Р.Р. Шагидуллин

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕТАМАТЕМАТИКИ

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.Р. Шагидуллин

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕТАМАТЕМАТИКИ

КАЗАНЬ
2017

УДК 51.1
ББК 22.1
Ш15

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института ВМ и ИТ Казанского федерального университета

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор **О.А. Задворнов**

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор **Р.З. Даутов;**
доктор философских наук, профессор **Э.М. Хакимов**

Шагидуллин Р.Р.
Ш15 **Рациональные принципы метаматематики** / Р.Р. Шагидуллин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 244 с.

ISBN 978-5-00019-839-1

В книге излагаются принципы, которыми пользуется математик при поиске доказательств теорем и развитии теории.

Предназначается для студентов и аспирантов, специализирующихся по прикладной математике и изучающих курс «Концепции современного естествознания».

УДК 51.1
ББК 22.1

ISBN 978-5-00019-839-1

Оглавление

Предисловие

Основной продукт математического творчества – теоремы и доказательства. «Со времен древних греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство».» (Н. Бурбаки). Сам же процесс творчества организован принципами, которые мы называем рациональными. Первый уровень принципов, которые математик использует при поиске доказательств, изложены в руководствах по решению олимпиадных задач. Системный подход к изложению принципов также был предпринят: принципы объединялись либо в области правдоподобных рассуждений (Д. Пойа), или как область эвристики (Ж. Адамар, А. Пуанкаре, Э. Боне и др).

Цель автора показать, что рациональные принципы математики по мере усложнения материала, ими организуемого, становятся близки к категориям и законам диалектической логики как по форме, так и по содержанию.

Абстрактно сформулированный закон диалектической логики, как, например, закон единства и борьбы противоположностей, мало продвигает математика в решении конкретной проблемы.

Дело в том, что эти законы должны быть «пережиты» математиком и закреплены в его сознании в математических формах. Цель книги — эти формы проявить. Приведем поясняющий пример, сопоставляя высказывания двух выдающихся отечественных математиков.

«Точно так же, смысл математического понятия далеко не содержится в его формальном определении. Не меньше (скорее больше) дает набор основных примеров (как правило, в не очень большом числе), являющихся для математика одновременно и мотивировкой, и содержательным определением, и «смыслом» «понятия»». (И.Р. Шафаревич)

«Занятия совсем общими полуфилософскими размышлениями у меня самого заняли больше времени и энергии, чем, может быть, кажется издали. В такой выработке совсем общих взглядов итог усилий заключается не в формулировке точно фиксированных результатов, а в общей перестройке собственного сознания и размещения всего в надлежащей перспективе». (А.Н. Колмогоров)

В двойственности этих высказываний, в сопоставлении их содержится следующий принцип: необходимо исследовать частные случаи проблемы, аналогичные примеры с тем, чтобы затем путем апостериорных рассуждений, «полуфилософских размышлений», подытоживая результаты в «обобщенно-абстрактных» формулировках, выработать достаточно четкое понимание стратегии проведения доказательства. Только работа над примерами и постоянная рефлексия на результаты позволяет выработать в одном мысленном представлении все факторы, необходимые для создания образа доказательства. Здесь проявляют себя двойственности: «конкретное — абстрактное», «действие — рефлексия на действие».

Надо вообще выработать в себе способность размышлять в двойственности – вот лейтмотив книги. Надо уметь анализировать взаимодействия противополагаемых объектов, оставляя себе «на память» обобщенные выводы в виде принципов.

Принципы сами способны развиваться до теорий, и мы приводим примеры такого развития.

Далее, приводятся разделы классических дисциплин: теории формальных систем, теории метрических и общих топологических пространств. Это диктуется необходимостью. Во-первых, нам нужны примеры «высокого уровня», а не только из «школьной» математики. Во-вторых, только проследив развитие идей на «длинном интервале», можно сформулировать точно и полно некоторые принципы. Наконец, это делает изложение независимым от необходимости заглядывать в соответствующие учебники.

«Опасность не в том, что компьютер однажды начнет мыслить как человек, а в том, что человек однажды начнет мыслить как компьютер». (С.Д. Харрис)

Автор надеется, что эта книга учит мыслить «не как компьютер».

«Машины должны работать. Люди должны думать». Девиз компании IBM.

О содержании книги четкое представление дает оглавление.

Благодарности. В первую очередь я признателен профессору кафедры вычислительной математики КФУ М.М. Карчевскому за его большую помощь при подготовке книги к изданию. Я признателен профессорам кафедры М.Ф. Павловой, Р.З. Даутову, А.О. Задворнову за моральную поддержку автора во время работы над книгой. Наконец, я приношу благодарность студентам, прослушавшим курс лекций по материалам этой книги и предоставившим мне свои записи. Особенная благодарность выпускникам кафедры Г.Н. Дорошкиной и А.А. Соболеву за техническую помощь в оформлении рукописи.

Глава 1

Понимание и доказательство. Основные объекты и идеология этой книги

§ 1. Объект

Объекты, явления, процессы в природе, на которые направлено или которых касается наше мышление, будем называть одним словом «объекты». Гроза, водопад, рождение человека, распад атома, лев, электрон — всё это объекты.

Мы умеем отождествлять и различать объекты, и это вызвано объективными обстоятельствами и сущностными свойствами объектов (и только в этой способности:отождествлять и различать, — только в этом отношении субъекта и объекта мы видим некий оттенок трансцендентальности), например, устойчивостью и повторяемостью.

Объект обладает фундаментальной двойственностью: предметное бытие — идеальное бытие. Пример — деньги. Их предметное бытие — бумажная купюра или металлическая монета. Их идеальное бытие есть та роль, какую они играют в организации жизни общества, товарооборота. Или другой пример. Дверь — это не только прямоугольник из дерева, пластмассы или металла, это и функциональная ее роль в организации замкнутого пространства. Компьютер в руках дикаря-это игрушка из железа, а не средство расчета, например, ожидаемого урожая.

> *«Из чего состоит кот: из одиночества, лежания, умывания, поиска солнышка, мышей и блох».* М. Жванецкий.

В рамках математики фундаментальная двойственность объекта по мере эволюции понятий с ним связанных проявляется чаще всего, как фундаментальная математическая двойственность: пространство — величина. Пространство обусловлено взаиморасположением родственных данному объектов. Величина связана с операторной ролью объекта, его организующей ролью во внешнем (идеальном) бытии, хотя бы в рамках рода.

А вот как определяется *объект* в «философской» литературе. «Словарь философских терминов» М.: Издательство МГУ, 2004.

«*ОБЪЕКТ* — 1) в онтологическом смысле самостоятельный центр бытийной активности; 2) в гносеологическом смысле — то, на что направлена активность субъекта. Объект представляет собой выделенный, относительно обособленный фрагмент реальности, самостоятельно организующий и поддерживающий себя посредством имманентных механизмов воспроизводства (онтологическая трактовка), либо конструируемый познающим субъектом в ходе познавательной деятельности».

§ 2. Понятие

Отношение объекта и субъекта характеризуется через язык: словами, предложениями. Последние формируют понятие об объекте. Понятие словесно характеризует объект, является символом и паспортом объекта и более или менее однозначно возвращает нас к реальности объекта.

Язык — это предмышление, необходимая среда существования понятий. Точная, сжатая, близкая к полноте передача сущности определенного понятия — это одно из основных требований к языку науки. Иногда не логический строй предложения, а метафора точнее передает смысл понятия. Контекст, в котором передается, развивается метафорическое мышление, это литература, поэзия.

Предложение, определяющее понятие, достаточно определенно, чтобы удерживать денотат понятия как центр нашего внимания, удерживать объект как «одно». Но в то же время любое предложение имеет необходимую неопределенность, допускающую развитие содержания понятия «вовне». Фиксируя определенное предложение, мы обрубаем многие связи объекта с внешним, в идеальном его бытии. «Но концы этих связей должны торчать».

Приведем, как пример, замечательное высказывание известного математика и механика Трусделла о силе: «Мы не знаем, что такое сила. Но мы знаем, что можно с ней делать».

Это прямое указание на относительность понятия «сила»; со временем мы устанавливаем (в ходе экспериментов, практики) все новые факты и законы физики, которые меняют содержание понятия «сила»;

> «Обучение языку есть обучение некоему типу мышления (и наоборот): насколько универсален язык, настолько продуктивно и мышление». Н. Латыпов.

> «Глубокое изучение Имманентной Реальности приводит к выводу, что он покоится на трёх столпах: на Языке, на Логике и на Науке». А. Дзикини.

Операторная роль понятия связана с фундаментальной двойственностью. Понятие, выделившись из среды, организует последнюю по мере «силы» полученного содержания, связывает окружающие объекты «своим видением» расположения относительно себя.

Проведя много рассуждений с понятием А, мы переводим последнее в устойчивое существование, как для самого объекта повторяемость и устойчивость реализуют объект. Повтор и устойчивость «более реальны», чем сам объект. Снова обратимся к словарям.

«Философский словарь». (Перевод с немецкого) М.: Издательство «Республика», 2003.

«*ПОНЯТИЕ* — простейший акт мышления в противоположность суждению и умозаключению, которые состоят из понятий. По Зигварту, понятие есть представление, содержащее в себе требование постоянности, совершенной определенности, всеобщего признания, однозначного языкового выражения.

Кроме самого акта мышления при рассмотрении понятия следует различать следующие моменты: содержание мышления (то, что относится к понятию) и предмет понятия (независимый от мышления объект), затем — объем понятия (совокупность вещей, которые охватываются данным понятием) и содержание понятия (совокупность объединенных в нем признаков одного или нескольких предметов).»

Мы приводим эти выдержки, чтобы усилить восприятие сказанного нами. Есть различия между нашими определениями и приведенными из словарей, но отправляемся мы от наших определений. Подробнее о свойствах понятия.

1. Понятие тройственно.

1. Оно выступает как имя, символьно представляющее целостность предложений, характеризующих понятие.

2. Оно имеет реальный носитель (денотат), созданный природой или интеллектуальной деятельностью общества (объект).

3. Оно имеет смысл (концепт денотата), вызывающий процесс его понимания и применения и отражающий идеальное бытие денотата.

Пример. Имя: лошадь, das Pferd. Денотат — соответствующее животное. Концепт — предметное описание на языке биологии и описание роли в жизнедеятельности человека.

2. Неполнота любого определения понятия.

Ряд высказываний вскрывает шаг за шагом сущностные стороны понятия.

> «*Что такое истина?- движущаяся толпа метафор*». Ницше.

Пример вариативного ряда, который «строит» концепт понятия «время»:

1. «Философская энциклопедия». М.: Советская энциклопедия, 1960, т. 1–5: «*Время – одна из основных (наряду с пространством) форм существования материи*». (Комментарий. Определение не определяет: в смысле не представляет как завершенное нечто перед нашим умственным взором; определение только отсылает к другим понятиям: «форма существования», «материя»)

2. «Философский словарь» М.: Издательство «Республика», 2003, с. 85. Перевод с немецкого: «*Время (die Zeit) — присущая человеческому сознанию форма восприятия изменения: возникновения, становления, течения, разрушения в мире, а так же его самого вместе со всем тем, что к нему относится*». «*«Объективное время», измеряемое физическими изменениями или отрезками пути небесных тел, нужно отличать от «субъективного» времени, которое основано на сознании времени*». (Комментарий: какой-то хаотичный текст, но есть и положительное содержание.)

3. «Словарь философских терминов» М.: «ИНФРА-М».2004: «*Время — философская и общенаучная категория, в которой нашло выражение разнообразие представлений о времени: длительность существования и мера изменений материи (Аристотель, Декарт, Гольдбах); внутренняя характеристика души, фиксируется только настоящее, окружённое небытием (Августин); форма проявления абсолютной вечности, преходящая длительность (Платон, Гегель); однородная для всей вселенной абсолютная длительность (Ньютон); относительное свойство вещей, порядок последовательности состояний (Лейбниц); форма упорядочивания комплекса ощущений (Беркли, Юм, Мах); априорная форма чувственного созерцания (Кант); форма бытия материи, выражающая длительность и последовательность изменений (Энгельс, Ленин). Большинство представлений о времени можно свести к двум основным концепциям: субстанциональной и реляционной. Первая рассматривает время как длительность, вторая – как особого рода отношение между объектами и процессами*». (Комментарий: собственно, представлен свой редакторский вариативный ряд.)

4. «*Пространство — это одномоментность бытия, время – протяжённость бытия*».

(Комментарий: понятие время надо *обсуждать в двойственности* «пространство — время». Приведённый член вариативного ряда отражает часть сущности понятия «время», и является вариантом в каком-то смысле к «Время каждый миг творит пространство заново». *Операционное* понимание времени.)

5. «Пространство *реализует* отношения. Время *реализует* процессы».

6. «*Время атрибут движения*». Двойственное к этому в духе Протагора: «*Нет движения, а есть то, что движется*». (Сравни: «Нет равенства, а есть то, что устанавливает равенство». «Движение распределено по предметам как материя».)

8, 9, 10, и т. д. — нет предела пониманию.

Перефразируя Трусделла, можно сказать: «Мы не знаем, что такое время, но многое знаем о его свойствах и действии».

Итак, понятие идёт за вариативным рядом своих определений; понимание наступает как переход количества продуманных предложений в качество. Общественная практика постоянно удлиняет этот ряд, и процесс понимания запускается заново. Попытка ухватить сущность понятия одномоментно конечным текстом невозможна. Глубина проникновения в сущность всегда относительна и определяет меру успеха наших действий.

Неполнота понятия – это ген теоремы о неполноте Гёделя.

3. Развитие содержания понятия.

С неполнотой связано, что понятие находится в развитии — в «реке Гераклита» («Все течет, все меняется. На входящего в реку набегают все новые воды. И смертной сущности нельзя прикоснуться дважды», (перевод известной фразы Гераклита, сделанный Плехановым)). Деятельность человека обогащает понятие все новым содержанием. Наглядный пример — понятие числа. Вначале это понятие охватывало только класс целых положительных чисел, потом появились числа нуль и отрицательные, числа рациональные, вещественные, комплексные, нестандартные. Числа можно воспринимать как код, как гёделевский номер целых теорий и т.д.

«*Истина должна быть не преподана, а пережита*». Гессе.

Ничего вне исторического движения(развития) нет. Поэтому «понять» означает осмыслить ещё и историю данного понятия. Материализм не только диалектичен, но и историчен. Собственно, тело диалектики (денотат)— это история.

«*Кто хочет ограничиться настоящим без знания прошлого, тот никогда его не поймёт*». Лейбниц.

Например, исторический анализ (траектории во *времени*, проложенной вариативным рядом осмыслений) понятия «время» просто необходим. Здесь существенно одно замечание.

Фраза «Давайте представим, что думали древние греки о числе, о времени» несёт в себе нечто невозможное в реализации. Наши мысли о мыслях греков две тысячи лет назад обусловлены уровнем сегодняшнего знания. Это привносит какую-то неустранимую погрешность: проясняя одно, мы искажаем другое (как в квантовой механике). Мы вторгаемся с инструментом анализа, которого много лет назад не было, но который обуславливает определённые формы умозаключения.

4. Развитие понятия через двойственность и противоречие.

Полноту понятие приобретает, когда, развиваясь, включает в своё содержание двойственность. Пример. Понятие пространства после работ Лобачевского отделило в себе пространство «математическое» от пространства «физического». Это стимулировало процесс рождения пространств «делением в себе»: от евклидового пространства отделилось метрическое, от метрического — топологическое и т. д.

Развитие понятия (развитие содержания, концепта) необходимо приводит к противоречию. Здесь я имею в виду, что рано или поздно мы приходим к необходимости принять в содержание понятия одно из взаимно исключающих свойств.

Идут параллельно два процесса: обогащается содержание понятия — по-новому формируется денотат, носитель понятия. Следствие развития понятия — неполнота понятия («философский» аналог теоремы Гёделя) и перестройка отношений между основными элементами понятия, включая замену некоторых положений на противоположные.

В эволюции понятия должны сохраняться преемственность, не отрицание, эквивалентное разрушению, а перестройка с сохранением фундамента.

Понятие «пространство» совпадало с представлением о евклидовом трёхмерном пространстве. Но развитие этого представления обнаружило, что возможно принять как единственность, так и множественность прямых, проходящих через заданную точку параллельно другой прямой. Поэтому у понятия «пространство» денотат возрос до системы: физическое, евклидово, риманово и другие пространства.

«Истина есть ещё не доказанная ложь». Леонид Андреев.

§ 3. Речь. Предложение

. *Для абстрактного мышления нужна речь. Только восприятие не требует внутренней речи. А любая мысль — это фраза.* К. Шереметьев.

Обсудим «предложение» как элемент базиса последующих рассуждений. Именно предложения формируют члены вариативного ряда, определяющего понятие.

Предложение — реальное воплощение противоречия: формулируя его, считаем, что смысл предложения определяется содержанием понятий-слов. Однако, предложение обладает смыслом, отличным от «простой» совокупности смыслов входящих слов-понятий. Имеется внутреннее, иммержентное, «смысловое» качество предложения, которое изменяет содержание вошедших понятий. Понятия входят с одним содержанием в предложение, выходят с другим. Иммержентное содержание исходит от идеального бытия объекта.

«Предложение — не просто упорядоченная последовательность слов. Предложение — это траектория движущейся мысли». Р.Р. Дигаш.

Поясняющие высказывания. «Что такое время? Ведь ты, спрашивая, понимаешь что-то под словом «время». Тогда в чём смысл вопроса? Ты хочешь узнать нечто, что тебе неизвестно, что в это что-то не входит?»

«Как собираешься ты искать нечто, природа чего тебе совершенно неизвестна? Что из неизвестного тебе нужно найти? И если, волею случая, ты найдёшь это, как ты узнаешь, что это именно то, что ты ищешь, если тебе это неизвестно?» Платон.

Вот высказывание, которое проявляет сущностное свойство понятия «предложение»: «Если вы думаете, что не правы, значит, вы не правы. Следовательно, если вы думаете, что не правы, значит, вы правы».

Еще одно предложение.

«Аксиома выбора гласит, что если дана система множеств, то можно составить новое множество, выбрав по одному элементу из каждого множества системы.»

К пониманию аксиомы:

> «*Когда в первый раз встречаются с аксиомой выбора, то она кажется бесспорной и очевидной, но по мере того, как начинают размышлять о ней, она представляется всё более и более загадочной, а следствия — изумительными, и тогда начинают спрашивать, что же собственно она значит?*» Бертран Рассел.

Аксиома выбора определяет, что такое выбор. Сравни: «Нет равных, а есть то, что делает равными». Подробнее об аксиоме выбора см. в [23].

> «*Предложение — это уравнение, определяющее слово*». Дигаш.

> «Фраза «Охотник нашел тулун и утолил жажду ...» доступна для понимания. Несмотря на незнакомое слово «тулун», мы можем приблизительно представить его значение путем ...семантического согласования. Скорее всего, это что-то для питья. И действительно, тулун — это монгольский кожаный бурдюк для питья». К. Шереметьев.

> « Так ... отдельная шестеренка — это никому не нужная шестеренка. Она имеет смысл только при наличии механизма, в котором она будет вращаться. Любое понятие напоминает шестеренку. Только внутри умственной конструкции оно приобретает смысл». К. Шереметьев.

> «*Созданные для нашей повседневной жизни, слова обладают привычным значением лишь при известных ограниченных обстоятельствах*». Г. Вейль.

> «Невозможно применять математику, пока слова затемняют реальность.»

> «Суть каждого предложения состоит в указании на отношения понятий ....Восприятие ...фразы вызывает чрезвычайно сложный процесс каскадной интерпретации. Как горизонтальной, так и вертикальной.
>
> Во время горизонтальной интерпретации завитушки линий интерпретируются как образы букв. Буквы складываются в изображения слов. А слова запускают вертикальную интерпретацию.

Во время вертикальной интерпретации слова вызывают семантический контекст — те образы, которые обозначаются словами. Эти образы попадают в специальное место сознания, которое мы будем называть креативным полем. В креативном поле образы складываются в целостную психосцену.» К. Шереметьев.

§ 4. О математическом мышлении

Предметом большей части нашей книги будет математическое мышление. Сразу отметим, что нет отделенного («в чистом» виде) ни математического, ни философского, ни какого-то экспериментального физического мышления. Есть просто мышление – деятельность субъекта, направленная на организацию фактов, такую организацию, которая продуктивна для действия. Но направленное на изучение определенной области естествознания мы можем характеризовать его по этой направленности, как математическое или иное мышление в силу специфических форм мышления, вызываемых особенностями более узкой области размышлений.

«*Подобно самой истине и опыту мышление по своему характеру есть нечто довольно однородное и универсальное. Влекомое глубочайшим внутренним светом, оно не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено водонепроницаемыми переборками на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое.*» Г. Вейль.

У мышления две важнейшие функции: *понимание* и *организация* фактов (сознания, информации, деятельности), обеспечивающие продуктивность действия (умственного, практического).

В контексте математики это функции: 1) постановка задачи, осмысливание проблемы; 2) формулировка предположений и проведение доказательств.

1. Понимание

Даже в математике понимание и доказательство не одно и то же. Далее следует вариативный ряд высказываний, поясняющих это.

«*Каждый математик, впрочем, знает, что доказательство не является «понятым» в подлинном смысле этого слова, если ограничиться лишь проверкой правильности* *выводов, которые его составляют, и не пытаться понять отчетливо идеи, которые привели к созданию этой цепочки выводов предпочтительно перед всякой другой».* Н. Бурбаки.

Когда дано сложное доказательство математического утверждения, понимание наступает не тогда, когда проверены по частям все логические связки, а тогда, когда доказательство представлено в развитии и структурировано иерархически: выделены основные идеи, затем принципы и подыдеи, приведены априорные и апостериорные рассуждения и т. п. Проверять длинное доказательство как цепочку силлогизмов — это всё равно, что вместо кино рассматривать последовательно кадры киноленты.

Решение проблемы тождества слов в группе, данное Адяном и Новиковым, заняло в изложении несколько выпусков журнала «Известия АН СССР. Серия математическая», и имеет следующий вид с начала до конца: предложение 1, предложение 2, ..., предложение 300 и т.д. Проверка перехода от предложения к последующему проста для квалифицированного математика, но длинна. Американские математики потратили год на проверку всего доказательства. Справедливые упрёки последовали со стороны математического сообщества, что Адян и Новиков не сформулировали общие руководившие их рассуждениями идеи и принципы. Это и было сделано Адяном и Новиковым в соответствующей статье.

Так же «трудно» воспринимается «машинное» доказательство проблемы четырех красок. Даже выделяя некоторые схемы для «рассуждений» машины, Коэн смог «укоротить» доказательство только до 300–400 страничной книги.

А теперь вариативный ряд к «понимание».

«Мы хотим прежде всего понять, а уже затем, поняв, сформулировать доказательство.» Альберти.

«Когда вы убедитесь, что теоремы верна, вы начинаете её доказывать.» Д. Пойа.

«Мы видим, как в размышлениях о творчестве появляется новый фактор — понимание, который применительно к математике может иметь первостепенную важность». Альберти.

«Не плакать, не смеяться, а понимать.» Б. Спиноза.

> «*Рационально мыслящего человека убедит аргумент, а доказательство нужно, чтобы убедить того, кто не особо умён.*» П. Рентелн, А. Дандес.

> «*Доказательство в реальной жизни, полностью или частично, является неформальным. Фрагмент формальной аргументации — вычисления — обретают смысл только как дополнение или подтверждение некоторого неформального рассуждения. Логический и формальный облик доказательства является предметом рассмотрения логики, а не математики реального мира.*» Херш.

Процесс понимания для разума более внутренний, чем процесс доказательства. Доказательство выделяется из рассуждений как экскременты жизнедеятельности ума.

Доказательство — это только локальный момент познания истины.

> «*Решение, подсказанное здравым смыслом, гораздо интереснее и уж, конечно, более творческое, а также содержит больше информации, чем сугубо математическое.*» Р. Смаллиан.

Аспекты понимания:

1) умение выделять части изучаемой системы и их взаимодействие;

2) выбор контекста, в котором рассматривается задача;

3) выбор интерпретации проблемы, точки зрения на неё;

4) ретроспективный обзор «путей» в прошлое (накопленные знания) и «путей» в будущее (пути абстрагирования и обобщения);

5) медитация и сосредоточение;

6) полнота информации.

2. Оператор организации.

Обсудим вторую функцию мышления, организующую. В вариативном ряду понимания этой функции я стартую, формулируя принцип: «*мышление есть действие и рефлексия к действию*».

Задача. Каждая точка плоскости окрашена в один из трёх цветов. Доказать, что всегда найдутся две точки, одинаково окрашенные и отстоящие друг от друга на расстоянии один метр.

Решение. 1) Опираясь на сформулированный принцип, начнём выполнять действия, соответствуя данной задаче. Самое простое, что можно сделать — это выбрать точку. Рефлексия к этому действию: точка окрашена в один из трёх цветов, например, в цвет 1.

2) Следующее действие, возможное в контексте задачи — взятие ещё одной точки, удалённой от первой на расстояние 1 м. Рефлексия — осмысление ситуации ко второму шагу: если вторая точка окрашена как и предыдущая, то утверждение задачи верно. Поэтому предположим, что вторая точка окрашена цветом 2.

3) На третьем шаге действия напрашивается добавление третьей точки, равноотстоящей на метр от первых двух. Если она окрашена одним из цветов двух предыдущих, то утверждение задачи выполняется. Поэтому предположим, что все вершины полученного равностороннего треугольника окрашены разными цветами от 1 до 3.

4) Теперь возьмём **новую** точку, равноотстоящую от точек цвета 2 и 3 на 1 м. если новая точка окрашена в цвет 2 или 3, то утверждение задачи выполняется. Следовательно, надо осмыслить ситуацию с четвёртой точкой цвета 1. Здесь требуется более глубокое проникновение в ситуацию (более напряжённая рефлексия): при сдвиге от первоначальной точки цвета 1 в **произвольном** направлении на расстояние двух высот равностороннего треугольника, то есть на $\sqrt{3}$ м, мы получим точки одного цвета (в ситуации, когда описанное построение четырёх точек ещё не решает задачу). Все точки на окружности радиуса $\sqrt{3}$ м будут окрашены цветом 1, и среди них найдутся отстоящие на 1 метр друг от друга.

Если рефлексия на новую ситуацию после 4 шага «не сработала> можно повторять действие выбора новых точек. В конце концов «количество действий перейдет в качество» — **легко усматриваемый** факт: на расстоянии 3 метров от исходной точки окружности радиуса 3 окрашены цветом 1. □

> *«Вот вам пример того, что можно сделать, если не полениться», — сказал Иа. «Тебе понятно, Пух? Тебе понятно, Пятачок? Во-первых, смекалка, а во-вторых, Добросовестная Работа. Ясно?»* А.А. Милн «Винни-Пух и все-все-все».

То, что мышление — это на 90% действие особенно ясно воспринимается на обучении слепо-глухо-немых детей (была такая школа в СССР, некоторые воспитанники которой затем оканчивали МГУ и успешно работали в науке). Речь, слово для них заменяются тактильными ощущениями от движений рук, пальцев.

