения его объектов [22].

3. Геометрическое мышление в основе своей есть мышление образное, чувственное, физиологически связанное с субдоминантным полушарием головного мозга. Только по мере развития геометрического мышления происходит возрастание логической составляющей и, соответственно, роли левого полушария [12, С.11].

4. Под «геометрическим» мышлением имеет смысл понимать мышление с помощью понятий, которое формируется на основе мышления пространственного с помощью тех или иных операций абстрагирования [11].

Анализ предложенных формулировок приводит нас к выводу о том, что наиболее популярным является подход, который рассматривает геометрическое мышление как совокупность пространственного, понятийного и логического видов мышления, поэтому целесообразно остановиться на каждой из его составляющих.

Пространственное мышление – вид наглядного мышления, обеспечивающий создание пространственных образов и оперирование ими в процессе решения практических и теоретических задач. Деятельность представления есть основной механизм пространственного мышления. Его содержанием является оперирование образами, их преобразование. В пространственном мышлении происходит постоянное перекодирование образов, т.е. переход от пространственных образов реальных объектов к их условно-графическим изображениям, от трехмерных изображений к двухмерным и обратно [10].

Логическое мышление – вид мыслительного процесса, в котором используются логические конструкции и готовые понятия [19]. В свою очередь, логика – способность правильно, т. е. именно логически, мыслить. Эта правильность основывается на четырёх законах мышления: 1) законе тождества; 2) законе противоречия; 3) законе исключённого третьего (согласно которому из двух противоположных утверждений о предмете правильным может быть одно из них, а не какое-либо третье); 4) законе достаточного основания: это значит, что любой факт или любое знание могут признаваться существующими или истинными лишь при наличии для этого достаточного основания. Логика (как наука) есть лишь учение о мышлении в понятиях, но не о познании посредством понятий; она служит повышению формальной точности сознания и объективности содержания мышления и познания [26].

Понятийное мышление – вид мышления, где используются понятия и логические конструкции. Понятийное мышление нередко называют также отвлеченным, или абстрактным мышлением, хотя это не совсем так: абстрактный (отвлеченный) характер может иметь не только понятное, но и образное мышление. Понятийное мышление в сравнении с наглядно-действенным и наглядно-образным мышлением – более поздний этап развития мышления как в истории человечества (в филогенезе), так и в процессе развития конкретного человека (в его онтогенезе). Понятийное мышление не врожденно и не развивается само по себе, оно развивается у детей в школьном возрасте (сначала в простейших формах) на основе их практического и наглядно-чувственного опыта [21].

Анализ приведенных определений геометрического мышления и трех его составляющих позволяет сформулировать вывод о том, что геометрическое мышление можно рассматривать как результат математического образования и как вид мышления, которым обладает каждый ребенок.

В настоящее время одной из задач российского образования стала дифференциация обучения, призванная раскрыть возможности и способности обучаемого. При обучении геометрии решение поставленной задачи напрямую зависит от врожденных способностей ребенка, связанных с восприятием действительности, и от самого процесса обучения геометрии, влияющего на развитие мышления. Развитие способностей ребенка определяется врожденными задатками, однако необязательно способности могут проявиться самостоятельно. По мнению Кайгородцевой Н.В., задатки являются «дремлющими» потенциальными возможностями человека, «пробуждение» которых зависит от наличия «благоприятных условий» – времени и целенаправленной деятельности [14]. Своевременное выявление задатков способствует более точному и правильному выбору пути развития, направления образования и выбора профессии в будущем. Планомерное и целенаправленное занятие определенной деятельностью также способствует развитию способностей учащегося.

Общеизвестно, что каждый индивидуум в большей или меньшей степени способен к какому-либо виду деятельности: изучение геометрии также посильно не каждому ученику. «Нет плохих учеников, есть плохие учителя», – писал Жан Жак Руссо в своей теории о воспитании. Возникает вопрос, каждый ли ребенок имеет способности к изучению геометрии? На наш взгляд, определяющим фактором является сам процесс преподавания геометрии. Для развития геометрического мышления важно развитие пространственного, логического и понятийного видов мышления, однако традиционное школьное образование тренирует в большей степени левое полушарие головного мозга, отвечающее за логику, в то время как правое, отвечающее за воображение, так необходимое в геометрии, остается без внимания.

Для математического образования важно привязывать развитие геометрического мышления к опыту учащегося. Процесс изучения геометрии помогает развивать определенные стороны ГМ, учитывая при этом задатки и способности ученика.

## 1.2. Уровни развития геометрического мышления

Развитие геометрического мышления является актуальным вопросом методики преподавания геометрии по всему миру. Для развития ГМ важно наличие определенной градации способностей, выделение уровней, на основании которых можно судить об успехах учащихся в освоении предмета. Необходимо понимать значимость выделения таких уровней, поскольку это упрощает понимание того, как можно развить геометрическое мышление посредством совершенствования навыков определенного уровня и перехода на следующий.

Наиболее известными теориями, описывающими геометрическое мышление, являются Теория стадий Пиаже и Модель ван Хиле. Рассмотрим данные теории более подробно.

**Теория стадий Пиаже**

Жан Пиаже – швейцарский философ и психолог, занимавшийся вопросами психологии развития детей, известный как создатель теории когнитивного развития.

В работах Ж. Пиаже [6], [7] описаны две основные проблемы [11]:

1. Мысленные представления учениками пространства не совпадают с восприятием того, что находится вокруг них. В процессе обучения происходит развитие нашего мысленного представления об окружающем мире через прогрессивную реорганизацию нашей предшествующей активной деятельности в окружающей среде.

2. Прогрессивная организация геометрических идей школьника следует определенному порядку, и этот порядок, основанный на опыте, существенно отличается от исторического пути развития геометрии. Формальная история геометрии берет свое начало с геометрии Евклида, и с течением времени она развивалась в проективную геометрию, и потом возникла топология. Согласно Пиаже, ребенок начинает геометрически

мыслить с топологических идей, затем эти идеи перемещаются в проективные концепции, и уже потом он приходит к евклидовой геометрии. Это может быть сформулировано как «обращение» исторического развития геометрии.

По мнению Пиаже, основными топологическими отношениями, которые ребенок способен воспринять непосредственно являются близость, разделение, порядок и вложение. Под близостью понимается относительная близость объектов или событий к другим объектам или событиям. Разделение подразумевает различие объекта и частей объекта, другими словами, понимание того, что объект состоит из некоторого набора частей. Порядок – это размещение объектов или событий в соответствии с выбранным критерием (по времени, цвету, размеру и др.). Вложение определяет местоположение одного объекта или события внутри, снаружи или между другими.

Теория Пиаже связывает развитие геометрического мышления с возрастными особенностями ребенка, опираясь на детскую психологию, и, на наш взгляд, больше ориентирована на пространственное мышление. Модель ван Хиле, о которой пойдет речь далее, описывает непосредственно стадии обучения геометрии, поэтому данная модель была взята за основу исследования.

**Модель ван Хиле**

Теория, описывающая и объясняющая природу геометрического мышления учащихся, была разработана и развивалась голландскими учеными Пьером ван Хиле и Диной ван Хиле-Гельдоф во второй половине XX века. Некоторое время теория была широко распространена во многих странах мира, в том числе в СССР, однако вскоре применение ее сошло на нет. В рамках данного исследования будет предпринята попытка выяснения адекватности данной теории в отношении современных требований к учащимся.

Согласно теории ван Хиле, геометрическое мышление можно измерить. Учеными были выделены пять уровней геометрического мышления, которые имеют строгую иерархию и способны прогнозировать успеваемость в геометрии: визуальный, аналитический, неформальная дедукция (или абстрактный), дедуктивный и строгий. Рассмотрим уровни более подробно [25].

1 уровень – визуальный – учащиеся способны называть объект, распознают фигуры только по внешнему виду, часто сопоставляя их с уже известными, свойства фигур не воспринимаются. Школьники принимают решение на основе восприятия, а не рассуждения.

2 уровень – аналитический – учащиеся рассматривают фигуры как объекты, обладающие определенным набором свойств, способны распознавать и называть свойства геометрических фигур, но они не выявляют связи между этими свойствами. При описании объектов учащиеся могут перечислять известные им свойства, однако не осознают, какие свойства являются необходимыми и (или) достаточными для описания объекта.

3 уровень – неформальная дедукция (абстрактный) – учащиеся понимают отношения между фигурами и их свойствами, могут формулировать определения фигур, а также аргументировать свои рассуждения. Устанавливают логические связи и осознают принадлежность конкретной фигуры к какому-либо классу (квадрат – это тип прямоугольника). Однако они не понимают роль и значение формальной дедукции.

4 уровень – дедуктивный – учащиеся могут проводить доказательство, понимают роль аксиом и определений, осознают важность необходимых и

достаточных условий, способны проводить доказательства самостоятельно, подобно тем, что представлены в школьных учебниках геометрии.

5 уровень – строгий – учащиеся способны сравнивать различные системы аксиом, формулировать теоремы и проводить доказательства, мышление не привязано к реальным объектам и образам, оно абстрактно.

В 1968 году ван Хиле представляет вниманию ученого сообщества свою работу “Structure and Insight” (Структура и понимание), в которой объясняет структуру разработанной теории уровней геометрического мышления. Для ван Хиле «структура выступает как данное, подчиняющееся определенным законам, и, если это строгая структура, на нее можно наложить математическую структуру» [8, С. 6]. Развитие мышления в этой теории приравнивается к пониманию структуры геометрии, причем сам процесс мышления имеет собственную структуру. Согласно ван Хиле, «структура более высокого уровня достигается в том случае, если правила, регулирующие нижние структуры были ясно изучены, и тем самым стали новой структурой» [8, С. 6]. По мере того, как учащиеся переходят на новый уровень, они развивают более глубокое понимание структуры геометрии [8] как аксиоматической системы. На более низких уровнях они узнают о структуре отношений между объектами и их свойствами, далее они приходят к пониманию геометрии как математической структуры, включающей в себя различные системы (другие виды геометрии), начинают рассматривать геометрию как совокупность.

Стоит отметить, что уровни не являются дискретными по своей природе, поэтому наслаиваются друг на друга. Например, второй уровень геометрического мышления неразрывно связан со свойствами объектов первого уровня, который выступает в роли базиса. Затем отношения между свойствами составляют основу третьего уровня и так далее. Этим объясняется иерархичность построения уровней. Позже в исследованиях Клемента и Батиста [1, С. 429] был предложен еще один уровень – уровень предварительного распознавания или базовый уровень, находясь на котором дети не могут распознавать многие формы, объекты должны быть конкретными, видимыми и осязаемыми.

В теории ван Хиле выделяется два ключевых аспекта: мышление и язык. Первое развивается при переходе с одного уровня на другой, но для этого сначала необходимо освоить язык, которым обладает каждый новый уровень. Исследования Фрикхольма [2] и Узискина [9] доказывают, что в рамках школьной геометрии учащиеся вообще не достигают уровней 4 и 5 и лишь немногие осваивают 3 уровень [4, С. 20]. Основная проблема непонимания учащимися геометрии, по мнению ван Хиле, заключается в том, что учитель и ученики находятся на разных уровнях. Согласно Дине ван Хиле-Гельдоф, «формирование языковых структур, принадлежащих субъекту, следует за формированием понятий» [8, С. 174]. Это означает, что одно и то же слово может иметь различные значения на разных уровнях. Например, под словом «прямоугольник» учащиеся, находящиеся на 1 уровне, могут понимать обозначение какой-либо формы (формы стола, двери и др.), в то время как учитель подразумевал под этим словом набор свойств этой фигуры и ее отношение к другим фигурам. Из-за отсутствия взаимопонимания усложняется процесс преподавания геометрии, поэтому для учителей важно знать уровни геометрического мышления учащихся и при обучении предмету возвращаться на тот уровень, на котором находятся ученики.

Пьер и Дина ван Хиле считают, что развитие геометрического мышления может быть ускорено с помощью специальных инструкций (алгоритмов). В исследованиях Фрикхольма [2] сделан вывод о том, что ни гендерный признак, ни класс, ни отметки не имеют прямого отношения к уровню ван Хиле [4, С. 21]. Кроме того, Фьюиз [3] обнаружил, что уровень геометрического мышления больше зависит от самой инструкции к заданию, а не от возраста. Это важный вывод, доказывающий эффективность применения инструкций. Эксперимент, проведенный с семиклассниками в Бразилии, показал, что экспериментальная группа превзошла контрольную в вопросах, требующих аргументации и обоснования ответа [5], что подтверждает эффективность обучения в соответствии с теорией уровней ван Хиле. Нассер подчеркнул необходимость преодоления разрыва между тактильными ощущениями в преподавании геометрии в начальной школе и формальными вычислениями в средней и старшей школе [4, С. 21].

Учителю необходимо организовать деятельность учащихся таким образом, чтобы исследование геометрических объектов и их свойств предшествовало логическому мышлению. Обсуждение идей, попытка убедить остальных в правильности мышления поможет учащимся развить язык, необходимый для освоения уровней. Использование программного продукта GeoGebra в качестве инструмента обучения может помочь обучающимся укрепить знания на одном уровне и перейти к следующему, а также предоставит студентам среду для проведения исследования.

## 1.3. Компьютерный эксперимент в обучении математике

Повышение качества математического образования страны требует учета современных реалий: нынешнее общество немыслимо без компьютерных технологий. Эффективность работы учителя напрямую зависит от установления контакта с учащимися. В условиях постоянного развития науки и техники учителю необходимо брать на вооружение возможности современных достижений в области информационных технологий. Выработка эффективных приемов использования ИКТ в обучении математике является актуальным вопросом методики математики.

Эксперимент на протяжении всей истории человечества играет важную роль в развитии науки. Применение экспериментальной деятельности в обучении развивает творческий потенциал учеников. По мнению В.В. Налимова [18], в любом эксперименте можно выделить следующие этапы:

– подготовительный этап, ориентированный на теоретическое обоснование эксперимента, формулировку гипотезы, его планирование, создание модели, выбор условий и средств исследования;

– этап сбора экспериментальных данных, направленный на работу с моделью, выполнение соответствующих технологических операций, многократный повтор измерений и строгий учёт факторов, влияющих на исследуемый объект;

– этап обработки результатов, содержащий анализ и интерпретацию результатов эксперимента, сопоставление их с гипотезой, установление причинно-следственных связей между заданными условиями и характеристиками исследуемого объекта.

В математике понятие эксперимента используется крайне редко, поскольку все утверждения, теоремы и формулы выводятся путем логических умозаключений из заданных понятий и аксиом. Геометрия как раздел математики, напротив, имеет большой экспериментальный потенциал. Задача учителя – проверить факты геометрии экспериментально, применяя компьютер и ИКТ при изучении материала. «Теоретически обосновано и экспериментально подтверждено положение о том, что факты, открытые учащимися самостоятельно, усваиваются ими значительно лучше, чем преподнесенные учителем в готовом виде. Многолетний опыт применения эксперимента как эффективного метода обучения дисциплинам естественнонаучного цикла таким, например, как химия и физика, является практическим подтверждением этого тезиса» [16].

Выделяются несколько видов эксперимента как эмпирического метода познания:

– физический эксперимент как способ познания природы объекта, события или явления;

– компьютерный эксперимент – эксперимент над математической моделью объекта исследования на компьютере;

а так же выделяют психологический, мысленный, критический и другие виды эксперимента.

Наибольший интерес для учителей и преподавателей математики представляет компьютерный эксперимент, рассмотрим его более подробно.

Под компьютерным экспериментом понимается эксперимент, основанный на исследовании математической модели объекта средствами ЭВМ. Компьютерный эксперимент в геометрии в настоящее время является эффективным способом формирования мотивации к обучению, повышения качества знаний по предмету и позволяет осуществить дифференцированный подход с учетом индивидуальных возможностей учащихся. Для эффективной реализации данного подхода важно использовать компьютер не только как средство для вычислений, но и как объект проведения исследований. Применение компьютерных динамических программ открывает большие возможности познания геометрии для каждого ученика, позволяет самостоятельно делать «открытие», а не только пассивно наблюдать за тем, как ловко решает задачи учитель у доски.

Компьютерный эксперимент не исключает проведение стандартного эксперимента на уроках геометрии, он по-своему интересен тем, что геометрические модели можно «потрогать». Однако проведение такого эксперимента предъявляет достаточно много требований к учащимся, к учителю и к оснащенности кабинета. Недостатками данного метода могут послужить ограниченность времени урока для рассмотрения нескольких конфигураций фигур (например, различных видов треугольников при изучении теоремы о сумме углов треугольника), погрешности в вырезании и измерении углов и вычислениях. Компьютерные программы динамической геометрии позволяют устранить эти недостатки. По мнению Майера В.Р., программные средства должны удовлетворять следующим требованиям [16]:

– динамизма, позволяющего представить геометрическую модель в виде динамического чертежа, который позволяет вносить многократные изменения при условии сохранения зависимости элементов;

– визуальной полноты, позволяющей сделать геометрическую модель максимально полной: добавить вспомогательные элементы, которые могут быть необходимы для установления гипотетических зависимостей;

– компьютерной анимации, позволяющей создать анимацию любого элемента компьютерной модели;

– свободы эксперимента, заключающейся в отсутствии навязывания той или иной идеологии эксперимента для исследователя.

Компьютерный эксперимент на уроках математики может иметь как положительные, так негативные (результат неправильной организации эксперимента) последствия (Таблица 1) [19]. В частности, широкое распространение получила проблема экспериментально-теоретического разрыва: учащиеся считают, что полученный экспериментальным путем факт убедителен и не требует теоретического обоснования (доказательства), учителя полагают, что от обучения доказательству можно отказаться с пользу экспериментальной деятельности.

