Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. Лобачевского

Кафедра математического анализа

Направление: Математика и компьютерные науки

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

«Последовательные критерии проверки гипотез о трендах»

Студент 4 курса

группы 05-404

« » __________ 2018г. __________ Ахметшин Ф.Р.

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., асс. каф. мат. анализа

« » __________ 2018г. __________ Новиков А.А.

Заведующий кафедрой:

д.ф.-м.н., проф.

« » __________ 2018г. __________ Насыров С.Р.

Казань 2018

# Содержание

# 1. Введение

Стереотипными задачами, стоящими перед математической статистикой, являются задачи о проверке гипотез. В самых общих чертах, в классической постановке задачи о проверке гипотезы по фиксированной выборке $\{x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n\}$ из генеральной совокупности проверяется гипотеза $H_0$ о генеральной совокупности. Обычно при этом, если гипотеза $H_0$ отвергается, то принимается ее альтернатива $H_1$.

В противовес, при последовательной проверке статистических гипотез, объем выборки не фиксирован. Мы обладаем процедурой «измерения», которая дополняет выборку на один элемент, а процедура последовательной проверки гипотезы состоит из двух компонент: правила остановки и правила принятия решения.

Главным вопросом последовательного статистического анализа является вопрос о том, как минимизировать выборку не потеряв при этом точность критерия. Этот вопрос возникает естественно при планировании экспериментов и является вопросом лежащим на стыке теории оптимизации и математической статистики.

Еще одним вопросом, который возникает на уровне приложения известных статистических критериев, в том числе классических, на практике является вопрос о нахождении наилучших критических значений, которые бы обеспечивали минимизацию ошибок первого и второго рода. В теоретических работах иногда постулируется существование таких критических значений без практического руководства по аналитическому нахождению этих критических значений. В таких случаях возможно применять экспериментальные методы для нахождения подходящих параметров.

В данной работе мы рассматриваем два вида в определенном смысле сходных ситуаций: в первом случае мы проверяем равен ли параметр биномиального распределения $1/2$ или нет, а во втором проверяем гипотезу о наличии или отсутствии тренда.

# 2. Гипотеза о значении параметра биномиального распределения

Пусть $x_1$,$x_2$,...,$x_n$- независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие биномиальное распределение с параметрами $p$ и $n$:

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Необходимо проверить гипотезу (при уровне значимости $\alpha$) о числовом значении $p_0$ параметра $p$ биномиального распределения $H_0$: $p$=$p_0$, против альтернативы $H_1$: $p \neq p_0$. Критическое значение статистики при достаточно большом $n$ вычисляется с применением нормальной аппроксимации по формуле

$$Z=\frac{p^{'}-np_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)n}}$$

где $p^{'}$ – частота появления интересующего нас значения случайной биномиальной величины в последовательности из $n$ испытаний.

По центральной предельной теореме при достаточно больших $n$ величина $Z$ распределена нормально со средним 0 и дисперсией 1.

Решающее правило использует статистику критерия $Z$ и имеет вид:

$$\text{принимается гипотеза}\begin{cases} H_0, \text{ если } \mid Z \mid \leq \triangle(\varepsilon), \\ H_1, \text{ если } \mid Z \mid > \triangle(\varepsilon), \end{cases}$$

где $\triangle(\varepsilon)$ – квантиль уровня 1–$\alpha/2$ стандартного нормального распределения $u_{1-\alpha/2}$.

Если рассматривается односторонняя альтернатива $p$>$p_0$, то $H_1$ отклоняется при $Z \geq \triangle(1-\alpha)$, а для альтернативы $p$<$p_0$ $H_1$ отклоняется при $Z \leq \triangle(\alpha)$.

Взяв за основу критерий, изложенный в предыдущем разделе составим следующее правило остановки и правило принятия решения.

Обозначим за $Z_n$ параметр $Z$, рассчитанный для выборки $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Останавливаем проведение эксперимента, если

$$Z_n \le Z_{n-1} \le Z_{n-2} \le \dots \le Z_{n-m},$$
$$\text{или } Z_n = 0, \text{ или}$$
$$Z_n \ge Z_{n-1} \ge Z_{n-2} \ge \dots \ge Z_{n-k}.$$

Принимаем $H_0$, если

$$\begin{cases} Z_n \le Z_{n-1} \le Z_{n-2} \le \dots \le Z_{n-m} \le \triangle(\varepsilon), \\ \text{или } Z_n = 0, \end{cases}$$