Праматерия мышления — это движение. Мозг сошедших с деревьев обезьян (во времена Великой Засухи в Африке) был «наполнен» образами разнообразнейших движений, реализованных сложными связями нейронов головного мозга. Это и послужило перевоплощению этих образов в мышление, а не «освобождение» рук, хотя это и способствовало (ведь у кенгуру Австралии «руки» освободились изначально, но это не развило их мышление).

§ 5. Силлогистическое и ассоциативное мышление

1. Двойственность математического мышления.

Математическое мышление протекает в единстве таких моментов,как:

1) владение математическим материалом (теорией);

2) абстрактно-философская рефлексия к проблеме;

3) психология творчества (воля,мотивация,чувство красоты);

4) владение выразительными средствами языка. Когда рассуждаешь в поисках идеи доказательства теоремы, решения задачи, философские и математические аспекты размышления трудно отделить друг от друга.Те общие принципы, которые вырабатывает математик для получения решения, назовем рациональными принципами математики.

В целом же мышление проявляет себя как силлогистическое, доказательное или как ассоциативное, образное. Основу доказательных рассуждений образуют силлогистическая (классическая) логика, сформировавшаяся усилиями ораторов, философов-математиков, завершенная Аристотелем, использованная Евклидом. Именно в Древней Греции была осознана необходимость проводить свои рассуждения в виде строго выделенных форм умозаключения - силлогизмов, отправляясь от максимально очевидных исходных положений – аксиом.

Пути философии и математики начались с Фалеса и Пифагора, пути осознанного мышления. Силлогистическая логика (классическая) оформилась благодаря их размышлениям над первоосновами, трудам софистов, дававшим уроки, развивавшие искусство убеждать; благодаря приемам ораторов на народных собраниях, стремящихся склонить мнение толпы в определенную сторону. Этот период становления классической логики завершился оформлением ее как науки в трудах Аристотеля,и фундаментальным ее использованием математиком Евклидом (и школой им представляемой).

Аксиомы и правила вывода, сформулированные, например, в «Началах» Евклида — результат схватывания общности в разрозненных актах мышления и абстрагирования от частностей обсуждаемого. Коллективная мысль Древних Греков уловила общее в частностях.

Классическая логика возникла не благодаря исключительно чистому созерцанию области мышления (в таком случае она скорее возникла бы у индийцев-йогов), а благодаря практике. В основании своем силлогизмы отражают не фигуры мышления, а простейшие физические законы, причино-следственные связи. Человек, можно сказать, экспериментально шел к абстрактной форме — фигуре умозаключения. Наблюдая: если явление A вызывает явление B, а за явлением B следует явление C, то всегда после A последует C. Если рык издается тигром, и за спиной раздался рык, то надо спасаться (ибо за спиной тигр). Нечто подобное, многократно повторяющееся было «праматерией» силлогизмов.

Еще одно важное замечание. Если какую-то область мышления (схваченную как понятие!) мы формализуем, то никакая формализация не есть полное представление этой области!

Если «племя» натуральных чисел формализовалось в аксиомах Пеано, то есть еще много другого у чисел, чего нельзя извлечь, пользуясь только формальной арифметикой. Все это многое лежит в метаарифметике, в нумерологии, в чем-то еще, что приходит извне.

Живое мышление не тождественно доказательству. Доказательство есть только один из продуктов мышления, аргументированный силлогизмами способ изложения результатов мышления. Избавление от всего, от чего можно избавиться, силлогистическое изложение приводит к формальной системе.

После Древней Греции следующий глобальный скачок в математическом мышлении произошел благодаря переходу к единому основанию во всех математических дисциплинах — к теории множеств, заложенной в трудах Кантора. Труды Н. Бурбаки показали формализуемость всех известных классических дисциплин в рамках аксиоматической теории множеств.

Формальные системы — это скорее способ изложения (доказательный) достигнутых результатов, а в получении сложных теорем и развитии теории исследователь пользуется не только (вернее не столько) классическими силлогизмами и правилами вывода классической логики, а и рациональными принципами, большей частью не формализованными в какой-то системе, но организующими рассуждения по поиску идей, путей доказательства или развития теории. Мы назовем эти принципы рациональными принципами математики и постараемся изучить их как содержательную систему в последующих главах. В главе 9 изложим как формальную систему арифметику и теорию множеств.

Легче всего ухватить суть ассоциативного мышления, обсуждая понятие «человек». Определение человека, приводимое в научной литературе включает более десяти характеристик:

> *«Нас, людей, следует классифицировать как вид Homo Sapiens, рода Homo, в семействе Гоминидов, в надсемействе Гоминоидов инфраотряда Узконосых подотряда Антропоидов отряда Приматов подкласса Плацентарных в классе Млекопитающих, в надклассе Четвероногих из типа хордовых в царстве Животных домена Ядерных в империи Организмов».* Питер Эткинз.

И, однако, оно не полное! Чтобы понять неполноту, вспомните «ощипанную курицу» Диогена.

> *«Самое главное в человеке — то, что нельзя потрогать руками, увидеть глазами, нельзя взвесить и измерить».* Александр Мень.

Как я уже отметил, любое конечное описание реально существующего объекта неполно. Дадите вы полное определение тому, что такое человек? Я — нет. Однако, ребёнок трёх лет уже *владеет* этим понятием. Содержание понятия выработалось у него через предъявление: мать твоя — человек, вот он — человек, и т.д., — через ассоциативное мышление. Конечно, у ребенка вырабатывается только содержание стартового определения (начального члена вариативного ряда) человека, и некоторые сущностные черты человека (человек ест ложкой, человек даёт понять другому, что хочет и т. д.) ему указываются.

Математик *излагает* свои результаты (теоремы, теории), следуя правилам классической Аристотелевой логики, обосновывая последовательно свои выводы её силлогизмами. Н. Бурбаки в своём многотомном трактате «Элементы математики» показывает, что вся современная математика может быть представлена как формальная система, введённая в первом томе — в трактате «Теория множеств». Но к идеям доказательства теорем и развития теории математик приходит иначе, руководствуясь правилами-принципами, которые ему подсказывают опыт и интуиция, и которые добыты на поле ассоциативного мышления. Мы называем эти принципы рациональными принципами математики.

> *«Разум есть способность создавать принципы»* . И. Кант.

Ассоциативное и силлогистическое мышления являются отражением двойственности: понимание — доказательство. И если силлогизмы формируют формальные системы(исчисление предикатов, формальная арифметика, ...), то ассоциативное мышление структурируется,воспринимается как система через рациональные принципы.

«Научный метод ... — это совокупность правил, иногда общих, иногда частных, которые помогают исследователю в пути в джунгли поначалу разрозненных, противоречащих друг другу фактов. Научное исследование — это искусство, а правила в искусстве, если они слишком жестки, приносят больше вреда, чем пользы.» Д.П. Томпсон.

2. Рациональные принципы математики.

Наша цель — исследовать рациональные принципы как систему. Остановимся только на отправных моментах. Во-первых, рациональные принципы должны обладать воспроизводимостью другими математиками как определенная в своем качестве мыслительная процедура и допускать обогащение содержания и развитие. Отметим в связи с этим роль языка. В рациональных принципах наиболее общих отсутствует четкая и жесткая формулировка как у теорем. Принципы сотрудничают с интуицией и не сводятся к алгоритмам. Алгоритмы жестко регламентируют действия,принципы — нет.

Поскольку принципы словесно оформлены, сила принципа зависит от силы выразительных средств языка. Богатство языка и средств языкового выражения позволяет исследователю давать различные формулировки для сложившейся ситуации и тем самым дает различные оттенки проблемы и более глубокое понимание ее. Формулируя в словах, мы уже обобщаем задачу. Сила обобщения в привлекаемых словах и конструкции предложения (сравните обыденную речь с предложениями трудов Гегеля и Хайдеггера). Слова при обдумывании математической проблемы всегда приобретают оттенок философских понятий.

Во-вторых, нужно отметить иерархию принципов. Принципы первого уровня сведены Д. Пойа в таблицу «Как решать задачу». Это правила, приемы излагаются во многих руководствах по подготовке к математическим олимпиадам. правила типа «рассмотрите аналогичный частный случай, аналогичный обобщающий пример»;«начните решать задачу с конца, или от противного», «принцип Дирихле», и т. п. Это то, что Томсон называет «частными правилами» (см. [2], [40]–[42]).

Принципы более высокого уровня, более абстрактны, носят уже философский характер. Они помогают проникнуть за непосредственную данность, когда ум начинает работать с отрицания непосредственно воспринимаемой картины, ситуации задачи. Эти принципы как бы медитируют напряжение, необходимое для продвижения мысли за очевидность. Выработать эти принципы помогают книги [3], [4], [6], [7]–[9], [19], [24], [26], [27], [31]–[33], [35], [37], [39], [62], [64].

Эти принципы поднимаются до уровня категорий и понятий диалектической логики. Например, аналогия, которая на первом уровне принципов выступает как рассуждение и действие по сходству, теперь проступает как воплощение категории всеединства, как выделение сущности через ряд явлений. Другим понятием, организующим математические рассуждения, является категория «идеальное» (в понимании Э. Ильенкова, см. [51], т. 2, статья «Идеальное»).

В-третьих, что же дает изучение принципов конкретно для решения задач? При выработке того или иного принципа ,собственно, вырабатывается весьма общее напряжение — образ идеи, которая реализуется в конкретную идею при решении конкретной задачи. Поясним это следующим высказыванием. Была раньше такая игра: высмотреть в наброске штрихов какой-либо объект, например, зайца. Невозможно это сделать, не обладая мысленным образом зайца, и невозможно по исходному рисунку дать представление о зайце незнакомому с ним человеку. Философско-математический принцип — это добытое сырье, которое в конкретной задаче превращается в конкретную идею.

«Таким образом, представление о математике может быть неверным из-за ошибочных представлений о том, как великие математики делали свое дело. Незнание того, как именно работают математики, ведет не только к непониманию природы математических исследований, но и в некоторой степени является причиной непопулярности этой науки. Конечно результат исследований, который обычно принимает форму теоремы, выглядит в переработанном и отшлифованном виде так, что почти всегда оказывается слишком непонятным для людей, не имеющих соответствующей подготовки. Постороннему человеку трудно увидеть красоту в математических формулировках, которые содержат много технических деталей и чистой логики. Однако сам исследователь шел не по такому ясному и логическому пути, а долго блуждал в кромешной тьме в дремучем лесу чисел в поисках едва различимых тропинок.»

« . . . математика исследует самые тайные интеллектуальные ландшафты». Энрике Грасиан.

3. Еще о рациональных принципах метаматематики.

Конечно, для своей реализации принципу требуются дополнительные усилия нашей мысли. Но принципы эффективно организуют наши рассуждения в отличие например от следующего определения.

«*Математика — это наука, исторически основанная на решении задач о количественных и пространственных соотношениях реального мира путем идеализации необходимых для этого свойств объектов и формализации этих задач.*»

Это определение мало что дает как принцип действия, направленного на поиск идей, решающих задачу.

«Нельзя объять необъятное» — любил говорить Козьма Прутков. Но накопление «пережитых» исследователем принципов позволяет охватывать путем иерархической их организации все большую территорию науки.

Базовым для нас принципом будет уже приведенное определение: мышление (в том числе математическое) есть действие и рефлексия на действие.

Практические действия позволяют непосредственно воспринимать результаты отдельных этапов решения задачи, лучше знакомиться с ними. По мере выполнения действий получаются новые подробности, что позволяет по-новому взглянуть на проблему, а также, возможно, достигается частичное решение задачи, в силу чего она упрощается, и это облегчает ее решение в целом. Практические действия служат основой проверки предположений, дают возможность судить о правильности или ошибочности гипотез. Эти действия особенно необходимы тогда, когда возникают затруднения в мысленном представлении того, что необходимо для решения задачи. Так бывает, например, нередко тогда, когда приходится иметь дело с крупными задачами, со сложным взаимодействием их частей, с большим количеством намечаемых действий, результаты которых недостаточно четко представляются в «мысленной» форме.

«Опыт структурирует работу ума» В.А. Садовничий.

Математическое мышление включает в себя помимо действий со специальным математическим материалом абстрактно-философское выражение осознанных фактов и язык, как ту определенность, которая недостаточно определена, но достаточно ограничивает направление мысли; его неопределенность порождает возможности.

Помимо отмеченных моментов мышление математики включает в себя еще интуицию.

Интуиция подсказывает, но не доказывает. Интуиция может и обмануть. Рассмотрим, например, следующую задачу. На рисунке 1 даны две фигуры из упругого растяжимого материала (резина). Можно ли одну фигуру продеформировать в другую, не разрывая?

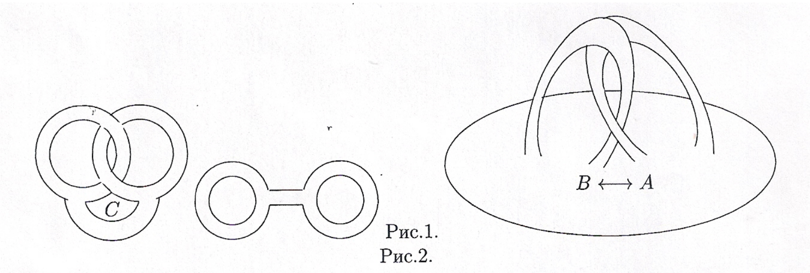

Рис. 1. Две фигуры 2. Необходимая деформация

Интуиция говорит, что это невозможно сделать. Но на рисунке 2 показана возможная деформация: «раздуваем» соединяющую «кольца» трубку C и скользящей деформацией по «раздутой» поверхности меняем местами участки A и B.

Другая задача. Пусть дан упругий шар. Можно ли не разрывая шар сделать из него сферу? Интуиция с очевидностью говорит, что этого сделать нельзя. Но строго математически доказать невозможность достаточно сложно.

4. Таблица Пойа .

Принципы первого уровня приводятся в книгах, посвященных подготовке к олимпиаде. Назовем совокупность этих принципов «таблицей Пойа».

В своей книге «Как решать задачу» Д. Пойа приводит следующие рекомендации.

1) Понимание постановки задачи. Нужно ясно понять задачу. Что известно? Что дано? В чем состоит условие? Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условия для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво? Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения. Разделите условия на части. Постарайтесь записать.

2) Составление плана решения. Нужно найти связь между данными и неизвестными. Если не удается сразу обнаружить эту связь ,возможно, полезно прийти к плану решения. Не встречалась ли вам эта задача? Хотя бы в несколько другой форме? Известна

ли вам какая-нибудь родственная задача? Не знаете ли теоремы, которая могла бы оказаться полезной? Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Вот задача, родственная с данной и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя применить ее результат? Нельзя ли использовать метод ее решения? Не следует ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей? Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Еще иначе? Вернитесь к определениям. Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Более общую? Более частную? Аналогичную задачу? Нельзя ли решить часть задачи? Сохранить только часть условия, отбросив остальную часть: насколько определенным окажется тогда неизвестное; как оно может меняться? Нельзя ли извлечь что-либо полезное из данных? Нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное, или данные, или, если необходимо, и то и другое так, чтобы новое неизвестное и новые данные оказались ближе к друг другу? Все ли данные вами использованы? Все ли условия? Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче.

3) Осуществление плана. Нужно осуществить план решения. Осуществляя план решения, контролируйте свой шаг. Ясно ли вам, что предпринятый вами шаг правилен? Сумеете ли доказать, что он правилен?

4) Взгляд назад. (Изучение полученного решения.) Нужно изучить полученное решение. Нельзя ли проверить результат? Нельзя ли проверить ход решения? Нельзя ли получить тот же результат иначе? Нельзя ли усмотреть с одного взгляда? Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать результат и метод решения?

Рассмотрим таблицу Пойа как систему советов, стимулирующих понимание («понять, а потом доказывать»).

1) Как можно разбить на части? Смотрим на их взаимодействие, думаем о том, что замечательного в отношениях частей.

2) Как иначе можно переформулировать условие? Дать другую интерпретацию задачи.

3) Что кроется за поверхностью фактов. Глубина проникновения в текст задачи.

4) Осознаны ли полностью все детали задачи, факты условия.

Надо отдавать себе отчёт, что двумя разными контекстами нельзя полностью отделить понимание и доказательство. Они „проникают“ друг в друга.

Пример. Четыре лошади разместили по углам квадратного поля. В центре находится стрелок. Тремя выстрелами он убил всех лошадей. Как он это сделал?

Пример (имевшийся в действительности факт). На один из бензовозов, развозивших топливо по бензоколонкам, стали поступать жалобы в управляющую компанию, что количество сливаемого бензина не соответствовало указанному в документах, всегда было меньше на 5–7 литров. Осмотр машины и наблюдение за шофером в течение всего рабочего дня ничего не прояснили. Дайте реалистичное объяснение факта.

Пример. Издеваясь над захваченной пиратами девушкой, главарь заявил ей, что если она вытащит из мешочка, куда он положит, лежащие на берегу, черный и белый камешки, белый, то ее отпустят. Девушка заподозрила,что оба камня пират положил черного цвета. Но пираты вынуждены были ее отпустить. Что сделала девушка?

Пример. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а опущенная на нее высота — 6. Найти площадь треугольника? (задача из «американских» ЕГЭ)

Пример. Надо решить уравнение

$$\frac{5x^2+7x+3}{5x^2+9x+3}=\frac{5x^2+x+3}{5x^2+11x+3}.$$

Замечаем,что $5x^2+3$ повторяется во всех четырех квадратных трехчленах. Делаем далее так, чтобы эти четыре части отличались бы только слагаемыми без x:

$$\frac{5x+7+3/x}{5x+9+3/x}=\frac{5x+1+3/x}{5x+11+3/x}.$$

Замена $5x+3/x=t, x\neq 0$ позволяет свести уравнение к квадратному.

Сформулированный принцип требует глубины понимания (нужно усилить глубину понимания).

«Ухватить трудность на глубине, – вот что главное».
А. Витгенштейн.

Что кроется за поверхностью фактов?

Задача. Найти углы треугольника, для которого известна площадь $S = \frac{a^2+b^2}{4}$, где a и b — стороны треугольника, (последние не известны).

Решение. Надо четко выделить препятствие: обычно, для того, чтобы «рассчитать» треугольник необходимо знание хотя бы трех числовых характеристик треугольника, здесь же имеется только одна — площадь. Понимание этого факта и опыт решения подобных задач (вспоминаем ряд подобных случаев с «недостаточностью» информации) подсказывает, что здесь в треугольнике реализуется какой-то экстремальный и исключительный, особый случай для элементов треугольника. Опять же ряд аналогичных в отношении недостаточности информации задач подсказывает, что особый случай обнаруживается через оценки, неравенства. Используя неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, заметим, что

$$S = \frac{a^2+b^2}{4} \geq \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, площадь треугольника вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} ab \sin\gamma \geq \frac{ab}{2}.$$

Значит, $\sin\gamma \geq 1$, поэтому $\sin\gamma = 1$, и $\gamma = \pi/2$. Так как один из углов треугольника равен $\pi/2$, то рассматриваемый треугольник прямоугольный. В результате, мы можем написать следующие равенства:

$$S = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{ab}{2},$$

но $a^2 + b^2 = 2ab$ тогда и только тогда, когда $a = b$, значит рассматриваемый треугольник равнобедренный, а у равнобедренного треугольника углы при основании равны. Значит, остальные углы равны $\pi/4$.

В целом,абстрактно-общие формулировки рациональных принципов в совокупности с решением примеров формулируют образ доказательства исследуемой теоремы.

Глава 2
Принцип специализации и индукции

§ 1. Частный случай как организация доказательства

Частные случаи иногда подсказывают решение в общем случае. А общий случай иногда проще решить, чем частный.

Задача. В треугольник ABC найти такую точку O, что сумма расстояний OA+OB+OC будет минимальной.

Руководствуясь нашим принципом, начнем действовать. Действовать можно, используя одно из правил таблицы Пойя. Например, рассмотрим частный случай задачи.

Для начала возьмем равносторонний треугольник . Главная цель специализации — найти формулировку «решающей» идеи. При этом поиске необязательно проводить строгие рассуждения.

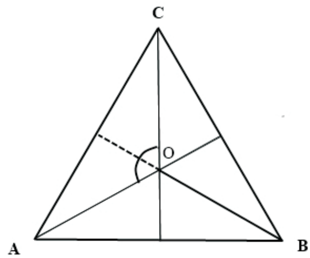

Рис. 1. Равносторонний треугольник

Легко установить единственность искомой точки и, зная, что равносторонний треугольник — симметричная фигура, предполагаем, что точка O совпадает с точкой пересечения медиан, биссектрис и высот этого треугольника. Предположение это легко доказать.

После решения для равностороннего треугольника, возникает вопрос: как использовать его для решения общей задачи?

Какую характеристику точки O будем «переносить» на произвольный треугольник? Рассмотрим варианты.

Точка O — точка пересечения высот.

Точка O — точка пересечения медиан.

Точка O — точка пересечения биссектрис.

Из точки O каждая сторона видна под углом 120 градусов. С помощью опровергающих примеров легко убедиться, что нам не подходят первые три варианта в общем случае.

Таким образом предположение формируется так: доказать, что точка O, из которой каждая сторона треугольника видна под углом 120 градусов, дает минимальную сумму расстояний до вершин.

Рассмотрим, например, еще один частный случай усиления правдоподобности утверждения. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC, где

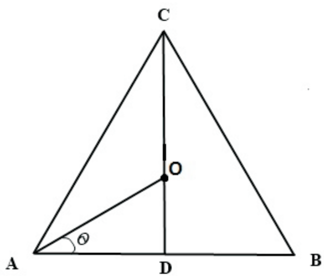

Рис. 2. Исследуемый угол ϑ

$AC = BC, CD$ — высота$=d$, $DB = e$. Пусть $DO = x$. Тогда сумма расстояний от точки O до A, B, C есть

$$S = 2\sqrt{x^2+e^2}+d-x, \quad S'_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+e^2}}-1 = 0, \quad 3x^2 = e^2, \quad x = \frac{e}{\sqrt{3}},$$

$$tg\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \theta = 30^\circ, \quad \angle AOC = \angle AOB = 120^\circ.$$

Сформулированное предположение подтвердилось и в этом частном случае. Обратимся к общему случаю, пусть O — точка, из которой стороны $\triangle ABC$ видны под углом 120°, а треугольник таков, что точка O лежит внутри треугольника.

Построим $\triangle A_1B_1C_1$ стороны которого перпендикулярны отрезкам OA, OB, OC, как на рисунке.

Для любой точки P в $\triangle A_1B_1C_1$ сумма длин перпендикуляров, проведенных из P на стороны треугольника, есть постоянное число, равное $OA + OB + OC = 2$(площадь $\Delta A_1B_1C_1$/периметр $\Delta A_1B_1C_1$). Длина PA не меньше длины перпендикуляра, опущенного из P на сторону B_1C_1, проходящую через A. Тем более $PA + PB + PC$ не

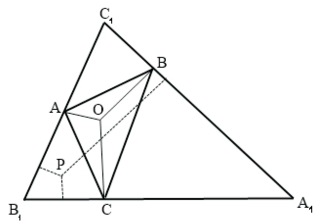

Рис. 3. Преобразование треугольника

меньше суммы длин всех перпендикуляров, которая равна $AO+BO+CO$, равенство сумм достигается, когда P совпадает с O. □

На примере этой задачи можно убедиться, что для данного принципа важен богатый базис возможных действий. Богатство фактов, богатства интерпретаций ведет к решению.

Резюмируем: в ходе решения задачи мы, опираясь на базис знаний из области геометрии, сперва преобразовали исходную задачу в новую, более конкретную. Затем для исходной задачи, пользуясь дополнительной информацией, осуществили превращение формы: перешли от суммы расстояний до вершин к сумме расстояний описанного равностороннего треугольника. Последняя сумма оказалась инвариантом (не зависящим от выбора точки). Поиск инварианта — тоже принцип.

§ 2. Специализация задачи

Теорема 2.1. *В раскрашенном в два цвета множество целых чисел всегда можно найти три одноцветных числа, образующие арифметическую прогрессию.*

Доказательство. Если мы найдем натуральное число n такое, что при любом разбиении множества $1, 2, \ldots, n$ на два класса, в одном из классов найдутся три числа, образующие прогрессию, то задача будет решена и в общем случае.

Есть *эвристические* соображения, что такое n существует. Например, при увеличении фиксированного n всего на единицу, число различных троек возрастает на

$$C_{n+1}^3 - C_n^3 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

И, если мы добьемся, приложив немало сил, для n такого разбиения, что ни в одном классе подходящей тройки не будет, то уже для $n+1$ это будет сделать значительно сложнее, ибо «разбивать» дополнительно придется все тройки $(n+1, n, n-1), (n+1, n-1, n-3), \ldots, (n+1, (n+2)/2, 1)$. Предполагаем n четным. Получается, что еще в $n/2$ тройках надо выбрать элементы для первого и второго классов предыдущего (для n) разбиения.

Если даже мы не найдем подходящего n, проведенные с конкретными «кандидатами» на n рассуждения многое прояснят и породят много полезных предположений.

Замечание 2.1. Роль подобных «оценочных» рассуждений велика. Элементарным примером могут служить рассуждения при при решении последней задачи из гл. 1, § 5, с. 28. Приведем более сложный пример. Пусть уравнение $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, где a_k, $k = 1, 2. \ldots, n$, — комплексные числа, разрешимо в радикалах, т. е. существует формула Φ, дающая все корни уравнения, и которая представима как последовательность символов $\Phi = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m$, где символ σ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, означает либо коэффициент уравнения, либо скобку, либо одну из арифметических операций, либо операцию извлечения корня степени p (p — целое число, большее единицы), либо не зависящее от коэффициентов уравнения число. Наличие в последовательности σ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, операций вида $\sqrt[p]{\ }$, $\sqrt[q]{\ }$ дает нам pq возможных значений Φ. Известно, что рассматриваемое нами уравнение имеет не более n различных корней. Даже, если $p, q \leq n$, то их произведение может значительно превосходить n. Отсюда следует, что что формула Φ должна обладать определенной симметрией. Приведенные «оценочные» рассуждения наводят на мысль, что, во-первых, формулы с богатой симметрией уже при $n = 5$, скорее всего, невозможны и, во-вторых, надо отдельно исследовать отдельные симметрии формы $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m$. Последнее неизбежно приводит к группам перестановок.

Вернемся к нашей задаче. Начнем с $n = 5$, поскольку $1 \leqslant n \leqslant 5$ явно не удовлетворяют. Вот разбиение, «исключающее» 5 из возможных кандидатов:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 4\} \cup \{3, 5\}.$$

Во второе слагаемое добавим 6 и получим контрпример для $n = 6$

$$\{1, 2, \ldots, 6\} = \{1, 2, 4\} \cup \{3, 5, 6\}.$$

Разбиение, исключающее $n = 7$

$$\{1, 2, \ldots, 7\} = \{1, 2, 5, 7\} \cup \{3, 4, 6\}.$$

Разбиение, исключающее $n = 8$

$$\{1, 2, \ldots, 8\} = \{1, 2, 5, 6\} \cup \{3, 4, 7, 8\}.$$

(Какой *принцип* оптимального размещения можно сформулировать после этих примеров?)

Рассмотрим случай $n = 9$. Следующие тройки не должны попадать в один класс:

$$(9, 8, 7), (9, 7, 5), (9, 6, 3), (9, 5, 1).$$

Внимательно смотрим на эти тройки. Наблюдаем ли мы что-нибудь примечательное? Да, 7 и 5 встречаются два раза. Осмысление этого факта (*рефлексия*), дает ли нам что-нибудь? Да, если 9 и 5 принадлежат классу I, то 7 и 1 принадлежат другому классу II (аналогично, если $\{9, 7\} \subset I$, то $\{8, 5\} \subset II$).