Таблица 1. Основные эффекты и риски применения методологии и средств экспериментальной математики в массовой школе

| | *Плюсы* | *Минусы* |
|---|---|---|
| 1 | Обогащается стиль математического мышления учащихся посредством эксперимента. | Деформируется стиль математического мышления вследствие понижения потребности к поиску теоретической информации. |
| 2 | Расширяется математический кругозор учащихся. | Непонимание важности дедуктивного обоснования выдвинутых гипотез и сформулированных утверждений «открытых» в результате визуализации. |
| 3 | Обеспечение большей наглядности в процессе изучения математики. | Излишнее использование визуализаций способствует торможению развития пространственного мышления. |
| 4 | Доступность проведения эксперимента. | Необходимо учитывать уровень развития геометрического мышления учащихся. |

На основе анализа российской и зарубежной литературы [2], [4], [16], [19] мы пришли к выводу о том, что в мире широко используются компьютерные программы динамической геометрии, и наиболее популярными являются GeoGebra (Австрия), Geometer's Sketchpad (США) и Математический конструктор (Россия). В частности, широкое использование в мире получила программа GeoGebra, которая имеет разнообразный набор инструментов, проста в применении, является бесплатным программным обеспечением, открывает большие возможности при обучении математике как в вузе, так и в школе [25]. Программа GeoGebra стала популярна во всем мире благодаря своей многофункциональности: в одном пакете сочетаются алгебра, геометрия, статистика, исчисление и другие разделы математики. Данное программное обеспечение легко в применении, поэтому школьники и студенты могут пользоваться им самостоятельно практически на любых устройствах.

## 1.4. Технология развития геометрического мышления с помощью компьютерного эксперимента

В условиях совершенствования российской системы образования происходит внедрение новых образовательных технологий в процесс обучения. Одним из критериев современной системы выступает наличие деятельностного подхода, в соответствии с которым изучение материала должно осуществляться посредством собственной деятельности учащегося.

С целью повышения мотивации к изучению дисциплины «Методика решения задач по элементарной математике: Планиметрия» на занятиях со студентами второго курса Педагогического отделения Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ активно применяется компьютерный эксперимент в соответствии с теорией уровней геометрического мышления ван Хиле. Данный подход позволяет улучшить понимание теоретических знаний по предмету и осуществить их практическое применение при решении задач при помощи динамических чертежей, стимулировать повышение уровня ГМ. Для работы со студентами нами была выбрана программа GeoGebra, поскольку она является бесплатной: доступна для скачивания студентами в условиях внеаудиторных занятий, а также имеет свой канал на YouTube, где можно найти большое количество видео-уроков по работе с программой.

Занятия со студентами организуются таким образом, что посредством компьютерного эксперимента в программе GeoGebra студенты проходят через несколько этапов, соответствующих первым четырем уровням ГМ ван Хиле:

– на первом этапе (*визуальный уровень*) работы с задачей осуществляется построение динамического чертежа по инструкции преподавателя;

– на втором этапе (*аналитический уровень*) осуществляется анализ построенного чертежа, перед студентами ставится вопрос о том, какие дополнительные построения или обозначения необходимо ввести для дальнейшего решения задачи, предлагается ввести измерения углов, отрезков для выявления закономерностей;

– на третьем этапе (*неформальная дедукция*) происходит наблюдение за чертежом в условиях изменения положения объектов, выявление инвариантов, закономерностей, выдвижение гипотез, их совместное обсуждение и проверка;

– на четвертом этапе (*формальная дедукция*) студенты при помощи преподавателя осуществляют доказательство сформулированных теорем, выявляют дополнительные свойства и проводят обобщения.

Организованная таким образом работа исключает возможность возникновения экспериментально-теоретического разрыва, поскольку сочетает в себе компьютерный эксперимент и теоретическое доказательство выдвинутых утверждений.

Эффективность применения данного подхода в обучении студентов подтверждается экспериментальными данными, приведенными в п. 2.3 настоящего исследования.

# ГЛАВА 2. ОПЫТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РАБОТА ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ ПЛАНИМЕТРИИ

Глава посвящена практической части исследования и содержит описание и интерпретацию результатов эксперимента по определению уровня геометрического мышления студентов по методике ван Хиле в соответствии с предложенными формулировками определений ГМ. Подробно изложена методика организации занятий с применением программы GeoGebra при обучении планиметрии, дано обоснование эффективности данного подхода, которое подтверждается результатами контрольных тестов.

## 2.1. Определение уровня геометрического мышления студентов

В соответствии с теорией уровней геометрического мышления ван Хиле директором Чикагского математического проекта, педагогом Залманом Узискиным [9] был разработан тест по определению уровня ГМ школьников и студентов. Анализ этого теста и современных формулировок определения геометрического мышления, приведенных в п. 1.1 первой главы исследования, приводит нас к выводу, что наиболее популярным является подход, который рассматривает геометрическое мышление как совокупность пространственного, понятийного и логического мышлений. На основании этого возникает вопрос: возможно ли по тестам ван Хиле провести оценку уровня развития геометрического мышления в соответствии с приведенными определениями геометрического мышления? Для ответа на поставленный вопрос была организована экспериментальная работа по выявлению соответствия уровня развития геометрического мышления уровням развития пространственного, логического и понятийного видов мышления студентов педагогического отделения ИММ им. Н.И. Лобачевского КФУ.

Экспериментальная работа состояла из тестирования студентов второго курса по тесту Залмана Узискина, соответствующего теории ван Хиле (Приложение 1), и трем выбранным тестам:

1. «Сложные аналогии» (Приложение 2). Методика используется для выяснения того, насколько испытуемому доступно понимание сложных логических отношений и выделение абстрактных связей [13]. Испытуемым предлагается 20 пар слов, находящихся между собой в логической связи. Имеется образец из 6 пар, каждая из которых имеет связь, отличную от остальных. Задача состоит в том, чтобы выявить все типы связи между предложенными шестью парами и напротив каждой из 20 пар поставить соответствующую цифру от 1 до 6. Оценка результатов проводится в зависимости от количества ошибочных ответов.

2. Субтест 8 «Пространственное воображение» (ПВ) теста Амтхауера (Приложение 3). Субтест диагностирует способность человека оперировать пространственными представлениями. Испытуемому необходимо определить, какой из приведенных в образце кубиков предъявляется в каждом конкретном задании в перевернутом или повернутом положении. Материалом задания служит объемный рисунок кубика. Задание предусматривает мысленный поворот кубика и сопоставление его с другими кубиками. При решении задач исходный образ мысленно видоизменяется испытуемым. Обоснованно считается, что субтест ПВ предъявляет более высокие требования к развитию пространственного мышления испытуемого [23].

3. Тест на выполнение логических операций над геометрическими объектами (ЛОГО) (Приложение 4). Методика предназначена для диагностики умственного развития учащихся юношеского возраста и позволяет выявлять индивидуально-психологические различия в овладении

логическими операциями с геометрическими объектами. Он содержит три набора заданий (субтестов) на выполнение «аналогии», «классификации», «закономерности построения» геометрических объектов, в качестве которых выступают углы, треугольники, четырехугольники, неоднородные «комбинированные фигуры». Каждый субтест состоит из 12 вариантов заданий, отличающихся усложнением материала [27, С. 275-303].

Структуру теста по определению уровня геометрического мышления рассмотрим более подробно. С целью проведения эксперимента тест был предварительно переведен на русский язык. Тестирование включает в себя 25 вопросов с выбором ответа, которые можно условно разделить на пять частей (по пять вопросов), каждая из которых соответствует уровням мышления от 1 до 5. Результаты теста интерпретируются следующим образом, если верны ответы хотя бы на 3 из 5 вопросов:

- из первой группы (с 1 по 5 вопросы), то засчитывается 1 балл;
- из первой группы (с 6 по 10 вопросы), то засчитывается 2 балла;
- из третьей группы (с 11 по 15 вопросы), то засчитывается 4 балла;
- из четвертой группы (с 16 по 20 вопросы), то засчитывается 8 баллов;
- из пятой группы (с 21 по 25 вопросы), то засчитывается 16 баллов.

Если правильных ответов в рамках одной группы от 0 до 2, уровень мышления не считается достигнутым. Согласно инструкции к тесту, соответствие уровней и сумм полученных баллов выглядит так:

1 уровень – от 0 до 16 баллов;

2 уровень – от 1 до 17 баллов;

3 уровень – от 3 до 19 баллов;

4 уровень – от 7 до 23 баллов,

5 уровень – от 15 до 31 баллов.

Поскольку уровни геометрического мышления развиваются преемственно, «наслаиваются» друг на друга, то тест определяет, сколько уровней геометрического мышления развито у учащегося. Авторами теста отмечено, что если студент правильно ответил на вопросы 1, 2 и 5 группы, которые соответствуют уровням 1, 2 и 5, то сумма баллов 1 + 2 + 16 = 19 соответствует не последнему, пятому уровню, а только уровню 3. Уровни 4 и 5 считаются не освоенными.

В тестировании приняли участие 32 студента 2 курса Педагогического направления Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ.

На основании полученных экспериментальных данных были составлены таблицы (Приложения 5-8) и диаграммы. На оси абсцисс цифры от 1 до 32 соответствуют порядковому номеру каждого студента в алфавитном списке, на оси ординат – процент правильных ответов по итогам тестирования. Диаграмма 1 отражает результаты по трем тестам.

Диаграмма 1. Результаты по трем тестам

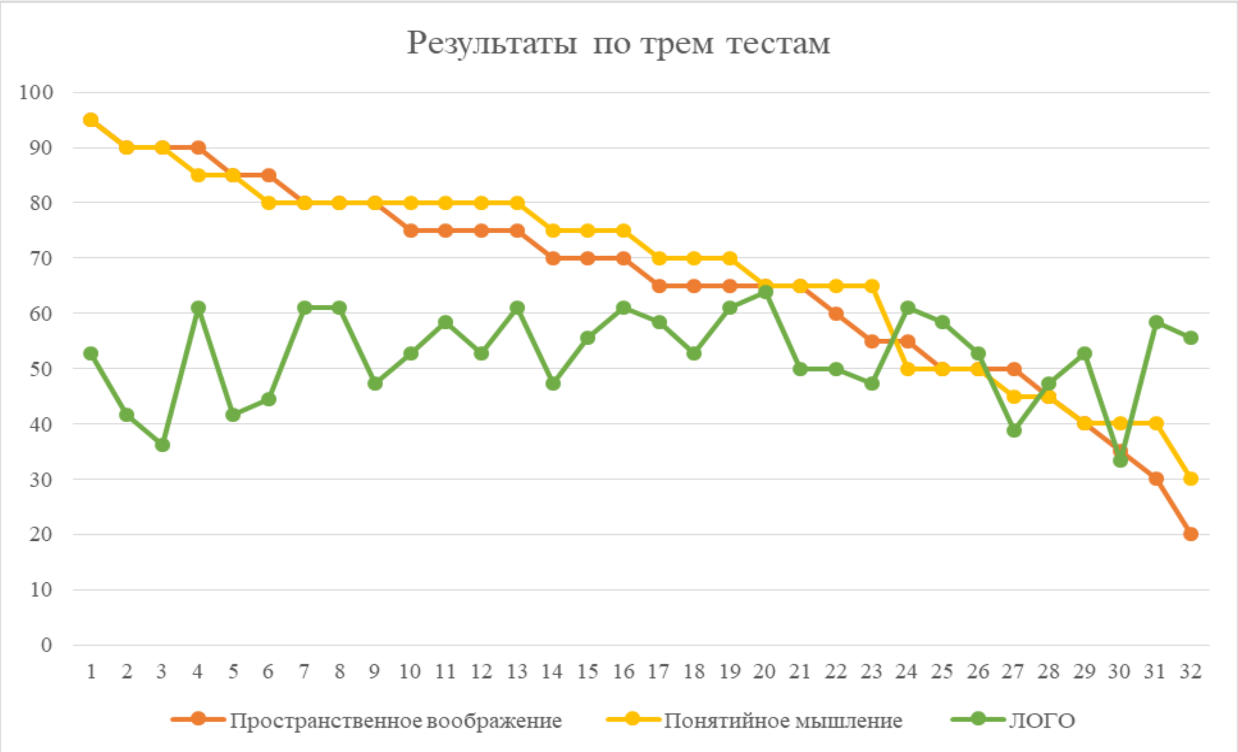
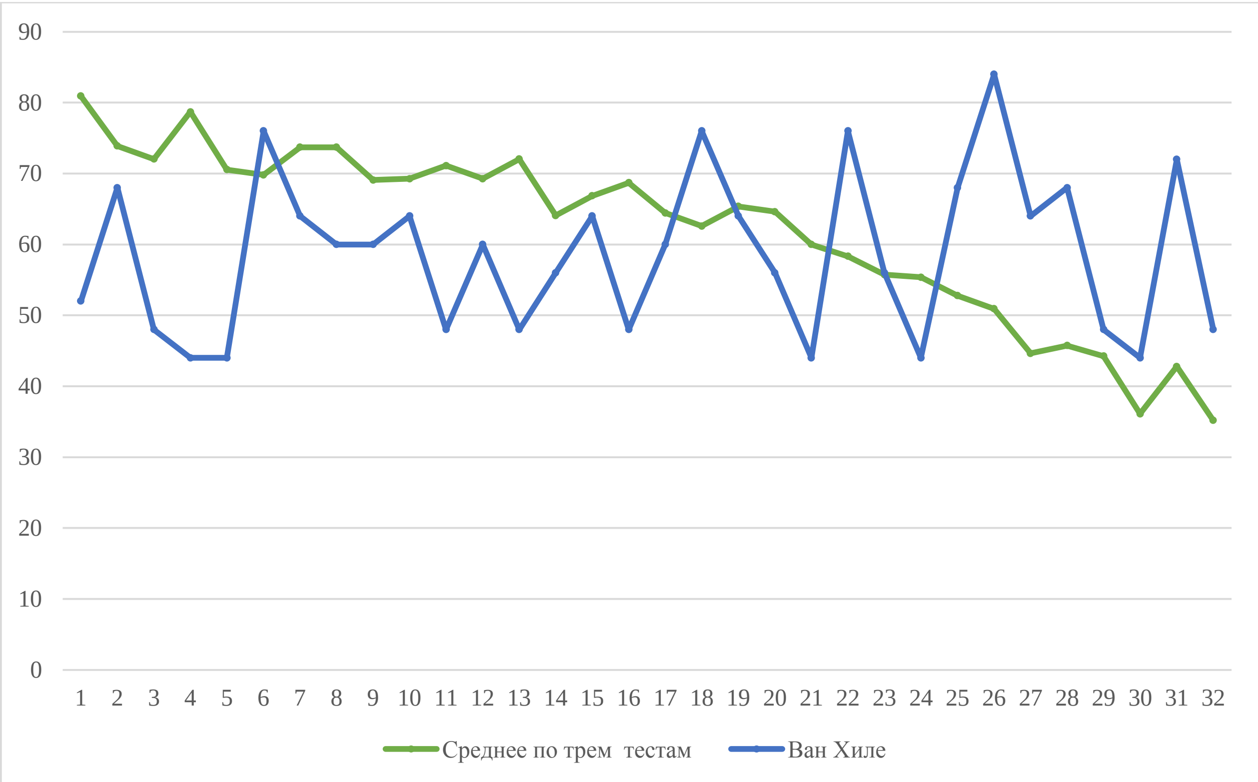


Диаграмма 2, отражает уровень развития геометрического мышления студентов в соответствии с теорией ван Хиле, а также средний балл по трем выбранным тестам: синим цветом выделена ломаная, соответствующая тесту по теории ван Хиле (max – 84, min – 44), зеленым цветом – средняя величина по трем выбранным тестам (max – 81, min – 35).

Диаграмма 2. Результаты 4 тестирований (среднее по трем тестам и тест ван Хиле)

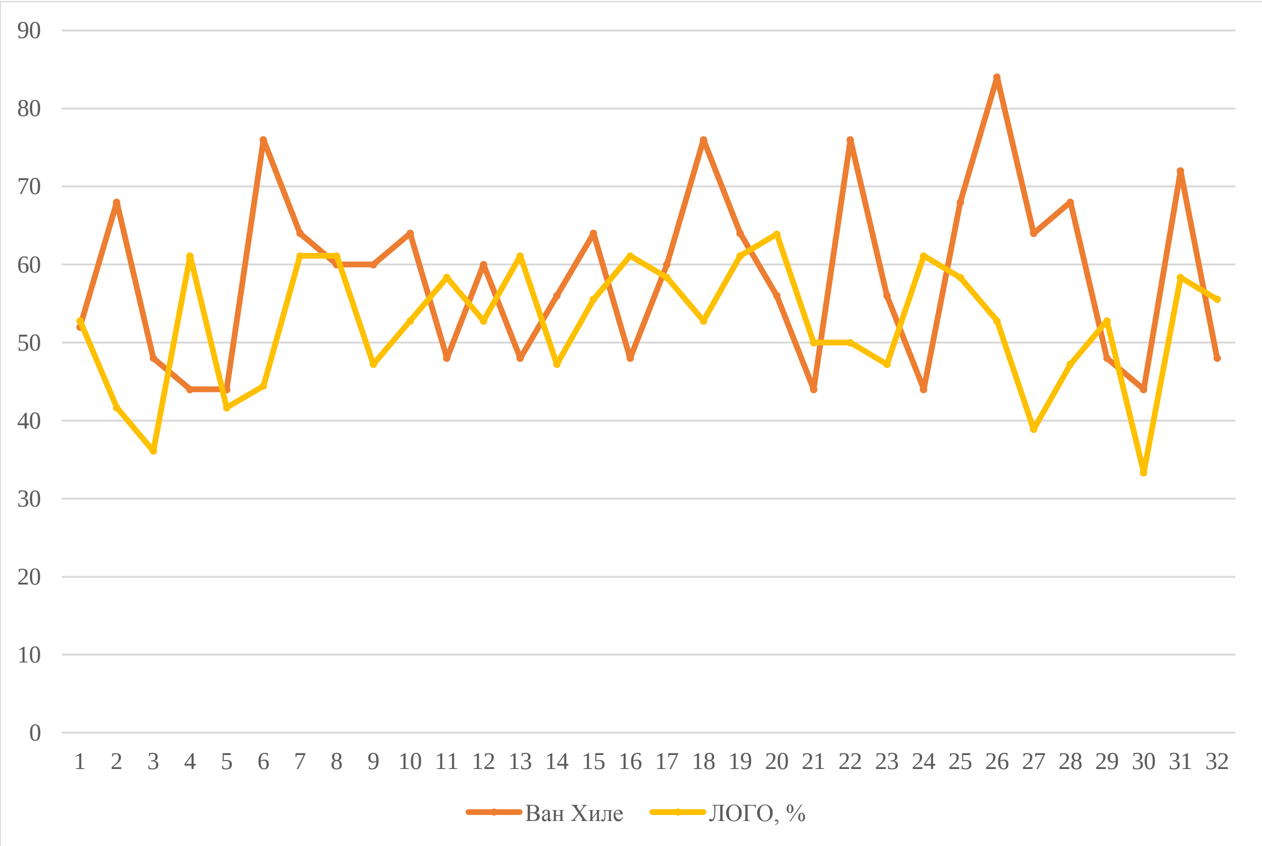



На диаграмме видно, что только у девяти студентов из 32 уровень развития геометрического мышления почти совпадает с уровнем развития понятийного, пространственного и логического видов мышления.