принимаем $H_1$, если

$$Z_n \ge Z_{n-1} \ge Z_{n-2} \ge \dots \ge Z_{n-k} > \triangle(\varepsilon).$$

Такой критерий, не претендует на оптимальность, однако демонстрирует работоспособность варьирование $m$ и $k$ в указанном критерии будет менять количество ложноположительных и ложноотрицательных результатов работы критерия.

| $(k, m)$ | (Среднее число испытаний, доля ложноотриц, доля ложнополож.) |
|---|---|
| (2,2) | (3.3804, 0.0758, 0.6162) |
| (3,3) | (5.2444, 0.0528, 0.4782) |
| (4,4) | (7.3164, 0.038, 0.3628) |
| (5,5) | (9.2614, 0.0284, 0.2816) |
| (6,6) | (10.4574, 0.023, 0.1948) |
| (7,7) | (13.1628, 0.0196, 0.1496) |
| (8,8) | (14.5106, 0.0142, 0.1254) |
| (9,9) | (16.7038, 0.0124, 0.0934) |
| (10,10) | (17.0712, 0.0094, 0.071) |

# 3. Проверка гипотезы о тренде для гауссовских процессов

Среди прочих ситуаций, в которых существенна именно последовательная проверка гипотез выделяются гипотезы о наличии или отсутствии тренда. В рамках математической теории вопрос выглядит следующим образом, пусть $\xi_n$ - гауссовский случайный процесс с дискретным временем, необходимо выяснить является ли процесс мартингалом, субмартингалом или супермартингалом.

Мартингал случайный процесс предсказанием поведения которого в будущем является его настоящее состояние.

$H_0 : \xi_n-$ мартингал,

$H_1 : \xi_n-$ субмартингал или супермартингал.

Если $\xi_n$ является мартингалом, то $E\xi_n = const$. Положим, что $\xi_n - \xi_{n-1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, тогда

$$\xi_n - \xi_0 = \xi_n - \xi_{n-1} + \xi_{n-1} - \xi_{n-2} + \cdots + \xi_1 - \xi_0 \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

и

$$\frac{\xi_n - \xi_0}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Кроме того,

$$\xi_n + \cdots + \xi_1 - n\xi_0 = (\xi_n - \xi_0) + \cdots + (\xi_1 - \xi_0) \sim N((n + \cdots + 1)\mu, (n + \cdots + 1)\sigma^2),$$

а следовательно

$$\frac{\xi_n + \xi_{n-1} + \cdots + \xi_1}{n} - \xi_0 \sim N(\frac{n(n+1)}{2n}\mu, \frac{(n+1)n}{2n^2}\sigma^2),$$

откуда

$$\frac{2}{n+1}(\frac{\xi_n + \cdots + \xi_1}{n} - \xi_0) \sim N(\mu, \frac{2\sigma^2}{n(n+1)})$$

В качестве статистик критерия возьмем

$$\theta_n = \frac{2}{n+1}(\frac{x_n + \cdots + x_1}{n} - x_0) \text{ и } \sigma_n = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n/4}(x_{4k} + x_{4k-3} - x_{4k-1} - x_{4k-2})^2}.$$

Первая величина сходится к $\mu$, вторая величина сходится к $\sigma$. Воспользуемся этим для построения критерия.

Мы совершаем остановку и принимаем гипотезу $H_1$, если

$$\frac{3\sigma_n}{\sqrt{n}} < |\theta_n|,$$

гипотезу $H_0$ мы принимаем, если

$$|\theta_n| < \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}(1 - \frac{3}{\sqrt{n+1}}).$$

Если оба условия выполняются одновременно или не выполняется ни одно из условий, то мы продолжаем эксперимент.

Экспериментальная проверка частоты правильных выводов критерия при изменении соотношения $\mu/\sigma > 0$

| | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | 0.215 | 0.233 | 0.221 | 0.263 | 0.290 | 0.367 | 0.374 | 0.398 | 0.390 | 0.436 |
| .1 | 0.472 | 0.490 | 0.510 | 0.522 | 0.504 | 0.547 | 0.561 | 0.567 | 0.589 | 0.635 |
| .2 | 0.626 | 0.641 | 0.664 | 0.707 | 0.689 | 0.711 | 0.746 | 0.730 | 0.742 | 0.734 |
| .3 | 0.758 | 0.776 | 0.757 | 0.789 | 0.799 | 0.812 | 0.822 | 0.845 | 0.838 | 0.842 |
| .4 | 0.861 | 0.857 | 0.874 | 0.868 | 0.880 | 0.873 | 0.905 | 0.899 | 0.919 | 0.899 |
| .5 | 0.903 | 0.921 | 0.937 | 0.943 | 0.945 | 0.945 | 0.948 | 0.941 | 0.953 | 0.950 |
| .6 | 0.953 | 0.958 | 0.975 | 0.967 | 0.964 | 0.968 | 0.972 | 0.972 | 0.973 | 0.972 |
| .7 | 0.975 | 0.988 | 0.977 | 0.983 | 0.987 | 0.987 | 0.980 | 0.985 | 0.985 | 0.986 |
| .8 | 0.990 | 0.992 | 0.989 | 0.991 | 0.992 | 0.991 | 0.995 | 0.989 | 0.996 | 0.993 |
| .9 | 0.999 | 0.995 | 0.996 | 0.992 | 0.995 | 0.997 | 0.993 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

Количество шагов в среднем затраченное на проверку гипотезы при изменении соотношения $\mu/\sigma > 0$

| | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | 247 | 205 | 219 | 212 | 266 | 237 | 195 | 168 | 169 | 161 |
| .1 | 161 | 142 | 124 | 110 | 108 | 97 | 92 | 95 | 98 | 83 |
| .2 | 82 | 78 | 72 | 68 | 69 | 65 | 62 | 56 | 56 | 56 |
| .3 | 52 | 54 | 50 | 50 | 44 | 47 | 45 | 42 | 42 | 39 |
| .4 | 41 | 37 | 35 | 35 | 36 | 35 | 34 | 31 | 30 | 30 |
| .5 | 29 | 29 | 28 | 26 | 26 | 26 | 25 | 26 | 24 | 24 |
| .6 | 23 | 23 | 22 | 22 | 22 | 20 | 21 | 21 | 19 | 20 |
| .7 | 20 | 18 | 19 | 17 | 18 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| .8 | 16 | 16 | 16 | 16 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 |
| .9 | 14 | 14 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 12 | 13 | 12 |
| 1.0 | 12 | 12 | 12 | 12 | 11 | 11 | 12 | 11 | 11 | 11 |
| 1.1 | 11 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |

Доля правильных выводов критерия при изменении среднеквадратического отклонения $\sigma$ при условии, что верна гипотеза $H_0$.

| | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.696 | 0.698 | 0.709 | 0.718 | 0.703 | 0.700 | 0.707 | 0.716 | 0.727 | 0.696 |
| 1 | 0.729 | 0.715 | 0.669 | 0.715 | 0.676 | 0.699 | 0.730 | 0.724 | 0.711 | 0.717 |
| 2 | 0.718 | 0.733 | 0.721 | 0.723 | 0.718 | 0.716 | 0.695 | 0.716 | 0.719 | 0.722 |

Количество шагов в среднем затраченных на проверку гипотезы при измнении среднеквадратического отклонения $\sigma$ при условии, что верна гипотеза $H_0$

| | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 | .10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 272 | 220 | 244 | 199 | 223 | 183 | 171 | 236 | 176 | 178 |
| 2 | 253 | 208 | 172 | 190 | 237 | 201 | 211 | 184 | 217 | 202 |
| 3 | 205 | 198 | 202 | 196 | 213 | 224 | 195 | 223 | 208 | 191 |

Изменим немного правила остановки. Мы совершаем остановку и принимаем гипотезу $H_1$, если

$$\frac{4\sigma_n}{\sqrt{n}} < |\theta_n|,$$

гипотезу $H_0$ мы принимаем, если

$$|\theta_n| < \frac{2\sigma_n}{\sqrt{n}}(1 - \frac{3}{\sqrt{n+1}}).$$

Тогда меняются и характеристики работы этого критерия.