Подробно рассмотрим случай $\{9, 5\} \subset I$, $\{7, 1\} \subset II$. Пытаемся разбить числа так, чтобы в классах не получилось прогрессии. Нельзя добавить 4 во II класс, ибо $7 - 4 = 4 - 1$. Итак $\{9, 5, 4\} \subset I$. По тому же принципу 6 и 3 попадают во II класс, и тогда число 2 попадает в I класс. $\{9, 5, 4, 2\} \subset I$, $\{7, 6, 3, 1\} \subset II$ остается число 8, куда бы ни добавили, получим прогрессию.

Рассмотрим случай: $\{9, 7\} \subset I$, $\{8, 5\} \subset II$. Нельзя добавить 2 во II класс, следовательно получаем $\{9, 7, 2\} \subset I$, $\{8, 5\} \subset II$. Теперь рассмотрим два варианта событий: 6 попадает в I класс — $\{9, 7, 6, 2\} \subset I, \Rightarrow \{8, 5, 4, 3\} \subset II$ (5,4,3 образуют прогрессию), и другой вариант, когда 6 попадает во II класс — $\{8, 6, 5\} \subset II$, $\Rightarrow$ $\{9, 7, 4, 2\} \subset I, \Rightarrow \{8, 6, 5, 1\} \subset II$ (остается число 3, которое образует прогрессии в обоих классах).

Пусть теперь в I классе будет только одно число $\{9\} \subset I$, очевидно, что $\{7, 5\} \subset II$, тогда 6 и 3 должны попасть в I класс, $\{9, 6, 3\} \subset I$, а это дает уже прогрессию.

Эта простая задача допускает много различных решений. Мы приведем решение, которое может быть основой для дальнейшего обобщения и которое приводится в литературе.

Рассмотрим на числовой прямой (тем самым, вместо чисел будем говорить о точках) девять троек точек вида $(x, x + 1, x + 2)$ (например, для $1 \leq x \leq 9$). Существует $2^3 = 8$ способов раскраски такой тройки точек, поэтому, согласно принципу Дирихле, какие-то две из рассматриваемых троек раскрашены одинаково. С другой стороны, в каждой тройке найдутся две одноцветные точки. Таким образом, мы получили четыре точки $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$, раскрашенные одинаково (для определенности, скажем, в белый цвет), причем $\overrightarrow{A_{11}A_{12}} =$

$\overrightarrow{A_{21}A_{22}}$ (Рис.1). Отметим также точки A_{13} и A_{23} так, чтобы тройки A_{11}, A_{12}, A_{13} и A_{21}, A_{22}, A_{23} образовывали арифметические прогрессии. Если какая-то из двух добавленных точек белая, то искомая тройка найдена. Если же они обе черные, то рассмотрим точку A_{33}, образующую арифметическую прогрессию с точками A_{13} и A_{23}. Если точка A_{33} черная, то одноцветная будет тройка точек (A_{13}, A_{23}, A_{33}), а если белая, то тройка (A_{11}, A_{22}, A_{33}). $\square$

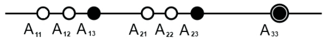

Рис. 4. Искомое расположение точек

§ 3. Пример из функционального анализа

Теорема 3.1. *Пусть дана равномерно ограниченная (числом M) последовательность непрерывных функций $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots,$ определенных на отрезке $[0,1]$ и сходящихся в каждой точке этого отрезка к непрерывной функции $f(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует выпуклая комбинация конечного числа функций последовательности $\lambda_1 f_{k_1}(x) + \lambda_2 f_{k_2}(x) + \dots + \lambda_m f_{k_m}(x), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ со свойством:*

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{k_i}(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{для всех} \quad x \in [0;1].$$

Доказательство. Не теряя общности, будем предполагать, что $f(x)$ тождественно равна нулю. Рассмотрим базовый пример последовательности функций со свойством сходимости поточечно, но не равномерно.

У функции $\varphi_n(x)$ носитель $Spt\,\varphi_n$ есть замкнутый интервал Δ_n, при этом $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, если $i \neq j$; $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_i| < 1$; $|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|$. Если $\Delta_n = [a_n; b_n]$, то $|\Delta_n| = b_n - a_n$. Пусть $\lim b_n = \lim a_n = 1$. Далее, пусть $\varphi_n(x) \geq 0, max\varphi_n(x) = M$для всех n. То, что последовательность φ_n сходится поточечно к нулю, а равномерная сходимость отсутствует, - очевидно. Взяв достаточно большое N, обеспечиваем неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \varphi_i(x) \leq \varepsilon, \quad \text{для всех } x \in [0;1].$$

Этот пример, частный случай, подсказывает, что и в общем случае доказательство нужно вести, выделяя вот такие «горбы», отделенные друг от друга и образуемые отдельной функцией или несколькими функциями.

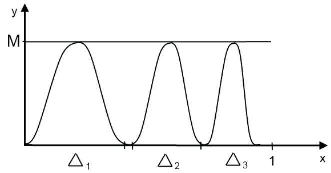

Рис. 5

Попробуем реализовать этот план. Фиксируем число $\epsilon > 0$. Пусть $\overline{n}_m$ есть конечное множество (кортеж) натуральных чисел

$$\overline{n}_m = \{n_{m1}, n_{m2}, \ \ldots, n_{mk}\}$$

со свойством:

$$D_m = \bigcap_{i\in\overline{n}_m} \{x : f_i(x) \geq \epsilon\} \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

При этом полагаем, что множество $\overline{n}_m$ нельзя расширить, сохраняя свойство (1). Строим следующие D_{m+1}, начав со взятия $f_j, j \notin \overline{n}_m$ и $Df_j \neq \emptyset$. Пусть индекс m имеет возможность последовательно принимать бесконечное число значений: 1,2,... Наблюдаем, что $D_m \cap D_p = \emptyset$,если $m \neq n$. Это позволяет начать рассуждения, проведенные в примере, взяв вместо Δ_m множество D_m, а вместо f_m — набор функций. Выберем N множеств D_m, $m = 1, ..., N$. Пусть k_m — число элементов в $\overline{n}_m$, составим выпуклую комбинацию

$$\sum_{i\in\overline{n}_1} \frac{1}{N}\frac{1}{k_1} f_i(x) + \sum_{i\in\overline{n}_2} \frac{1}{N}\frac{1}{k_2} f_i(x) + ... + \sum_{i\in\overline{n}_N} \frac{1}{N}\frac{1}{k_N} f_i(x) = \phi_N(x). \tag{3.2}$$

Если x принадлежит, к примеру, D_1, имеем оценку

$$\left|\sum_{i\in\overline{n}_1} \frac{1}{N}\frac{1}{k_1} f_i(x)\right| \leq \frac{M}{N},$$

выбором N можно сделать $\frac{M}{N}$ меньше заранее выбранного числа $\varepsilon > \ 0$. Препятствие к получению оценок малыми величинами возникает для последующих слагаемых. Например, (x — по-прежнему элемент D_1) в одном из слагаемых суммы

$$\sum_{i \in \overline{n}_2} \frac{1}{N} \frac{1}{k_2} f_i(x),$$

какая-то функция $f_i(x)$ может быть больше ϵ, хотя $x \neq D_1$. Если бы такой факт не наблюдался, то есть:

$$\forall i \in \overline{n}_2 \& \forall x \in D_1 \Rightarrow f_i(x) \leq \epsilon, \tag{3.3}$$

то можно было бы провести такую оценку обсуждаемого слагаемого:

$$\left| \sum_{i \in \overline{n}_2} \frac{1}{N} \frac{1}{k_2} f_i(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{N}, \quad \forall x \in D_1.$$

Если это верно и для последующих слагаемых, то $\phi_N(x)$ в (3.2)сверху оценивается неравенством

$$\phi_N(x) \leq \frac{M}{N} + \epsilon \frac{N-1}{N}. \tag{3.4}$$

Из сказанного ясно, что надо провести построение последовательности $\{n_m\}$ таким образом, чтобы соблюдалось (3.3).

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — исходная последовательность. Напоминаем, что через $Df_i(x)$ обозначим множество $\{x : f_i(x) \geq \epsilon\}$. Предположим, что для всех $i | Df_i \neq \emptyset$.

Имеем следующую альтернативу для Df_1:

A. Существует бесконечная подпоследовательность

$$\sigma_1 = \{f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots\}$$

исходной последовательности со свойством: $Df_1 \cap Df_{n_q} = \emptyset$ для всех q.

B. Исключая конечное число функций из исходной последовательности, получаем подпоследовательность σ_1 такую, что $Df_1 \cap Df \neq \emptyset$ для всех $f_j \in \sigma_1$.

Осуществляем первый шаг построения. Формируем $\overline{n}_1$ равным $\{1\}$ и подпоследовательность σ_1 исходной последовательности согласно A или B.

Предположим, что мы прошли m шагов построения и получили конечные последовтельности индексов $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots, \overline{n}_k$, где $k \leq m$, и, если $i < j \leq k, \quad p \in \overline{n}_j$, то $Df_p \cap D_{\overline{n}_i} = \emptyset$. Считаем, что построили также кроме $D_{\overline{n}_i}$ подпоследовательность σ_m исходных функций.

Делаем $m+1$ шаг. Для $\overline{n}_k$ и σ_m имеем альтернативу А или В, где в формулировке нужно заменить исходную последовательность $f_1, f_2, \ldots$ на σ_m, Df_1 на $D_{\overline{n}_k}$.

Если имеет место A, построение $\overline{n}_k$ заканчиваем и начинаем строить следующий кортеж $\overline{n}_{k+1}$, полагая $\overline{n}_{k+1} = \{i\}$, где i — индекс функции, являющейся первым членом σ_{m+1}. А σ_{m+1} получается из σ_m оставлением таких функций f, что $Df \cap D_{\overline{n}_k} = \emptyset$.

Если имеет место В, то последовательность σ_{m+1} получаем, выкидывая из σ_m функции f (их конечное число) со свойством:

$$Df \cap D_{\overline{n}_k} = \ \emptyset.$$

Расширяем $\overline{n}_k$, присоединяя к нему номер первого члена последовательности σ_{m+1}.

Легко усматривается, что последовательно альтернатива В может применяться только конечное число раз. Действительно, в противном случае имели бы бесконечную последовательность конечных наборов функций $\overline{e}_1 = \{\varphi_{11}\}, \overline{e}_2 = \{\varphi_{21}, \varphi_{22}\}, \ldots, \overline{e}_m = \{\varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \ldots, \varphi_{mm}\}, \ldots$ такую, что система замкнутых множеств $\{D_{\overline{e}_m}\}$, $m = 1, 2, ...$ центрирована, а потому имеет общую замкнутую точку x. Получется, что в этой точке бесконечное число членов исходной последовательности f_i не меньше $\epsilon > 0$. Последнее противоречит поточечной сходимости: $\lim f_i(x) = 0$ для всех $x \in [0;1]$.

Действуя описанным способом, мы получаем сколь угодно длинную цепочку кортежей $\overline{n}_m$, со свойством: если $i < j \leq k$, то $D_{\overline{n}_i} \cap Df_q = \emptyset$, где $q \in \overline{n}_j$.

Для этой цуепочки проходит одна оценка (4). Мы всегда можем выбрать N так, что

$$\frac{M}{N} + \frac{\epsilon(N-1)}{N} \leq \varepsilon, \quad \text{если} \quad \epsilon = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема доказана, поскольку, если имеется бесконечное число членов f_i, для которых $\|f_i\| < \varepsilon$, то утверждение теоремы с этим ε очевидно.

§ 4. Развернутый принцип специализации

Наконец, приведем пример «широкого» развертывания частных случаев, осознания на их основе общих фактов, пример восхождения от частных случаев к абстрактно-общему результату (теореме Гильберта об идеалах в кольце полиномов).

1. Основные определения.

Моном от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть произведение вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, где показатели степеней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные целые числа. По определению полная степень монома есть сумма $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha$ называется мультииндексом.

Полиномом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля K называется конечная линейная комбинация мономов:

$$f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in K.$$

Всюду далее K — поле вещественных или комплексных чисел. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ также будут принимать значения в K. Множество всех полиномов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K обозначается через $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Пусть $f = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ — полином из $K[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда

(i) a_α называется коэффициентом монома x^α;

(ii) если $a_\alpha \neq 0$, то $a_\alpha x^\alpha$ называется членом полинома f;

(iii) полной степенью полинома f называется максимум степеней $|\alpha|$ членов полинома.

Естественные операции сложения и умножения превращают $K[x_1, \ldots, x_n]$ в кольцо.

Подмножество $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ называется идеалом, если выполнены следующие условия:

(i) $0 \in I$;

(ii) если $f, g \in I$, то $f + g \in I$;

(iii) если $f \in I$, и $h \in K[x_1, ..., x_n]$, то $hf \in I$.

Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — полиномы в $K[x_1, ..., x_n]$. Положим

$$\langle f_1, ..., f_s \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i : h_1, \ldots, h_s \in K[x_1, \ldots, x_n] \Big\}.$$

Множество $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ есть идеал.

Соответствуя этому примеру, идеал I называется конечно-порожденным, если существуют полиномы $f_1, \ldots, f_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$ такие, что $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. При этом множество полиномов $f_1, \ldots, f_s$ называется базисом идеала I.

Теорема 4.1 (Гильберт). *Каждый идеал I в кольце полиномов $K[x_1, ..., x_n]$ является конечно-порожденным.*

Начнем доказательство с подробного исследования частного случая — кольца полиномов от одной переменной.

2. Алгоритм деления многочленов.

Пусть даны многочлены $P_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ и $Q_n(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Если $n \geq m$, то можно $P_n(x)$ представить в следующем виде

$$P_n(x) = Q_m(x)\Big(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\Big) + R_{n-1}(x). \tag{4.1}$$

Здесь полином R_{n-1} имеет степень меньшую, чем n. Формулу (5) можно применить к $R_{n-1}(x)$, если степень R_{n-1} не ниже m:

$$R_{n-1}(x) = Q_m(x) \cdot \Big(\frac{c_{n-1}}{b_m}x^{n-m-1}\Big) + R_{n-2}(x),$$

где c_{n-1} — старший коэффициент полинома $R_{n-1}(x)$.

Итак, повторяя разложение по формуле (5), получаем

$$P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R(x), \tag{4.2}$$

где степень l многочлена $R(x)$ меньше m.

Изложенное представляет алгоритм нахождения частного $S(x)$ и остаточного члена $R(x)$ при делении $f_n(x)$ на $Q_m(x)$. Этот алгоритм может быть представлен геометрией расположения отдельных этапов. Такое представление называется делением «столбиком», причем форма записи различна в русскоязычной и англоязычной научной литературе. Приведем на примере эти формы.

Пусть $P_5(x) = x^5 - 4x + 1, \quad Q_3(x) = x^3 - x^2 + x.$

$$\underline{\left|\, x^3 - x^2 + x \right.}$$

Расположим алгоритм деления «русским» столбиком:

$$\begin{array}{l}
{}_{-}x^5 - 4x + 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \left|\, \underline{x^3 - x^2 + x} \right. \\
\quad \underline{x^5 - x^4 + x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2 + x \\
\qquad {}_{-}x^4 - x^3 - 4x + 1 \\
\qquad\quad \underline{x^4 - x^3 - x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -x^2 - 4x + 1
\end{array}$$

Это деление привело к представлению

$$x^5 - 4x + 1 = (x^2 + x)(x^3 - x^2 + x) + (-x^2 - 4x + 1),$$

$$S(x) = x^2 + x, \quad R(x) = -x^2 - 4x + 1.$$

Вот как располагаются этапы деления «английским» столбиком:

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad x^2 + x \\
x^3 - x^2 + x \quad & \sqrt{{}_{-}x^5 - 4x + 1} \\
 & \qquad \underline{x^5 - x^4 + x^3} \\
 & \qquad\quad {}_{-}x^4 - x^3 - 4x + 1 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^4 - x^3 - x^2 \qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -x^2 - 4x + 1
\end{array}
$$

«Перевернули» на обратное все, что можно: знак $\underline{|\quad}$ на знак $\sqrt{}$; писали делимое слева, теперь — справа; частное писали внизу специального знака, теперь — наверху.

Как мы увидим далее, «английская» форма геометрического представления деления полинома на полином имеет преимущества в случае полиномов от нескольких переменных: имеется возможность записи результатов на двух «этажах» — выше и ниже строки, содержащей делимое и делитель.

Если делитель $Q(x)$ двучлен $x - a$, то остаток представляется числом. В этом случае нахождения S и R полезен «чисто алгебраический» подход. Используем формулу, доказываемую простым умножением равенства на $x - a$:

$$\frac{x^k - a^k}{x - a} = x^{k-1} + x^{k-2}a^1 + \cdots + x^1 a^{k-2} + a^{k-1} \tag{4.3}$$

Имеем: $P_n(x) = [P_n(x) - P_n(a)] + P_n(a) =$

$$= a_n(x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + a_1(x - a) + P_n(a).$$

Согласно формуле (4.3) имеем

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{x^k - a^k}{x - a}, \quad R(x) = P_n(a).$$

3. Наблюдение фактов.

Мы убедились, что итерация приводит к полезным новым соотношениям, результатам, например, к получению частного и остатка (формула (1.6)). Но сама формула (1.6) тоже имеет «возможность в себе» повторного применения. Запишем её в виде

$$P(x) = Q(x)S_1(x) + R_1(x),$$

где степень R_1 меньше степени Q. Мы можем повторить подобное разложение для пары $Q(x)$ и $R_1(x)$, если $R_1(x)$ — ненулевой полином

$$Q(x) = R_1(x)S_2(x) + R_2(x),$$

$$R_1(x) = R_2(x)S_3(x) + R_3(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Схема получаемых формул проступает четче , если изменим обозначения, положив $P(x) = R_{-1}$; $\quad Q(x) = R_0$, опуская в записи переменную x:

$$R_{-1} = R_0 S_1 + R_1,$$

$$R_0 = R_1 S_2 + R_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$R_k = R_{k+1}S_{k+2} + R_{K+2}, \tag{4.4}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Последовательность этих однотипных равенств конечна, ибо степени полиномов R_k убывают. Как следствие существует такое число p, что $R_p = 0$, и таблица (4.4) заканчивается строкой:

$$R_{p-2} = R_{p-1}S_p.$$

Осмыслим факты, которые нам поставляет таблица (4.4). В частности наблюдаем: наибольший общий делитель (НОД) пар (R_i, R_{i+1}) является инвариантом ряда строк (4.4):

НОД$(R_{-1}, R_0) =$ НОД$(R_0, R_1) = \dots =$ НОД$(R_k, R_{k+1}) = \dots =$ $=$ НОД$(R_{p-2}, R_{p-1}) = R_{p-1}$.

Таким образом, проведенная итерация дает алгоритм получения наибольшего общего делителя двух многочленов — алгоритм Евклида. (Алгоритм назван так, поскольку нахождение НОД двух натуральных чисел организовано точно так же).

Опять же: какие рассуждения могут быть проведены над алгоритмом Евклида — схемой (4.4).Можно, например, организовать новые итерации, которые будут конструировать новые последовательности формул. Снова наступил экспериментальный момент, момент осознания ситуации и представляемых ею возможностей.

Обратим внимание (рефлексия!), что величина R_k стоит в левой части равенства $R_{k-2} = R_{k-1}S_k + R_k$ отдельным слагаемым. Этот факт (в своем идеальном бытии!) есть возможность «восхождения индекса k» к меньшим значениям, есть возможность «обратной» итерации, рекурсии:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & R_k & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & R_{k-2} & & & & R_{k-1} & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ R_{k-4} & & R_{k-3} & & R_{k-3} & & R_{k-2} \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{array}$$

В итоге мы получаем, что

$$R_{p-1}(x) = T(x)R_{-1}(x) + L(x)R_0(x),$$

где $T(x)$ и $L(x)$ — определенные полиномы от x.
Фиксируем проведенные рассуждения.

Теорема 4.2. *Для заданных полиномов $P(x)$ и $S(x)$ существует полиномы $T(x)$ и $L(x)$, что*

$$\textit{НОД}(P(x), S(x)) = T(x)P(x) + L(x)S(x).$$

4. Еще мотивы перевоплощения.

«Разнообразие интерпретаций, представлений необходимо, ибо некоторые из них «вырастут» в дальнейшем.»

Деление «столбиком» в случае деления на двучлен $x - c$ может быть оформлено по-другому, таблицей (схема Горнера). Начнем опять с (1.6) . Пусть многочлен $R_n(x)$ делится на двучлен $x - c$ с остатком R:
$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = (x-c)(b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0) + R.$
Приравняв коэффициенты при X^k обеих частей равенства, получим:

$$a_k = b_{k-1} - cb_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad b_{-1} = b_n = 0. \tag{4.5}$$

Рекурентное вычисление коэффициентов b_k, $\quad k = 0, \ldots, n-1$, организуется формулой

$$b_{k-1} = a_k + cb_k, \quad k = n, \ldots, 1.$$

Вычисления можно представить как действие над следующей таблицей (схема Горнера)

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_1	a_0
c	a_n						

Пустые клетки последовательно заполняем: (заметим,что $a_n = b_{n-1}$) под a_{n-1} пишем $ca_{n-1} + a_n$; когда доходим до клетки a_k, выписываем сумму a_k и числа, стоящего в соседней левой клетке и умноженного на $c : a_k + cb_k (= b_{k-1})$. Под a_0 получаем $P_n(c) = R$.

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}		b_{k-1}		b_0	R

«Работу» таблицы можно пояснить представлением многочлена $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n \underbrace{)\cdots)}_{n-1} \tag{4.6}$$

Сначала производится вычисления в последней вложенной паре скобок, затем в предшествующей паре и т. д. Тот же порядок действий диктует и схема Горнера.

5. Обзор следствий из полученных результатов.

Оценка силы и возможностей результатов.

Оценим в этом плане схему Горнера. Покажем, что так «просто» описываемый алгоритм деления порождает удивительные следствия («схема раскрывает свою силу»).

Рассмотрим к примеру многочлен

$$P_4(x) = 4x^4 - 29x^3 + 80x^2 - 99x + 43.$$

С помощью схемы Горнера (итерируя его) можно получить разложение $P_4(x)$ по степеням, например, двучлена $(x - 2)$, т. е. ряд Тейлора для функции $P_4(x)$ в окрестности точки $x = 2$.

Разложение определяется матрицей $\Gamma = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{6}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -29 & 80 & -99 & 43 \\ 2 & 4 & -21 & 38 & -23 & -3 \\ 2 & 4 & -13 & 12 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Первые две строки представляют схему Горнера вычисления коэффициентов частного и остатка деления $P_4(x)$ на $(x-2)$. Вторая и третья строка повторяют схему Горнера, но уже для частного, полученного выше, и двучлена $(x-2)$, и т. д. Подобно (4.6) представляем P_4 в виде

$$P_4 = d_0 + (x-2)(d_1 + (x-2)(d_2 + (x-2)(d_3 + d_4(x-2)))).$$

Обзор этой формы убеждает нас, что диагональ, лежащая под главной диагональю, т. е. последовательность $\{a_{i,6-i+2}\}, i = 2, 3, \ldots, 6$; т. е. $\{-3; 1; 2; 3; 4\}$ суть последовательность $\{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4\}$. Соответственно, разложение P_4 в ряд Тейлора есть

$$P_4(x) = -3 + (x-2) + 2(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + 4(x-2)^4.$$

6. Бином Ньютона как следствие схемы Горнера.

Рассмотрим, к примеру, полином x^5 и разложим его в ряд Тейлора по степеням $x-1$. Разложение дается матрицей Горнера $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{7}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Диагональ $\{a_{i,7-i+2}\}, i = 2, \ldots, 7$, есть $\{1; 5; 10; 10; 5; 1\}$, и потому соответствующее разложение есть

$$x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + \\ + 5(x-1)^4 + (x-1)^5. \quad (4.7)$$

Подставив y вместо $x-1$, получим

$$(y+1)^5 = y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1.$$

Приходим к биному Ньютона, взяв $y = a/b$:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

В силу специфики первых двух столбцов в каждой i-ой строке $(i > 2)$, в j-столбце $(j > 2)$ матрицы Горнера стоит сумма элементов предыдущей строки от 2-го столбца до j-го. Кроме этого замечаем, что подматрица $(a_{ij}), i, j = 2, \ldots, 7$ симметрична. Вследствие этого, расположив диагонали матрицы Горнера по строкам, получим треугольник

Паскаля.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

7. Возможности развития.

Итак, мы убедились, что простой алгоритм деления «столбиком», — геометрическая схема деления многочлена на многочлен, — имеет возможность развития в очень интересные математические результаты. Анализируя postscriptum этот алгоритм, заключаем, что организуют его естественная упорядоченность одночлена x^n по степеням, при этом любая последовательность одночленов с убывающими степенями конечна.

При переходе к многочленам от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, следовательно, надо сохранить этот факт, надо так упорядочить мономы , чтобы порядок по убыванию был вполне упорядочен.

Упорядочение мономов $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ равносильно упорядочению n-наборов (n-векторов) показателей степеней $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z^n$, где Z — множество неотрицательных целых чисел. Анализируя все проведенные рассуждения с одночленами, приходим к условиям на порядок $\alpha > \beta$:

(i) $>$ — линейный порядок на Z;

(ii) если $\alpha > \beta$ и $\gamma \in Z^n$,то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$;

(iii) порядок $>$ вполне упорядочивает, т. е. любое непустое подмножество Z^n имеет наименьший элемент.

Порядков, удовлетворяющих (i), (ii), (iii) много, и каждый из них может быть использован и может привести к интересным результатам.

Примеры упорядочения.

Лексикографическое упорядочение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z^n$. Положим $\alpha > \beta$, если самая левая ненулевая координата вектора $\alpha - \beta$ положительна.

Градуированное лексикографическое упорядочение. Говорим , что $\alpha > \beta$, если
$|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i$, или $|\alpha| = |\beta|$ и α больше β в лексикографическом порядке.

Пусть $f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$, где $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, есть ненулевой полином в кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$, и пусть порядок мономов определен согласно условиям (i)–(iii). Мультистепень полинома f есть максимальное из степеней α его членов и обозначается $\mathrm{multideg}(f)$. Старший коэффициент $LC(f)$ есть коэффициент a_α с $\alpha = \mathrm{multideg}(f)$. Старший моном $LM(f)$ — это $x^{\mathrm{multideg}(f)}$. Старший член полинома $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$.

Теперь надо определить операцию деления полинома

$$f \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

на полиномы $f_1, \ldots, f_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. представление f в виде

$$f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r,$$

где $a_1, \ldots, a_s,\ r \in K[x_1, \ldots, x_n]$, и r уже не «поддается» аналогичному представлению.

Алгоритм деления будет изложен на двух примерах, взятых из [29, с. 25–28].

Основная идея алгоритма та же, что и в случае одной переменной: мы должны уничтожать старший член полинома f (определенный заданным мономиальным упорядочением), умножая некоторый f_i на подходящий моном и вычитая. Этот моном будет членом соответствующего a_i. Поясним работу алгоритма на примерах.