Разрозненность результатов у других студентов может свидетельствовать о преобладании того или иного вида мышления. Анализ тестов и полученных результатов позволяет сформулировать вывод о том, что наиболее высокие результаты студенты получили по итогам выполнения теста на измерение уровня понятийного мышления (32% неправильных ответов), поскольку это единственный тест, в котором отсутствовала математическая составляющая.

Хуже всего студенты справились с тестом на выполнение логических операций над геометрическими объектами (47% неправильных ответов), который имеет наименьшую погрешность в результатах в сравнении с тестом теории ван Хиле (41% неправильных ответов) (см. Диаграмма 3).

Диаграмма 3. Сравнение результатов тестов теории ван Хиле и ЛОГО




При выполнении теста «Пространственное воображение» (33% неправильных ответов) 86% ошибок студенты допустили, отвечая на вторую половину вопросов (с 11 по 20), которые подразумевали не одну операцию поворота или переворота, а их одновременное выполнение.

Подробный анализ данных, полученных в результате тестирований дает возможность определить уровень развития каждой из трех составляющих геометрического мышления у отдельного студента и выявить, какой тип мышления преобладает в заданиях теста по теории ван Хиле, в которых были допущены ошибки. Согласно инструкции к тесту, каждый уровень считается достигнутым, если испытуемый верно ответил на 3 из 5 вопросов каждой из пяти групп, соответствующих пяти уровням ГМ. Отсутствие ошибок в рамках одной группы вопросов позволяет сформулировать вывод об освоении уровня, соответствующего номеру группы вопросов, наличие одной или двух ошибок свидетельствует о достижении уровня, но не полном его освоении. Понимание трудностей, которые испытывают студенты при выполнении конкретных заданий, облегчает процесс преподавания, направленный на повышение уровня ГМ каждого студента.

Отклонение среднего по трем тестам от результатов теста на определение уровня ГМ может быть следствием того, что тест на выявление уровня понятийного мышления не является математическим. Для более качественной оценки соответствия уровня ГМ логическому, пространственному и понятийному видам мышления необходимо разработать тест, определяющий уровень математического понятийного мышления.

## 2.2. Методика организации опытно-экспериментальной работы по использованию программы GeoGebra в обучении студентов

Курс «Элементарная математика» является одним из основных предметов, которыми должны овладеть студенты Педагогического отделения Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ. Данный курс изучается студентами в течение четырех семестров и включает в себя следующие разделы: арифметика, решение уравнений и неравенств с параметром, планиметрия и стереометрия [25]. Раздел «Планиметрия» студенты изучают, согласно Учебному плану КФУ [24], в течение одного семестра в количестве 36 аудиторных часов (2 академических часа в неделю), которые отводятся на лабораторную работу, и 27 часов самостоятельного изучения. Такого количества часов, очевидно, недостаточно для обучения студентов курсу элементарной планиметрии, который необходим им как будущим учителям.

Рассмотрим более подробно содержание курса «Методика решения задач элементарной математики: Планиметрия». Его автором является Фалилеева М.В., доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, кандидат педагогических наук. В рамках данной дисциплины изучаются следующие темы:

1) Аксиоматическое построение геометрии;
2) Отношение, подобие;
3) Треугольник;
4) Четырехугольник;
5) Окружность;
6) Вписанные и описанные многоугольники;
7) Геометрические преобразования на плоскости;
8) Геометрические построения на плоскости;
9) Решение задач несколькими методами.

В рамках каждой темы студентам предлагаются интерактивные лекции и тренировочные тесты к этим лекциям, а также список рекомендуемой литературы (см. Рис. 1). После аудиторных занятий студенты проходят контрольное тестирование для проверки усвоения материала.

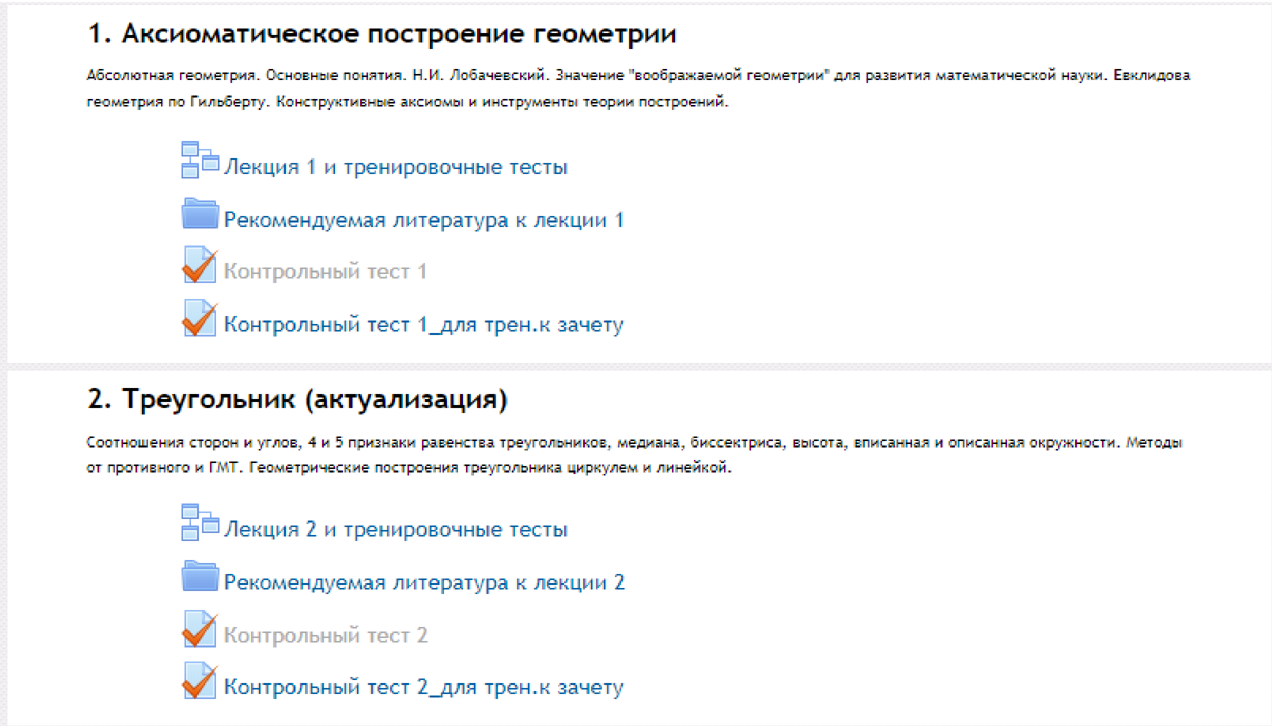



Рис. 1. Пример тем курса. Скриншот с сайта ДО КФУ / Режим доступа: https://edu.kpfu.ru/course/view.php?id=792

Помимо перечисленного Дистанционный курс предоставляет возможность просмотра анимаций динамических чертежей, созданных в программе GeoGebra, задавать вопросы преподавателю, участвовать в обсуждениях на форуме.

С целью повышения качества подготовки студентов 2 курса в условиях малого количества часов в основу занятий по курсу планиметрии была положена теория уровней геометрического мышления ван Хиле с применением программы GeoGebra. Занятия проводятся автором курса и научным руководителем данного исследования. До начала занятий студенты предварительно должны ознакомиться с лекциями и пройти тестирование в рамках дистанционного курса [17]. Непосредственно на занятии студентам предлагается рассмотреть решение задач и доказательство теорем с помощью программы GeoGebra (каждый студент выполняет построения на ПК). Отличие данной методики от традиционного способа изложения материала путем прочтения лекций и последующего решения задач состоит в том, что студенты являются активными участниками процесса познания, преподаватель не дает знания в чистом виде, а играет роль координатора, что является необходимым условием соответствия ФГОС. Использование программы GeoGebra позволяет преподнести сложный материал максимально понятным способом, повысить эффективность усвоения материала, поскольку в рамках каждого занятия студенты проводят компьютерный эксперимент, а не выступают в качестве пассивных наблюдателей. В результате такой работы происходит закрепление знаний текущего уровня геометрического мышления студентов и переход на новый. В соответствии с теорией ван Хиле занятия со студентами организуются таким образом, что осуществляется развитие первых четырех уровней геометрического мышления.

В рамках исследования автором настоящей работы Дюпиной А.Э. осуществлялось посещение пар, а также было проведено занятие со студентами по теме «Вписанные и описанные многоугольники: треугольники и окружности». С лекционным материалом по данной теме студенты ознакомились самостоятельно до занятия и прошли проверочный тест на сайте Дистанционного образования КФУ [17].

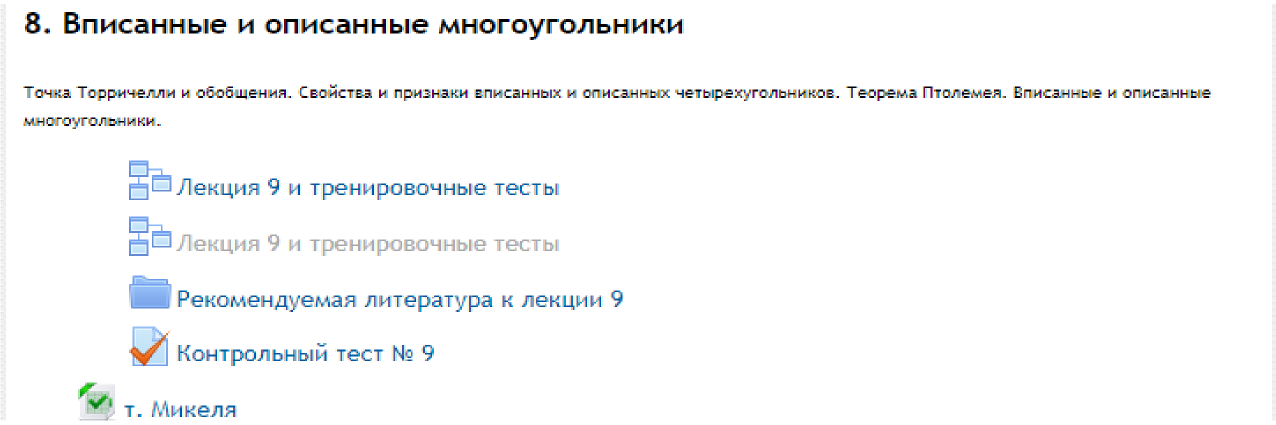



Рис. 2. Пример темы курса. Скриншот с сайта ДО КФУ / Режим доступа: https://edu.kpfu.ru/course/view.php?id=792

Лекционный материал, связанный с окружностями и треугольниками, включает в себя теорему об окружностях Торичелли, а также обобщение теоремы для неравностороннего треугольника, теорему Наполеона и теорему о точке Микеля. Некоторые доказательства теорем и свойств представлены в лекции, наиболее простые теоремы студентам предлагается доказать самостоятельно.

Непосредственно на занятии были рассмотрены следующие темы: прямая Симпсона, окружности Сальмона и точка Микеля. Целью занятия было исследование взаимосвязи перечисленных объектов с помощью программы GeoGebra.

В соответствии с теорией уровней геометрического мышления ван Хиле каждая задача подразумевала прохождение через первые четыре уровня:

1 уровень. Визуальный – построение чертежа.

2 уровень. Аналитический – анализ чертежа, дополнительные построения.

3 уровень. Неформальная дедукция – исследование динамического чертежа, формулировка гипотез;

4 уровень. Формальная дедукция – проверка гипотез и доказательство теорем, осуществление обобщений.

Рассмотрим методику решения задач с помощью программы GeoGebra. Данная методика подразумевает использование специального алгоритма действий, которому следуют учащиеся. Формулирование теоремы осуществляется студентами в процессе работы с динамическим чертежом.

*Теорема Симпсона.* Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой (прямой Симпсона).

Работа с каждой задачей включает в себя цикл вопросов, соответствующих четырем уровням ван Хиле. Для «открытия» теоремы Симпсона вопросы и задания для работы в программе GeoGebra выглядели следующим образом:

1. Визуальный уровень:

– построить произвольный треугольник;

– описать окружность вокруг построенного треугольника (с помощью инструмента для построения окружности по трем точкам);

– выбрать произвольную точку на окружности;

– опустить перпендикуляры из выбранной точки на стороны треугольника или их продолжения (с помощью инструмента перпендикулярная прямая).

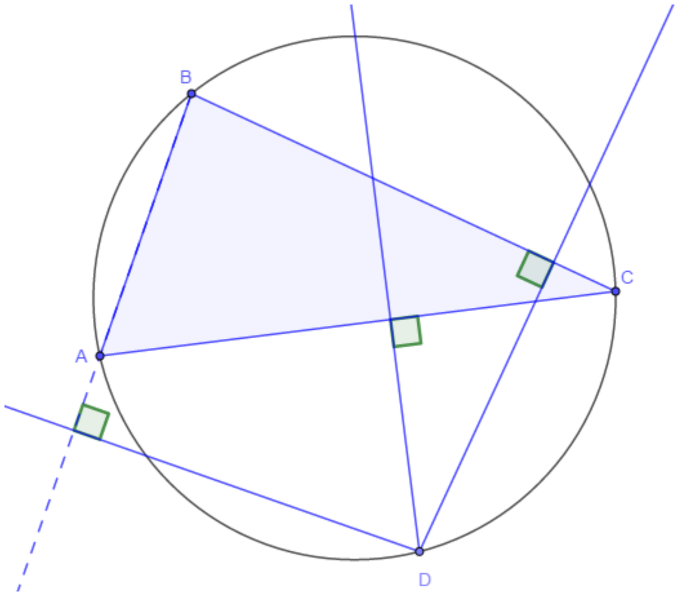


Рис. 3

В результате заданного алгоритма у каждого студента должен получиться чертеж, аналогичный представленному на Рис. 3.

2. Аналитический уровень:

– проанализировать чертеж, выяснить, какие дополнительные построения или обозначения можно ввести;

– отменить точки пересечения перпендикуляров со сторонами (или их продолжениями) треугольника (Рис. 4);

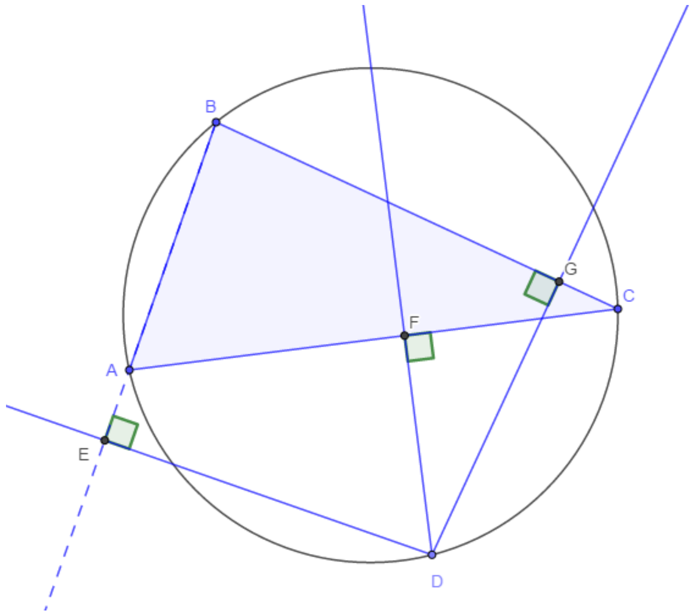



Рис. 4

3. Неформальная дедукция:

– изменяя положение точки на окружности и вершин треугольника, понаблюдать за изменениями чертежа;

– рассмотреть различные виды треугольников: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный, равнобедренный, равносторонний;

– выяснить, какие объекты взаимосвязаны и каким образом;

– осуществить дополнительное построение: провести прямую через основания перпендикуляров (Рис. 5.);

– сформулировать гипотезу о взаимном расположении точек – оснований перпендикуляров)

4. Формальная дедукция:

– осуществление проверки выдвинутой гипотезы (сформулированной теоремы) и ее доказательство.

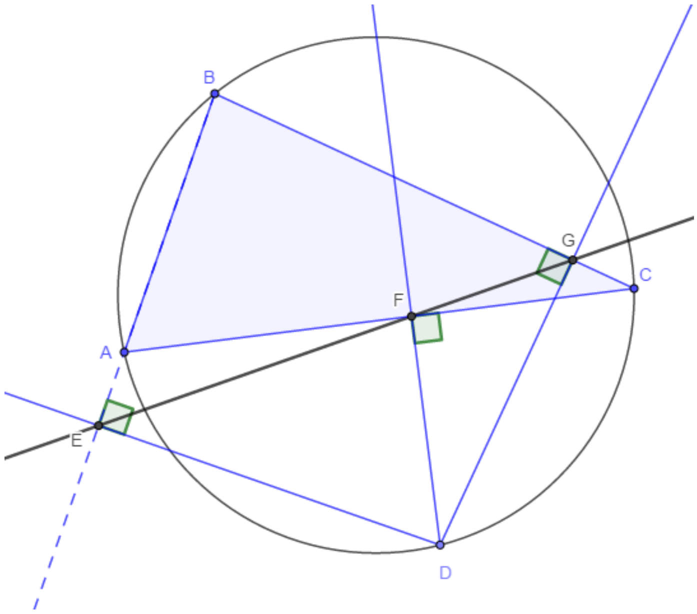



Рис. 5

На заключительном этапе работы с задачей осуществляется закрепление материала путем устного повторения алгоритма проделанных действий, актуализации понятий и свойств объектов, присутствующих на чертеже, выявление взаимосвязей с ранее изученными фактами.

Далее студентам предлагается работа с теоремой Сальмона.