Частоты правильных выводов критерия при изменении соотношения $\mu/\sigma > 0$

| | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | 0.145 | 0.139 | 0.153 | 0.127 | 0.165 | 0.190 | 0.189 | 0.239 | 0.242 | 0.249 |
| .1 | 0.293 | 0.285 | 0.305 | 0.309 | 0.363 | 0.366 | 0.404 | 0.382 | 0.440 | 0.445 |
| .2 | 0.453 | 0.502 | 0.496 | 0.524 | 0.516 | 0.561 | 0.558 | 0.569 | 0.618 | 0.621 |
| .3 | 0.651 | 0.651 | 0.688 | 0.675 | 0.700 | 0.707 | 0.728 | 0.726 | 0.740 | 0.767 |
| .4 | 0.753 | 0.819 | 0.781 | 0.825 | 0.812 | 0.810 | 0.827 | 0.823 | 0.838 | 0.853 |
| .5 | 0.849 | 0.873 | 0.876 | 0.868 | 0.891 | 0.890 | 0.910 | 0.880 | 0.909 | 0.927 |
| .6 | 0.924 | 0.927 | 0.930 | 0.930 | 0.933 | 0.936 | 0.940 | 0.938 | 0.961 | 0.960 |
| .7 | 0.959 | 0.961 | 0.959 | 0.969 | 0.962 | 0.972 | 0.969 | 0.977 | 0.978 | 0.982 |
| .8 | 0.966 | 0.984 | 0.981 | 0.989 | 0.984 | 0.986 | 0.984 | 0.990 | 0.993 | 0.992 |
| .9 | 0.991 | 0.988 | 0.996 | 0.996 | 0.994 | 0.992 | 0.997 | 0.990 | 0.993 | 0.996 |
| 1.0 | 0.995 | 0.995 | 0.994 | 0.999 | 0.996 | 0.999 | 0.996 | 0.996 | 0.998 | 0.995 |
| 1.1 | 0.996 | 0.995 | 0.999 | 0.998 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | 0.999 | 0.998 |

Количество шагов в среднем затраченное на проверку гипотезы при изменении соотношения $\mu/\sigma > 0$

| | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | 77 | 91 | 98 | 139 | 145 | 145 | 151 | 123 | 124 | 145 |
| .1 | 151 | 142 | 125 | 120 | 114 | 112 | 111 | 96 | 103 | 100 |
| .2 | 98 | 97 | 92 | 83 | 81 | 85 | 75 | 75 | 75 | 76 |
| .3 | 70 | 70 | 70 | 67 | 66 | 65 | 60 | 58 | 55 | 57 |
| .4 | 57 | 57 | 51 | 53 | 52 | 49 | 49 | 46 | 45 | 48 |
| .5 | 42 | 45 | 42 | 41 | 40 | 38 | 38 | 38 | 36 | 35 |
| .6 | 34 | 35 | 33 | 33 | 32 | 31 | 31 | 29 | 29 | 29 |
| .7 | 28 | 28 | 28 | 29 | 25 | 25 | 24 | 26 | 24 | 24 |
| .8 | 23 | 23 | 23 | 22 | 22 | 22 | 22 | 21 | 21 | 20 |
| .9 | 20 | 19 | 19 | 19 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 17 |
| 1.0 | 18 | 17 | 16 | 16 | 16 | 15 | 15 | 16 | 15 | 15 |
| 1.1 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 |

Также меняется и доля правильных выводов критерия при изменении среднеквадратического отклонения $\sigma$ при условии, что верна гипотеза $H_0$

| | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.828 | 0.828 | 0.843 | 0.834 | 0.860 | 0.834 | 0.848 | 0.844 | 0.845 | 0.848 |
| 1 | 0.852 | 0.866 | 0.848 | 0.844 | 0.841 | 0.852 | 0.863 | 0.845 | 0.861 | 0.853 |
| 2 | 0.817 | 0.866 | 0.840 | 0.850 | 0.862 | 0.830 | 0.846 | 0.873 | 0.854 | 0.838 |

Количество шагов в среднем затраченных на проверку гипотезы при измнении среднеквадратического отклонения $\sigma$ при условии, что верна гипотеза $H_0$

| | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 72 | 66 | 66 | 67 | 68 | 58 | 58 | 76 | 63 | 74 |
| 2 | 73 | 60 | 73 | 69 | 63 | 59 | 67 | 79 | 80 | 72 |
| 3 | 75 | 69 | 76 | 64 | 66 | 77 | 62 | 68 | 61 | 64 |

# 4. Заключение

Полученные критерии в значительном ориентированы на нахождение трендов, обнаруживая даже самые незначительные отклонения в сотню раз меньшие, чем случайные флуктуации. Измнение констант в этом критерии также позволяет добиться измнения баланса ложноположительных и ложноотрицательных ответов и переориентировать на китерий на опровержение наличия тренда.

# Список литературы


[1] М. Д. Степанова, Учебно –методическое пособие по курсу "Статистические основы индуктивного вывода"для студентов специальности "Искусственный интеллект". Минск.: 2000. 43 с.

[2] Ан.А. Новиков , П.А . Новиков, Ан.Ан.Новиков, Введение в последовательный статистический анализ. Казань.: 2015. 31 с.

[3] Л.Б. Коралов, Я.Г. Синай, Теоория вероятностей и случайные процессы // Пер. с англ. Э. В. Переходцевой. — М.: МЦНМО, 2013. — 407 с.