Пример 1. Поделим $f = xy^2 + 1$ на $f_1 = xy + 1$ и $f_2 = y + 1$ при лексикографическом упорядочении с $x > y$. Будем записывать делители f_1, f_2 и частные a_1, a_2 в столбец слева, т. е. мы имеем следующую схему:

$$\begin{array}{rl} a_1 : & \\ a_2 : & \\ xy+1 & \sqrt{xy^2+1} \\ y+1 & \end{array}$$

Старшие члены $LT(f_1) = xy$ и $LT(f_2) = y$ оба делят старший член $LT(f) = xy^2$. Так как f_1 является первым в списке делителей, то на первом шаге мы будем работать с ним, т. е. мы делим xy^2 на xy, записывая y как член полинома a_1 и вычитая yf_1 из f:

$$\begin{array}{rl} a_1 : & y \\ a_2 : & \\ xy+1 & \sqrt{xy^2+1} \\ y+1 & \underline{xy^2+y\qquad} \\ & \qquad\ -y+1 \end{array}$$

Теперь на следующем шаге мы работаем в f_2, так как $LT(f_1) = xy$ не делит $LT(-y+1) = -y$. Имеем

$$\begin{array}{rl}
a_1: & y \\
a_2: & \text{-1} \\
xy+1 & \sqrt{xy^2+1} \\
y+1 & \underline{xy^2+y} \\
 & \qquad -y+1 \\
 & \qquad \underline{-y-1} \\
 & \qquad\qquad 2
\end{array}$$

Так как $LT(f_1)$ и $LT(f_2)$ не делят 2, то $r = 2$ и процесс деления окончен, т. е. мы можем записать $f = xy^2 + 1$ в виде

$$x^2y + 1 = y(xy+1) + (-1)(y+1) + 2.$$

Пример 2. Мы будем делить $f = x^2y + xy^2 + y^2$ на $f_1 = xy - 1$ и $f_2 = y^2 - 1$. Как и в предыдущем примере, мы используем lex-упорядочение с $x > y$. Первые два шага алгоритма деления выполняются, как выше. Вот их результат (напомним, что если оба старших члена являются делителями, то мы работаем с первым):

$$\begin{array}{rl}
a_1: & x+y \\
a_2: & \\
xy-1 & \sqrt{x^2y+xy^2+y^2} \\
y^2-1 & \underline{x^2y-x} \\
 & \qquad xy^2+x+y^2 \\
 & \qquad \underline{xy^2-y} \\
 & \qquad\qquad x+y^2+y
\end{array}$$

Теперь обратим внимание на то, что ни $LT(f_1) = xy$, ни $LT(f_2) = y^2$ не делят $LT(x + y^2 + y) = x$. Но $x + y^2 + y$ — не остаток, так как $LT(f_2)$ делит y^2, т. е. если мы отправим x в остаток, то деление можно продолжить.

Чтобы реализовать эту идею, мы создадим новый столбец в записи процесса деления, справа от радикала, куда будем записывать члены, принадлежащие остатку. Полином, расположенный ниже радикала, который мы делим, будем называть *промежуточным* делимым. Процесс деления продолжается до тех пор, пока промежуточное делимое не обратится в нуль. На следующем шаге нашего примера мы перемещаем x в колонку остатка (это показано стрелкой).

$$
\begin{array}{rlll}
a_1: & x+y & & \\
a_2: & & & \underline{\;r\;\;\;} \\
xy-1 & \sqrt{x^2y+xy^2+y^2} & & \\
y^2-1 & \underline{x^2y-x\qquad\quad} & & \\
 & \qquad xy^2+x+y^2 & & \\
 & \qquad \underline{xy^2-y\qquad\quad} & & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{x+y^2+y} & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad y^2+y & \longrightarrow & x
\end{array}
$$

Теперь мы продолжаем деление. Если мы можем поделить старший член промежуточного делимого на $LT(f_1)$ или на $LT(f_2)$, то делаем обычный шаг деления, если нет, то мы перемещаем старший член в колонку остатка и т. д. Вот — полная запись решения этого примера:

$$
\begin{array}{rlll}
a_1: & x+y & & \\
a_2: & 1 & & \underline{\;r\;\;\;\;\;\;} \\
xy-1 & \sqrt{x^2y+xy^2+y^2} & & \\
y^2-1 & \underline{x^2y-x\qquad\quad} & & \\
 & \qquad xy^2+x+y^2 & & \\
 & \qquad \underline{xy^2-y\qquad\quad} & & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{x+y^2+y} & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad y^2+y & \longrightarrow & x \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{y^2-1\quad} & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{y+1} & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 & \longrightarrow & x+y \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{0} & \longrightarrow & x+y+1
\end{array}
$$

Таким образом, остаток $x+y+1$, и мы имеем

$$x^2y+xy^2+y^2=(x+y)(xy-1)+1(y^2-1)+x+y+1.$$

Следует отметить, что остаток есть сумма мономов, ни один из которых не делится ни на $LT(f_1)$, ни на $LT(f_2)$.

Этот пример дает довольно полное представление о работе алгоритма деления. Он также показывает, каким свойством обладает остаток: ни один член остатка нельзя поделить на старший член хотя бы одного делителя. Алгоритм единственным образом определяет частное.

8. Доказательство теоремы Гильберта

Снова деление «столбиком» поможет получить интересный результат, доказать теорему Гильберта. Но вначале установим следующий результат.

Лемма 4.1 (Р.Р. Шагидуллин). *Пусть дано бесконечное множество попарно различных мультииндексов* $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$, $i = 1, 2, \ldots$ *Для любого натурального числа* p *найдется в этой последовательности* p *мультииндексов* $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}$ *таких, что* $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \cdots < \alpha_{i_p}$*, где неравенство* $\alpha \leq \beta$ *означает, что каждая координата* α *не больше соответствующей координаты* β*, т. е.*

$$\alpha_k \leq \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Проведем его сначала для $p = 2$. Предположим, что соответствующей пары мультииндексов нет. Фиксируем произвольно мультииндекс, например, α_i. Рассмотрим α_j,где $j > i$. Индексы координат α_j (т.е. множество $\{1; 2; \ldots; n\}$, разобьем на два непустых подмножества A_{ij} и B_{ij}. В B_{ij} входят индексы тех координат α_j, которые меньше соответствующих координат α_i. Оставшиеся индексы образуют множество A_{ij}. Поскольку координаты α_j с индексами из B_{ij} ограничены независимым от j числом, существует бесконечное множество значений индекса j, а именно, $\{j_k\}, k = 1, 2, \ldots$, при которых множества $B_{ij_k}, k = 1, 2, \ldots$ совпадают, а координаты α_{j_k} с индексами из B_{ij_k} не меняются. Если $B_{ij_k} \neq \emptyset$, то рассмотрим мультииндексы $\gamma_k = (\alpha_{j_k l}), \quad l \in A_{ij_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Они попарно различны, их бесконечное число, можем считать (применяя математическую индукцию по размерности мультииндекса), что существует r и s такие, что $\gamma_r < \gamma_s$. Соответственно тогда $\alpha_{j_r} < \alpha_{j_s}$. Для $p = 2$ лемма доказана, поскольку она очевидна, если не существует i такого, что все $B_{ij_k} \neq \emptyset$.

Пусть она доказана для $p = q$. Рассмотрим случай, когда $p = q + 1$. По индукционному предположению можно построить бесконечную последовательность конечных последовательностей $(\alpha_{1,1} < \alpha_{1,2} < \ \cdots < \alpha_{1,q}), (\alpha_{2,1} < \alpha_{2,2} < \cdots < \alpha_{2,q}), \ldots$ При этом для $k < l$ выполняется: $\alpha_{k,s}$ предшествует $\alpha_{l,\sigma}$ в исходном порядке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ при любых значениях $s, \sigma \in \{1; 2; \ldots; q\}$.

Рассмотрим последовательность $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \ldots$.Опять по индукционному предположению найдется пара $\alpha_{i_1,1} < \alpha_{i_2,1}, i_1 < i_2$. Искомая последовательность есть $\alpha_{i_1,1} < \alpha_{i_2,1} < \alpha_{i_2,2} < \ldots < \alpha_{i_2,q}$. $\square$

Лемма 4.2 (Диксон). *Пусть идеал I в кольце $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ порожден мономами $x^{\alpha_1} = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \ldots x_n^{\alpha_{1n}}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_k}, \ldots$. Тогда он порождается конечным подмножеством этих мономов.*

Доказательство. Из исходной последовательности мономов, применяя математическую индукцию, выделим подпоследовательность, порождающую тот же идеал, но имеющую свойство: x^{α_m} не делится на x^{α_k} при $m \neq k$. Такая последовательность по лемме один конечна. $\square$

Доказательство теоремы Гильберта. Пусть $LT(I)$ — множество старших членов полиномов, составляющих I. Возьмем идеал $< LT(I) >$, порожденный этими мономами. По лемме Диксона существуют полиномы $g_1, \ldots, g_s$, принадлежащие идеалу I, такие что

$$< LT(I) >=< LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_s) > .$$

Пусть f произвольно взятый из I многочлен. Согласно рассмотренному алгоритму деления «столбиком» f на $g_1, \ldots, g_s$ имеем

$$f = a_1 g_1 + \ldots + a_s g_s + r, \tag{4.8}$$

где ни один член полинома r не делится ни на один из

$$LT(g_1), LT(g_2), \ \ldots, LT(g_s).$$

Но из (4.8) следует, что $r \in I$. Следовательно, имеем

$$LT(r) \in< LT(g_1), \ldots, LT(g_s) >,$$

а потому $r \equiv 0$, идеал I порождается многочленами $g_1, \ldots, g_s$. $\square$

Глава 3
Дедукция. От общего к частному

§ 1. Переход от индивида к роду и многообразию

Рассмотрим теперь принцип обращения к более общей задаче. Если при рассмотрении частной задачи мы имеем больше информации, подробностей, то при обращении к общему случаю убираются «заслоняющие» частности, и мы «выходим на оперативный простор».

Близко стоят к методу обобщения принципы абстрагирования, усложнения.

Идея обобщения может состоять в обращении к виду или роду объекта.

«Вид — в логическом смысле представляет собой понятие, которое образуется посредством выделения общих признаков в индивидуальных понятиях и само имеет общие признаки с другими видами понятий; из понятия вида может быть образовано еще более широкое понятие — понятие рода.»

"Философский словарь".Перевод с немецкого. М.: Республика, 2003 г.

«Род (в логике) — термин, который в нематематической формальной логике обозначает объем понятия, являющегося более общим (широким), как говорят, родовым по отношению к некоторому другому (видовому) понятию. Объем видового понятия входит в данный род и называется его видом. Термин «род» и «вид» употребляются также как равнозначные собственно терминам «родовое понятие» и «видовое понятие». Отношение между понятиями, объемы которых относятся друг к другу как род к виду, подчиняется закону обратного отношения между содержанием и объемом понятия.»

«Философская энциклопедия». т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1967 г.

Пример 1.1. Сосчитать сумму $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Итак, нам нужно получить аналитическое выражение для конкретной суммы σ_n. Сделаем упор на понятие «сумма» и обратимся к многообразию тех понятий, которые обобщают так или иначе начальное понятие суммы, — к роду. В анализе непосредственно следующим видом являются кратные ряды. Объем содержания последнего понятия больше и поэтому больше возможностей для продуктивных рассуждений и действий.

Представим σ_n в виде $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k} k$. Далее следует интерпретация: двойная сумма есть последовательное суммирование по рядам следующей таблицы

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 2 & 2 & \ldots\ldots\ldots & & \\ 3 & 3 & 3 & \ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix}$$

Изменив порядок суммирования, т. е. суммируя по столбцам, получим, что

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}(n+j)(n-j+1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} nj + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 -$$
$$-\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}n^2 = -\frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}(n^3 + \frac{n(n+1)}{2} + n^2).$$

Отсюда следует, что $\sigma_n = n^3/3 + n^2/2 + n/6$.

В другом ракурсе, при другой интерпретации исходная задача может быть представлена рекуррентной формулой: $\sigma_n = \sigma_{n-1} + n^2$. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные числа, а последовательность r_n определяется рекуррентно, поэтому обратимся к классу подобных рекуррентных соотношений (к виду)

$$r_0 = \alpha$$
$$r_n = \beta + \gamma n + \delta n^2 + r_{n-1}. \tag{1.1}$$

Несколько последовательных вычислений убеждают нас, что имеет место следующее представление:

$$r_n = a(n)\alpha + b(n)\beta + c(n)\gamma + d(n)\delta, \tag{1.2}$$

где a, b, c, d — определенные функции (полиномы) от n и не зависят от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Отметим, что здесь появляется (как и раньше в задаче, например, о трехцветной раскраске точек плоскости) тема *инвариантов* (как правило, инварианты скрыты в начальных условиях задачи). Воспользуемся указанной независимостью, выбирая последовательно $r_n \equiv 1$, $r_n \equiv n$, $r_n \equiv n^2$, $r_n \equiv n^3$. Пусть $r_n \equiv 1$, тогда в

(1.1) $\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$, и, следовательно, в (1.2) $a(n) = 1$. Пусть $r_n \equiv n$, тогда в (1.2)$\beta = 1, \alpha = \gamma = \delta = 0$, тогда из (1.2) определяем, что $b(n) = n$. Пусть $r_n \equiv n^2$. Имеем $n^2 = [(n-1)+1]^2 = 2n-1+(n-1)^2$. Отсюда в (1.1) для данной функции r_n получаем $\beta = -1,\ \gamma = 2,\ \alpha = \delta = 0$. Из (1.2) следует $r_n = -n + 2c(n),\ c(n) = \frac{1}{2}(n^2+n)$. Наконец, рассмотрим рекуррентное соотношение для функции $r_n = n^3 = 3n^2 - 3n + 1 + (n-1)^3$. Сравнивая последнее выражение с (1.1), получаем, что $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = -3,\ \delta = 3$. Подставляя эти числа в (1.2), находим $n^3 = n - 3\frac{n^2+n}{2} + 3d(n)$. Следовательно $d(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Вернемся к исходной задаче — нахождению δ_n. В отношениях (1.1) для δ_n коэффициенты $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ равны нулю, а $\delta = 1$. Поэтому (1.2) дает следующее значение для δ_n.

$$\sigma_n = d(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

В следующей задаче (лемма Шпернера) обобщение можно трактовать как абстрагирование, отход от конкретики в определении стороны треугольника.

1. Лемма Шпернера.

Рассмотрим на плоскости треугольник, вершины которого помечены цифрами 0, 1, 2. Этот треугольник разбит на несколько треугольников таким образом, что никакая вершина одного треугольника не лежит внутри стороны другого. Вершинам исходного треугольника оставлены старые пометки, а дополнительные вершины получают номера 0, 1, 2, причем любая вершина не стороне исходного треугольника должна быть помечена одной из пометок вершин этой стороны (рис 1.). Такое разбиение исходного треугольника называется триангуляцией, малые треугольники называются гранями триангуляции, стороны малых треугольников — ее ребрами.

Лемма 1.1 (Шпернера). *Пусть имеется триангуляция треугольника T. Тогда имеется хотя бы одна грань с тремя разными отметками вершин (с невырожденной нумерацией). Более того, имеется нечетное число таких граней.*

Чтобы оценить последующее доказательство через обобщение, рассмотрим доказательство, обычно излагаемое в учебниках, методом подсчета двумя способами.

Сначала докажем, что всегда найдется нечетное число отрезков с полной нумерацией, если отрезок [0;1] разбивается на интервалы, и внутренние узлы произвольно помечаются через 0 и 1.

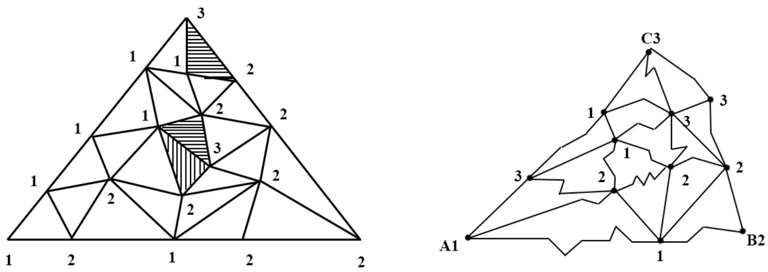

Рис. 1. Разбиение треугольника

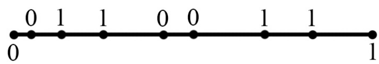

Рис. 2. Разбиение отрезка

Подсчитаем число вершин, имеющих обозначение 0 двумя способами, при этом внутреннюю вершину будем считать дважды.

1 способ. На краю отрезка 1 одна такая вершина, а внутри отрезка их четное число, т. к. каждую считаем по два раза, т. е. $2m$, всего получаем $1 + 2m$ вершину, помеченную 0.

2 способ. Пусть k — число отрезков, имеющих полную нумерацию, а l — число остальных отрезков. Всего отрезков $k + l$. Если рассматривать отрезок с полной нумерацией, то в нем 0 встретится один раз, а k таких отрезков дадут k нолей. В отрезках с неполной нумерацией 0 либо не встречается, либо встречается 2 раза, следовательно, встречается $2j$ раз. Поэтому $1 + 2m = k + 2j$
$k = 1 + 2m - 2j$ — нечетное число, поэтому отлично от нуля.

Рассмотрим двумерное пространство (плоскость). Будем считать число ребер, помеченных 0, 1. Причем считаем ребро столько раз, скольким треугольникам оно принадлежит.

1 способ. Число ребер, лежащих на границе треугольника, имеющих невырожденную нумерацию, как доказали выше, нечетное число. На границе таким образом лежит $2i + 1$ ребро, $2m$ ребер лежат внутри.

2 способ. Пусть k — число треугольников с полной нумерацией. В таких треугольниках ребро [0,1] встречается k раз. А у остальных треугольников ребро $[0,1]$ либо вообще не встречается, либо встречается 2 раза. Итого их $k+2p$. Получаем $2i+1+2m=k+2p$. $k=2i+2m-2p+1$ — нечетное число, отлично от нуля, и поэтому лемма Шпернера доказана.

Обобщим теперь задачу, считая, что у треугольника стороны могут быть ломаными линиями без самопересечений (рис 1.). Доказательство леммы Шпернера будем вести индукцией по числу треугольников разбиения. «Идем» вдоль BC, у примыкающего к BC треугольника сторону $[2,3]$ выкидываем из всей совокупности представленных на рисунке «сторон» треугольников разбиения, если соответствующий треугольник имеет третьей вершиной 2 или 3. Получаем «в остатке» треугольник, который по индукционному предположению обладает треугольником с невырожденной нумерацией.

Довольно простым методом обобщения является введение переменного параметра вместо какого-то характерного конкретного числа в условиях задачи.

Пример 1.2. Доказать, что число, состоящее из 243 единиц делится на 243.

Решение. Внимательно изучаем условия. Что замечательного в них? Имеем $243=3^5$. Это *преобразование формы* дает возможность высказать предположение, что 3^n делит число, записанное 3^n единицами подряд. Ввели параметр — n. В свою очередь это позволяет применить математическую индукцию. При $n=1$ предположение оправдывается: 111 делится на 3. Пусть оно верно при $n=k$. Рассмотрим число, записанное $3^{(k+1)}$ единицами. Имеем $\underbrace{1\ldots1}_{3^{k+1}}=(\underbrace{1\ldots1}_{3^k})\times(1\underbrace{0\ldots0}_{3^k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{3^k-1}1)$. По предположению индукции первый сомножитель справа делится на 3^k, второй — на 3 (по известному критерию — сумма цифр делится на 3). Итак, предположение верно и для 3^{k+1} единиц.

Пример 1.3. Докажите, что число 12345678987654321 является полным квадратом.

Пример 1.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi}\ln(1+2a\cos\alpha+a^2)d\alpha$.

Легко показать, что мы сумеем вычислить заданный интеграл если вычислим более общий

$$\phi(a,b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x))dx,$$

$a,b>0$, где появляются уже два параметра a и b.
Имеем

$$\phi_a^{'}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2(x)}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}dx.$$

$$\phi_b^{'}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\cos^2(x)}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}dx-$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\sin^2(x)}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}dx.$$

Эти равенства приводят к системе:

$$a\phi_a^{'}+b\phi_b^{'}=\pi,$$

$$b\phi_a^{'}+a\phi_b^{'}=2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}=2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\mathrm{tg}(x)}{a^2\mathrm{tg}^2(x)+b^2}=\pi.$$

Последовательно получаем

$$\phi_a^{'}=\frac{\pi}{a+b},$$

$$\phi_b^{'}=\frac{\pi}{a+b},$$

$$\phi(a,b)=\pi\ln(a+b)+c.$$

Чтобы вычислить константу c, полагаем $a=b$. Имеем

$$\phi(b,b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(b^2)dx=\pi\ln(b)=\pi\ln(2b)+c.$$

Отсюда $c=-\pi\ln(2)$. Окончательно

$$\phi(a,b)=\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Обобщение может состоять также в расширении поля действия понятий, участвующих в формулировке задачи или изменения содержания этих понятий.

Пример 1.5. Представить число 10 как сумму двух чисел, произведение которых равно 10.

Чтобы решить эту задачу надо перейти от вещественных чисел к рассмотрению комплексных чисел. Другой пример представляет теория уравнений в частных производных. Разрешимость некоторых уравнений требует расширения классического определения функции до определения функции как функционала на определенных топологических векторных пространствах.

Пример 1.6. Дана последовательность x_n, которая определяется рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 1, \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + 3x_n. \end{aligned}$$

Необходимо получить явную формулу для x_n.

Решение. Вместо последовательности x_n рассмотрим последовательность векторов (повышаем размерность задачи!):

$$U_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = U_n.$$

Получим рекуррентную формулу для U_n. Легко убедиться, что

$$U_{n+1} = AU_n,\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{n+1} = \begin{bmatrix} 2x_{n+1} + 3x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Применяя несколько раз рекуррентную формулу, получим:

$$U_{n+1} = A^1 u_n = A^2 u_{n-1} = ... = A^{n+1} u_0.$$

Найдем общий вид оператора A^{n+1}. Для этого вычислим собственные вектора l_i и собственные числа λ_i матрицы A:

$$\lambda_1 = 3,\ l_1 = (3, 1),$$

$$\lambda_2 = -1,\ l_2 = (-1, 1).$$

Матрицу A можно привести к диагональному виду, а именно представить в виде $A = BDB^{-1}$, где B^{-1} — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Учитывая такое представление, получим:

$$U_{n+1} = [BDB^{-1}]^{n+1}u_0 = BD^{n+1}B^{-1}u_0.$$

$$U_{n+1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3^{n+2} & (-1)^{n+2} \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^{n+2} + (-1)^{n+2} \\ 3^{n+1} + (-1)^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем явную формулу:

$$x_{n+1} = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}.$$

Пример 1.7. Вектор a называется корневым вектором высоты h, а число ρ — корнем линейного преобразования A, если $(\rho E - A)^h a = 0$. Понятие корневого вектора является обобщением понятия собственного вектора, так как собственные векторы — это корневые векторы высоты 1. Совокупность всех корневых векторов, принадлежащих некоторому фиксированному корню ρ преобразования A, есть инвариантное подпространство L_p, называемое корневым подпространством преобразования A. Докажем последнее утверждение. Действительно, если x, y принадлежат L_p, и имеют высоты h_1, h_2, то при $h = \max(h_1, h_2)$ имеем

$$(\alpha x + \beta y)(\rho E - A)^h(\alpha x + \beta y) = \alpha(\rho E - A)^h x + \beta(\rho E - A)^h y = 0,$$

$$(\rho E - A)^h Ax = A(\rho E - A)^h x = 0.$$

Корневые векторы, принадлежащие различным корням, обязательно линейно независимы. Более того, справедлива и более сильная

Теорема 1.1. *Если сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_m = x$ корневых векторов, принадлежащих различным корням $\rho_1, \dots, \rho_m$ преобразования A, содержится в инвариантном подпространстве $\mathfrak{M}$, то каждое слагаемое в отдельности содержится в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Положим

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \rho_1)^{h_1}(\lambda - \rho_2)^{h_2} \cdots (\lambda - \rho_{m-1})^{h_{m-1}}.$$

По условию, $\varphi(A)x \in \mathfrak{M}$, и в то же время

$$\varphi(A)x_1 = \varphi(A)x_2 = \dots = \varphi(A)x_{m-1} = 0.$$

Следовательно, $\varphi(A)x_m \in \mathfrak{M}$. Многочлены $\varphi(\lambda)$ и $(\lambda - \rho_m)^{h_m}$ взаимно просты. Поэтому найдутся такие многочлены $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ (см. теорему 4.2, с. 42), что

$$1 = \varphi(\lambda)F(\lambda) + (\lambda - \rho_m)^{h_m}G(\lambda).$$

Тогда

$$E = \varphi(A)F(A) + (A - \rho_m E)^{h_m}G(A),$$

следовательно

$$x_m = \varphi(A)F(A)x_m + (A - \rho_m E)^{h_m}G(A)x_m = \varphi(A)F(A)x_m \in \mathfrak{M},$$

что и требовалось. □

Сформулированное выше утверждение о линейной независимости векторов $x_1, \dots, x_m$ получается из доказанной теоремы при $\mathfrak{M} = 0$. В качестве следствия отметим также, что различные корневые подпространства имеют нулевое пересечение.

Принцип обобщения стоит рядом с принципом усложнения. Усложняя задачу, мы часто получаем возможность привлечь хорошо развитую технику и результаты из другой области математики, отличной от той, где задача изначально сформулирована.

§ 2. Изменение интерпретации и контекста задачи

Поставьте поиск контекста проблемы, задачи как самостоятельную задачу — от широкого поиска в разделах математики перейдите к литературе, философии, искусству. Математика — это захват все новых территорий, во всех областях есть отражение интересующего вас вопроса.

На время «отодвиньтесь» от задачи и подумайте, что за область математики вы «эксплуатируете».

1. От алгебры к геометрии и обратно.

В самом широком смысле поле математических напряжений можно разделить на геометрическое и алгебраическое видение задачи. Алгебра и геометрия — вот две громадные территории, конечно, пересекающиеся, на которых возможно как «проживание» вашей задачи, так и ее решение. Есть другие «страны», где, возможно, встречается то, что вас интересует: вычислительная математика, комбинаторика, теория алгоритмов и т. п.

Этот принцип характеризует широту восприятия задачи. Нужно увеличить контекст, на котором воспринимается предмет. Можно взглянуть, например, с позиции оперирования символами, а можно ситуацию охватить геометрической схемой.

Пример 2.1. Пусть A и B — мухи на потолке, которые спускаются до пола и поднимаются обратно. B спускается в k раз быстрее, чем A и в k раз медленнее поднимается, $k > 1$. Спрашивается, какая муха скорее вернется на свое место.

Вот алгебраическое решение:

$$t_A = \frac{2s}{v}, \ t_B = \frac{s}{kv} + \frac{ks}{v},$$

здесь $t_A(t_B)$ - полное время, затраченное мухой $A(B)$. Сравним t_A и t_B

$$\frac{2s}{v} < \frac{s}{kv} + \frac{ks}{v}, \text{ ибо } 2 < \frac{1}{k} + k.$$

Муха A быстрее достигнет потолка, чем муха B.