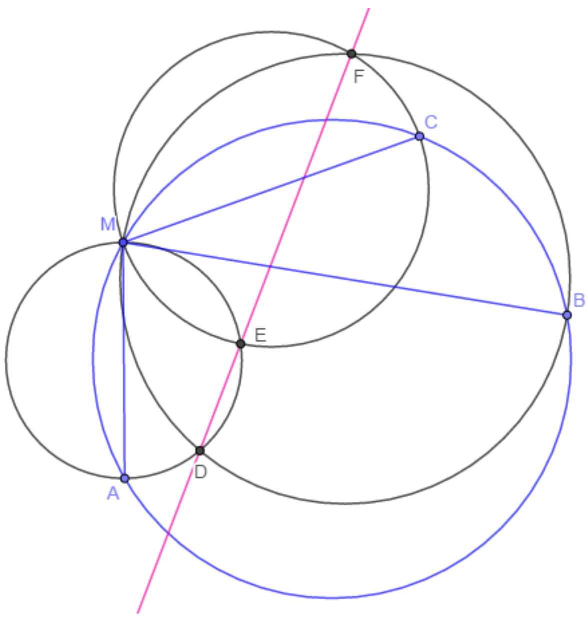



Рис. 6

*Теорема Сальмона.* Если через точку, взятую на окружности, проведены три произвольные хорды и на каждой из них, как на диаметре, построена окружность, то эти окружности попарно пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой (Рис. 6).

Алгоритм работы с задачей на формулирование и доказательство теоремы осуществляется согласно описанным выше четырем уровням мышления и заключается в построении динамического чертежа по инструкции преподавателя, наблюдении за положением объектов и исследовании их взаимосвязи, выявлении инвариантов чертежа с последующей формулировкой гипотезы (теоремы) и ее доказательство.

Последним этапом является выявление дополнительных свойств объектов и исследование взаимосвязи с прямой Симпсона, а именно, установление факта о том, что точки A, B и C (см. Рис. 7) являются вершинами треугольника, к сторонам (или продолжениям) которого из т. M, взятой на описанной вокруг ΔABC окружности, можно опустить перпендикуляры MD, ME, MF. Таким образом, попарные точки пересечения окружностей Сальмона являются точками, лежащими на прямой Симпсона.

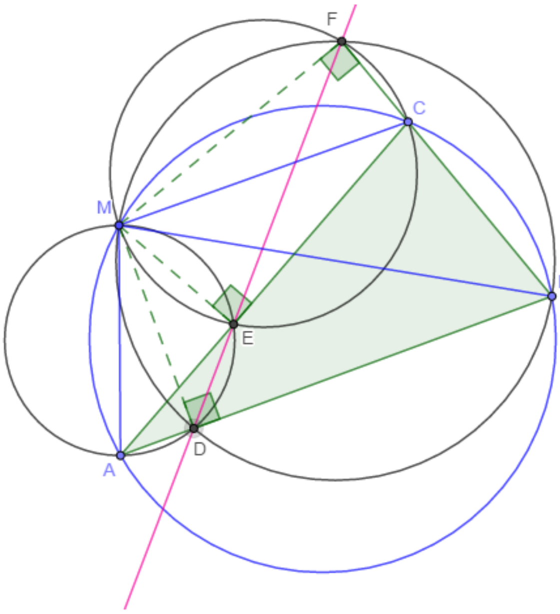



Рис. 7

Следующим этапом занятия является исследование точки Микеля.

*Теорема о точке Микеля*. Окружности, описанные около четырех треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения (не проходящими через одну точку), пересекаются в одной точке – точке Микеля (Рис. 8).

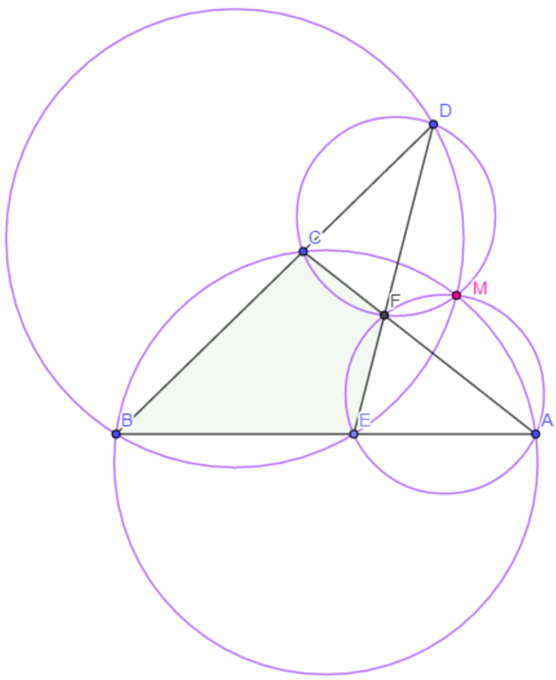



Рис. 8

Теорема до начала построения чертежа также не формулируется.

Работа осуществляется в 4 этапа в соответствии с четырьмя уровнями ван Хиле. После построения и исследования чертежа проводится формулирование и доказательство теоремы о точке Микеля. Итогом занятия становится исследование взаимосвязи окружностей Сальмона и точки Микеля. Для этого в программе GeoGebra строится динамический чертеж, объединяющий в себе две теоремы (Рис. 9). На основании этого подводится итог, формулируются выводы.

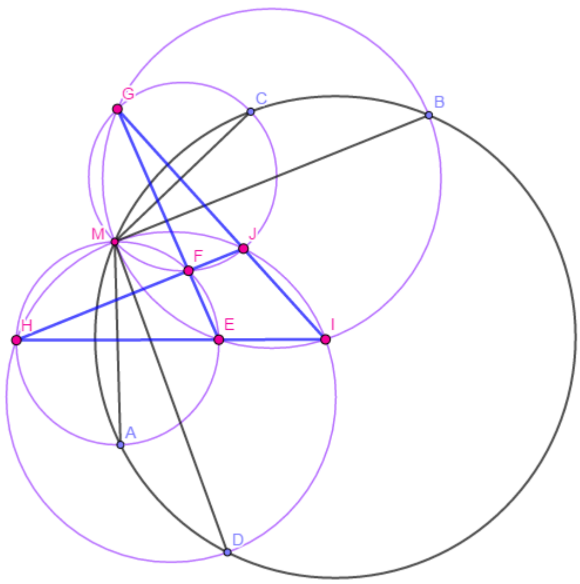


Рис. 9

Организованные таким образом занятия позволяют пройти через первые четыре уровня геометрического мышления, осуществляя дифференцированный деятельностный подход. Во время проведения компьютерного эксперимента преподаватель оказывается на том же уровне ГМ, который рассматривается в текущий момент, что облегчает установление контакта со студентами. В результате планомерного подхода при разборе задач в рамках заданной темы достигается глубокое понимание материала и, как следствие, повышается мотивация к учебной деятельности. Кроме того, у студентов улучшаются навыки формулирования гипотез и теорем, развивается правильная математическая речь, что очень важно для будущих учителей.

## 2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы

Организованная опытно-экспериментальная работа по использованию программы GeoGebra в обучении студентов показала повышение качества знаний по предмету. На занятиях студенты стали чаще проявлять активность, научились проводить компьютерный эксперимент, наблюдать за математической моделью и формулировать гипотезы, проводить доказательство, улучшилась математическая речь.

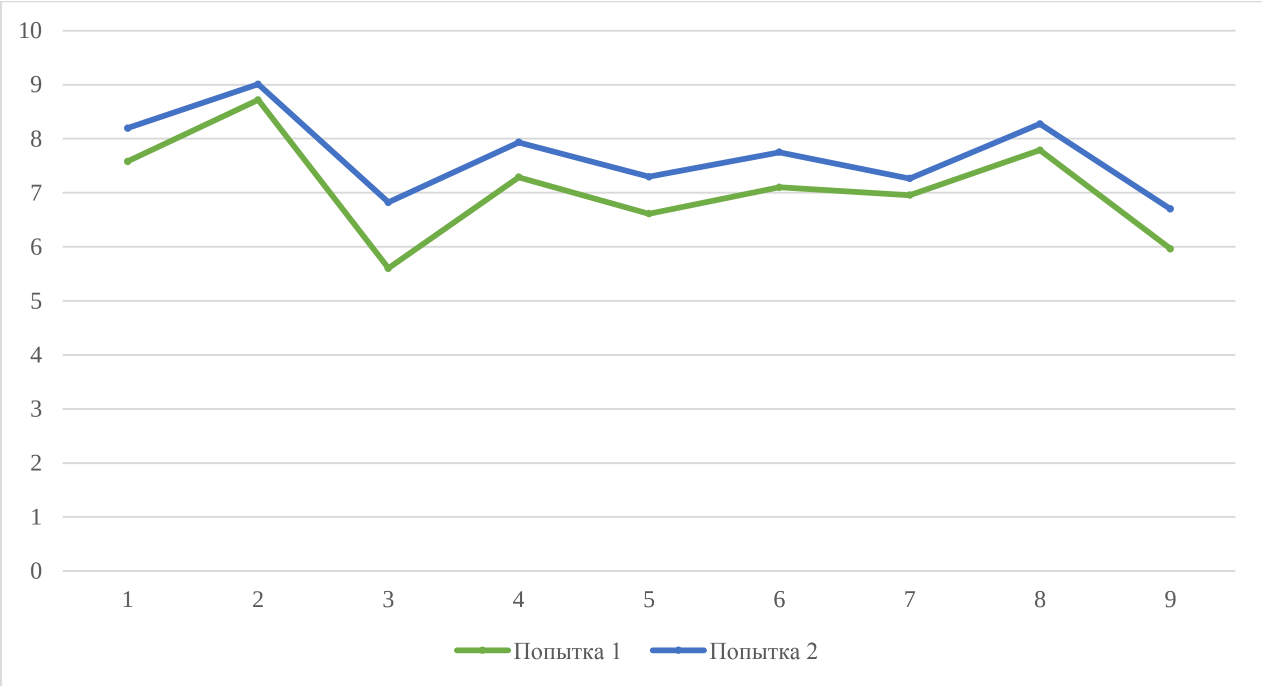
Об успешности проведенной работы свидетельствуют результаты контрольных тестов (Приложение 9). Как было отмечено ранее, перед изучением каждой темы студенты самостоятельно до занятий знакомятся с интерактивными лекциями и проходят соответствующие им тестирования. Таким образом, работа в рамках каждой темы курса состояла из нескольких этапов:

1. Знакомство с интерактивной лекцией на сайте Дистанционного образования КФУ;
2. Прохождение контрольного теста (попытка №1) на сайте ДО КФУ;
3. Занятие с программой GeoGebra в соответствии с теорией ван Хиле согласно методике, описанной в п.1.4 на занятии с преподавателем;
4. Повторное прохождение контрольного теста (попытка №2) на сайте ДО КФУ после занятия с программой.

По итогам курса планиметрии студенты выполнили в общей сложности 9 контрольных тестов по 10 вопросов, каждый из которых включал две попытки (до и после занятия с программой GeoGebra). На выполнение каждого теста отводился 1 час, максимальный балл по каждому тесту равен 10.

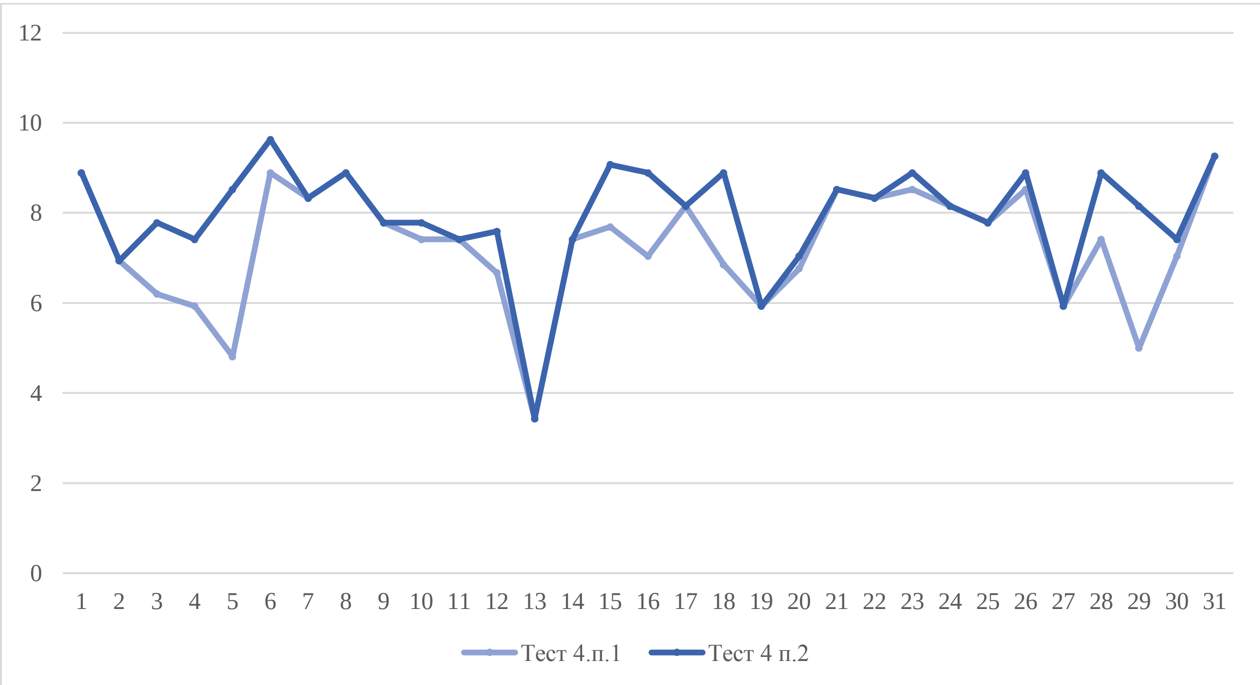
Диаграмма 4 отражает средние баллы по группе по итогам двух попыток по каждому из тестов. Можно видеть, что после работы с программой GeoGebra, результаты контрольных тестов стали выше.

Диаграмма 4. Средние баллы по тестам




Для большей наглядности продемонстрируем результаты одного из тестов, отражающего динамику для каждого студента (Диаграмма 5).

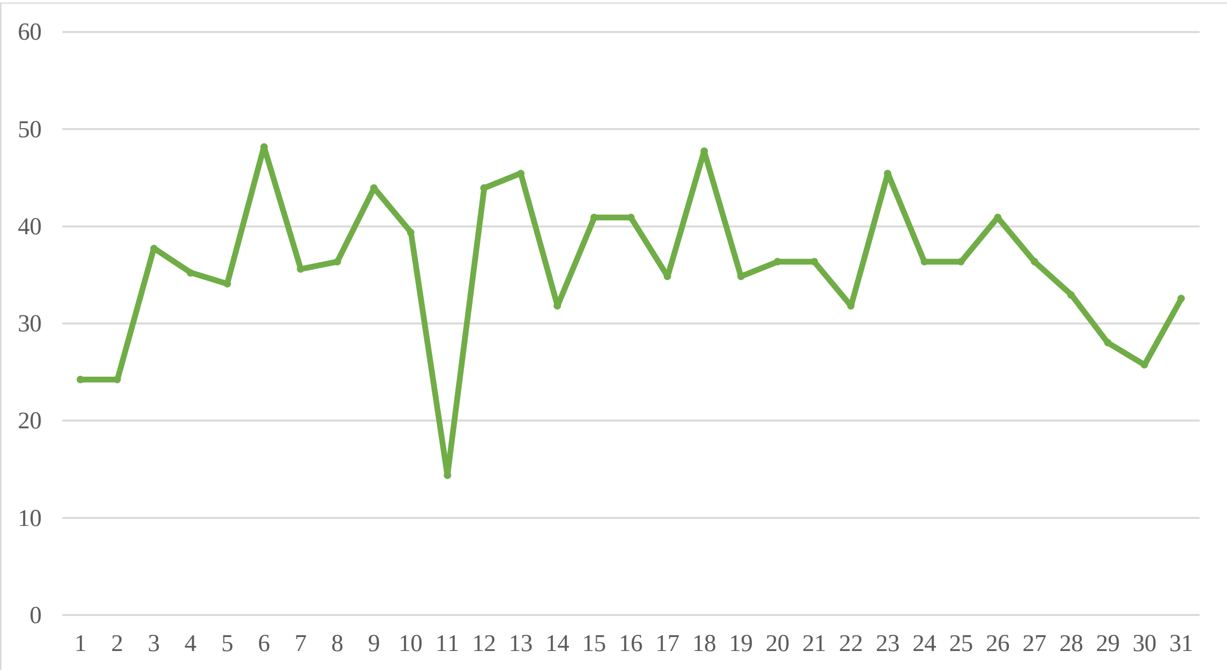
Диаграмма 5. Результаты теста № 4 (две попытки)



Данные свидетельствуют о том, что количество правильных ответов не только не уменьшилось (значит варианты ответа выбирались осознанно), но и повысилось для большинства студентов. Студенты с низкими результатами по тесту ван Хиле (менее 50% правильных ответов) имеют положительную динамику по 9 тестам планиметрии, средний балл студентов по всем тестам составил 6,45 из 10, что составляет 64,5%. Наибольший разрыв между первой и второй попытками тестов составил +4 балла, что свидетельствует о более глубоком понимании материала, изученного с применением компьютерного эксперимента и доказывает его эффективность.

Формой итогового контроля был зачет, который также проводился в виде тестирования на сайте ДО КФУ. Задания для каждого студента генерировались случайным образом. На выполнение 11 вопросов (задач) отводился 1 час, максимальный балл по тесту – 50. Диаграмма 6 отражает результаты зачетного теста каждого студента.

Диаграмма 6. Зачетное тестирование по курсу планиметрии




Максимальный балл по тесту составил 48,18, минимальный балл – 14,39, средний – 35,9. По итогам зачетного теста 26 студентов преодолели отметку в 30 баллов и таким образом дали более 60% правильных ответов.

Остальные 5 человек также справились с тестом, но получили более низкий балл.