[4] Боровков А. Теория вероятностей: учеб. пособие для вузов. Изд. 5-е, перераб. и доп. - М.: URSS, 2009. - 652 с

# Приложение.

Данная программа принимает или не принимает гипотезу о правильности монеты, за определенное количество испытаний .

```
import random
import math
import csv
from scipy import stats
import numpy as np

p0=0.5
h0=0
h1=0
n=0
k=0
c=0
l=5 # Калибровка монеты
countH1=0 # Счетчик количества гипотез H1
countH0=0 # Счетчик количества гипотез H0
t1=1
t2=1
x0=2 #Задание количества повторений k
y0=2 #Задание количества повторений m
a=0.05 #уровень значимости
ns=0
while c<5000:
    while (h0<x0) & (h1<y0) & (t2>0):
        n=n+1
        if random.uniform(0,10)<l: #генерация случайных чисел
            k += 1
        v=(k-n*p0)/(pow((n*(1-p0)*p0),0.5)) #Вычисляем значение статис
```

```
        e=stats.norm.ppf(1-a/2) # функция ppf находить квантиль
        if math.fabs(v/e)>t1: #проверка, что ...|z|/Z(кр)>1
            t1=math.fabs(v/e)
            t2=1
            h0 = 0
            h1 +=1
        if math.fabs(v/e)<t2: # п, что ...|z|/Z(кр)<1
            t2 = math.fabs(v / e)
            t1=1
            h1 = 0
            h0 += 1
        if h1>=x0:
            countH1+=1
        if h0>=y0 or t2==0:
            countH0+=1
    ns=ns+n
    n=0
    h0=0
    h1=0
    c+=1
    k=0
    t1 = 1
    t2 = 1
ns=ns/5000 # Среднее число итераций
lo=countH1/5000 #доля ложноотрицательных выводов
lp=countH0/5000 #доля ложноположительных выводов

outfile = open('test1.csv', 'w')

outfile.write('Монета правильная %2d'% l)
if l==5 else outfile.write('Монета не правильная %2.2f'% l)
outfile.write( '\n')
```

```
outfile.write('(%1d'%x0)
outfile.write(',%1d'%y0)
outfile.write(')')
outfile.write( '\n')
outfile.write('Среднее число n  %2.4f' % ns+'\n')
outfile.write('Правильных выводов  %2d  ' % countH0+'\n')
if l==5 else outfile.write('Правильных выводов  %2d  ' % countH1+'\n')

outfile.write('Ложноотрицательные %2.5f '% lo+'\n')
if l==5 else outfile.write('Ложноположительные %2.5f '% lp+'\n')
outfile.write( '\n')
outfile.close()
```

Программа с проверкой гипотезы о наличии тренда на языке $R$.

```
Table<-0
for(count in 1:1000){
x<-0
mu=0
s=1
sample<-rnorm(4,mu,s)
x[1]<-sample[1]
x[2]<-sample[1]+sample[2]
x[3]<-sample[1]+sample[2]+sample[3]
x[4]<-sample[1]+sample[2]+sample[3]+sample[4]
n<-4
sum<-0
theta<-2/(n+1)*(mean(x)-x[1])
sum<-sum+(x[4]+x[1]-x[3]-x[2])^2
sigma<-sqrt(2/n*sum)
true1<-(3*sigma/sqrt(n)<abs(theta))
true0<-(abs(theta)<sigma/sqrt(n)*(1-3/sqrt(n+1)))
false1<-(3*sigma/sqrt(n)>abs(theta))
```

```
false0<-(abs(theta)>sigma/sqrt(n)*(1-3/sqrt(n+1)))
j=5
while((true0 && true1) || (false0 && false1)){
for(i in 0:3){x[j+i]<-x[j+i-1]+rnorm(1,mu,s)}
n<-n+4
theta<-2/(n+1)*(mean(x)-x[1])
sum<-sum+(x[n]+x[n-3]-x[n-1]-x[n-2])^2
sigma<-sqrt(2/n*sum)
true1<-(3*sigma/sqrt(n)<abs(theta))
true0<-(abs(theta)<sigma/sqrt(n)*(1-3/sqrt(n+1)))
false1<-(3*sigma/sqrt(n)>abs(theta))
false0<-(abs(theta)>sigma/sqrt(n)*(1-3/sqrt(n+1)))
j<-j+4
}
if(true0) {Table[count]<-TRUE} else{Table[count]<-FALSE}
print(Table)
}
```