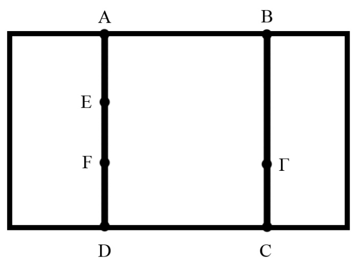

Рис. 3. Маршруты мух

А вот переход на геометрическую основу, и решение доступно ученику третьего класса. Пусть в момент, когда муха B достигает пола в точке C, муха A окажется в точке E. Когда муха A, достигнув пола в точке D, поднимается вверх на отрезок DF, равный AE, где будет находиться муха B? Ответ в точке Г: $C\Gamma = AE = DF$. Муха A пройдет путь, равный высоте комнаты $DF + ED$, а муха B в k раз меньший, т. е. $C\Gamma = AE$. «Стартуя» с уровня точек F и Г, муха A достигнет потолка раньше.

2. Смена размерности

Очень важно понятие размерности пространства (математического или физического). Понятие размерности имеет и глубокий философский смысл.

Приведем несколько примеров, когда решение достигается переходом на другую размерность пространства. Здесь важны советы:

(1) Осознайте размерность задачи, возможно, лучше ее повысить.

(2) Задача есть пространство взаимодействующих объектов. Подумайте, как четче определить это пространство. Есть самостоятельная теория подобных пространств?

(3) «Правильный выход состоит в расширении границ исследуемого объекта с целью использования информации о более крупной системе, частью которой он является.»

Пример 2.2. Даны три окружности с центрами в точках $O_1,\ O_2,\ O_3$ с радиусами $r_1,\ r_2,\ r_3$ соответственно. К окружностям, взятым попарно, построены касательные. Касательные к окружностям с центрами в точках $O_1,\ O_2$ пересекаются в точке A, к окружностям с центрами в точках $O_1,\ O_3$ — в точке B, к окружностям с центрами в точках $O_2,\ O_3$ — в точке C. Требуется показать, что точки $A,\ B,\ C$ лежат на одной прямой.

Решение. Задача поставлена на плоскости P, то есть пространстве размерности два. Мы же попробуем исходную задачу рассмотреть как стереометрическую. А именно на кждом круге радиусом r_i построим конус высоты r_i с вершинами S_i. Основания конусов лежат в одной плоскости, плоскости P. Через вершины конусов также можно провести некоторую плоскость P_1. Эти две плоскости пересекаются по некоторой прямой l. Покажем, что $A, B, C \in l$.

Предположим, что прямая $S_1S_2 \in P_1$ пересекает плоскость P в некоторой точке D. Рассмотрим проекцию конусов с вершинами S_1S_2 на плоскость, проходящую через S_1 и S_2 и перпендикулярную к P.

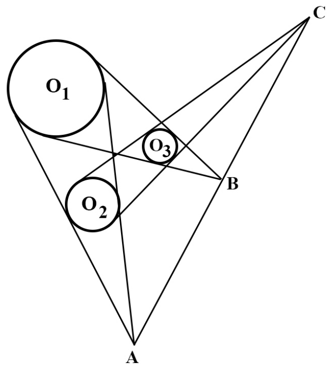

Рис. 4. Иллюстрация к примеру 10

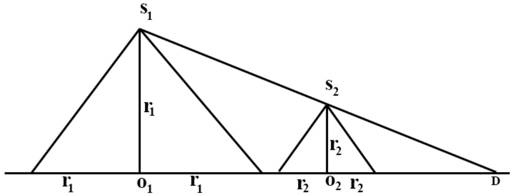

Рис. 5. Проекции конусов с вершинами $S_1,\ S_2$

Из подобия треугольников DS_1O_1 и DS_2O_2 следует соотношение:

$$\frac{DO_2}{DO_1} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{2.1}$$

Теперь рассмотрим плоскость P снования конусов с центрами в точках $O_1,\ O_2$, Опустим из центров окружностей перпендикуляры $O_1E_1,\ O_2E_2$ к общей касательной. Проекция прямой S_1S_2 есть прямая, проходящая через O_1 и O_2.

Теперь из подобия треугольников AO_1E_1 и AO_2E_2 следует соотношение:

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{2.2}$$

Из полученных соотношений (2.1), (2.2) следует, что точка A совпадает с точкой D, то есть лежит на прямой l.

Воспользовавшись аналогичными рассуждениями для пар кону-

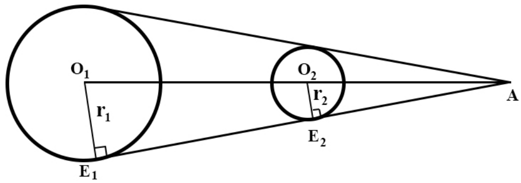

Рис. 6. Плоскость P

сов с вершинами S_2, S_3 и S_1, S_3 можно показать, что точки B, C также лежат на прямой l. Задача решена.

Анализируя решение задачи, мы видим, что усложнение задачи, а именно переход из пространства размерности 2 к пространству размерности 3, помогло нам найти простое и красивое решение.

Пример 2.3. В двадцатых годах прошлого века внимание математиков привлекла задача с элементарной формулировкой, решение которой длительное время найти не удавалось. Вот эта задача. Частный случай ее был рассмотрен нами в гл. 2, § 2. Нижеследующий материал взят из книги [10] (см. также [57]).

Пусть множество целых чисел раскрашено в конечное число цветов. Тогда найдется арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины, члены которой окрашены в один цвет.

После упорных усилий задачу удалось решить молодому голландскому математику Б.Л. Ван дер Вардену. Решение оказалось элементарным, но достаточно сложным. История этого доказательства приведена в книге А.Я. Хинчина, а в изложении самого Ван дер Вардена — в дополнении к книге Р. Грэхема. В обеих книгах можно также найти доказательство теоремы.

Кратко изложим идеи, приведшие к доказательству, потому что, как часто бывает в математике, чтобы упростить решение задачи, нужно сформулировать ее для более общего случая. Первым шагом к доказательству, предложенному самим Ван-дер-Варденом (и, по видимому, ко всем известным доказательствам), была догадка о том, что доказывать нужно более сильное утверждение, а именно: предполагать, что раскрашивается не вся числовая прямая, а лишь некоторый ее конечный кусок, размер которого зависит от количества цветов раскраски и длины прогрессии.

Далее задача обобщается сразу в нескольких направлениях, главным из которых будет выход из числовой прямой на плоскость. Вместо раскраски множества целых чисел рассматривается раскраска целочисленной решетки на плоскости в конечное число цветов. Выбрав в этой решетке конечную фигуру M (конечное множество точек), доказывается существование подобной ей одноцветной фигуры. Доказательство приобретет геометрическую наглядность, утерянную в вырожденном одномерном случае.

Сформулируем другие обобщения. Во-первых, ясно, что перейдя от размерности один к размерности два, можно двинуться и дальше к случаю решетки в пространстве любой размерности. Во-вторых, условие подобия можно заменить на более сильное — гомотетичность с целым положительным коэффициентом. (В дальнейшем, говоря о гомотетии, мы всегда будем иметь в виду гомотетию с целым положительным коэффициентом). Достаточно изящное доказательство такого обобщения теоремы было приведено П. Андерсоном, который, ссылаясь на Р. Радо, приписывает исходное доказательство Г. Грунвальду. Затем доказательство Андерсона было пересказано на русском языке В.В. Прасоловым.

Можно пойти дальше и предполагать, что «объектом раскраски» может служить не только решетка, но и все пространство (при этом рассматриваемая фигура M может не вкладываться ни в какую решетку в этом пространстве). Вообще говоря, такое обобщение можно вывести из теоремы для решетки.

Аналогично, уже упомянотому усилию исходной (одномерной) теоремы Ван дер Вардена, можно предполагать в условии, что красится не все пространство, а лишь конечная фигура в нем (зависящая от данной в условии фигуры и количество цветов раскраски).

Обозначим через L объект раскраски — либо пространство любой размерности, либо целочисленную решетку в пространстве.

Определение 2.1. *Будем говорить, что фигура $\hat{M} \subset L$ является монохроматической накрывающей ранга k фигуры $M \subset L$, если для любой раскраски пространства (или решетки) L в k цветов существует одноцветная фигура $F \subset \hat{M}$, гомотетичная M.*

Заметим, что образы монохроматической накрывающей при сдвиге и гомотетии также являются монохроматическими накрывающими той же фигуры того же ранга. Теперь обобщенная задача звучит как

Теорема 2.1. *Для любой конечной фигуры $M \subset L$ и любого натурального числа k существует ее конечная монохроматическая накрывающая ранга k.*

В итоге, мы можем привлекать к решению известные развитые теории, и это типичное явление в математике, когда ситуация упрощается при правильном обобщении и усложнении.

Глава 4
Анализ и синтез. Принцип разложения и сборки

§ 1. Разложение и сборка

1. Элементарный пример.

Лист бумаги разлинован на клетки со стороной 1 см. Ученик посадил кляксу на лист, площадь S кляксы меньше, чем 1 см^2. Показать, что можно лист разлиновать по новой, так что ни одна из вершин клеток не попадет на кляксу.

Решение. Разрежем лист по исходным линиям и сложим все квадратные клетки в виде столбика, не теряя ориентации клеток относительно друг друга.

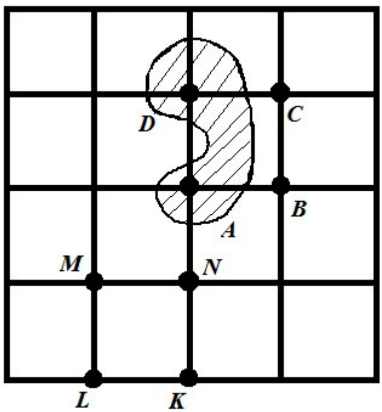

Рис. 1. Расположение кляксы

Заметим, что наложение клетки $ABCD$ на клетку $LKMN$ ($A \to L$, $B \to K$) дает новую кляксу (считается, что после переноса клетка $ABCD$ очищается). Легко усмотреть, что если необходимую разлиновку можно провести для нового случая, то она же годится и для исходного положения кляксы. Когда все клетки "сложены" столбиком, мы увидим, что проекция всех "запачканных" участков на нижнюю клетку займет площадь < 1см. Берем точку P, свободную от проекции. На всех клетках точки, проектирующиеся на P занимают одинаковое положение. Они и будут вершинами новых клеток.

2. Пример из общей топологии

Определения касающиеся покрытий см. в приложении к этому параграфу. Основные сведения о топологических пространствах см. в главе 12.

Теорема 1.1. *В каждое открытое покрытие метрического пространства можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное открытое покрытие метрического пространства с метрикой $\rho(x,y)$. Разложим каждое открытое множество U из покрытия на однотипные части, как если бы мы разлагали круг на концентрические кольца. Для этого соберем в множество U_n точки из U, которые отстоят от границы не меньше чем на 2^{-n} :

$$U_n = \{x : x \in U, \rho(x, X-U) = \inf_{y \in X-U} \rho(x,y) \geq 2^{-n}\}.$$

Итак, возникает разложение U на слои, или пояса $A_n = U_{n+1} - U_n$, для которых верна оценка «ширины» пояса

$$\rho(U_n, X - U_{n+1}) = \inf_{x \in U_n, y \in X-U_n} \rho(x,y) \geq 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}$$

Как взаимодействуют пояса различных открытых множеств из покрытия $\mathfrak{A}$? Можно ли наблюдать какое-то «регулярное» отношение между ними? Например, все U_n вновь покрывают наше метрическое пространство X. Но пояса A_n «мельче» , можно ожидать, что пересекаться они будут «реже» с поясамиB_n для другого открытого множества V из $\mathfrak{A}$. Добьемся того, что они не пересекаются, «переделывая» стандартным образом A_n, U_n.

Для этого семейства $\mathfrak{A}$ вполне упорядочим отношением порядка $<$ и положим:

$$U_n^* = U_n \setminus \bigcup \{V_{n+1} : V \in \mathfrak{A} \ \text{\textit{и}} \ V < U\}.$$

Удаляя V_{n+1}, мы удаляем из U_n элементы, которые в V лежали ближе чем на 2^{-n-1} от V_n, т. е возникает разделительная полоса между U_n^* и V_n. Важно, что если $x \in X$ и $\rho(x, V_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$, то $x \in V_{n+1}$. Поэтому $\rho(U_n^*, V_n^*) \geq 2^{-n-1}$, ибо или $U_n^* \bigcap V_{n+1} = \emptyset$, или $V_n^* \bigcap U_{n+1} = \emptyset$. Теперь, покрыв каждые U_n^* шарами достаточно малого радиуса ($< 2^{-n-3}$), получаем открытые множества U_n^{**} такие, что $\rho(U_n^{**}, V_n^{**}) \geq 2^{-n-2}$.

Система открытых множеств $\{U_n^{**} : U \in \mathfrak{A}\}$ дискретна, а система $\{U_n^{**} : U \in \mathfrak{A}, n = 1, 2, \ldots\}$ покрывает X. Если $\mathfrak{A}$ — первый элемент покрытия U, содержащий x, то $x \in U_n^{**}$ для некоторого n. Теорема доказана.

Приведенное доказательство взято из книги Д. Келли [25].

Дадим другое изложение доказательства, отражающее идеи поиска доказательства.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное открытое покрытие метрического пространства X, ρ. Стандартный путь получения из системы множеств $\mathfrak{A}$ непересекающихся множеств с той же общей суммой – это проиндексировать элементы $\mathfrak{A}$ вполне упорядоченным множеством I, т.е представить $\mathfrak{A}$ в виде $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где I вполне упорядочено отношением $<$, а затем брать вместо A_α множества $A^*_\alpha = A_\alpha - \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$. Однако, множества A^*_α не являются в общем открытыми, если открытыми являются A_α.

Если бы мы имели между A^*_α и A^*_β «хороший» промежуток, обеспечивающий неравенство $\rho(A^*_\alpha, A^*_\beta) > \varepsilon > 0$ для всех (α, β), $\alpha \neq \beta$, то понятно, что взяли бы открытые множества $A^{**}_\alpha = \bigcup\limits_{x \in A^*_\alpha} B(x, \frac{\varepsilon}{4})$, где $B(x, \frac{\varepsilon}{4})$ — шар с центром в точке x и радиусом $\frac{\varepsilon}{4}$, т.е $\{y : \rho(y, x) < \frac{\varepsilon}{4}\}$. Типичный элементарный пример, когда два множества разделяются необходимым образом, дают «слои» над множеством B. Пусть $B_n = \{x : \rho(x, B) \leq \frac{1}{2^n}\}$ где B — фиксированное подмножество $X, n = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$\rho(B_{n+1}, X - B_n) = \inf_{x \in B_{n+1}, y \in X - B_n} \rho(x, y) \geq 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}.$$

Итак, «слой» $B_n - B_{n+1}$ разделяет B_{n+1} и $X - B_n$ необходимым образом.

Пример подсказывает, что надо использовать и исследовать «слои» порожденные исходными множествами. «Слои» строим следующим образом: если

$$A_{\alpha,n} = \{x : x \in A_\alpha,\ \rho(x, X - A_\alpha) \geq 2^{-n}\},$$

то роль слоя играет $A_{\alpha,n+1} - A_{\alpha,n}$.

Варьируем также идею «вычета всех предыдущих» :

$$A^*_{\alpha,n} = A_{\alpha,n} \setminus \bigcup \{A_{\beta,n+1} : \beta < \alpha\}.$$

Поскольку имеет место $A^*_{\alpha,n} \bigcap A_{\beta,n+1} = \emptyset$, если $\beta < \alpha$, то $\rho(A^*_{\alpha,n}, A^*_{\beta,n}) \geq 2^{-n-1}$, $\alpha \neq \beta$. Достигнув такой разделенности, имеем возможность расширить каждое $A^*_{\alpha,n}$, не допуская пересечений. Именно, полагаем $A^{**}_{\alpha,n} = \bigcup\limits_{x \in A^*_{\alpha,n}} B(x, 2^{-n-3})$, что влечет

$$\rho(A^{**}_{\alpha,n}, A^{**}_{\beta,n}) \geq 2^{-n-2}.$$

Итак, «сила полосы» в том, что она, во-первых, дает возможность расширения до необходимых открытых множеств, во-вторых, дает дискретность семейства $\{A^{**}_{\alpha,n}\}$, $\alpha \in I$, $n = 1, 2 \ldots$.

«Полоса конечных ширин» между множествами сыграла так же роль «устранителя» препятствия, возникшего в начале доказательства. «Расплата» за введение «полос» — переход к счетному множеству семейств $\{A^{**}_{\alpha,n}\}$, $\alpha \in I$.

Отметим, что все идеи (вполне упорядочение с «вычетом предыдущих» и использование разделительных полос), «естественно» появившиеся в первой половине доказательства, не были отброшены, но подходящим образом были трансформированы. Так часто происходит при поиске доказательства.

Мы проведем доказательство следующей теоремы, используя отношения, аналогичные числовым отношениям уже изложенных доказательств. В математике удивительным образом можно обобщенно интерпретировать уже известные отношения на совершенно другом материале. На другой материал переносятся именно отношения, а не объекты, которые связаны этими отношениями. Можно сказать и так, что понятия «понимаются» по-новому, когда предметное бытие их денотата устраивается иначе, а идеальное бытие сохраняется.

Применительно к нашим теоремам таким понятием является расстояние (или метрика $\rho(x, y)$). То, что расстояние между элементами a и b не превосходит d, организует («целиком положено в») следующее рассуждение. Рассмотрим окрестность V_d диагонали Δ (Δ есть собрание элементов вида (x, x) для всех x из X) в пространстве $X \times X$, определяемую соотношением $(x, y) \in V$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, y) < d$. Тогда $\rho(a, b) < d \sim (a, b) \in V$.

Окрестность диагонали в топологическом пространстве $X \times X$ определяется, как множество W такое, что наряду с каждой точкой (x, x) оно содержит множество $O_1 \times O_2$, где O_1 и O_2 — окрестность точки x. Метрика в определении не участвует, и это позволяет интерпретировать те места проведенных доказательств, где рассуждения основаны на неравенстве вида $\rho(a, b) < d$, через отношение $(a, b) \in W$, где W — окрестность диагонали, при рассмотрении общих топологических пространств.

Доказательство следующей теоремы показывает, что можно аналогично пройти и остальные места доказательства, где появляются числа. Необходимые определения из теории топологических пространств даны в главе 12.

Теорема 1.2. *Если каждое открытое покрытие топологического пространства X однообразно, то в каждое открытое покры-*

тие пространства X можно вписать открытое σ – дискретное покрытие.

Доказательство. Мы уже отметили, что аналог числового неравенства $\rho(a,b)<d$ есть отношение $(a,b)\in V$, где V окрестность диагонали в пространстве $X\times X$.

Насколько далеко можно продвинуть эту аналогию? Пусть V — окрестность диагонали Δ; a – произвольный элемент топологического пространства X. Через $V[a]$ обозначим множество $\{x\ :\ (x,a)\in V\}$, $V[A]\ =\ \bigcup\limits_{a\in A} V[a]$. Конструкция $V[A]$ есть аналог следующей окрестности множества A в метрическом пространстве $X: V[A]\backsim \backsim \bigcup\limits_{a\in A} B(a,r_a)$.

Нам нужно будет в дальнейшем, чтобы для определенных множеств A и B их окрестности $V[A]$ и $W[B]$ не пересекались. Исследуем этот момент в рамках поиска соответствующих аналогий.

Пусть $W[a]$ — аналог шара $B(a,r)$ в метрическом пространстве; $V[b]$ — аналог шара $B(b,\rho)$. Если шары пересекаются ($c\in B(a,r)\bigcap B(b,\rho)$), то по неравенству треугольника $\rho(a,b)\le\rho(a,b)+\rho(c,b)\le r+\rho$, $\rho(a,b)\le r+\rho$.

Но $r+\rho$ "соответствует" окрестности диагонали $V\circ W$, а $\rho(a,b)\le r+\rho$ тогда "соответствует" $(a,b)\in V\circ W$. Если "целиком перевести" на язык окрестностей диагонали Δ предпоследнее предложение, то получится утверждение:

$$V[a]\bigcap W[b]\ne\emptyset\to(V\circ W)\bigcap(a,b)\ne\emptyset, \tag{1.1}$$

которое легко проверяется.

Таким образом за аналог неравенства треугольника при проводимой нами последовательно интерпретации можно взять (1.1).

Поясним утверждение, что $\rho+r$ соответствует $V\circ W$ на примере, когда X есть плоскость $\{(x,y)\}$.

Как видно из чертежа, полоса $V\circ W$ определяется отрезком MN длины $\rho+r$.

Теперь мы можем приступить собственно к доказательству теоремы.

Пусть U — открытое покрытие пространства X. Сначала впишем в U просто σ-дискретное покрытие. Пусть V — такая окрестность диагонали Δ пространства $X\times X$, что семейство всех $V[x]$, где x пробегает X, вписано в покрытие U. «Запустим» процесс «послойного» разложения V (а тем самым и любого множества $V[x]$).

Положим $V_0=V$, а V_n при $n=1,2,\ldots$ определим как симметричную окрестность диагонали такую, что $V_n\circ V_n\subset V_{n-1}$. Вместо

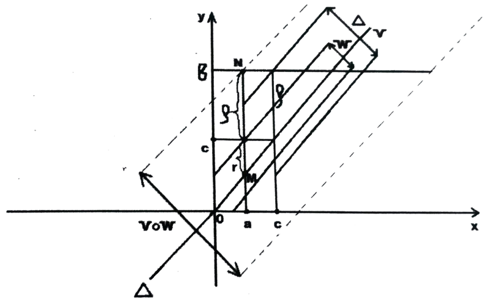

Рис. 2. Геометрические образы множеств V и W

взятия множеств $V_{n-1} - V_n$ «слои» будем создавать через множества U_n, где: $U_n = V_1$, $U_2 = V_2 \circ V_1$, $U_3 = V_3 \circ (V_2 \circ V_1), \ldots U_n = V_n \circ (V_{n-1} \circ \ldots (V_2 \circ V_1) \ldots)$. «Слой» внутри U_n вокруг U_{n-1} "создается" окрестностью V_n. Опять введем полный порядок. На этот раз будем считать, что само X вполне упорядочено отношением $<$. Определим множества

$$U_n^*(x) = U_n[x] \setminus \bigcup \{U_{n+1}[y] \, : \, y < x\}, \, n = 1, 2, \ldots \quad x \in X.$$

Множество $U_n^*(x)$ не пересекается с $V_{n+1}[U_n^*(y)]$ при $x \neq y$. Это при $y < x$ следует из определения $U_n^*(x)$. При $y > x$ $U_n^*(y)$ не пересекается с $V_{n+1}[U_n^*(x)]$, а значит ввиду симметричности V_{n+1} множество $U_n^*(x)$ не пересекается с $U_n^*(y)$. Если для некоторой точки $z \in X$ окрестность $V_{n+1}(z)$ пересекает $U_n^*(y)$, то $z \in V_{n+1}[U_n^*(y)]$ – окрестность точки z, не пересекающаяся с $U_n^*(x)$ при $x \neq y$. Следовательно, семейство $U_n = \{U_n^*(x), \, x \in X\}$ дискретно. Если $x \in X$ и y - первая точка из X, для которой x принадлежит множеству $U_n^*(y)$, тогда $x \in U_n^*(y)$. Итак σ – дискретное вписанное покрытие получено.

Осталось «превратить» множества $U_n^*(x)$ в открытые. Вместо них возьмем множества $V_{n+k}[U_n^*(x)]$, где k — фиксированное натуральное число, большее 1. Если $x > y$ и $V_{n+k}[U_n^*(x)] \bigcap V_{n+k}[U_n^*(y)] \neq \emptyset$, $\exists a \in U_n^*(x)$, $\exists b \in U_n^*(y)$, $\exists z \in X$, что имеют место включения:

$$(a, z) \in V_{n+k}, \; (b, z) \in V_{n+k}, \; (a, b) \in V_{n+k} \circ V_{n+k} \subset V_{n+k-1}. \qquad (1.2)$$

Здесь мы применили обобщенное неравенство треугольника. Но $b \in U_n^*(y) \subseteq U_n[y]$, $(a, b) \in (V_{n+k-1} \circ U_n) \subset U_{n+1}$, $a \in V_{n+k-1}[U_n[y]] \subset U_{n+1}[y]$, хотя $a \notin U_{n+1}[y]$. Противоречие показывает, что множества $V_{n+k}[U_n^*(x)]$, $x \in X$, попарно не пересекаются.

Далее повторяем схему рассуждений, изложенную несколько выше. Для точки $z \in X$ берем окрестность $V_{n+3}[z]$, и пусть она пересекает $V_{n+3}[U_n^*(y)]$. Тогда $(V_{n+3} \circ V_{n+3})[U_n^*(y)]$ является окрестностью z, вложенной в $V_{n+2}[U_n^*(y)]$, а потому не пересекающей ни одно $V_{n+2}[U_n^*(x)]$ при $x \neq y$. То есть, система $\{V_{n+2}[U_n^*(x)]\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$ есть σ-дискретная система открытых множеств. Теорема доказана.

Доказательство интересно тем, что мы следовали доказательству аналогичной теоремы для метрических пространств, установив нечисловые отношения, аналогичные основным числовым, участвующим в доказательстве, и трансформируя все основные идеи доказательства теоремы 1.1. Усиливая напряжение этой мысли, процитируем Дж.Л. Келли [25]:

«Путь, по которому эволюционировала общая топология, во многом характерен для математики. Сначала замечается сходство некоторых ситуаций, аналогии и повторения в рассуждениях. Затем предпринимаются попытки выделить понятия и методы, общие для различных примеров: при условии, что анализ достаточно глубок, есть надежда найти теорию, которая охватывает многие или даже все наши примеры и достойна самостоятельного изучения. Именно на этом пути после длительного экспериментирования было получено понятие топологического пространства. Оно — естественный продукт непрерывного процесса консолидации, абстрагирования и обобщения. Чтобы избежать формализма в обобщении, каждую возникающую таким образом абстракцию следует испытать с целью выяснения, действительно ли центральные идеи воплощены в ней. Это испытание обычно заключается в сравнении абстрактно построенного объекта с объектами, от которых он произошел.»

3. Приложение. Необходимые определения теории топологических пространств

Следуя книге [25], приведем необходимые нам определения о покрытиях метрического и топологических пространств. Базовые сведения об этих пространствах изложены в главе 12.

Семейство $\mathfrak{A}$ называется покрытием множества B тогда и только тогда, когда B является подмножеством объединения $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$, т. е. когда каждая точка множества B принадлежит некоторому элементу семейства $\mathfrak{A}$. Семейство $\mathfrak{A}$ называют открытым покрытием множества B, если каждый элемент из $\mathfrak{A}$ является открытым множеством. Подпокрытие покрытия $\mathfrak{A}$ — это такое его подсемейство, которое само является покрытием.

Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства называется локально конечным тогда и только тогда, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства $\mathfrak{A}$. Из этого определения немедленно следует, что точка является предельной для объединения $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ тогда и только тогда, когда, она является предельной точкой для некоторого элемента семейства $\mathfrak{A}$. Следовательно, замыкание этого объединения равно объединению замыканий слагаемых, т. е. $\overline{\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}} = \bigcup\{\overline{A} : A \in \mathfrak{A}\}$. Очевидно также, что замыкание элементов семейства $\mathfrak{A}$ образуют локально конечное семейство. Семейство $\mathfrak{A}$ называется дискретным, если у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом семейства $\mathfrak{A}$. Любое дискретное семейство локально конечно. Если $\mathfrak{A}$ дискретно, то семейство замыканий элементов из $\mathfrak{A}$ тоже дискретно. Наконец, скажем, что семейство $\mathfrak{A}$ σ– локально конечно (σ-дискретно), в том и только в том случае, когда оно является объединением счетного числа локально конечных (соответственно дискретных) своих подсемейств.