По итогам проведенной опытно-экспериментальной работы по использованию программы GeoGebra в обучении можно сформулировать следующие выводы:

– проведение эксперимента повысило мотивацию к изучению предмета, позволило обеспечить бóльшую наглядность при решении задач;

– самостоятельное изучение лекций до занятия позволило студентам лучше ориентироваться в новом материале, быстро отвечать на вопросы на этапе актуализации знаний;

– улучшилась математическая речь;

– сформировались навыки формулирования гипотез при помощи восстановления в памяти процесса построения математической модели;

– повысилось качество понимания тем геометрии, изученных в средней школе (7-9 классы);

– проведение занятий с учетом уровней развития геометрического мышления позволило обратиться к развитию первых четырех уровней, осуществив дифференциальный и деятельностный подходы к обучению.

Полученные в ходе эксперимента результаты позволяют сделать вывод о том, что занятия, организованные с применением программы GeoGebra в соответствии с теорией ван Хиле, благоприятно влияют на успеваемость и мотивацию к предмету, а также формируют в сознании будущих учителей понятие математического компьютерного эксперимента.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данного исследования была обоснована важность понимания развития геометрического мышления, приведены стадии его развития, описана технология развития ГМ с помощью компьютерного эксперимента, проведена работа по измерению уровня развития геометрического мышления студентов и организована опытно-экспериментальная работа по использованию программы GeoGebra в обучении курсу «Методика решения задач по элементарной математике: Планиметрия» студентов второго курса Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ. В основу эксперимента была положена теория уровней геометрического мышления ван Хиле, обоснована адекватность применения данной теории в условиях современного российского образования, сформулированы этапы работы с задачами с использованием компьютерного эксперимента.

Непосредственно перед внедрением данной методики обучения планиметрии были проанализированы зарубежные статьи и монографии, содержащие экспериментальные данные по данной теме, изучен опыт применения теории ван Хиле за рубежом, переведен на русский язык тест Залмана Узискина, разработанный для измерения уровня ГМ теории ван Хиле.

В результате опытно-экспериментальной работы был проведен количественный и качественный анализ полученных данных, подтверждающих наличие положительной динамики в развитии геометрического мышления студентов и эффективность применения данного подхода в обучении.

Анализ российского опыта показал отсутствие подобного рода исследований по развитию геометрического мышления в соответствии с теорией ван Хиле, содержащих экспериментальные данные. Работа в данном направлении не закончена и требует дальнейшего исследования на экспериментальном уровне.

Настоящее исследование носит прикладной характер и будет полезно преподавателям высших и средних профессиональных учебных заведений, осуществляющих подготовку учителей математики, а также школьным учителям.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Clements D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420-464). New York: MacMillan.
2. Frykholm, J. A. (1994 The significance of external variables as predictors of van Hiele levels in algebra and geometry students. Madison: University of WisconsinMadison. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 372 924)
3. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
4. July Raquel Andrea. "Thinking in three dimensions: Exploring students' geometric thinking and spatial ability with the Geometer's Sketchpad" (2001). ProQuest ETD Collection for FIU. AAI3018479. http://digitalcommons.fiu.edu/dissertations/AAI3018479
5. Nasser, L. (1995). Long term effects of a geometry course based on the van Hiele theory. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), Proceedings of the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education (19th. Recife Brazil. July 22-27'): Vol 1. (pp. 213).
6. Piaget J., Inhelder B. The Childs Conception of Space. New York: Norton, (1967).
7. Piaget J., Inhelder B., Szeminski A. The Childs Conception of Geometry. London: Routledge &Kegan Paul, (1960).
8. Pierre M. van Hiele. Structure and insight: a theory of mathematics education. Academic Press, 1986: 246 c.
9. Zalman Usiskin. “Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry.” University of Chicago, 1982: 438.

https://www.researchgate.net/publication/234715504_Van_Hiele_Levels_and_Achievement_in_Secondary_School_Geometry_CDASSG_Project.

10. А.Я. Психология: тесты, тренинги, словарь, статьи. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://azps.ru/handbook/p/pros357.html (Дата обращения: 20.11.2017)
11. А.В. Боровских, Э. Рейхани, Н.Х. Розов. Развитие геометрического мышления школьников. [Электронный ресурс] / Режим доступа: fpo.msu.ru/open_files/borovskikh/razv_geom_mish.doc
12. Дубинина С.А. Развитие пространственного мышления детей младшего школьного возраста при изучении геометрического материала. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://docplayer.ru/55441511-Svetlana-alekseevna-razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-detey-mladshego-shkolnogo-vozrasta-pri-izuchenii-geometricheskogo-materiala.html
13. Истратова, О.Н. Справочник психолога-консультанта организации [Электронный ресурс] / справ. / О.Н. Истратова, Т.В. Эксакусто. — Электрон. дан. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2010. — 638 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/70148
14. Кайгородцева Н.В. Геометрия, геометрическое мышление и геометро-графическое образование // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=12330 (Дата обращения: 20.11.2017)
15. Концепция математического образования в РФ [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/3894/файл/2730/Концепция%20развития%20математического%20образования%20в%20РФ.pdf (Дата обращения 09.02.2017)
16. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии [Электронный ресурс] / Режим доступа:

https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternye-issledovaniya-i-eksperimenty-pri-obuchenii-geometrii (Дата обращения 10.05.2018)

17. Методика решения задач элементарной математики: Планиметрия (4 семестр). Дистанционное образование КФУ [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://edu.kpfu.ru/enrol/index.php?id=792 (Дата обращения: 10.04.2017)
18. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 215 с.
19. Подготовка и проведение урока-исследования в стиле экспериментальной математики. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://minobr.nso.ru/sites/minobr.nso.ru/wodby_files/files/page_2588/eksperimentalnaya_matematika_kak_soderzhatelno-metodicheskaya_liniya_shkolnogo_kursa_matematiki.pdf
20. Психология человека от рождения до смерти. — СПб.: ПРАЙМ-ЕВРОЗНАК. Под общей редакцией А.А. Реана. 2002.
21. Психологос. Энциклопедия практической психологии. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.psychologos.ru/articles/view/ponyatiynoe-myshlenie (Дата обращения: 20.11.2017)
22. Рослова Л. Методика преподавания наглядной геометрии учащимся 5–6 классов. Лекция 2. Журнал «Математика». N18 (680), 16-30.09.2009 [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://mat.1september.ru/view_article.php?ID=200901814
23. Тест структуры интеллекта Амтхауэра. Психодиагностика. Psyera.ru [Электронный ресурс]: Режим доступа: https://psyera.ru/2484/test-struktury-intellekta-amthauera
24. Учебный процесс. Учебные планы. Департамент образования КФУ [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://kpfu.ru/do/uchebnyj-process/uchebnye-plany

25. Фалилеева М.В., Дюпина А.Э. Обучение курсу «Элементарная математика» с использование программы GeoGebra / В сборнике: Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе Материалы международной научно-методической конференции. Научный редактор Е.К. Хеннер. 2017. — С. 88-92. [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29943037 (Дата обращения 09.02.2017)
26. Философский словарь. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.harc.ru/ Дата обращения: 20.11.2017
27. Якиманская И.С. Психологические основы математического образования: Учебное пособие для студентов пед.вузов / Ираида Сергеевна Якиманская. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 320 с.

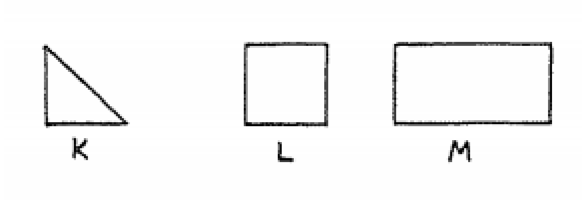
Приложение 1

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Тест Ван Хиле

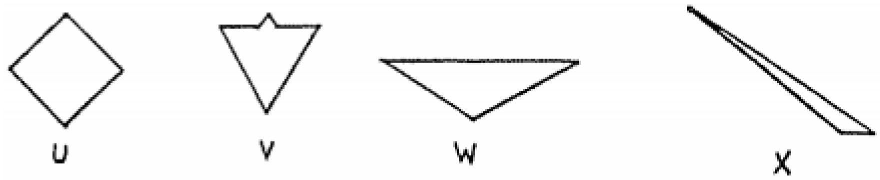
Тест содержит 25 вопросов. Не ожидается, что Вы сможете ответить на все вопросы теста.
1. Внимательно прочитайте вопрос.
2. Выберите вариант ответа, который кажется Вам правильным (возможен только один вариант ответа). Запишите соответствующую букву в бланк ответов.
3. Записывайте ответ в соответствующем поле на бланке ответов.
4. Если Вы хотите исправить вариант ответа, зачеркните неправильный вариант.
5. На выполнение теста у Вас есть 35 минут. Приступить к его выполнению можно только по команде преподавателя.

1. *Какая(ие) фигура(ы) являе(ю)тся квадратом(ами)?*



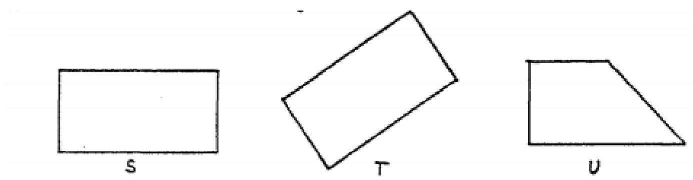

А) Только *K*
Б) Только *L*
В) Только *M*
Г) *K* и *L*
Д) Все фигуры являются квадратами

2. *Какие фигуры являются треугольниками?*



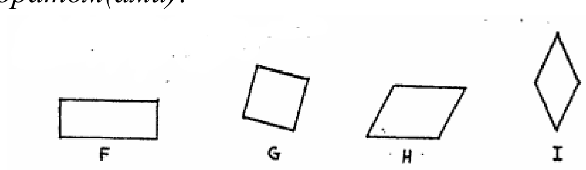

А) Ни одна фигура не является треугольником
Б) Только *V*
В) Только *W*
Г) *W* и *X*
Д) *V* и *W*

3. *Какие фигуры являются прямоугольниками?*



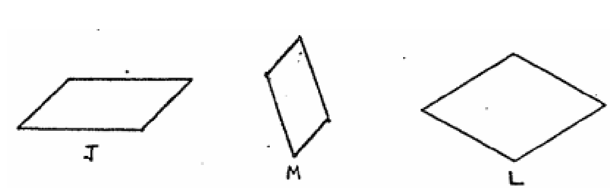

А) Только *S*
Б) Только *T*
В) *S* и *T*
Г) *S* и *U*
Д) Все фигуры являются прямоугольниками

4. *Какая(ие) фигура(ы) являе(ю)тся квадратом(ами)?*




А) Ни одна фигура не является квадратом
Б) Только *G*
В) *F* и *G*
Г) *G* и *I*
Д) Все фигуры являются квадратами

5. *Какие из фигур являются параллелограммами?*

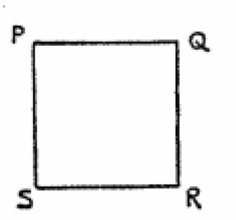



А) Только *J*
Б) Только *L*
В) *J* и *M*

Г) Ни одна из фигур

Д) Все фигуры

6. *Дан квадрат PQRS. Какое из перечисленных утверждений верно для квадрата?*




А) Отрезки *PR* и *RS* равны

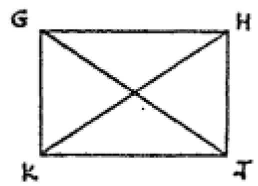
Б) Отрезок *QS* перпендикулярен *PR*

В) Сторона *PS* перпендикулярна стороне *QR*

Г) Отрезки *PS* и *QS* равны

Д) Угол *Q* больше угла *R*

7. *В прямоугольнике GHJK проведены диагонали GJ и HK. Какое из следующих утверждений не является верным для любого прямоугольника?*




А) Все четыре угла прямые

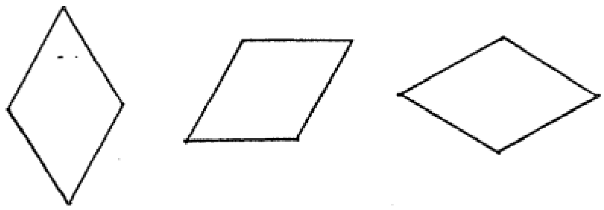
Б) Имеются четыре стороны

В) Диагонали равны

Г) Противоположные стороны равны

Д) Все утверждения являются верными для любого прямоугольника

8. *Ромб – это фигура, у которой все четыре стороны равны. Посмотрите на примеры. Какое из следующих утверждений неверно для любого ромба*?



А) Имеет две диагонали, которые равны.

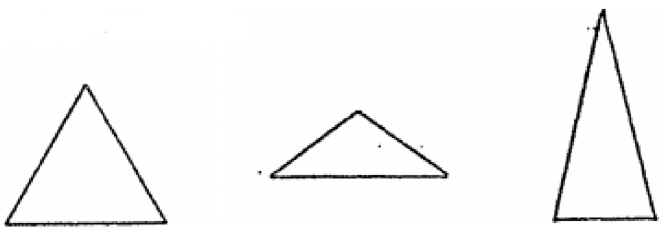
Б) Каждая диагональ делит пополам два угла ромба.

В) Диагонали перпендикулярны.

Г) Противоположные углы равны.

Д) Все утверждения являются верными для любого ромба.

9. *В равнобедренном треугольнике две стороны равны. Какое из утверждений вероы для любого равнобедренного треугольника?*



А) Три стороны должны быть одинаковой длины.

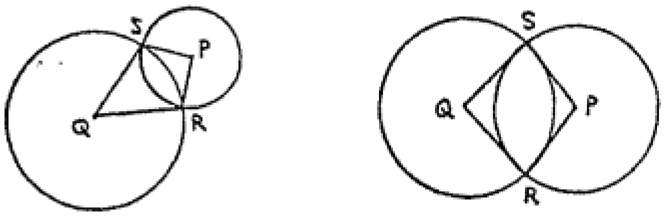
Б) Одна сторона должна быть вдвое больше другой стороны.

В) Имеется не менее двух равных углов.

Г) Три угла должны быть равны.

Д) Все утверждения неверны для равнобедренного треугольника.

10. *Две окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках S и R. Какое из утверждений не всегда является верным?*




А) *PRQS* имеет две пары равных сторон.

Б) *PRQS* имеет как минимум два равных угла.

В) Отрезки *PQ* и *RS* перпендикулярны.

Г) Углы *P* и *Q* равны.

Д) Все утверждения всегда верны.

Приложение 1

*11. Даны два утверждения. 1 – Фигура F является прямоугольником. 2 – Фигура F является треугольником. Выберите справедливое высказывание.*

А) Если верно 1, то 2 тоже верно

Б) Если 1 неверно, то верно 2

В) 1 и 2 не могут выполняться одновременно

Г) 1 и 2 не могут одновременно быть неверными

Д) Все варианты неверны

*12. Даны два утверждения.*

А – $\Delta ABC$ имеет три равные стороны.

Б – в $\Delta ABC$ $\angle B = \angle C$.

*Какое из следующих высказываний является верным?*

А) А и Б не могут быть верными одновременно

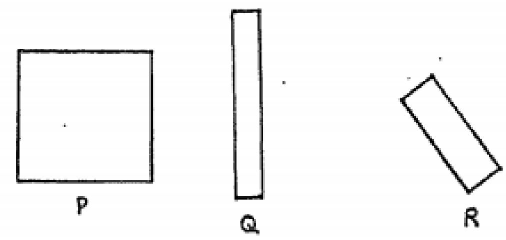
Б) Если А верно, то Б верно

В) Если Б верно, то А верно

Г) Если А неверно, то Б неверно

Д) Все варианты неверны

*13. Какую из представленных на рисунке фигур можно назвать прямоугольником?*




А) Все

Б) Только $Q$

В) Только $R$

Г) $P$ и $Q$

Д) $Q$ и $R$

*14. Выберите верное утверждение.*

А) Все свойства прямоугольника являются свойствами квадрата.

Б) Все свойства квадрата являются свойствами прямоугольника.

В) Все свойства прямоугольника являются свойствами параллелограмма.

Г) Все свойства квадрата являются свойствами параллелограмма.

Д) Все варианты неверны.

*15. Какие свойства выполняются в прямоугольнике, но не всегда выполняются в параллелограмме?*

А) противоположные стороны равны

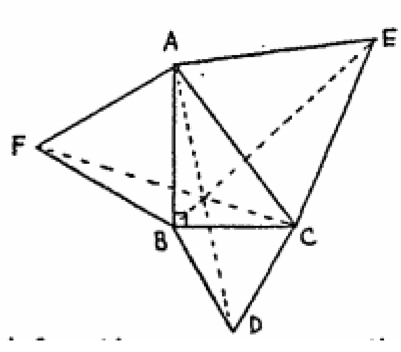
Б) диагонали равны

В) противоположные стороны параллельны

Г) противоположные углы равны

Д) ни один вариант ответа

*16. Дан прямоугольный треугольник ABC. На сторонах этого треугольника построены равносторонние треугольники ACE, ABF и BCD. Отрезки AD, BE, CF пересекаются в одной общей точке. Какой вывод можно сделать на основе этой информации? (выберите правильный вариант из предложенных).*



А) Мы можем быть уверены, что только в данном треугольнике отрезки *AD, BE, CF* пересекаются в одной общей точке.

Б) Не во всех прямоугольных треугольниках отрезки *AD, BE, CF* будут иметь точку пересечения.

В) В любом прямоугольном треугольнике отрезки *AD*, *BE*, *CF* будут иметь точку пересечения.

Г) В любом треугольнике отрезки *AD*, *BE*, *CF* будут иметь точку пересечения.

Д) В любом равностороннем треугольнике отрезки *AD*, *BE*, *CF* будут иметь общую точку пересечения.

*17. Даны свойства четырехугольника:*

1. Имеет равные диагонали.
2. Это квадрат.
3. Это прямоугольник.

*Какое утверждение является верным?*

А) Из 1 следует 2, а из 2 следует 3.

Б) Из 1 следует 3, а из 3 следует 2.

В) Из 2 следует 3, а из 3 следует 1.

Г) Из 3 следует 1, а из 1 следует 2.

Д) Из 3 следует 2, а из 2 следует 1.

*18. Даны два утверждения:*

1. Если четырехугольник является прямоугольником, то диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
2. Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то эта фигура – прямоугольник.

*Какое утверждение является верным?*

А) Чтобы доказать 1, достаточно доказать 2.