Покрытие $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} O_\alpha = X$, однообразно, если существует такая окрестность V диагонали Δ, что для любого x из X множество $V[x]$ содержится в некотором O_β, $\beta \in I$. $(\exists V\ \forall x\ \exists\beta\ V[x] \subset O_\beta,\ \beta \in I)$.

§ 2. Выделение пространства однотипных объектов

1. Интерполяционная теорема.

При развитии теории на данный момент формируют определенный багаж знания, фактов; багаж, который «всегда под рукой», и используется почти «автоматически». Этот багаж подобен таблице умножения для арифметики, и содержание багажа определяется содержанием курсов лекций по данному предмету в ведущих университетах.

Классическая логика есть «багаж» на дорогу при исследовании диалектической логики. Уместно вспомнить по этому поводу Гегеля.

Поэтому, устанавливая свойство $\mathcal{E}$ для объекта C занимающего «промежуточное» положение между объектами A и B со свойствами $\mathcal{E}$, т. е. интерполируя $\mathcal{E}$ на C, полезно «перебрать» классические интерполяционные теоремы. Одной из них является теорема Адамара о трех окружностях, приводимая в любом университетском учебнике по аналитическим функциям.

Для ее доказательства используются следующие понятия. Функция $f(z)$ называется целой, если она аналитическая на всей плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Функция, аналитическая в замкнутой области, принимает наибольшее и наименьшее значения своего модуля только на границе, если она отлична от постоянной (принцип максимума модуля).

Зафиксируем аналитическую однозначную ветвь функции z^α, где α — вещественное число, и рассмотрим функцию $\varphi(z) = z^\alpha f(z)$, где $f(z)$ аналитична в круговом кольце $0 < r_1 \le |z| \le r_2$, $r_1 < r_2$. Пусть

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \; r_1 \le r \le r_2.$$

По принципу максимума будем иметь

$$r^\alpha M(r) \le \max\{r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)\}. \tag{2.1}$$

Выберем теперь α из условия $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$:

$$\alpha = \frac{\log(M(r_2)/(M(r_1))}{\log(r_1/r_2)}.$$

Свобода выбора α позволяет нам избавиться от «max» в (2.1), и логарифмируя (2.1), получаем (log берется по любому основанию большему единицы) новую форму неравенства (2.1)

$$\log M(r) \le \log M(r_1)\frac{\log(r/r_2)}{\log(r_1/r_2)} + \log M(r_2)\frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 (Адамар). *Неравенство* (2.2) *имеет место для трех произвольных окружностей с центром в начале координат и с радиусами* $r_1 < r < r_2$, *если функция* $f(z)$ *аналитична в области* $r_1 < |z| < r_2$.

Если в плоскости (x, y) построить кривую $x = \log r, \; y = \log M(r)$, то неравенство (2.2) показывает, что кривая выпукла в интервале $r \in [r_1, r_2] : \; y \le \theta y_1 + (1-\theta)y_2, \; x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$.

Далее будем «эксплуатировать» этот частный случай интерполирования (рассуждение от частного случая). В изложении мы следуем книге Дж. Литлвуда [35].

Теорема 2.2 (Рисса). *При* $\alpha, \beta > 0$ *обозначим через* $M_{\alpha,\beta}$ *точную верхнюю грань выражения*

$$|L(x,y)| = |\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu| \tag{2.3}$$

с постоянными комплексными $a_{\mu\nu}$ *и переменными комплексными* x_μ, y_ν, *подчиненными условиям*

$$\sum_{\mu=1}^{m} |x_\mu|^{1/\alpha} \le 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^{1/\beta} \le 1, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{2.4}$$

Тогда $\ln M_{\alpha,\beta}$ *является выпуклой функцией* α, β *в области* $\alpha, \beta > 0$.

Доказательство. Рассмотрим пространство однородных объектов — всех выпуклых функций в области $\alpha, \beta > 0$. С точки зрения взятия точной верхней грани важны следующие взаимодействия в этом пространстве:

(a) точная верхняя грань семейства выпуклых функций выпукла;

(b) предел последовательности выпуклых функций является выпуклой функцией;

(c) находя точную верхнюю грань чего-либо при ряде независимых условий, наложенных на переменные, мы можем эти условия принимать во внимание в любом порядке (или одновременно). Например,

$$\sup_{0 \le x, y \le 1} |f(x,y)| = \sup_{0 \le x \le 1} \left(\sup_{0 \le y \le 1} |f(x,y)| \right).$$

Таким образом, если мы можем представить $M_{\alpha,\beta}$ в виде

$$(\sup (\sup(\ldots (\sup |L(x,y)|) \ldots))$$

так, что если «самая внутренняя» точная верхняя грань (при фиксированных значениях всех переменных во внешних точных верхних гранях) выпукла относительно α и β, то из (a) и (c) будет вытекать, что наша теорема верна.

Положим в (2.3)

$$x_\mu = \varepsilon_\mu^\alpha e^{i\varphi_\mu}, \;\; y_\nu = \eta_\nu^\beta e^{i\psi_\nu}; \;\; \varepsilon_\mu, \, \eta_\nu \ge 0; \;\; \alpha, \beta > 0.$$

При этом считаем, что выполняются условия (2.4):

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu \le 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu \le 1.$$

Вводя четыре семейства переменных $(\varepsilon, \mu, \varphi, \psi)$ вместо двух (x, y), мы «работаем» на замечание (c).

Обсуждаемая величина $M_{\alpha\beta}$ примет вид

$$M_{\alpha\beta} = \underset{(\varphi,\psi,\varepsilon,\eta)}{т.в.г.} \Big| \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \varepsilon_\mu^{\alpha_0 + \lambda_1 \sigma} \eta_\nu^{\beta_0 + \lambda_2 \sigma} e^{i(\varphi_\mu + \psi_\nu)} \Big|, \tag{2.5}$$

где положено

$$\alpha = \alpha_0 + \lambda_1\sigma, \;\; \beta = \beta_0 + \lambda_2\sigma,$$

и нам, следовательно, надо доказать выпуклость $\ln M_{\alpha\beta}$ при любых λ_1, λ_2. Нетривиально вводим свободный параметр в подмодульное выражение (2.5), полагая вместо σ комплексное число $s = \sigma + it$ с произвольным действительным t. Важное наблюдение: $M_{\alpha\beta}$ не изменится, ибо замену можно интерпретировать как простой сдвиг аргументов φ_μ и ψ_ν! Добавляем к $M_{\alpha\beta}$ операцию взятия *т.в.г.* по t, при этом среди всех подобных операций над $M_{\alpha\beta}$ взятие точной верхней грани по t будем выполнять первой. Согласно (c) это не изменит $M_{\alpha\beta}$. Функция $f(x) = f(s,\varphi,\psi,\xi,\eta) = \sum\limits_{\mu=1}^{m}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\xi^{\alpha_0+\lambda_1 s}\eta\nu^{\beta_0+\lambda_2 s}e^{i(\varphi_\mu+\psi_\nu)}$ является целой функцией комплексного переменного s. Поэтому применяем теорему Адамара (роль r играет e^σ), а также правила (a)–(c), получаем, что

$$\ln M_{\alpha\beta} = \sup_{(\varphi,\psi,\varepsilon,\eta)} \ln m(\sigma,\varphi,\psi,\xi,\eta), \;\; m(\sigma,\varphi,\psi,\xi,\eta) = \sup_{(t)} |f(s)|$$

являются выпуклыми функциями σ. $\square$

Оценить роль теоремы Рисса можно по применениям ее в функциональном анализе. Так, она позволяет установить истинность неравенства Юнга — Хаусдорфа

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \le \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}$$

для коэффициентов Фурье c_n функции $f(\theta) \in L^p$ при $1 \le p \le 2$, если неравенство справедливо при $p = 1$ и при $p = 2$.

2. Свободный параметр.

Поскольку введение свободных параметров сыграло исключительную роль в доказательстве, приведем еще один пример «поразительного» появления свободных параметров. Можно установить, что имеет место равенство

$$\sin\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1, j\ne i}^{n} \frac{\sin(x_j + \alpha_j - \alpha_i)}{\sin(\alpha_j - \alpha_i)}\right)\sin x_i,$$

для произвольных вещественных чисел α_i с условием $\sin(\alpha_j - \alpha_i) \ne 0$ при $j \ne i$ и любых вещественных чисел x_1, x_2, $\ldots x_n$.

Введение свободного параметра превращает объект с этим параметром в элементарное пространство.

Итак, ведущие идеи доказательства в примерах этого параграфа следующие: 1) введение в рассмотрение системы однотипных (родственных) объектов; 2) исследование частного случая, несущего в себе узловые моменты рассуждения, необходимые в общем случае. (Из ничего ничего не рождается!)

Глава 5
Элементарное пространство и предельный переход

§ 1. Задача как элементарное пространство

Рассмотрением однородного пространства однотипных объектов мы подготовили принцип элементарного пространства, который неявно располагается в математических рассуждениях «всюду плотно». Пространство является фундаментальным понятием философии, физики, математики, но введением элементарного пространства мы переходим с глобального аспекта рассмотрения этого понятия на локальный.

Элементарное пространство — это совокупность родственных в каком-то плане объектов, родство которых обеспечивается условиями задачи. Общий представитель пространства участвует в организации определенной интерпретации задачи и обуславливается интерпретацией этой задачи. Материал задачи всегда поставляет нам сообщество определенных однотипных объектов, которое необходимо воспринять как определенную структуру, изучение которой эквивалентно решению задачи.

В отличие от канторового множества обезличенных элементов элементарное пространство рассматривается как собрание индивидуумов, определенные свойства которых варьируются и определяются ролью элементов в задаче. Можно сказать в первом приближении, что элементарное пространство есть канторово множество плюс определенная интерпретация задачи, которая воспринимается как уравнение, определяющее элемент из этого множества, реализующий определенное взаимодействие в интерпретации.

Помимо этого математического аспекта определение элементарного пространства имеет философский и физический аспекты обоснования. С точки зрения философии побуждающим к размышлениям является, как отметил Мамардашвили [36], вопрос: «почему всегда не одно, а много одного?». Не один электрон — много электронов. Солнце не одно — много звезд (даже в донаучную эпоху Солнце — один из богов), и т. д. Понимание этого в том, что каждый объект двойственен: имеет предметное бытие и идеальное. Элементарное пространство есть отражение этой двойственности, есть самая экономная реализация ее в бытие (осуществляет выбор объекта и его функциональную роль через множество себе подобных применительно к конкретной задаче). Внутреннее или предметное бытие элементарного пространства есть канторово множество. Внешнее идеальное бытие есть взаимодействие, организуемое элементом из пространства в контексте задачи и выявляющее решение. Отметим в связи с этим, что под контекстом можно понимать всю совокупность интерпретаций задачи, а не только ее конкретную формулировку; причем, совокупность не актуально завершенную, а потенциально становящуюся.

Элементарное пространство, следуя сказанному, мы будем обозначать символом «$1 \to \infty$».

Со стороны физики понятие элементарного пространства отражает квантованность всех процессов. «Много одного» — кванты реализуют поля, излучения, волны (кстати, квант мышления — кларитон).

Итак, элементарное пространство — это та же самая задача, схематизированная как пространство; абстракция, эквивалентная по цели (решению) исходной формулировке. Задача целиком положена в элементарном пространстве которое есть инобытие задачи. Если задача есть модель, то «$1 \to \infty$» есть модель модели. Каждая задача имеет свое элементарное разрешающее пространство, и в этом локальный характер обсуждаемого понятия пространства.

1. Примеры.

«Вот тут-то все и объясняется».

Дигаш.

Во многих «олимпиадных» задачах для младшеклассников типа «задача о ханойской башне», «задача о волке, козе и капусте», задачи нахождения фальшивой монеты взвешиванием и т. п. элементарное пространство появляется очевидным образом как перечисление возможных действий. Главное здесь — полнота перечисления, не пропустить ключевое, решающее задачу действо. В то же время отметим, что в совокупности действия, как группа преобразований, являются основой многих теорий. Перейдем к примерам, где выбор пространства само представляет задачу, где для проявления элементарного пространства нужно приложить усилия. Задача проявления имеет свои принципы, некоторые из которых мы формулируем после соответствующих примеров.

Пример 1.1. Задача рассмотрена В. Арнольдом в его книге «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Из города в город ведут две дороги. Известно, что две машины, выезжающие из в по разным дорогам, и связанные веревкой длины, меньшей $2L$, смогли проехать из в , не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса L, которые движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Решение. В. Арнольд предлагает решение, основанное на понятии фазового пространства. Мы получим решение через элементарное пространство. Пусть машина M1 двигалась по дороге D1, машина M2 — по дороге D2. Каков бы ни был график $S = S_1(t)$ движения M1, где t — время, а S — путь, пройденный за время t по соответствующей дорогое, можно подобрать график $S = S_2(t)$ движения M2, которое не разрывает веревку. Действительно, если $G = G_1(t)$ и $G = G_2(t)$ графики уже реализованного движения машин, то $S_2(t) = G_2(G_1^{-1})(S_1(t)))$. Элементарным пространством является множество всевозможных графиков движения M1. Пусть M1 движется по графику $S = S_1(t)$ движения обоза, вышедшего из A (разрешающий элемент пространства!). Вторая машина M2 пусть движется по соответствующему графику $S_2(t)$. В момент τ встречи машины M2 и обоза, вышедшего из B по дороге D2, обозы столкнутся.

Резюме к этому примеру. В задаче часто элементарное пространство порождается элементом, обладающим свободой выбора.

Пример 1.2. Рассмотрим три величины: $b = \dfrac{a+c}{2}$ — среднее арифметическое, $b = \sqrt{ac}$ — среднее геометрическое, $b = \dfrac{2ac}{a+c}$ — среднее гармоническое. Исследовать отношения между ними, предполагая, что $a, b, c > 0$.

Решение. Величины мало связаны по форме, и трудно уловить, что здесь представлено нечто одно с вариацией определенного свойства. Попытаемся представить величины другими выражениями. Для определенности пусть $a > c > 0$. После некоторой работы мы приходим к наблюдению, что число b, определенное из неравенств:

$$(1)\ \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}, \quad (2)\ \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}, \quad (3)\ \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c},$$

соответственно, определяет среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое. Формулы (1)–(3) однотипны и приводят к рассмотрению элементарного пространства равенств $\phi(b) =$ const с заданной функцией $\phi(b) = \dfrac{a-b}{b-c}$; a, c предполагаются фиксированными. Проблема сводится теперь к изучению свойств функции $\phi(b)$. По предположению $c < a$, поэтому $\phi'_b < 0$, т. е. функция ϕ монотонно убывающая. Поскольку $\frac{a}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{c}$, то значения b, соответствующие этим значениям функции ϕ последовательно убывают:

$$\frac{a+c}{2} > \sqrt{ac} > \frac{2ac}{a+c}$$

Резюме. Мы часто приходим к элементарному пространству через изменение формы данных задачи и затем выявление общего представления элемента пространства.

Пример 1.3. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным в окружность.

Теорема 1.1. *Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.*

Доказательство. Теорема доказывается особенно просто. Рассмотрим возможные варианты положения вершины на окружности (элементарное пространство).

«Мутантом» будет случай, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности.

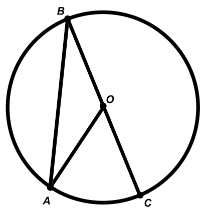

Рис. 1. Сингулярный элемент пространства

Треугольник равнобедренный, так как у него стороны OA и OB равны как радиусы. Поэтому углы и треугольника равны. А так как их сумма равна внешнему углу треугольника при вершине O, то угол B треугольника равен половине угла AOC, что и требовалось доказать.

Пример 1.4. «Задача о миссионерах и туземцах». Имеется река и лодка, в которую можно уместить максимум двух людей. На одном берегу реки находятся 3 миссионера и 3 туземца. Важным условием организации переправы является то, что на одном берегу ни в какой момент времени не должно оказаться туземцев больше, чем миссионеров.

Решение. Задача, на первый взгляд, кажется довольно простой, но в ходе решения возникают проблемы из-за того, что нужно помнить довольно большое количество информации: как нельзя совершать транспортировку, какие шаги были сделаны и отвергнуты и многое другое. Как можно от них избавиться? Можно заметить, что состояние дел на реке в каждый момент времени может быть представлено в виде тройки: $\langle M, T, L\rangle$, где M — число миссионеров на выбранном берегу, T — число туземцев, L — положение лодки. Для простоты, за исследуемый берег можно взять начальный, пусть выбран левый. Состояние будет записано в виде $\langle 3, 3, L\rangle$. Такая короткая запись отражает положение дел на реке и берегах, мы легко можем узнать сколько представителей обеих групп на другом берегу и проверить, выполняется ли условие, что миссионеров на выбранном берегу должно быть не меньше. Стоит заметить, что нет смысла рассматривать выполнение обязательных условий задачи в момент, когда лодка посреди реки: проблемы на берегу назначения можно было уловить на предыдущей проверке, а на берегу, с которого уплыли, мы проверим как только лодка остановится у берега. Задача будет решена, когда мы достигнем состояния $\langle 0, 0, R\rangle$. Лодка будет на правом берегу, так как последняя партия переедет на ней и оставит ее там. Мы построим модель задачи — элементарное пространство троек $\langle M, T, L\rangle$. Рассмотрим, какие перемены могут произойти за один шаг. Пусть мы находимся в состоянии $\langle M, T, L\rangle$. За шаг берег меняется на противоположный, а раз лодка рассчитана на двух человек, то и уменьшиться сумма и может на два или на один. За первый шаг мы можем перейти в 5 состояний: $\langle 1, 3, R\rangle$, $\langle 3, 1, R\rangle$, $\langle 2, 2, R\rangle$, $\langle 3, 2, R\rangle$, $\langle 2, 3, R\rangle$. Затем из каждого в еще несколько. Таким образом, получим дерево всех возможных переездов. Часть из них не будут удовлетворять условиям задачи, поэтому, дабы избежать лишних действий, лучше проверять состояние в момент его генерации. Кроме того, нужно учесть, что в некоторое состояние система может прийти разными путями, есть смысл рассматривать дальнейшее развитие только один раз, но лучше не забывать об этих путях, если необходимо найти как можно больше решений. По такой схеме задачу можно свести к перебору состояний и довольно быстро найти все возможные решения.

§ 2. Аспекты представления элементарного пространства

Эти аспекты следующие.

1) Трудность построения элементарного пространства по явленному объекту.

2) Трудность перечисления объектов элементарного пространства.

3) Элементарное пространство как вариативный ряд: каждый член ряда есть одно то же по сути, что и другой член ряда, и в то же время варьируется. Умение варьировать через интерпретацию и абстрагирование

4) Элементарное пространство — это формализованное представление системы, задающей проблему и рассматриваемой как единое целое, с целью удобства ее исследования. В нем поэтому очень много от формальной системы.

«Формальная система — это совокупность абстрактных объектов, не связанных с внешним миром, в которой представлены правила оперирования множеством символов в строго синтаксической трактовке без учета смыслового содержания, то есть семантики. Является результатом строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причем все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других» С.К. Клини [28].

Таким образом, формальная система — это элементарное пространство выделенных путем абстракции отношений, представленных затем символьно (для рассматриваемой теории).

Но элементарное пространство можно рассматривать как систему на физической основе.

Если физическая система устойчива, то ее энергия минимальна. Выражение инвариантности и всеобщности энергии состоит в принципе минимализма. Любая система стремится к равновесию — состоянию, когда ее энергия минимальна. Система должна организовываться так, чтобы затрачивать минимум энергии. Применяем принцип аналогии к исследуемой системе и получаем принцип экономии действующих лиц в элементарном пространстве, который состоит в том, что, исследуя взаимодействие, мы избавляемся от лишних элементов, сохраняя сущность, скрывающуюся за элементарным пространством.

Как и в физической системе, выражение инвариантности и всеобщности главной сущности будет состоять в принципе минимализма. Зная, как стремится организоваться система, мы опять придем к принципу экономии действующих лиц в элементарном пространстве. Так было организовано доказательство элементарной теоремы о компактности. Принцип минимализма также может проявиться как выбор модели, упрощающей элементы задачи.

5) В изложенном материале постоянно затрагивается дуальная пара: явление — сущность. Собственно, элементарное пространство, выражаясь философским языком, проявляет сущность, явленную описанием задачи, контекстом задачи. На математическом языке элементарное пространство есть нечто вроде формулы, приводящей к решению уравнения — задачи. Часто к сущности, а, следовательно, и к решению подводит в элементарном пространстве член — «мутант» или «исключительный по положению» член, или член «сингулярный» в каком-либо отношении, или нечто абстрактно — всеобщее для всех систем, представленное в данной конкретной задаче через общий элемент элементарного пространства.

Если отношения элементов в элементарном пространстве берутся максимально абстрагированными от конкретики, то отношения представляются подмножествами декартовых произведений множеств (какие произведения необходимо брать определяется задачей) и принимается какая-то общая система аксиом и правил вывода теории множеств. Так возникают структуры Бурбаки. Однако, для такого построения теории все равно нужна иерархия: получаемые на одном уровне развития теории теоремы далее не воспринимаются как формальные образования, сами становятся опорными исходными предпосылками для последующих выводов. А ходом сложного рассуждения все равно руководит какая-то содержательно воспринимаемая идея — принцип. Ибо, в гнесеологическом плане иерархия в математике — это оформление, форма понимания. Тогда как в физике иерархия как нечто объективно — реальное есть антиэнтропийный процесс.

6) В сложных пространствах от элементарного пространства поднимаемся на уровень взаимодействующих между собой нескольких элементарных пространств, — уровень иерархии математических пространств, требующий специального изучения. На этом уровне лежат все функциональные пространства математической физики.

7) Наконец, отметим, что на элементарное пространство можно смотреть, как на член эволюционного ряда «величина»: число — тензор — оператор — ... Действительно, взаимодействие между «$1 \to \infty$» и контекстом задачи есть функциональное отноше-

ние — оператор. Каждому элементу из «$1 \to \infty$» ставится в соответствие претендующая на решение интерпретация задачи. Роль критических точек числовых функций играют особые элементы элементарного пространства.

По сути, элементарное пространство есть начальный член эволюционного ряда для понятия «пространство».

§ 3. Элементарное пространство. Уровни схематизации и абстракции

В главе 11 вводим понятия эволюционного и вариативного рядов, в движении по которым обнаруживает себя математическая теорема как нечто более сущностное, чем фиксированная формулировка ее. Это более широкий, чем принятый, взгляд на теорему, к которому мы приходим, если подвергаем метаматематическому анализу отношения, в которые теорема вовлечена. В данном параграфе мы хотим по-новому в рамках рациональных метаматематических размышлений с привлечением категории «иерархия» взглянуть на математическое доказательство и, соответственно, понятие элементарного пространства.

Сделаем общее замечание. «Освобождение» математического объекта размышлений от частных, «лишних» отношений приводит либо к формализации его отношений в рамках математической логики, либо к организации его отношений философскими категориями.

Для человеческого мышления математическое доказательство поистине иерархически организованная система. Поясняют высказанное примеры решения проблемы Бернсайда и проблемы четырех красок (см. главу 1).

Читатель может убедиться в необходимости структурирования доказательства как иерархической системы идей и на более простых примерах. Например, решение задач теории шахматной композиции требует предварительной разработки каких-то общих концепций, принципов и утверждений в виде «маленьких» теорем. *Концепции и принципы уже выделяют с какой-то неопределенностью схему решения задачи.* Остается определить эти «неопределенности» (сравни с уравнением $ax^2 + b + c = 0$ для арифметической задачи).

Предложив возможную формализацию для всех современных математических структур в первом томе своей энциклопедии, Бурбаки затем в последующих томах переходит к «обычному» изложению материала. Для этого формируется запас ключевых результатов, формально доказуемых, и на основе которых можно проводить последующие доказательства, не обращаясь к формализму первого тома. Таким образом, эти результаты — новые элементарные объекты следующего уровня организации математического мышления. Формализм присутствует здесь как «тень» доказательства.

Заметим, что пониманию схемы доказательства в целом часто помогают не силлогистические утверждения, а пространственное воображение, общие аналогии (см. в этом отношении прекрасную книгу В.В. Прасолова [43]), все то, что ведет, в конце концов, к философским размышлениям.

Трактуя доказательство как иерархическую систему, выделим для рассмотрения основной элемент иерархической системы — его уровни [53]. Мы воспринимаем уровень как собрание элементов, организованных взаимодействием. Возможно, взаимодействие обусловлено взаиморасположением. *Мы воспринимаем поэтому уровень иерархической структуры на уровне философской категории «пространство».*

Для «математизации» понятия «уровень» нам необходимо наибольшее абстрагирование от конкретности в отношениях элементов. Это выливается в построение пространства с элементарными объектами и простейшими отношениями — элементарного пространства. Поэтому отправимся от того, что первичная организация — это организация себе подобных; одного, взятого во многих экземплярах. И тут мы сталкиваемся с двумя возможными линиями обсуждения проблемы элементарного пространства.

Первая линия — философская, намеченная вопросом Мамардашвили: «Почему есть многое, а не одно?». При осмысливании вопроса завязываются отношения этого факта практически со всеми центральными категориями философии, например, с дуальной парой: тождество и различие. «Одно и то же» проявляется через различие. Различие есть различение «одного и того же». Мы отождествляем потому, что умеем различать; отождествление и различие «за спиной» имеют «многое одного выделенного». Отождествление операционально: нет равенства, а есть то, что устанавливает равенство: операция или преобразование. В философском содержании проблемы «одно — много одного» можно выделять и законы; такой, например: этих одно качественно одинаковых не может быть бесконечно много. По сути этот закон эквивалентен закону перехода количества в качество, а в приведенной формулировке им владел, по-видимому, Зенон Элейский.

Рассмотрим, однако, как проявляется пространство «одно — много одного» в математике. а) Каждое топологическое векторное пространство, в частности, все функциональные пространства математической физики есть «сцепление» одного и того же — евклидового пространства размерности n, где n может быть любым натуральным числом, взятого в бесконечном числе экземпляров. Таким образом, обсуждаемые пространства есть «переплетение» пространств E_n. Это похоже на то, как разные здания построены из одного — кирпича. б) Каждая алгебраическая структура (модель) конечной сигнатуры «составлена» из экземпляров конечного числа диаграмм для n элементов, где n фиксировано. Диаграммы определяются предикатами и аксиомами. То, что конечное число объектов дает несравненно большее число разнообразных структур, которые данная теория изучает, можно сравнить с тем, что конечное число элементов таблицы Менделеева в своих взаимодействиях порождает весь макромир.

«Много этих одно» проявляется в математике и как сопряженное пространство функционалов к данному векторному пространству; и как множество ультрафильтров в стоуновском пространстве для булевой алгебры. Примеров много.