Б) Чтобы доказать 2, достаточно доказать 1.

В) Для доказательства 2 достаточно найти один прямоугольник, диагонали делят друг друга пополам.

Г) Чтобы доказать, что 2 неверно, достаточно найти фигуру, не являющуюся прямоугольником, в которой диагонали точкой пересечения делят друг друга пополам.

Д) Нет верного утверждения.

*19. Дополните предложение «В геометрии…»:*

А) Любой термин имеет определение и любое правдивое утверждение может быть доказано.

Б) Любой термин может быть определен, но некоторые утверждения предполагаются верными.

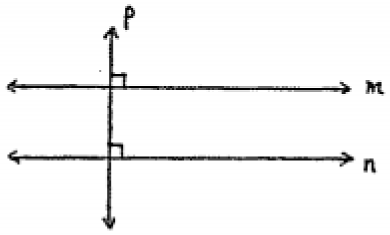
В) Некоторые термины берутся без определения, но любое правдивое утверждение может быть доказано.

Г) Некоторые термины должны быть взяты без определения и необходимо некоторые утверждения принять как истинные.

Д) Все утверждения неверны (если дополнить ими предложения, то получится неверное высказывание).

## Приложение 1

*20. Изучите три данных предложения:*




1. На плоскости две различные прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.
2. Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна другой прямой.
3. Если две прямые равноудалены друг от друга, то они параллельны.

Даны две перпендикулярные прямые m и p. Прямые n и p также перпендикулярны. *Какое из утверждений может быть доказательством того, что прямые m и n параллельны?*

А) Только 1

Б) Только 2

В) Только 3

Г) Или 1, или 2

Д) Или 2, или 3

21. *В F-геометрии, отличной от той, что мы используем, даны ровно 4 точки и 6 прямых. Каждая прямая содержит по две точки. Если даны точки P, Q, R, P, то из них можно получить прямые PQ, PR, PS, QR, QS, RS. Слова «пересекаются» и «параллельны» определяются следующим образом в F-геометрии. Прямые PQ и PR пересекаются в точке P, потому что P – их общая точка. Прямые PQ и RS параллельны, потому что они не имеют общей точки.*

    *Исходя из предложенной теории, выберите верное утверждение из предложенных.*


А) *PR* и *QS* пересекаются.

Б) *PR* и *QS* параллельны.

В) *QR* и *RS* параллельны.

Г) *PS* и *QR* пересекаются.

Д) Ни один вариант не является верным.

22. *В 1847 году французским математиком П.В. Ванцелем была доказана невозможность трисекции угла (делении угла на три равных части) с помощью циркуля и немаркированной линейки. Какое заключение можно сделать из его доказательства?*

А) Невозможно разделить угол <u>пополам</u>, используя только циркуль и немаркированную линейку.

Б) Невозможно разделить угол на три равные части с помощью циркуля и <u>маркированной</u> линейки.

В) Невозможно разделить угол на три части, используя любые чертежные инструменты.

Г) Не исключено, что в будущем кто-то сможет найти решение задачи о трисекции угла с помощью циркуля и немаркированной линейки.

Д) Никто не сможет найти решение задачи о трисекции угла с помощью циркуля и немаркированной линейки.

23. *Существует геометрия, открытая математиком Л., в которой истинно следующее утверждение: сумма углов треугольника меньше 180 градусов.*

    *Какое из утверждений верно?*

А) Л. сделал ошибку в измерении углов треугольника.

Б) Л. сделал ошибку в логических выводах.

В) Л. имеет неправильной представление о том, что такое «истина».

Г) Л. начал с допущений, отличных от тех, что используются в обычной геометрии.

Д) Ни один из вариантов не является верным.

*24. Два учебника геометрии определяют слово «прямоугольник» по-разному. Какое утверждение из предложенных верно?*

А) Один из учебников содержит ошибку.

Б) Одно из определений неверно. Не может существовать два различных определения для прямоугольника.

В) Прямоугольник в одном учебнике должен иметь свойства, отличные от свойств в другом учебнике.

Г) Прямоугольник в одном учебнике должен иметь такие же свойства, как в другом учебнике.

Д) Свойства прямоугольника в учебниках могут отличаться.

*25. Предположим, Вы доказали два утверждения 1 и 2.*

1. Если А, то Б. 2. Если В, то не Б.

*Какие утверждения следуют из утверждений 1 и 2?*

А) Если А, то В.

Б) Если не А, то не Б.

В) Если А или Б, то не В.

Г) Если В, то не А.

Д) Если не В, то А.

Приложение 2

**Тест «Сложные аналогии»**

*Инструкция*. «На бланке перед вами 20 пар, состоящих из слов, которые находятся между собой в логической связи. Напротив каждой пары 6 цифр, которые обозначают 6 типов логической связи. Примеры всех 6 типов и соответствующие им цифры приведены в таблице «Образец». Вы должны, во-первых, определить отношение между словами в паре. Затем подобрать наиболее близкую к ним по аналогии (ассоциации) пару слов из таблицы «Образец». И после этого в цифровом ряду обвести кружком ту из цифр, которая соответствует найденному в таблице «Образец» аналогу. Время выполнения задания — 3 минуты».

*Образец:*

Овца — стадо — 1
Малина — ягода — 2
Море — океан — 3
Свет — темнота —4
Отравление — смерть —5
Враг — неприятель —6

Стимульный материал:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. Испуг – бегство | | 11. Десять — число | |
| 2. Физика — наука | | 12. Праздность — безделье | |
| 3. Правильно — верно | | 13. Глава — роман | |
| 4. Грядка — огород | | 14. Покой — движение | |
| 5. Похвала — брань | | 15. Бережливость — скупость | |
| 6. Пара — два | | 16. Прохлада — мороз | |
| 7. Слово — фраза | | 17. Обман — недоверие | |
| 8. Бодрость — вялость | | 18. Пение — искусство | |
| 9. Свобода — независимость | | 19. Капля — дождь | |
| 10. Месть — поджог | | 20. Радость — печаль | |

Приложение 3

## Тест «Пространственное воображение»

В задачах этой группы в первой строке изображены 5 разных кубиков, обозначенных буквами "а","б","в","г","д". Каждый кубик имеет 6 граней с различными знаками, три из которых можно видеть.

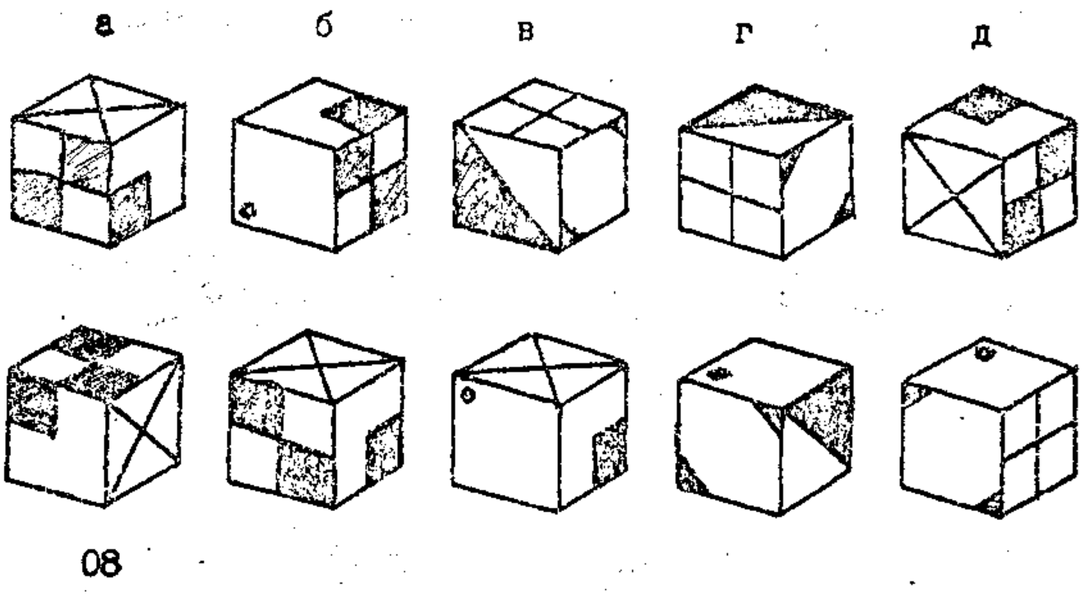
Каждая из задач показывает один из этих кубиков в различных положениях. В каждой задаче Вы должны установить, о каком из приведенных в первой строке кубиков идет речь. Кубик может быть перевернут, повернут или перевернут и повернут одновременно. При этом, естественно, может показаться и новая грань, на которой - будет изображен какой-то знак.

Среди кубиков а, б, в, г, д нет одинаковых, а все одинаковые знаки расположены на их гранях по-разному.

*Пример:*

Задача показывает кубик "а" в измененном положении. Поэтому для примера в бланке ответов перечеркнута буква "а".

В следующем примере речь идет о кубике "д", в третьем - о кубике "б", в четвертом - о кубике "в" и в пятом о кубике "г".

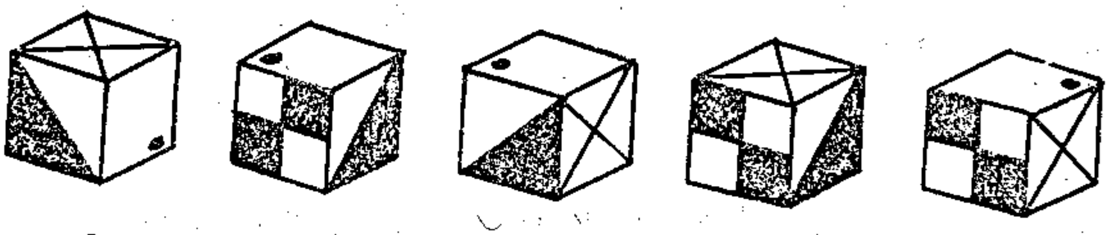



**Пожалуйста, не переворачивайте лист, пока не получите указаний.**

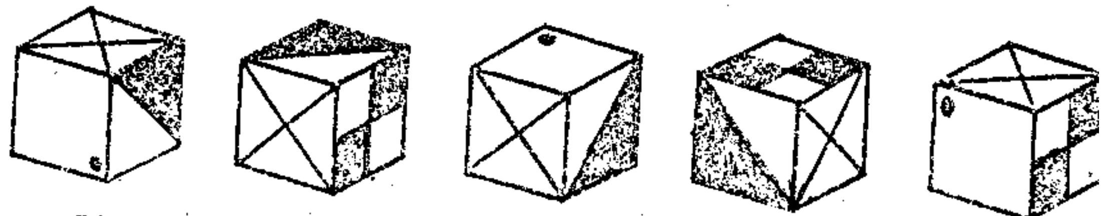
Приложение 3

# С У Б Т Е С Т

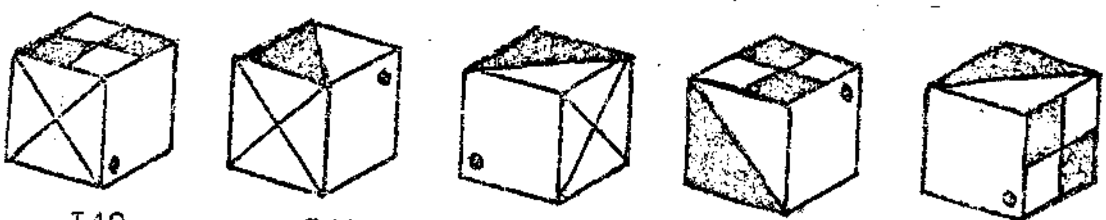
Задачи 137 - 156



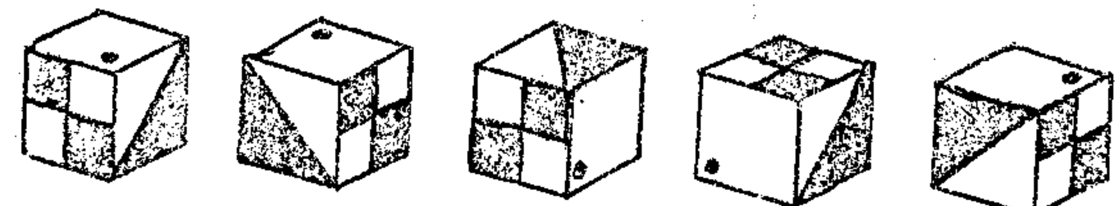
а б в г д



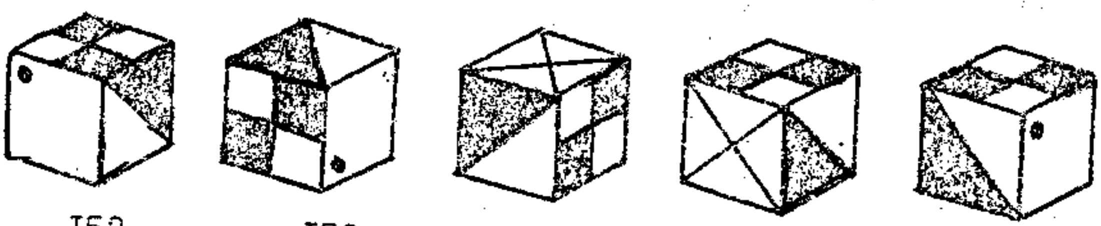
137 138 139 140 141



142 143 144 145 146



147 148 149 150 151



152 153 154 155 156

**Проверьте правильность решения задач и ждите дальнейших инструкций.**

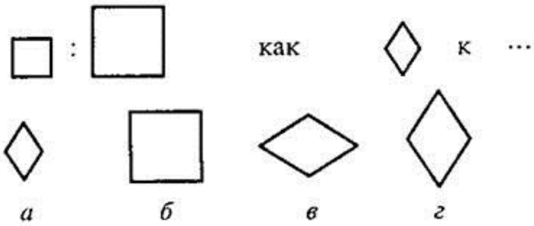
Приложение 4

**Тест на выполнение логических операций над геометрическими объектами**

**45 минут**

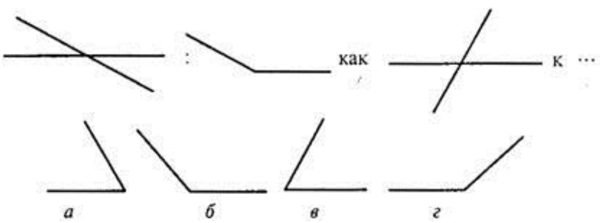
Субтест 1. *Вам предлагаются три геометрических объекта. Между первым и вторым объектом существует определенная связь. Между третьим и одним из четырех объектов, предлагаемых на выбор, существует аналогичная, та же самая связь. Этот геометрический объект вам следует найти и написать на листке бумаги соответствующую ему букву.*

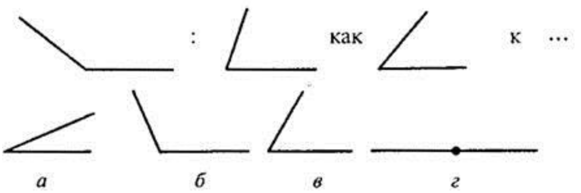
Пример:

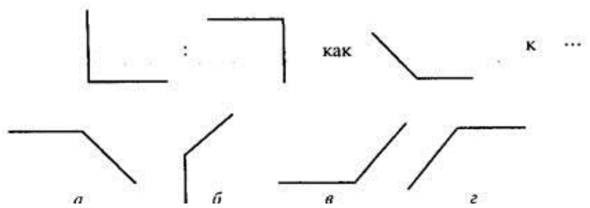



Правильный ответ – г). Его нужно записать.

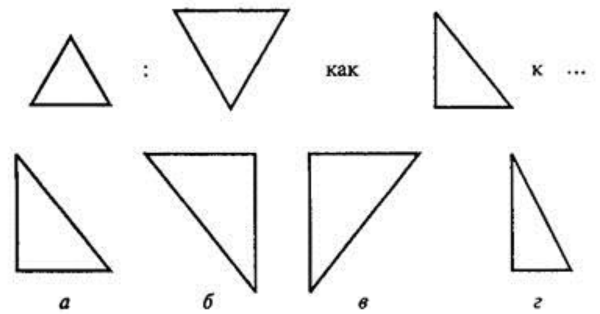
Субтест 1. Задание 1

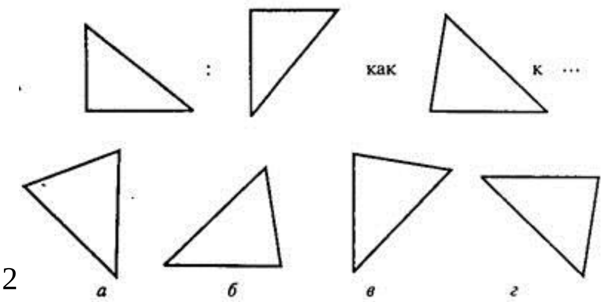
1


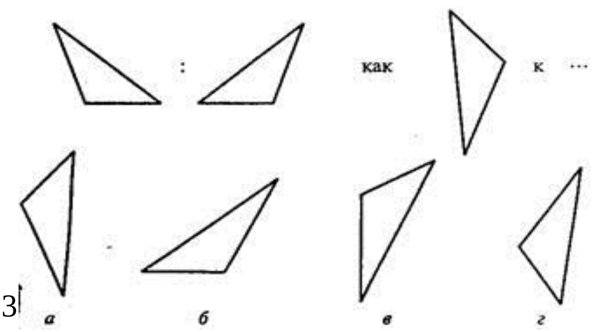

2



3



Субтест 1. Задание 2.

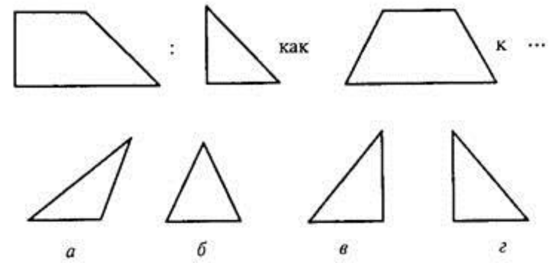
1



2


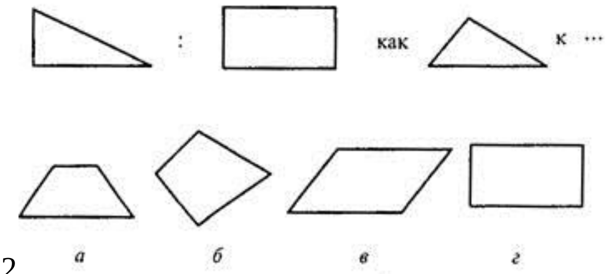

3



Субтест 1. Задание 3.

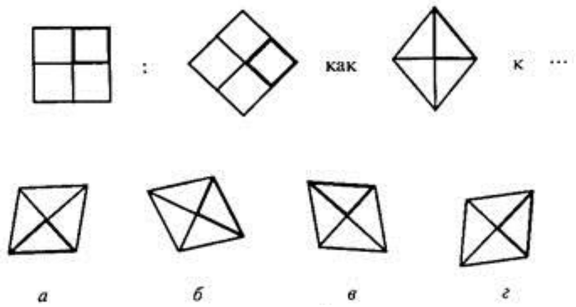
Приложение 4



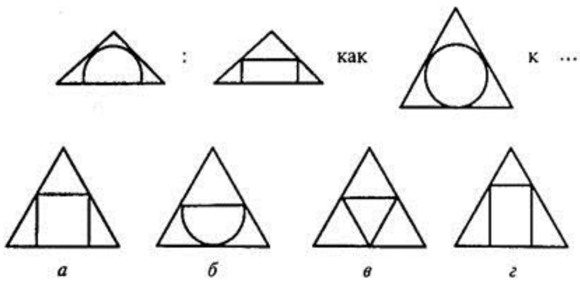

1



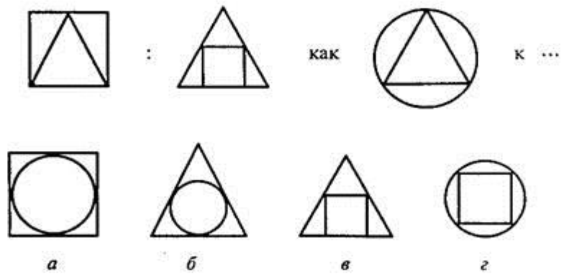

2



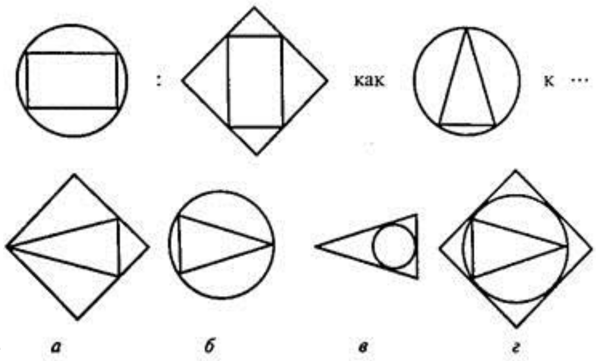

3




1




2

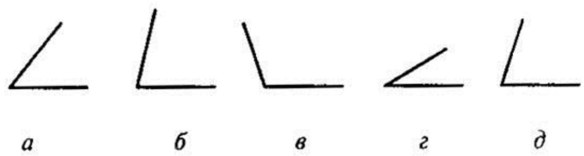



3

Субтест 1. Задание 4.

Субтест 2. *Вам предлагаются ПЯТЬ геометрических объектов. четыре из них объединены общим признаком. пятый объект к ним не подходит. Его нужно найти и написать на листке бумаги соответствующую ему букву.*

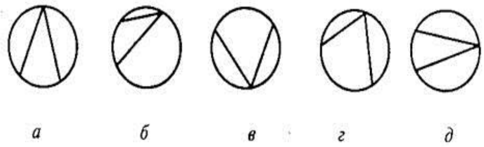
Пример:



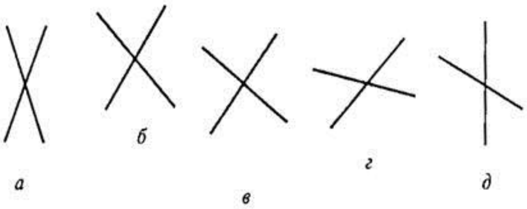

Правильный ответ – в. Его нужно записать.

## Приложение 4

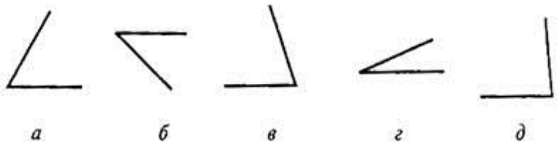
Субтест2. Задание 1




1

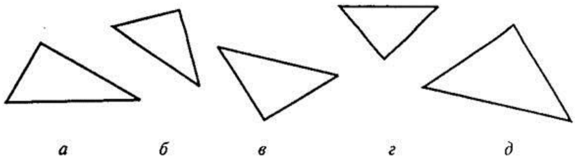



2

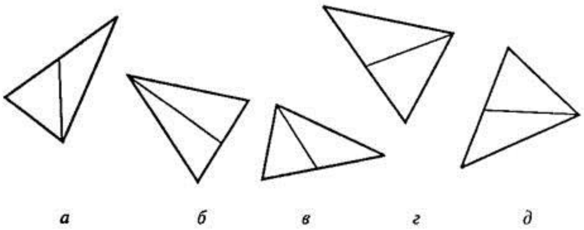



3

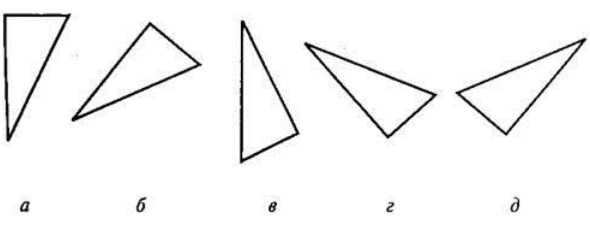
Субтест 2. Задание 2.




1

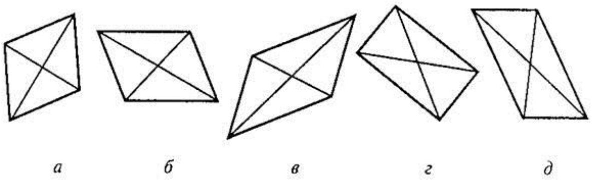



2

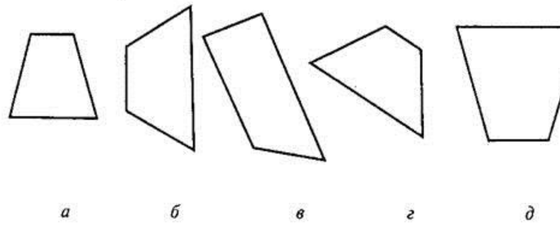



3

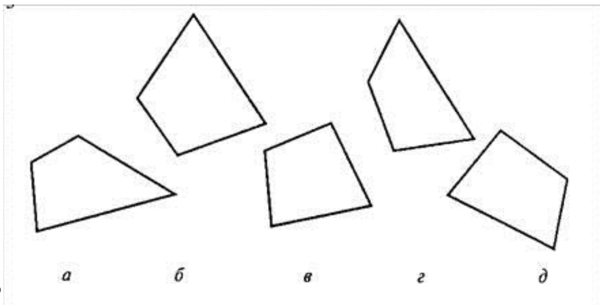
Субтест 2. Задание 3.




1

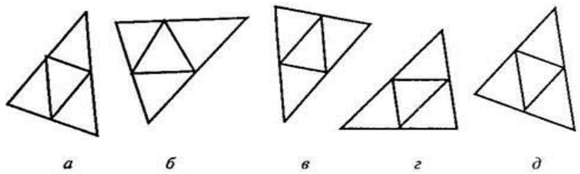



2

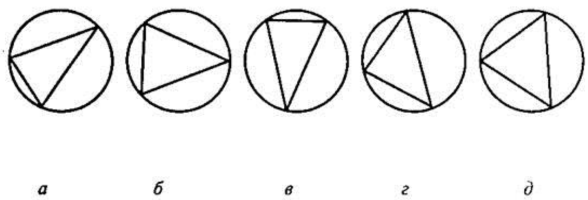



3

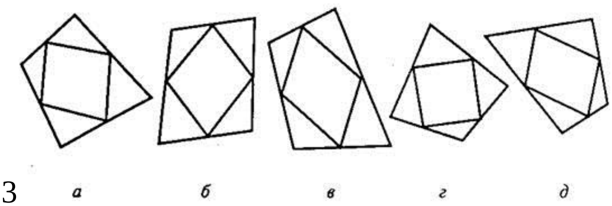
Субтест 2. Задание 4.




1




2

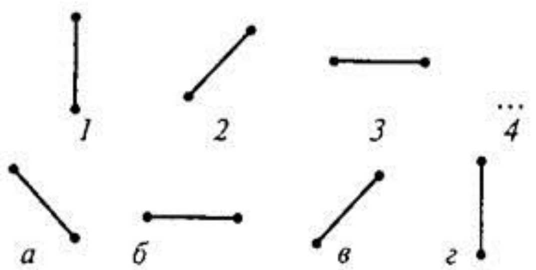



3

Субтест 3. *Вам предлагаются три геометрических объекта, расположенных на основе определенной закономерности. Вам нужно выбрать из представленных внизу вариантов ответов четвертый объект, который продолжал бы данную закономерность построения геометрического ряда, и написать на листке бумаги соответствующую ему букву.*

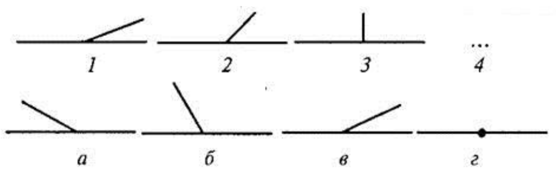
Приложение 4

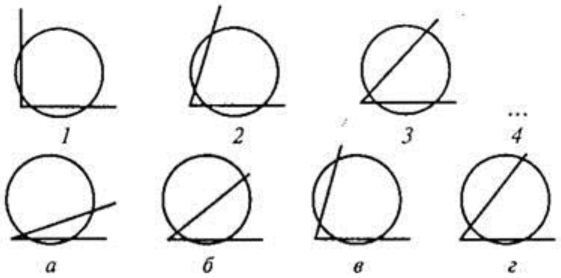
Пример:

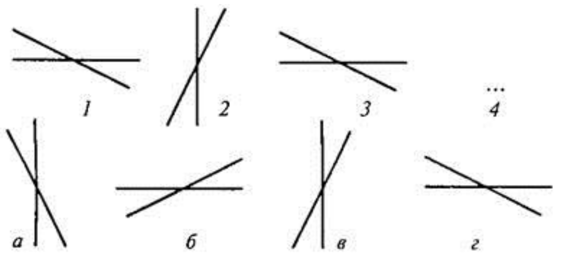



Правильный ответ – а. Его нужно записать.

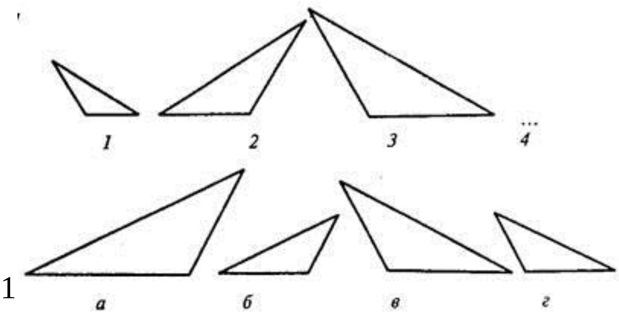
Форма А. Субтест 3. Задание 1.

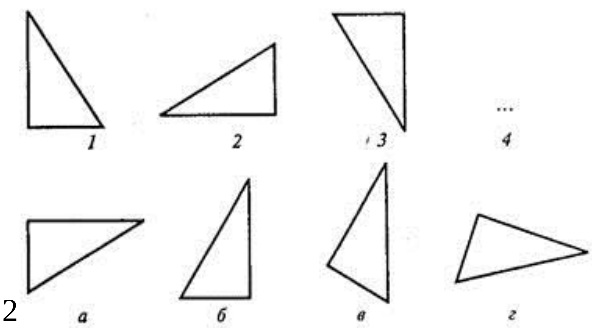
1


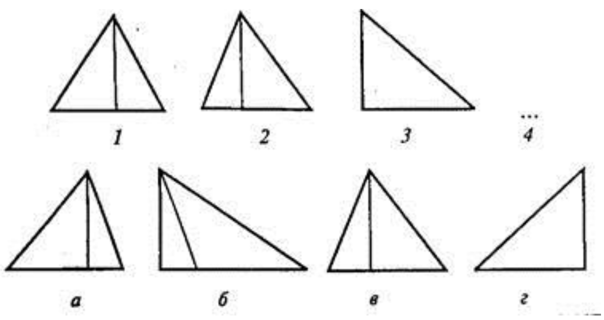

2



3



Субтест 3. Задание 2.

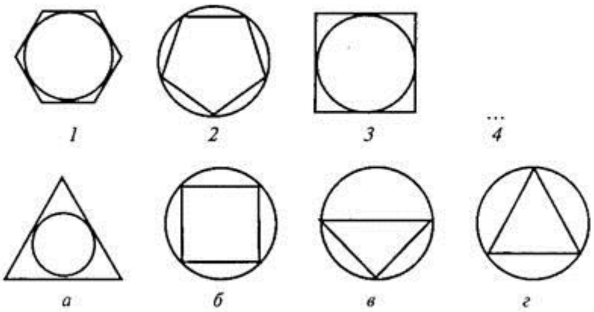
1



2


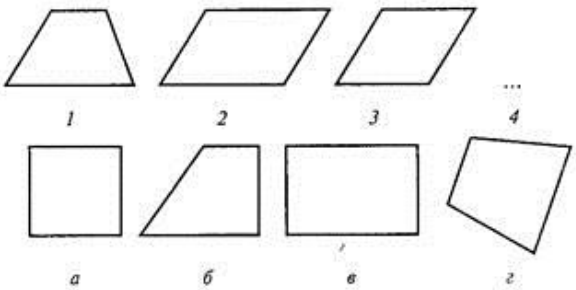

3


Приложение 4

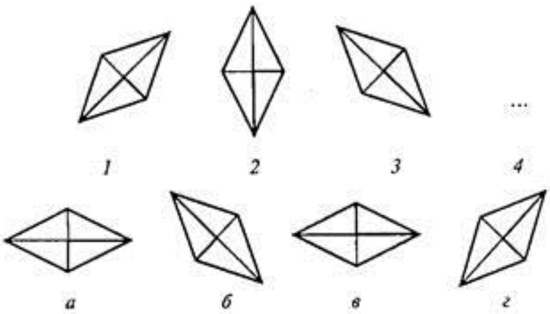
Субтест 3. Задание 3.




1

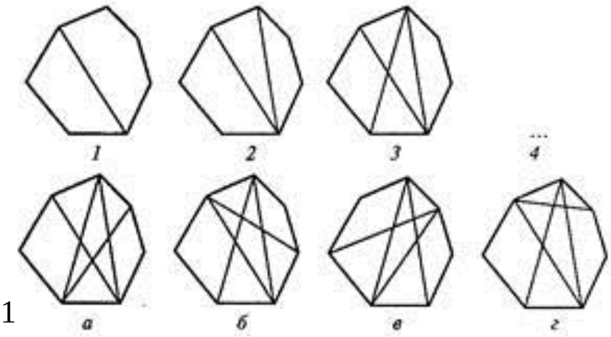



2

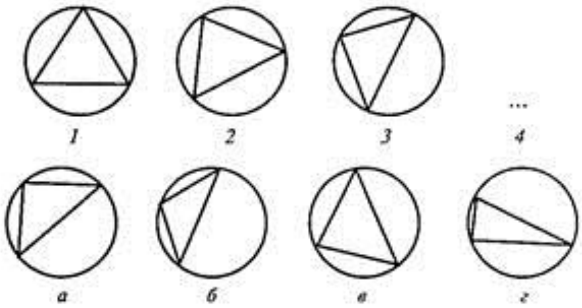



3

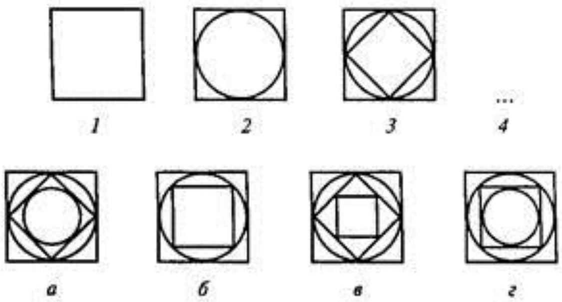
Субтест 3. Задание 4.