Обратимся непосредственно к доказательствам, где очень часто, если не всегда, основное — это выделение «одного» и организация отношений между «многими» в пространстве «одно — много одного». В приведенных ниже примерах выделено «одно» для пространства «много одного» и подчеркнуто. Примеры.

а) «*Кварталы* города» в решении 13-ой проблемы Гильберта Арнольдом и Колмогоровым [5]. б) *Конечные* арифметические *прогрессии*, взаимодействием которых решает Ван дер Варден одну проблему из теории чисел [57]. в) *Ультрафильтры*, их организация путем ранжирования через несколько простых теорем общей топологии таких как теорема Кантора — Бенедиксона в доказательстве Морли [69] категоричности теории в несчетных мощностях, если она категорична в мощности действительных чисел. г). в качестве элементарного пространства «одно — много одного» можно рассматривать *строки* из конечного числа символов в доказательстве элементарной теоремы компактности [58]. Это пространство — фундамент доказательства теоремы Тихонова о компактности произведения компактных топологических пространств и теоремы Геделя — Мальцева из теории моделей.

Итак, мы берем как *элементарное пространство множество, «повторяющих одно» элементов, — пространство «одно — много одного»*. Важнейшей проблемой становится выбор научного контекста, в рамках понятий которого, описываются закономерности отношений между элементами пространства «одно — много одного», закономерности организации элементарного пространства. Возможны два подхода к решению этой проблемы.

Первый путь проглядывает через схемы рассуждений и диаграммы Э.М. Хакимова Он состоит в том, что берутся простейшие геометрические объекты; точки, линии, сферы, квадраты и т.п. Определяется их простейшее взаиморасположение (параллельность, перпендикулярность). Ситуация геометрического взаимодействия «снимается» затем в числовых отношениях. Геометрия идеально полагается в числовых последовательностях, например, Фибоначчи, в числовых пропорциях (золотое сечение и т. п). Этот этап организации пространства — своеобразное отражение пифагореизма. Изучение числовых отношений «снятого» пространства задает направление усложнения геометрических объектов и их взаиморасположения исходного пространства. Затем следует новое «снятие» картины в целом числовыми отношениями и т.д. Это путь эволюционного моделирования очень перспективен для математической разработки.

Другой подход связан с анализом того, как организуются отношения элементов пространства «одно — много одного» в известных математических доказательствах. Анализ показывает, что основной инструмент организации в нетривиальных случаях есть индивидуализация и ранжировка объектов элементарного пространства через их роль в отношениях «внешней» теории, «внешней среды». В современной математике этот необходимый выход за пределы того контекста, в котором проблема родилась, совершается как «подъем» на другой уровень схематизации и абстракции — на уровень *теории категорий и схем.* Особенно ярко это показывает пример [69]. В более простых случаях организатором выступают несколько (или одна) «внешних» теорем, или какой-то *рациональный принцип* мышления. В любом случае мы выходим в область «инобытия» объекта — того одного, что образует элементарное пространство, выходим на его идеальное существование. И с этой стороны вновь обнаруживается связь проблемы с такими категориями философии как «объект», «идеальное».

Нам важно было изменить точку зрения на математическое доказательство, войдя в более широкий контекст, чем тот, который составляет современная математика. Но предстоит еще проявить рациональные принципы организации доказательства как иерархической системы идей до такой четкости, когда станет возможным соотнести доказательству определенную новую математическую структуру.

§ 4. Принцип проведения предельного процесса

Принцип предельного перехода сопровождает элементарное пространство и является дуальным к нему, позволяя подняться к элементу более высокого уровня, чем элементы указанного пространства.

Теорема 4.1 (элементарный вариант теоремы Намиоки). *Пусть в квадрате задана функция раздельно непрерывная по переменным x и y, $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. Тогда найдется точка квадрата, в которой функция f непрерывна по обеим переменным.*

Доказательство. Берем внутреннюю точку квадрата (x_0, y_0), проводим прямые, параллельные осям x, y и введем новую систему координат, приняв (x_0, y_0) за начало, а упомянутые прямые за соответствующие оси. Это равносильно замене:

$$x' = x - x_0, y' = y - y_0.$$

Достаточно доказать теорему, предполагая f функцией от(x', y') (в дальнейшем эти переменные вновь обозначаются через x и y). Не те-

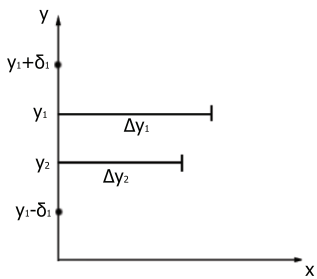

Рис. 2. Представление исходных данных

ряя общность, примем, что $f(0{,}y) \equiv 0$. Произвольно берем интервал (c, d). Фиксируем положительное число $\delta > 0$ и для каждой точки $y \in (c, d)$ построим отрезок длины Δy с началом в точке $(0, y)$, параллельный оси X, такой, что для всех $0 \leq x \leq \Delta$, $|f(x, y)| < \varepsilon$, а $|f(\Delta y, y)| = \varepsilon$. Число ε фиксируем заранее.

Если для всех x $f(x, y) < \varepsilon$ полагаем Δy равным наибольшему значению x. Предположим, что для произвольно взятого (c, d) в любом замкнутом интервале $[a, b] \subset (c, d)$ существует значение y для которого Δy сколько угодно мало. Далее поступим следующим образом. На первом шаге произвольно выберем $y_1 \in (c, d)$ и соответствующее Δy_1, которое помещается в квадрате, $\exists \delta_1 > 0$ со свойством: если $y \in [y_1 - \delta_1, y_1 + \delta_1]$, то $f(\Delta y_1, y) \geq \varepsilon/2$.

Делаем второй шаг. Выбираем в открытом интервале $(y_1 - \delta_1, y_1 + \delta_1)$ точку y_2, для которой $\Delta y_2 \leq \frac{1}{2}\Delta y_1$. Это возможно согласно предположению. Существует положительное число δ_2, со свойствами: $[y_2 - \delta_2; y_2 + \delta_2] \subset (y_1 - \delta_1, y_1 + \delta_1)$, $|f(y_2, \Delta y_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $y \in [y_2 - \delta_2, y_2 + \delta_2]$. Продолжая рассуждать подобным образом, получаем последовательность замкнутых интервалов $D_i \equiv [y_i - \delta_i, y_i + \delta_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, для которых выполнены условия $D_i \subseteq D_{i-1}$, $\delta_i \leq \frac{1}{2}\delta_{i-1}$, $|f(\Delta y_i, y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, если $y \in D_i$.

Согласно известной теореме из анализа последовательность вложенных друг в друга интервалов D_i имеет общую точку y^*. Последовательность $f(\Delta y_1, y^*), f(\Delta y_2, y^*), \ldots, f(\Delta y_n, y^*), \ldots$ стремится к нулю, поскольку $\Delta y_n \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны $y^* \in \dot{D}_k$ для любого натурального k и потому по построению D_k выполняется неравенство $|f(\Delta y_k, y^*)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Противоречие опровергает предположение.

Поэтому во взятом интервале $[c, d] = D_0$ существуют интервал $[c_1, d_1] \subseteq (c, d)$ и число $\delta \geq 0$, такие, что $\Delta y \geq \delta > 0, \forall y \in (c_1, d_1)$.

Повторяя рассуждения с отрезками Δy, построенными слева от оси Y в точках $[c_1, d_1]$, найдем прямоугольник $\Omega_1 = \{-\delta_1 \leq x \leq \delta_1, a_1 \leq y \leq b_1\}, \delta_1, a_1, b_1 > 0$, в котором колебание функции $f(x, y)$ оценивается так:

$$\omega_f(\Omega_1) = \sup_{P,Q \in \Omega_1} |f(P) - f(Q)| \leq$$

$$\leq \sup_{P,Q \in \Omega_1} (|f(P) - f(P_1)| + |f(P_1) - f(Q_1)| + |f(Q_1) - f(Q)|) \leq$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Аналогично находим прямоугольник $\Omega_2 = -\delta_2 \leq x \leq \delta_2, a_2 \leq x \leq b_2 \subset \dot{\Omega}_1$, в котором колебание функции $f(x, y) \leq 3\varepsilon_1, \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Продолжая подобные построения, находим последовательность прямоугольников $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$, таких, что $\Omega_{n+1} \subseteq \dot{\Omega}_n$ и $\omega_f(\Omega_n) \leq 3\varepsilon/2^n$. имеют общую точку

Вложенные друг в друга замкнутые прямоугольники Ω_n имеют общую точку $(0, y^*)$, в которой функция $f(x, y)$ непрерывна по обеим переменным. $\square$

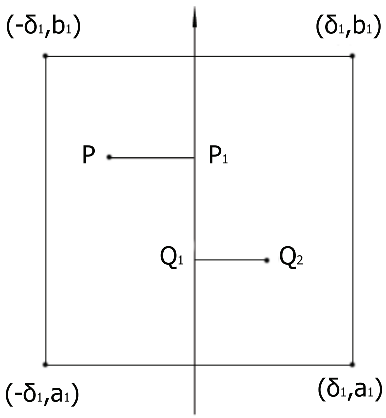

Рис. 3. Представление промежуточных данных

Из доказательства следует, что если функция $f(x,y)$ непрерывна отдельно по x, отдельно по y в квадрате $[0 \leq x, y \leq 1]$, то она непрерывна по обеим переменным на множестве $[0;1] \times D$ или $D \times [0;1]$, где D — множество всюду плотное на отрезке $[0;1]$.

Теорема Намиоки утверждает подобное для функции $f(x,y)$, определенной на произведении компактных множеств $X \times Y$, при этом дополнительно устанавливается (в нашем доказательстве это тоже можно сделать), что D есть в X или Y множество типа G_δ (пересечение счетного числа открытых множеств).

Теорема 4.2 (Бернштейн). *Два множества, каждое из которых эквивалентно некоторому подмножеству другого, эквивалентны.*

Доказательство. Следуем Хаусдорфу [56]. Два множества A и B эквивалентны, если существует взаимно однозначное отображение одного на другое. Эквивалентность A и B будем обозначать так: $A \sim B$. Итак, пусть $A \sim B_1, B_1 \subset B$, и $B \sim A_1, A_1 \subset A$.

Следующим образом «запускаем» процесс, исходя из указанных отношений. При взаимно однозначном отображении $\varphi_A(A)$ на B_1 подмножество A_1 отобразится на $B_2 \subset B_1$, а при отображении $\varphi_B(B)$ на A_1 подмножество B_1 отобразится на $A_2 \subset A_1$. Таким образом, получается последовательность:

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots,$$
$$B \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots,$$

где $A_{2i+1} = \varphi_B(B_{2i}),\ \ldots, B_{2i+1} = \varphi_A(A_{2i}), i = 1, 2, 3, \ldots$

Следующий рисунок-схема (рис. 1) наглядно представляет расположение этих множеств:

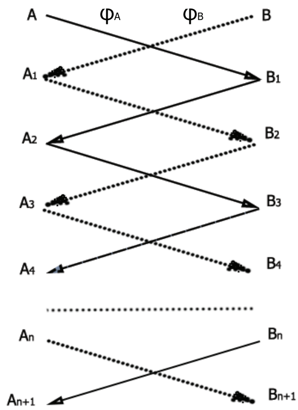

Рис. 4. Расположение множеств

Легко усматриваем:

$$A - A_1 \sim B_1 - B_2; A_2 - A_3 \sim B_3 - B_4; \ldots \ (1)$$
$$B - B_1 \sim A_1 - A_2; B_2 - B_3 \sim A_3 - A_4; \ldots \ (2)$$

Определим $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Из (1) и (2) следует $A - D \sim B - C$. В то же время простым рассуждением устанавливаем $\varphi_A(D) = C, \varphi_B(C) = D$. Конец доказательства.

Используется «*идеально*» что «часть равно целому» в случае бесконечных множеств.

Заключительные замечания.

1. Если *объект* порождает *процесс* порождения однотипных объектов, то объект обладает *творческой силой*: он проявляет свое *инобытие*.

2. Последовательные шаги однородного процесса подчиняются *закону перехода* количества в качество.

3. Мы выходим на новый уровень доказываемых фактов, используя либо «сингулярный» элемент самого элементарного пространства, либо предельную экстраполяцию к общему члену пространства.

Глава 6

Принцип ε-поправки. Большое-малое в математике

§ 1. Рассуждения с натуральным рядом

Если развитие математической идеи «идет непрерывно», то следующий глубокий математический результат должен на какую-то «малость» отличаться от уже достигнутых результатов. Какое-то ближайшее и естественное развитие математической темы в «небольших» изменениях форм сформулированных результатов может достигнуть нового по качеству содержания.

Рассмотрим такие ε-изменения формы со сменой содержания на примере следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Следующий (натуральный) ряд*

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится.

Доказательство. Если бы существовал предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

то последовательность частичных сумм S_n была бы фундаментальной, т.е. для заданного $\varepsilon > 0$ существовал бы номер N, такой что $|S_k - S_m| \leq \varepsilon$ для любых $k, m \geq N$. Однако

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} > \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2},$$

и условие фундаментальности не выполняется, следовательно, натуральный ряд расходится. $\square$

Но в «окрестности» обсуждаемого наблюдается следующая «неожиданная».

Теорема 1.2. *В натуральном ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *опустим члены, в записи которых присутствует цифра 9. Полученный ряд сходится.*

Доказательство. Сложим члены, у которых в записи знаменателя участвуют n цифр, исключая 9. Каждое слагаемое в такой сумме допускает оценку:

$$\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}\le\frac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}}=\frac{1}{10^{n-1}},$$

но их общее число не превосходит 9^n. Поэтому обсуждаемая сумма $\delta_n\le 9^n/10^{n-1}=10(0,9)^n$.

Определенный в формулировке теоремы (1.2) ряд имеет ту же сумму, что и ряд

$$\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n+\ldots,$$

мажорируемый рядом бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $0,9<1$. Теорема доказана.

Среди «окружающих» натуральный ряд утверждений, допускающих «малое» изменение основной обсуждаемой формы — натурального ряда, очень впечатляет своим содержанием следующий результат из функционального анализа [63].

Теорема 1.3. *Пусть* $f\colon X\to[0,\infty]$ — μ*-измеримая функция. Тогда существуют* μ*-измеримые множества* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *в* X *такие, что*

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{A_k}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Сначала поясним понятия, участвующие в формулировке теоремы. Здесь X — множество, 2^X — семейство подмножеств множества X. Отображение $\mu\colon 2^X\to[0,\infty]$ называется мерой, если (i) $\mu(\emptyset)=0$, (ii) $\mu(A)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$, где $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. В книге [63], откуда взято доказательство, под мерой понимается внешняя мера из принятого классического изложения [54]. Множество $A\subset X$ называется μ-измеримым, если $\mu(B)=\mu(B\bigcap A)+\mu(B-A)$ для любого множества $B\subset X$. Наконец, функция f, отображающая X в топологическое пространство X, называется μ-измеримой, если для любого открытого множества $U\subset Y$ множество $f^{-1}(U)$ μ-измеримо.

После этого предварительного напоминания основных определений из теории меры приступаем собственно к доказательству. Положим $A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$ и определим по индукции для $k = 2, 3, \ldots$

$$A_k = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}\}.$$

Здесь χ_{A_j} — это характеристическая функция множества A_j:

$$\chi_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_j, \\ 0, & x \notin A_j. \end{cases}$$

Очевидно, что $f \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}$. Действительно, если элемент x принадлежит бесконечному числу множеств $A_{k_p}, p = 1, 2, \ldots$, то $f(x) \geq \sum\limits_{j=1}^{k_{p-1}} \frac{1}{j}\chi_{A_j}$, отсюда при $k_p \to \infty$ получаем $f(x) \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}$.

Если x принадлежит конечному числу A_j, то пусть j_1 максимальное из индексов j с этим свойством. Имеем

$$\forall i > j_1 \ x \notin A_i \to \chi_{A_i}(x) = 0, \text{поэтому}$$

$$f(x) \geq \frac{1}{j_1} + \sum_{j=1}^{j_1-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{j_1} \frac{1}{j}\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\chi_{A_j}.$$

Если $f(x) = \infty$, то $x \in A_k$ для всех k. С другой стороны, если $0 < f(x) < \infty$, то $x \notin A_n$ для сколь угодно большого числа n. Это следует из расходимости гармонического ряда (теорема 1.1).

Поэтому для сколь угодно большого числа n имеем

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\chi_{A_k} \leq \frac{1}{n}. \ \square$$

§ 2. Введение малого параметра ε

Очень часто в исследуемой области удается добиться лучшего результата, изменяя что-то «всего на чуть-чуть», «на ε», или вводя в рассмотрение новую, но малую величину, которая «перестраивает» материал, вводит «новый ракурс» видения перспективы.

Уместна такая аналогия. За глухим забором скрывается нечто интересное. Человек, которому хочется узнать, что же представляет собой это нечто, может подтянуться до верхнего края забора макушкой головы. Всего-то нужно еще сантиметров двадцать, чтобы его глаза смогли увидеть мир за забором. Вот эти-то двадцать сантиметров и есть та ε-поправка, которая иногда важна для достижения результата в математике.

Яркий пример «ε-поправки» представляет теорема Лузина, к изложению которой мы и переходим (по упомянутой книге Эванса и Гариепи [63]).

Теорема 2.1. *Предположим, что $K \subset R^n$ компактно и функция $f\colon K \to R^m$ непрерывна. Существует непрерывное отображение $\bar f$ всего евклидового n-мерного пространства $\bar f\colon R^n \to R^m$ такое, что $\bar f = f$ на K.*

Доказательство.

1) При $m > 1$ требуемое утверждение легко следует из случая $m = 1$. Поэтому рассмотрим $f\colon K \to R$.

2) Пусть $U \equiv R^n - K$. При $x \in U$ и $s \in K$ полагаем

$$u_s(x) = \max\left\{2 - \frac{|x-s|}{\operatorname{dist}(x,K)}, 0\right\},$$

откуда

$$x \mapsto u_s(x) \text{ непрерывна на U, } 0 \le u_s(x) \le 1,$$
$$u_s(x) = 0, \text{ если } |x-s| \ge 2\operatorname{dist}(x,K).$$

Пусть $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ — счетное плотное подмножество K. Определим

$$\sigma(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} u_{s_j}(x),\ x \in U.$$

Заметим, что $0 < \sigma(x) \le 1$ при $x \in U$. Положим

$$v_k(x) \equiv \frac{2^{-k} u_{s_k}(x)}{\sigma(x)}$$

при $x \in U$, $k = 1, 2, \ldots$ Функции $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют разбиение единицы на U. Положим, что

$$\bar f(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in K, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x) f(s_k),\ x \in U. \end{cases}$$

Согласно критерию Вейерштрасса равномерной сходимости ряда функция $\bar{f}$ непрерывна на U.

3) Надо показать, что $\lim \bar{f}(x) = f(a)$ при $x \to a$ для $x \in U$ и всех $a \in K$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Сущестует $\delta > 0$ такое, что $|f(a) - f(s_k)| < \varepsilon$ для всех s_k таких, что $|a - s_k| < \delta$. Пусть $x \in U$, $|x - a| < \delta/4$. Если $|a - s_k| \geq \delta$, то $\delta \leq |a - s_k| \leq |a - x| + |x - s_k| < \frac{\delta}{4} + |x - s_k|$, откуда $|x - s_k| \geq \frac{3}{4}\delta > 2\,|x - a| \geq 2\mathrm{dist}\,(x, K)$. Таким образом, $v_k(x) = 0$, если $|x - a| < \delta/4$ и $|a - s_k| \geq \delta$. Так как
$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 1,\ x \in U,$$
при $|x - a| < \delta/4$ и $x \in U$ имеем
$$\left|\bar{f}(x) - f(a)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\,|f(s_k) - f(a)| < \varepsilon.\ \square$$

Покажем, что измеримая функция на ε-малом множестве отличается от непрерывной функции.

Теорема 2.2 (Лузин). *Пусть μ — регулярная мера Бореля на R^N и $f : R^n \to R^m$ — μ-измеримая функция. Педположим, что $A \subset R^n$ μ-измеримо и $\mu(A) < \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует компактное множество $K \subset A$ такое, что*
(i) $\mu(A - K) < \varepsilon$,
(ii) $f\,|_K$ непрерывна.

Доказательство. Для каждого положительного целого i рассмотрим попарно непересекающиеся борелевские множества
$$\{B_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \subset R^m$$
такие, что $R^m = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_{ij}$ и $\mathrm{diam} B_{ij} < 1/i$. Положим $A_{ij} \equiv A \cap f^{-1}(B_{ij})$. Тогда A_{ij} μ-измеримы и $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij}$.

Положим $\nu = \mu\lfloor A$. Заметим, что ν — мера Радона, поэтому существует компактное множество $K_{ij} \subset A_{ij}$ такое, что $\nu(A_{ij} - K_{ij}) <$

$\varepsilon/2^{i+j}$. Тогда

$$\mu\left(A-\bigcup_{j=1}^{\infty}K_{ij}\right)=\nu\left(A-\bigcup_{j=1}^{\infty}K_{ij}\right)=\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{ij}-\bigcup_{j=1}^{\infty}K_{ij}\right)$$
$$\leq\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_{ij}-K_{ij})\right)<\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty}\mu\left(A-\bigcup\limits_{j=1}^{N}K_{ij}\right)=\mu\left(A-\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}K_{ij}\right)$, существует $N(i)$ такое, что

$$\mu\left(A-\bigcup_{j=1}^{N(i)}K_{ij}\right)<\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Положим $D_i\equiv\bigcup\limits_{j=1}^{N(i)}K_{ij}$. Заметим, что D_i компактны. Для произвольных i и j фиксируем $b_{ij}\in B_{ij}$ и затем определим $g_i:D_i\to R^m$, полагая $g_i(x)=b_{ij}$ при $x\in K_{ij}, j\leq N(i)$. Так как $K_{i1},\ldots,K_{iN(i)}$ — компактные попарно непересекающиеся множества и, следовательно, отстоят на положительном расстоянии друг от друга, функции g_i непрерывны. Более того, $|f(x)-g_i(x)|<1/i$ при всех $x\in D_i$.

Положим $K\equiv\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}D_i$. Множество K компактно и справедлива оценка

$$\mu\,(A-K)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\,(A-D_i)<\varepsilon.$$

Так как $|f(x)-g_i(x)|<\frac{1}{i}$ в каждой точке $x\in D_i$, заключаем, что $g_i\to f$ равномерно на K. Таким образом, $f\mid_K$ непрерывна, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.3 (Меньшов). *Пусть μ — регулярная мера Бореля на R^N и $f\colon R^n\to R^m$ — μ-измеримая функция. Предположим, что $A\subset R^n$ μ-измеримо и $\mu(A)<\infty$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Тогда существует непрерывная функция $\bar f\colon R^n\to R^m$ такая, что $\mu\{x\in A\mid \bar f(x)\neq f(x)\}<\varepsilon$.*

Доказательство. По теореме Лузина существует компактное множество $K\subset A$ такое, что $\mu(A-K)<\varepsilon$ и $f\mid_K$ непрерывна. По теореме (2.1) существует непрерывная функция $\bar f\colon R^n\to R^m$ такая, что $\bar f\mid_K=f\mid_K$ и

$$\mu\{x\in A\mid \bar f(x)\neq f(x)\}\leq\mu(A-K)<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема Меньшова сама является «ε-вариацией» теоремы Лузина.

§ 3. О множествах первой категории

Обсуждаемый выше материал касается понятия «малость» в математике. Результаты получались с поправкой на эту малость. Одно понимание, как мы видели, формируется в рамках теории меры; это множества меры нуль или меры меньше, чем ε. Другое понимание малости множества даст общая топология — это «множества первой категории». Обсудим последнее понятие для метрических пространств.

Определение 3.1. *Множество $M \subseteq X, \rho$ называется нигде не плотным, если дополнение к его замыканию всюду плотно, т.е. $\overline{X - \overline{M}} = X$, здесь $\rho(x, y)$ — метрика на X.*

Теорема 3.1. *Множество M нигде не плотно тогда и только тогда, когда в любом открытом множестве содержится шар ненулевого радиуса, не содержащий точек из M.*

Доказательство. Пусть M нигде не плотно по определению. Пусть O любое открытое множество, тогда множество $O \bigcap (X - \overline{M})$ тоже открыто (т. к. пересечение двух открытых множеств — монжество открытое), не пусто (в O есть элемент из $X - \overline{M}$, либо в O есть предельная точка для $X - \overline{M}$, для последней O есть её окрестность, и потому в ней по-прежнему есть точка из $X - \overline{M}$. $\exists B_r(b) \subseteq O \bigcap (X - \overline{M}), r > 0 \Rightarrow B_r(b) \subseteq O$ и в $B_r(b)$ нет элементов из M.

Обратно: Пусть в любом открытом множестве есть шар, не содержащий элементов из M. Пусть $a \in X$ и V_a произвольная окрестность точки a. $\Rightarrow \exists B_r(b) \subseteq V_a, r > 0, B_r(b) \bigcap M = \emptyset$.

Тогда $B_r(b) \subseteq X - \overline{M} \Rightarrow V_a \bigcap (X - \overline{M}) \neq \emptyset \Rightarrow a \in \overline{X - \overline{M}} \Rightarrow \overline{X - \overline{M}} = X$. Теорема доказана.

Определение 3.2. *Множество $M \subseteq X, \rho$ называется множеством первой категории, если M есть счётная сумма нигде не плотных множеств. В противном случае M есть множество второй категории.*

Теорема 3.2 (Бэра о категориях). *Пусть X, ρ — полное метрическое пространство, M — множество первой категории в нём, тогда множество $X - M$ всюду плотно, т. е. $\overline{X - M} = X$.*

Доказательство. Напомним, что метрическое пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.

$M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3 \bigcup \ldots$, где M_i нигде не плотны, $i = 1, 2, \ldots$

Берем любую точку $a \in X$, любой шар радиуса $r_0 > 0$: надо доказать, что в $B_{r_0}(a)$ есть элементы из $X - M$.

Поскольку M_1 нигде не плотно, то по только что установленной теореме существует $B_{r_1}(a_1) \subseteq B_{r_0}(a), r_1 < r_0/2$, который не содержит элементов из M_1, т. е. $B_{r_1}(a_1) \bigcap M_1 = \emptyset$.

Поскольку M_1 нигде не плотно $\Rightarrow$ существует шар $B_{r_2}(a_2) \subseteq B_{r_1}(a_1), 0 < r_2 < \frac{r_1}{2}, B_{r_2}(a_2) \bigcap M_2 = \emptyset$ и т.д. каждому M_n соответствует шар $B_{r_n}(a_n)$ такой, что $B_{r_n}(a_n) \subseteq B_{r_{n-1}}(a_{n-1}), 0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}, B_{r_n}(a_n) \bigcap M_n = \emptyset$.

Таким образом, построили систему вложенных шаров $B_{r_0}(a) \supseteq B_{r_1}(a_1) \supseteq B_{r_2}(a_2) \supseteq \ldots \supseteq B_{r_n}(a_n) \supseteq \ldots$, $r_n < \frac{r_0}{2^n}$, $B_{r_n}(a_n) \bigcap M_n = \emptyset$.