1




2




3

Приложение 5

| Тест для определения уровня ГМ ван Хиле | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Студенты** | **Группа** | **Сумма** | Уровень | Ошибки | Правильных | % выполнения |
| Студент 1 | 05-604 | 7 | 3 | 12 | 13 | 52 |
| Студент 2 | 05-604 | 7 | 3 | 8 | 17 | 68 |
| Студент 3 | 05-605 | 3 | 2 | 13 | 12 | 48 |
| Студент 4 | 05-605 | 7 | 3 | 14 | 11 | 44 |
| Студент 5 | 05-604 | 19 | 3 | 14 | 11 | 44 |
| Студент 6 | 05-604 | 15 | 4 | 6 | 19 | 76 |
| Студент 7 | 05-605 | 23 | 5 | 9 | 16 | 64 |
| Студент 8 | 05-605 | 7 | 3 | 10 | 15 | 60 |
| Студент 9 | 05-604 | 13 | 4 | 10 | 15 | 60 |
| Студент 10 | 05-605 | 7 | 3 | 9 | 16 | 64 |
| Студент 11 | 05-604 | 3 | 2 | 13 | 12 | 48 |
| Студент 12 | 05-605 | 7 | 3 | 10 | 15 | 60 |
| Студент 13 | 05-605 | 3 | 2 | 13 | 12 | 48 |
| Студент 14 | 05-604 | 3 | 2 | 11 | 14 | 56 |
| Студент 15 | 05-605 | 15 | 4 | 9 | 16 | 64 |
| Студент 16 | 05-604 | 7 | 3 | 13 | 12 | 48 |
| Студент 17 | 05-605 | 7 | 3 | 10 | 15 | 60 |
| Студент 18 | 05-604 | 23 | 5 | 6 | 19 | 76 |
| Студент 19 | 05-605 | 23 | 5 | 9 | 16 | 64 |
| Студент 20 | 05-605 | 23 | 5 | 11 | 14 | 56 |
| Студент 21 | 06-605 | 7 | 3 | 14 | 11 | 44 |
| Студент 22 | 05-604 | 15 | 4 | 6 | 19 | 76 |
| Студент 23 | 05-604 | 3 | 2 | 11 | 14 | 56 |
| Студент 24 | 05-605 | 3 | 2 | 14 | 11 | 44 |
| Студент 25 | 05-604 | 7 | 3 | 8 | 17 | 68 |
| Студент 26 | 05-604 | 23 | 5 | 4 | 21 | 84 |
| Студент 27 | 05-605 | 13 | 4 | 9 | 16 | 64 |
| Студент 28 | 05-504 | 7 | 3 | 8 | 17 | 68 |
| Студент 29 | 05-605 | 7 | 3 | 13 | 12 | 48 |
| Студент 30 | 05-604 | 3 | 2 | 14 | 11 | 44 |
| Студент 31 | 05-604 | 7 | 3 | 7 | 18 | 72 |
| Студент 32 | 05-604 | 6 | 3 | 13 | 12 | 48 |

Приложение 6

| Тест "Понятийное мышление" | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Студенты** | **Группа** | **Ошибки** | **Правильных от** | % выполнения |
| Студент 1 | 05-604 | 7 | 13 | 65 |
| Студент 2 | 05-604 | 3 | 17 | 85 |
| Студент 3 | 05-605 | 10 | 10 | 50 |
| Студент 4 | 05-605 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 5 | 05-604 | 5 | 15 | 75 |
| Студент 6 | 05-604 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 7 | 05-605 | 11 | 9 | 45 |
| Студент 8 | 05-605 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 9 | 05-604 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 10 | 05-605 | 12 | 8 | 40 |
| Студент 11 | 05-604 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 12 | 05-605 | 7 | 13 | 65 |
| Студент 13 | 05-605 | 10 | 10 | 50 |
| Студент 14 | 05-604 | 11 | 9 | 45 |
| Студент 15 | 05-605 | 5 | 15 | 75 |
| Студент 16 | 05-604 | 12 | 8 | 40 |
| Студент 17 | 05-605 | 14 | 6 | 30 |
| Студент 18 | 05-604 | 2 | 18 | 90 |
| Студент 19 | 05-605 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 20 | 05-605 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 21 | 06-605 | 2 | 18 | 90 |
| Студент 22 | 05-604 | 3 | 17 | 85 |
| Студент 23 | 05-604 | 6 | 14 | 70 |
| Студент 24 | 05-605 | 6 | 14 | 70 |
| Студент 25 | 05-604 | 4 | 16 | 80 |
| Студент 26 | 05-604 | 1 | 19 | 95 |
| Студент 27 | 05-605 | 6 | 14 | 70 |
| Студент 28 | 05-504 | 10 | 10 | 50 |
| Студент 29 | 05-605 | 5 | 15 | 75 |
| Студент 30 | 05-604 | 12 | 8 | 40 |
| Студент 31 | 05-604 | 7 | 13 | 65 |
| Студент 32 | 05-604 | 7 | 13 | 65 |

Приложение 7

| Тест "Пространственное воображение" | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Студенты** | **Группа** | **Правильных о** | Ошибки | % выполнения |
| Студент 1 | **05-604** | 19 | 1 | 95 |
| Студент 2 | 05-605 | 18 | 2 | 90 |
| Студент 3 | 05-605 | 18 | 2 | 90 |
| Студент 4 | 05-605 | 18 | 2 | 90 |
| Студент 5 | 05-605 | 17 | 3 | 85 |
| Студент 6 | 05-604 | 17 | 3 | 85 |
| Студент 7 | 05-604 | 16 | 4 | 80 |
| Студент 8 | 05-605 | 16 | 4 | 80 |
| Студент 9 | 05-605 | 16 | 4 | 80 |
| Студент 10 | 05-605 | 15 | 5 | 75 |
| Студент 11 | 05-604 | 15 | 5 | 75 |
| Студент 12 | 05-604 | 15 | 5 | 75 |
| Студент 13 | 05-604 | 15 | 5 | 75 |
| Студент 14 | 05-604 | 14 | 6 | 70 |
| Студент 15 | 05-604 | 14 | 6 | 70 |
| Студент 16 | 05-605 | 14 | 6 | 70 |
| Студент 17 | 05-604 | 13 | 7 | 65 |
| Студент 18 | 05-604 | 13 | 7 | 65 |
| Студент 19 | 06-605 | 13 | 7 | 65 |
| Студент 20 | 05-604 | 13 | 7 | 65 |
| Студент 21 | 05-604 | 13 | 7 | 65 |
| Студент 22 | 05-605 | 12 | 8 | 60 |
| Студент 23 | 05-605 | 11 | 9 | 55 |
| Студент 24 | 05-605 | 11 | 9 | 55 |
| Студент 25 | 05-604 | 10 | 10 | 50 |
| Студент 26 | 05-604 | 10 | 10 | 50 |
| Студент 27 | 05-604 | 10 | 10 | 50 |
| Студент 28 | 05-604 | 9 | 11 | 45 |
| Студент 29 | 05-605 | 8 | 12 | 40 |
| Студент 30 | 05-605 | 7 | 13 | 35 |
| Студент 31 | 05-504 | 6 | 14 | 30 |
| Студент 32 | 05-605 | 4 | 16 | 20 |

Приложение 8

| **Тест "ЛОГО"** | | | |
|---|---|---|---|
| **Студенты** | **Группа** | **Правильных ответов** | **% выполнения** |
| Студент 1 | 05-604 | 19 | 53 |
| Студент 2 | 05-604 | 15 | 42 |
| Студент 3 | 05-605 | 13 | 36 |
| Студент 4 | 05-605 | 22 | 61 |
| Студент 5 | 05-604 | 15 | 42 |
| Студент 6 | 05-604 | 16 | 44 |
| Студент 7 | 05-605 | 22 | 61 |
| Студент 8 | 05-605 | 22 | 61 |
| Студент 9 | 05-604 | 17 | 47 |
| Студент 10 | 05-605 | 19 | 53 |
| Студент 11 | 05-604 | 21 | 58 |
| Студент 12 | 05-605 | 19 | 53 |
| Студент 13 | 05-605 | 22 | 61 |
| Студент 14 | 05-604 | 17 | 47 |
| Студент 15 | 05-605 | 20 | 56 |
| Студент 16 | 05-604 | 22 | 61 |
| Студент 17 | 05-605 | 21 | 58 |
| Студент 18 | 05-604 | 19 | 53 |
| Студент 19 | 05-605 | 22 | 61 |
| Студент 20 | 05-605 | 23 | 64 |
| Студент 21 | 06-605 | 18 | 50 |
| Студент 22 | 05-604 | 18 | 50 |
| Студент 23 | 05-604 | 17 | 47 |
| Студент 24 | 05-605 | 22 | 61 |
| Студент 25 | 05-604 | 21 | 58 |
| Студент 26 | 05-604 | 19 | 53 |
| Студент 27 | 05-605 | 14 | 39 |
| Студент 28 | 05-504 | 17 | 47 |
| Студент 29 | 05-605 | 19 | 53 |
| Студент 30 | 05-604 | 12 | 33 |
| Студент 31 | 05-604 | 21 | 58 |
| Студент 32 | 05-604 | 20 | 56 |

Приложение 9
Результаты контрольных и зачетного тестов

| уденты | уппа | ст 1 п.1 | ст 1.п.2 | ст 2.п.1 | ст 2 п.2 | ст 3 п.1 | ст 3.п.2 | ст 4.п.1 | ст 4 п.2 | ст 5 п.1 | ст 5.п.2 | ст 6.п.1 | ст 6 п.2 | ст 7 п.1 | ст 7.п.2 | ст 8.п.1 | ст 8 п.2 | ст 9 п.1 | ст 9.п.2 | четный тест | четный тест, % | еднее по тестам 1-9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Студент 1 | 05-604 | 7 | 7,1 | 8,2 | 8,17 | 5,28 | 8,13 | 8,89 | 8,89 | 6,46 | 7,75 | 6 | 6 | 7,5 | 7,5 | 10 | 10 | 4,67 | 7,17 | 24,24 | 48,48 | 7,538125 |
| Студент 2 | 05-604 | 8 | 7,63 | 8,2 | 8,23 | 4,17 | 5,83 | 6,94 | 6,94 | 5,75 | 5,75 | 5,17 | 8,5 | 6,17 | 6,33 | 9 | 9 | 5,5 | 6,33 | 24,24 | 48,48 | 6,738125 |
| Студент 3 | 05-605 | 7 | 7,2 | 6,1 | 7,75 | 5,83 | 5,83 | 6,2 | 7,78 | 1,57 | 5,61 | 5,5 | 7,08 | 5,67 | 6,13 | 9 | 9 | 5 | 5 | 37,73 | 75,46 | 6,190625 |
| Студент 4 | 05-605 | 8 | 7,9 | 8 | 8 | 6,11 | 6,11 | 5,93 | 7,41 | 6,25 | 6,25 | 2,75 | 5,83 | 7,13 | 7,13 | 7,67 | 7,67 | 7,67 | 7,67 | 35,23 | 70,46 | 6,72375 |
| Студент 5 | 55004 | 6 | 8,5 | 8,5 | 10 | 6,67 | 6,67 | 4,81 | 8,52 | 6,5 | 6,5 | 7,25 | 7,25 | 5,42 | 5,42 | 8,5 | 8,5 | 4,58 | 5,33 | 34,09 | 68,18 | 6,90125 |
| Студент 6 | 05-604 | 8 | 9,6 | 10 | 10 | 7,5 | 7,5 | 8,89 | 9,63 | 8,25 | 8,79 | 5,08 | 9 | 8,67 | 9,33 | 7,08 | 9 | 7,25 | 9,67 | 48,18 | 96,36 | 8,4775 |
| Студент 7 | 05-605 | 8 | 7,9 | 7,5 | 7,45 | - | - | 8,33 | 8,33 | - | - | - | - | 6,17 | 6,17 | 4,08 | 4,08 | 6,17 | 6,17 | 35,61 | 71,22 | 6,445 |
| Студент 8 | 55004 | 8 | 7,9 | 8,5 | 8,5 | 5,83 | 5,83 | 8,89 | 8,89 | 8,61 | 8,61 | 7,67 | 7,67 | 8,5 | 8,5 | 9 | 9 | 4,42 | 4,75 | 36,36 | 72,72 | 7,698125 |
| Студент 9 | 05-604 | 9 | 8,9 | 9,8 | 9,75 | 5 | 7,5 | 7,78 | 7,78 | 7 | 8 | 7,83 | 7,83 | 7,1 | 7,1 | 9 | 9 | 5,67 | 5,67 | 43,94 | 87,88 | 7,613125 |
| Студент 10 | 05-605 | 9 | 9,3 | 8 | 9,5 | 6,67 | 6,67 | 7,41 | 7,78 | 8,5 | 8,86 | 9 | 9 | 6,22 | 6,22 | 9 | 9 | 4,67 | 4,67 | 39,39 | 78,78 | 7,573125 |
| Студент 11 | 05-604 | 7 | 7,1 | 9,2 | 9,17 | 5,07 | 5,07 | 7,41 | 7,41 | 5,75 | 5,75 | 8,83 | 8,83 | 6,25 | 8,33 | 4,25 | 8 | 4,25 | 5,83 | 14,39 | 28,78 | 6,8375 |
| Студент 12 | 05-605 | 8 | 9,1 | 9,4 | 9,42 | 9,17 | 9,17 | 6,67 | 7,59 | 4,43 | 8,29 | 7,33 | 9 | 9,17 | 9,17 | 10 | 10 | 6 | 7,17 | 43,94 | 87,88 | 8,24875 |
| Студент 13 | 05-605 | 7 | 6,9 | 8 | 7,95 | 2,78 | 2,78 | 3,43 | 3,43 | 6 | 6 | 4 | 4 | - | 4,63 | 5,92 | 5,92 | - | - | 45,45 | 90,9 | 4,987692 |
| Студент 14 | 05-604 | 9 | 8,9 | 9,8 | 9,75 | 4,17 | 5 | 7,41 | 7,41 | 5,75 | 6,86 | 5,33 | 7,5 | 6,63 | 7,33 | 9 | 9 | 6,5 | 9 | 31,82 | 63,64 | 7,2775 |
| Студент 15 | 55004 | 8 | 9,1 | 9,8 | 9,75 | - | 6,67 | 7,69 | 9,07 | 6,14 | 6,14 | 5,67 | 6,33 | 8,42 | 8,42 | 7 | 10 | 6,67 | 6,67 | 40,91 | 81,82 | 7,629333 |
| Студент 16 | 05-605 | 5 | 9,1 | 9 | 10 | 6,67 | 9,17 | 7,04 | 8,89 | 5,93 | 8,43 | 7,17 | 8,17 | 7,75 | 9,25 | 9 | 10 | 5,33 | 8,33 | 40,91 | 81,82 | 8,133125 |
| Студент 17 | 05-604 | 9 | 9,6 | 9,8 | 10 | 5 | 7,5 | 8,15 | 8,15 | 10 | 10 | 10 | 10 | 8,83 | 8,83 | 10 | 10 | 8,33 | 8,33 | 34,85 | 69,7 | 8,9325 |
| Студент 18 | 05-605 | 7 | 8,5 | 8,5 | 9,75 | 5,97 | 8,89 | 6,85 | 8,89 | 7,07 | 7,07 | 9,67 | 9,67 | 7,58 | 9,25 | - | 7,25 | 8,33 | 8,33 | 47,73 | 95,46 | 8,204667 |
| Студент 19 | 55004 | 9 | 8,9 | 8,2 | 8,2 | - | - | 5,93 | 5,93 | 8,75 | 8,75 | 5 | 5 | 5,1 | 5,1 | 4,42 | 4,42 | - | 3,58 | 34,85 | 69,7 | 6,029231 |
| Студент 20 | 05-605 | 8 | 9,1 | 9,4 | 9,42 | 7,5 | 7,5 | 6,76 | 7,04 | 5,43 | 8,43 | 7 | 7 | 10 | 10 | - | 10 | - | 7,67 | 36,36 | 72,72 | 8,082143 |
| Студент 21 | 05-604 | 8 | 8,1 | 7,5 | 7,5 | 3,4 | 7,5 | 8,52 | 8,52 | 5,32 | 5,32 | 8,17 | 8,17 | 4,5 | 6 | 6,42 | 7,25 | 4,42 | 5,83 | 36,36 | 72,72 | 6,52125 |
| Студент 22 | 05-605 | 5 | 5,4 | 7,9 | 7,93 | 3,06 | 3,06 | 8,33 | 8,33 | 6,04 | 6,04 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 5,75 | 5,75 | 4,25 | 5,17 | 31,82 | 63,64 | 5,850625 |
| Студент 23 | 05-604 | 5 | 9,4 | 9,8 | 10 | 7,5 | 9,17 | 8,52 | 8,89 | 5,75 | 6 | 9 | 9,17 | 8 | 8 | 10 | 10 | 7,17 | 7,17 | 45,45 | 90,9 | 8,38375 |
| Студент 24 | 17.1-617 | 9 | 8,5 | 9,8 | 9,75 | 6,67 | 6,67 | 8,15 | 8,15 | 6,46 | 9 | 9,5 | 9,5 | 6,63 | 6,63 | 9 | 9 | 6,17 | 6,17 | 36,36 | 72,72 | 7,953125 |
| Студент 25 | 05-605 | 8 | 7,7 | 7,8 | 7,83 | 8,13 | 8,13 | 7,78 | 7,78 | 4,71 | 4,71 | 7,42 | 7,42 | 5,33 | 5,83 | 7 | 7 | 5 | 9,33 | 36,36 | 72,72 | 6,95 |
| Студент 26 | 05-604 | 8 | 8,5 | 9,8 | 9,75 | 6,88 | 9,72 | 8,52 | 8,89 | 9,75 | 9,75 | 8,67 | 8,67 | 9 | 9 | - | 9,33 | 7,33 | 7,33 | 40,91 | 81,82 | 8,826 |
| Студент 27 | 05-605 | 6 | 6,2 | 7,9 | 7,92 | 2,71 | 2,71 | 5,93 | 5,93 | 3,79 | 3,79 | 7,08 | 7,08 | 4,33 | 4,33 | 7,42 | 7,42 | 6,67 | 6,67 | 36,36 | 72,72 | 5,73 |
| Студент 28 | 05-605 | 6 | 6,7 | 9,3 | 9,25 | 5,83 | 5,83 | 7,41 | 8,89 | 7,25 | 7,25 | 7,08 | 9 | 6,08 | 7,33 | 8,75 | 8,75 | 6 | 6 | 32,95 | 65,9 | 7,5 |
| Студент 29 | 05-604 | 9 | 8,6 | 7,7 | 9,75 | 3,26 | 7,5 | 5 | 8,15 | 6,14 | 6,14 | 7,17 | 7,17 | 3,5 | 4,93 | 7,17 | 7,17 | - | 5,33 | 28,03 | 56,06 | 6,405333 |
| Студент 30 | 05-604 | 6 | 7,17 | 8,8 | 8,75 | 5 | 8,26 | 7,04 | 7,41 | 9,75 | 9,75 | 8,17 | 8,17 | 9 | 9 | - | 8 | 6,67 | 6,67 | 25,76 | 51,52 | 8,029333 |
| Студент 31 | 55004 | 10 | 9,6 | 10 | 10 | 5 | 7,5 | 9,26 | 9,26 | 9,25 | 9,25 | 9 | 9 | 8,5 | 8,5 | 6,83 | 8 | 6,33 | 8 | 32,58 | 65,16 | 8,355 |
| | Среднее | 7,580645 | 8,196774 | 8,716129 | 9,006129 | 5,601071 | 6,823103 | 7,286129 | 7,934194 | 6,611667 | 7,294667 | 7,100333 | 7,750333 | 6,955 | 7,264194 | 7,787407 | 8,274516 | 5,963704 | 6,700333 | 35,90839 | | |