Мы можем считать, не теряя общности, множества $M_n, n = 1, 2, \ldots$ замкнутыми (т. к. M_i нигде не плотно, то и $\overline{M_i}$ нигде не плотно, и множество $\widehat{M} = \overline{M_1} \bigcup \overline{M_2} \bigcup \ldots$ остается множеством 1-й категории. Если докажем, что $\overline{X - \widehat{M}} = X$, то отсюда следует и равенство $\overline{X - M} = X$).

Для каждого B_{r_n} выбираем точку $a_n \in B_{r_n}$. Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ фундаментальна, т. к.

$$\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \in B_{r_n} \Rightarrow \rho(a_i, a_j) \leq 2r_n \to 0, n \to \infty.$$

Так как метрическое пространство полно, то последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ имеет предел

$$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = b.$$

Так как каждое множество M_n замкнуто, то

$$b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{r_n} \Rightarrow \forall n \quad b \notin M_n \Rightarrow b \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

$$B_{r_n}(a) \ni b \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, b \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Итак, точка a является предельной для $X - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. $\square$

Теорема Бэра говорит нам, что определение малости множества через категорию корректно в том плане, что дополнение обсуждаемого множества до всего пространства велико в определенном смысле, большое (всюду плотно и не является множеством первой категории).

Понятие малости определяется контекстом, в котором обсуждается проблема. Например, множество меры нуль может не быть множеством первой категории и наоборот. Это подтверждает

Теорема 3.3. *Прямую можно разбить на два дополняющих друг друга множества A и B так, что A есть множество первой категории, а B имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное плотное в R множество. Через I_{ij} обозначим интервал $(x_i - 2^{-i-j}, x_i + 2^{-i-j})$. Пусть множество $A_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_{ij}, j = 1, 2, \ldots, B = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Тогда $B \subset \bigcup\limits_{i} I_{ij}$ и $\mu(B) \leq \sum\limits_{i} \frac{1}{2^{i+j-1}} = \frac{1}{2^{j-1}}$ для любого j, что означает $\mu(B) = 0$. Поскольку A_j содержит все числа x_i, то A_j — открытое всюду плотное множество. Следовательно, $R - A_j$ — множество замкнутое и нигде не плотное. Имеем искомое разложение $R = \left(\bigcup\limits_{j}(X - A_j)\right) \bigcup B$. Теорема доказана

§ 4. Заключительные замечания

1) Необходимые сведения по теории меры можно взять из приложений в книге [61].

2) Принцип ε-поправки требует «обостренного чувствования», интуиции; ощущения, что что-то значительное «стоит рядом» с уже нам известным. «Прозрение» этого «стоящего рядом» сопровождается всегда радостным чувством удивления. Например, легко доказать, что $(n+1)(n+2)\ldots(n+k)$ делится на k. А «рядом стоит» удивительное: $(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$ делится на $k!$

Удивление

Как благодатно удивление! Как оно безумно!
Как оно благотворно! Как прекрасен
Удивляющийся человек, хотя несколько и нелеп!
Удивление патетично. Это большое и сложное искусство.
Не каждому оно дано.
Способность удивляться — это дар.
Не каждый достоин его. Оно — героично.
Что может быть на свете лучше, чем быть удивленным?
Сколько пользы можно добыть
Из ее великой бесцельности!
Оно в то же время и могуче:
Оно потрясает, как электрический разряд.
Оно обильно, как тропический ливень.
Прихотливо, как ручей.
Сколько нужно наивности для того,
Чтоб извлечь из удивления
Всю его бесконечную мудрость?
Оно в каком-то смысле и трагично, — оно беззащитно.
Есть недруги удивления.
У них в глазах мертвая роговица.
Они подстерегают удивление,
Чтобы настигнуть и тут же на месте убить его.
Бойтесь их!..
Есть иерархия удивлений!
Кто знает, может, мы живем
Для некоего Великого Удивления?
Я удивляюсь — значит, я жив.
Слава богу, нет, слава богу, я ещё способен удивляться!
Я не раз удивлялся в жизни. Как я удивлялся!
Я помню каждое свое удивление.
Ни одно из них не похоже на другое.
О мои удивления! Вы бескорыстны!
Я копил вас, как скряга.
Я собирал вас, я дрожал над вами.
Я ведь чувствовал, что когда-нибудь,
Раздавив ваши тяжелые и обильные грозди,
Я добуду из них немного поэзии.

Евгений Винокуров, 1962

3) Есть непрерывность мышления в ее абстрактно-философском смысле, и есть «пограничные слои» перехода при этом процессе мышления количества в качество. Собственно денотат понятия «ε-поправка» и есть этот «пограничный слой».

Глава 7
Принцип компактности

Принцип компактности (касается дуальности: конечное — бесконечное) — это совокупность утверждений, устанавливающих справедливость определенных отношений для элементов бесконечного множества, исходя из их справедливости для конечных множеств(для всех конечных, или только из определенного класса); а также наоборот: позволяющих установить свойство, известное для бесконечного множества, для определенного конечного. Эти две формы принципа компактности внутренне взаимосвязаны.

Часто пользуются принципом компактности, не формулируя его явно как условие компактности. Например, известная теорема, что полином n-ой степени $\mathrm{P}_n(x)$ полностью определяется своими значениями в точках $x_1, \ldots,\ x_{n+1}$ (попарно различные точки), может быть переформулирована так: если на конечном множестве точек $x_1,\ \ldots, x_{n+1}$ для полинома $P_n(x)$ выполняется равенство $\mathrm{P}_n(x_i) = 0$, $i = 1,\ \ldots, n + 1$, то для всех x $\mathrm{P}_n(x) = 0$.

Или, вот такое утверждение: если любые три точки из данного набора лежат на одной прямой, то все точки лежат на одной прямой.

В этой главе основное внимание будет уделено теореме Хелли и теореме Лебега о размерности. Их противополагание вскрывает каждое из них как обратное к другому во взаимодействии: конечное-бесконечное. Но вначале рассмотрим следующую теорему.

§ 1. Элементарная теорема компактности

Теорема 1.1 (Р.Р. Шагидуллин). *Пусть дано бесконечное число конечных строк символов a_{ij}:*

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n_1} \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n_2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1}, & a_{k2}, & a_{k3}, & \ldots, & a_{kn_k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Символы представляют буквы латинского алфавита, индексированные натуральными числами; возможно подчеркнутые сверху, например, A_1, B_{10}, $\overline{C_9}$. Для любого конечного числа строк возможно *выбрать по одному символу в строке таким образом, что в целом выборка не будет содержать какую-либо букву вместе с ее «отрицанием» (подчеркиванием), например, D_{101} и $\overline{D_{101}}$. Тогда описанную выборку можно осуществить сразу для всей системы строк.*

Доказательство. Рассмотрим элемент a_{11}. Для него возможны два случая:

1. После отбрасывания символа a_{11} условия теоремы сохраняются. В этом случае переходим к новой таблице — без a_{11}.

2. Пусть этот символ a_{11} нельзя отбросить без нарушения условий теоремы. В этом случае есть конечное число строк, содержащих первую строку, и таких что если a_{11} убрать, то выборку сделать нельзя. Получается, что первоначально все необходимые выборки в этой конечной системе содержат a_{11}. Тогда в первой строке оставляем только один элемент a_{11} и переходим к другой строке. Рассуждения последовательно проводим для второй строки и т. д. В итоге получаем по одному элементу из каждойстроки — искомую выборку. В случае если строк несчетное число, их вполне упорядочиваем и применяем трансфинитную индукцию. □

Доказательство этой теорема составляет ядро доказательства теоремы Гёделя — Мальцева в теории моделей и теоремы Тихонова в общей топологии.

Пример обратной формы принципа компактности приведем без доказательства.

Теорема 1.2 (Гейне — Бореля). *Если совокупность открытых множеств покрывает интервал $[a, b]$, то из этой совокупности можно выделить конечное число открытых множеств, покрывающих $[a, b]$.*

Напомним, что множество O (подмножество евклидового пространства E_n) называется открытым, если вместе с каждой своей точкой a оно содержит и шар $\mathrm{B}_r(\mathrm{a})$ не нулевого радиуса r с центром в этой точке. Система множеств $\{\mathrm{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ покрывает множество D, если $\mathrm{D}\subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$.

Приведем теперь пример, когда для установления свойства системы из бесконечного числа элементов достаточно наличие этого свойства для конечных подсистем с определенным числом элементов.

§ 2. Теорема Хелли

Теорема 2.1. *Пусть $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство выпуклых замкнутых ограниченных множеств евклидового пространства E_n. Если каждые $n+1$ множеств семейства имеют общую точку, то существует точка, общая всем множествам семейства.*

Прежде чем приступим к доказательству, «поиграем» с примерами, «действуя в контексте проблемы и рефлексируя над действием».

Сначала рассмотрим множество интервалов $[\mathrm{a}_\alpha, \mathrm{b}_\beta]$, $\alpha \in I$ на числовой прямой. Отрефлексируем на ситуацию, что $[a_1 \bigcap b_1] \bigcap [a_i, b_i] \neq \emptyset$. Как можно общую точку пересечения представить? Процесс понимания приводит к установлению факта: $\min\{b_1, b_i\}$ (а также $\max\{a_1, a_i\}$) есть общая точка.

Эта интерпретация исходного условия имеет продолжение: в качестве общей точки конечного множества интервалов

$$\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ...[a_n, b_n]\}$$

можно взять $\min\{b_1, \ldots, b_n\}$ или $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$. А как быть с бесконечным семейством $\{[a_\alpha, b_\alpha]\}$? Строим новое семейство, фиксируя один из интервалов $\{[a_1, b_1] \bigcap [a_\alpha, b_\alpha]\}_{\alpha \in I}$. И здесь $\min\{b_1 \ldots, b_n, \ldots\}$ будет общей искомой точкой.

Обратимся теперь к плоскости E_2. И опять рассмотрим частный случай: дано четыре выпуклых замкнутых ограниченных множества A_1, A_2, A_3, A_4, любые три A_i, A_j, A_k из которых имеют общую точку a_{ijk}. Расставим на плоскости точки $a_{123}, a_{124}, a_{234}, a_{134}$. Пусть они образуют выпуклый четырехугольник (рис. 1).

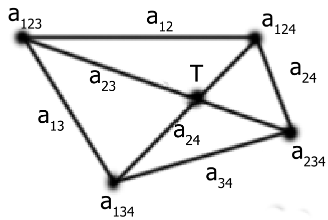

Рис. 1. Выпуклый четырехугольник

Здесь отрезок a_{km} принадлежит $A_k \bigcap A_m$, так что точка Т — общая для всех A_1, A_2, A_3, A_4. Случай выпуклого четырехугольника оставляем как упражнение.

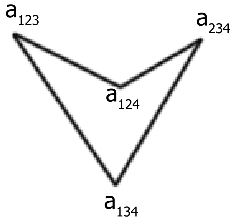

Рис. 2. Невыпуклый четырехугольник

Установив теорему для четырех множеств, выводим её справедливость для n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ методом индукции, переходя к системе из $n-1$ множеств: $A_1, A_2, ...A_{n-1} \bigcap A_n$. При этом пользуемся уже доказанным фактом о четырех множествах: три множества $A_k, A_l, A_{n-1} \bigcap A_n$ имеют общую точку.

Рассуждения апостериори. Можно ли общую точку в последнем случае выразить через операторы *supremum, infimum*?

Можно ли развить проведенные рассуждения на плоскости в случае бесконечного числа множеств?

Упражнения.

1. Рассмотрите в пространстве пять выпуклых замкнутых множеств, каждые четыре из которых имеют общую точку. Используйте точки a_{ijkm}, отрезки a_{ijk}, плоскости a_{ij} и организуйте рассуждение подобно случаю плоскости. Что это даёт?

2. На плоскости Дано n точек, причем известно, что каждые три из них можно заключить в круг радиуса 1. Докажите, что все эти точки могут быть заключены в круг радиуса 1.

3. Пусть J — конечное семейство параллельных отрезков в R^2, для каждых трех из которых существует прямая, имеющая общие точки с ними. Доказать, что существует прямая пересекающая все отрезки из J.

Доказательство теоремы Хелли в общем случае проведем индукцией по числу измерений в пространстве. Пусть она верна для E^{n-1}, и рассмотрим семейство $\{\mathrm{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}$, где каждые $n+1$ множеств пересекаются. Предполагая, что $\bigcap\limits_{\alpha\in I} M_\alpha = \emptyset$, выделим подсемейство $\{\mathrm{M}_\beta\}_{\beta\in J}$, J$\subseteq I$, и множество $\mathrm{M}_\gamma, \gamma \in I$ со свойствами:

$$M \equiv \bigcap_{\beta\in J} M_\beta \neq \emptyset, \quad M_\gamma \bigcap M = \emptyset. \tag{2.1}$$

То, что такое семейство можно выделить и свойства (2.1) имеют место, следует из теоремы 7.1, гл 9.

Очевидно, М выпукло. Пусть точка x$\in M_\gamma, y \in M$, и расстояние $r(x,y)$ есть расстояние между M_γ и M. Через середину отрезка xy проведём гиперплоскость Γ, перпендикулярную к этому отрезку. Множества M_γ и M лежат по разные стороны Γ и не пересекают её (докажите). Рассмотрим n множеств $M_{\beta 1}, M_{\beta 2}, \ldots, M_{\beta n}, \beta_1, \ldots, \beta_n \in J$. Пересечение $M_{\beta 1} \bigcap M_{\beta 2} \bigcap \cdots \bigcap M_{\beta n} \bigcap M_\gamma$ не пусто по условию, выпукло, имеет точки общие как с M_γ так и с M. Поэтому множества $D_\beta = M_\beta \bigcap M_\gamma \bigcap \Gamma,\ \beta \in J$, выпуклы, ограничены, замкнуты, не пусты, и любые n из них имеют непустое пересечение. По индукционному предположению $\bigcap\limits_{\beta \in J} D_\beta \neq \emptyset$. Точка из этого пересечения будет общей для M_γ и M. Это опровергает предположение, что $M_\gamma \bigcap M = \emptyset$, а следовательно и предположение $\bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha = \emptyset$. $\square$

Заметим, что любой математический объект имеет конечное число реальных прообразов. Например, если рассмотреть треугольники, реализованные «материально», то их конечное число (даже атомов в нашей Вселенной конечное число). В философском аспекте получается, что математическую теорему относительно треугольника достаточно проверить (если мы имеем в виду практические применения) для конечного числа треугольников. На самом деле предыдущая фраза «рассмотрим все треугольники …» столько же непонятна (или понятна) сколько непонятна (или понятна) аксиома выбора. Действие определяет понимание.

Изложим теперь теорему компактности, имеющую обратную к теореме Хелли форму, а именно, теорему Лебега.

§ 3. Теорема Лебега

1. Размерность метрических пространств.

Теорема Лебега нам нужна как замечательный пример реализации принципа компактности, имеющей глубокую связь с теоремой Хелли. Предварительно, нам необходимо изложить основные сведения из теории размерности метрических пространств. В изложении следуем книге [17].

Здесь и далее под X будем понимать метрическое пространство со счетной базой. Необходимые сведения о них изложены в гл. 12, § 1.

Определение 3.1. *Пространство X имеет размерность* 0 *в точке* p, *если для каждой окрестности* U *точки существует* *окрестность V точки такая, что $V \subseteq U$, $\delta V = \emptyset$ Здесь $\emptyset$ — пустое множество, $\partial V = \overline{V} \bigcap \overline{X - V}$ — граница V, $\overline{V}$ — замыкание V.*

Границу можно охарактеризовать также как множество точек, являющихся предельными и для V и для дополнения $X - V$.

Непустое пространство X имеет размерность 0 ($\mathrm{dim} X = 0$), если в каждой своей точке имеет размерность 0. Пустому пространству X приписывается размерность (-1), $\dim \emptyset = -1$.

Упражнение 1. Доказать, что непустое счетное пространство всегда нульмерно.

Упражнение 2. Непустое подмножество нульмерного пространства нульмерно.

Определение 3.2. *Пусть A_1, A_2, B — попарно непересекающиеся подмножества пространства X. Множества A_1 и A_2 отделяются множеством (отделены множеством B) в пространстве X, если $X - B = O_1 \bigcup O_2, A_1 \subseteq O_1, A_2 \subseteq O_2, O_1, O_2$ — непересекающиеся открытые в $X - B$ множества. Если A_1 и A_2 отделены пустым множеством, говорят просто, что A_1 и A_2 отделены.*

Упражнение 3. Доказать, что A_1 и A_2 отделены в том и только в том случае, если существует множество С одновременно открытое и замкнутое, что $A_1 \subseteq C, C \bigcap A_2 = \emptyset$.

Теорема 3.1. *Пространство X нульмерно тогда и только тогда, когда его любые два замкнутые непересекающиеся множества могут быть отделены.*

Доказательство. Если X нульмерно, то легко показать, (см. упражнение 3) что любая точка $p \in X$ может быть отделена от любого замкнутого множества, не содержащего p. Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества. В силу вышеприведенного высказывания точка p обладает окрестностью $U(p)$ одновременно открытой и замкнутой, которая либо F_1, либо F_2 не пересекает. Поскольку $\bigcup\limits_{p \in X} U(p) = X$, а X обладает счетной базой, то в сумме можно оставить только счетное число слагаемых $U_i, i = 1, 2, \ldots, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = X$. «Переделаем» U_i в попарно непересекающиеся множества, по-прежнему покрывающие X. Положим

$$V_1 = U_1, V_i = U_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k, \text{ i=2, 3, } \ldots$$

Свойства V_i:

$V_i \bigcap V_j = \emptyset$, если i$\neq j$; V_i открыто; $V_i \bigcap F_1 = \emptyset$, либо $\mathrm{V}_i \bigcap F_2 = \emptyset$.

Пусть Φ_1 — сумма всех V_i, для которых $V_i \bigcap F_1 = \emptyset$, Φ_2 — сумма остальных V_i. Имеем:

$$\Phi_1 \bigcup \Phi_2 = \mathrm{X},\ \Phi_1 \bigcap \Phi_2 = \emptyset,$$

Φ_1, Φ_2 открыты, $F_1 \subseteq, \Phi_1$, $F_2 \subseteq \Phi_2$. Таким образом, Φ_1 и Φ_2 отделяют F_1 и F_2. □

Следующая теорема есть ε-поправка (усиление) только что доказанной.

Теорема 3.2. *Если F_1и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества пространства X, а — нульмерное множество, то существует замкнутое множество , отделяющее F_1 от F_2 и не пересекающее A.*

Доказательство. Так как X нормально, существуют открытые множества U_1 и U_2 для которых

$$F_1 \subseteq U_1, F_2 \subseteq U_2, \overline{U_1} \bigcap \overline{U_2} = \emptyset.$$

По предыдущей теореме существуют множества Φ_1 и Φ_2 одновременно открытые и замкнутые в A и такие, что

$$A = \Phi_1 \bigcup \Phi_2,\ \Phi_1 \bigcap \Phi_2 = \emptyset,\ \overline{U}_1 \bigcap A \subseteq \Phi_1,\ \overline{U_2} \bigcap A \subseteq \Phi_2.$$

Легко усмотреть, что множества $F_1 \bigcup \Phi_1$ и $F_2 \bigcup \Phi_2$ не пересекаются и никакое из них не содержит предельной точки другого. Так как X вполне нормально, то существует открытое множество W такое, что

$$F_1 \bigcup \Phi_1 \subseteq W, \overline{W} \bigcap (F_2 \bigcup \Phi_2) = \emptyset.$$

Следовательно, граница $\partial W = \overline{W} - W$ отделяет F_1 от F_2 и не пересекает A. □

Теорема 3.3. *Пространство, являющееся суммой счетного числа нульмерных замкнутых множеств нульмерно.*

Доказательство. Предположим, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, где каждое C_i замкнуто и нульмерно. Пусть F и Φ — два непересекающихся замкнутых множества. Начинаем с C_1. По доказанной теореме существуют замкнутые в X множестве $F_{1,1}$ и $F_{1,2}$ со свойствами

$$\mathrm{C}_1 = F_{1,1} \bigcup F_{1,2}, F_{1,1} \bigcap F_{1,2} = \emptyset, F \bigcap C_1 \subseteq F_{1,1},\ \Phi \bigcap C_1 \subseteq F_{1,2}.$$

В силу нормальности пространства X существуют открытые множества $\mathrm{O}_{1,1}$ и $\mathrm{O}_{1,2}$, для которых

$$\mathrm{F}\bigcup F_{1,1} \subseteq O_{1,1},\ \Phi\bigcup F_{1,2} \subseteq O_{1,2}, \overline{O}_{1,1} \bigcap \overline{O}_{1,2} = \emptyset, C_1 \subseteq O_{1,1} \bigcup O_{1,2}.$$

Аналогичные построения проводим для последующих C_i, i=2, ... По индукции получаем последовательности $\mathrm{O}_{i,1}, O_{i,2}$, i=1, 2, ..., со свойствами:

$$\mathrm{C}_i \subseteq O_{i,1} \bigcup O_{i,2}, \overline{O}_{i-1,1} \subseteq O_{i,1}, \overline{O}_{i-1,2} \subseteq O_{i,2},$$

$$\overline{O}_{i,1} \bigcap \overline{O}_{i,2} = \emptyset.$$

Пусть $\mathrm{O}_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_{1,i}, O_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_{2,i}$. Тогда O_1 и O_2 суть непересекающиеся открытые множества, отделяющие F и Φ:

$$\mathrm{O}_1 \bigcup O_2 \supseteq \bigcup_i C_i = X, F \subseteq O_1,\ \Phi \subseteq O_2.\ \square$$

Рассмотрим следующие четыре свойства пространства X.

1. X вполне несвязно.

2. Любые две различные точки в X могут быть отделены.

3. Любая точка может быть отделены от любого замкнутого множества, не содержащего рассматриваемую точку.

4. Любые две замкнутые не пересекающиеся множества могут быть отделены.

Из вышедоказанных результатов следует импликация $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$.

Обратные импликации $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ справедливы, если X компактно. Однако доказывать их здесь не будем.

Определение размерности n.

Определение 3.3. *Пространство X имеет размерность $\leq n$ $(n \geq 0)$ в точке p, если p обладает произвольно малыми окрестностями, границы которых имеют размерность $\leq n-1$, т. е. для любой окрестности $U(p)$ существует окрестность $V(p)$, $V(p) \subseteq U(p)$, $\dim \partial V(p) \leq n-1$.*

Определение 3.4. *Пространство X имеет размерность $\leq n$, если в каждой своей точке оно имеет размерность $\leq n$. Если при этом сформулированное условие не выполняется для $n-1$, то говорят, что пространство X имеет размерность n.*

Теорема 3.4. *Подпространство пространства размерности $\leq n$ имеет размерность $\leq n$.*

Доказательство. Проводится по индукции. Утверждение очевидно для $n = -1$. Предположим его справедливость для $n-1$.

Пусть X — пространство размерности $\leq n$, X' — подпространство X, $p \in X'$.Пусть U' — окрестность точки в X', $U' = U \bigcap X'$, U — открытое множество в X. Существует другое открытое множество V со свойствами

$$p \in V \subseteq U,\ \dim \partial V \leq n-1,\ \partial V = \overline{V} - V.$$

Пусть $V' \subseteq V \bigcap X'$, B — граница V в X, B' — граница V' в X'. Легко видеть, что B' содержится $B \bigcap X'$. По индуктивному предположению $\dim B' \leq n-1$. $\square$

Теорема 3.5. *Пространство X имеет размерность $\leq n$, если каждая точка из X может быть отделена от любого не содержащего ее замкнутого множества замкнутым множеством размерности $\leq n-1$.*

Доказательство легко следует из определений и уже установленных фактов. Излагать его здесь не будем.

Теорема 3.6. *Подпространство X' пространства X имеет размерность $\leq n$ в том и только в том случае, если каждая точка из X обладает произвольно малыми окрестностями (фундаментальной системой окрестностей), пересечение границ которых с X' имеет размерность $\leq n-1$.*

Доказательство. То, что из условий теоремы следует, что $\dim X' \leq n$, доказывается аналогично доказательству теоремы 3.4. Допустим, дано, что $\dim X' \leq n$. Пусть $\in X'$, U — окрестность в X. Существует окрестность V' точки в X', для которой

$$V' \subseteq U',\ \dim B' \leq n-1,\ B' \text{ — граница } V' \text{ в } X'.$$

Существует такое открытое множество W, что

$$V' \subseteq W, \overline{W} \bigcap (X' \backslash \overline{V}') = \emptyset.$$

Заменив, если нужно W на $W \bigcap U$, полагаем $W \subseteq U$. Множество $\overline{W} \backslash W = \partial W$ не содержит точек из $X' \backslash \overline{V}'$ и из V', следовательно, пересечение $X' \bigcap \partial W$ содержится в B' и потому имеет размерность не большую, чем $n-1$. $\square$

Теорема 3.7. *Для любых двух подпространств A, B пространства X имеем*

$$\dim (A \bigcup B) \leq 1 + \dim A + \dim B.$$

Доказательство. Проводится двойной индукцией по размерностям A и B. Предложение очевидно для случая $\dim A = \dim\, B = -1$. Пусть теперь $\dim A = m$, $\dim B = n$, а для пар $(k, l) \prec (m, n)$ (лексикографический порядок), где $k = \dim A$, $l = \dim B$, утверждение теоремы считаем справедливым. Предположим, что $p \in A$, U — окрестность p в X. По предыдущей теореме существует такое открытое множество V, что

$$p \in V \subseteq U, \dim (W \bigcap A) \leq m - 1, W = \partial V.$$

Размерность W$\bigcap B$ не превосходит n, и по индуктивному предположению

$$\dim [W \bigcap (A \bigcup B)] \leq m + n.$$

Опять в силу предыдущей теоремы отсюда следует, что

$$\dim (A \bigcup B) \leq m + n + 1. \ \square$$

Теорема 3.8. *Пространство, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств размерности $\leq\ n$, имеет размерность $\leq n$.*

Доказательство. Ведется индукцией по n. Утверждение теоремы обозначим как высказывание S_n. Через D_n обозначим утверждение: любое пространство размерности $\leq n$ является суммой подпространства размерности $\leq n - 1$ и подпространства ≤ 0. Предположим, что S_{n-1} доказано, а X — пространство размерности $\leq n$. Существует базис $\{\mathrm{U}_i\}$, i=1,2, ..., состоящий из открытых множеств, границы которых $\{B_i\}$ имеют размерность $\leq n - 1$. По индукционному предположению множество $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ имеет размерность $\leq n - 1$. Каждое B_i не пересекается с $X - B$ и по теоремам 3.6, 3.3 размерность $\dim X - B \leq 0$. Из равенства $X = B \bigcup$(X-B) следует D_n. Рассмотрим сумму $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i, \dim C_i \leq n, \overline{C}_i = C_i$, i=1,2, ...«Переделаем» последовательность множеств C_i в последовательность попарно не пересекающихся множеств K_i, тоже покрывающих X, полагая

$$K_1 = C_1, K_i = C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j, \text{ i=2,3, } \ldots, \dim K_i \leq n.$$

Легко показать, что каждое открытое множество в метрическом пространстве X со счетной базой можно представить как счетное объединение замкнутых множеств (достаточно так представить любой шар). Так представимые множества обозначаются через F_σ. Все множества K_i имеют такое представление F_σ. Применяя D_n к каждому K_i, получаем

$$K_i = M_i \bigcup N_i, \dim M_i \leq n-1, \dim N_i \leq 0.$$

Обозначим $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $N = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i$. Каждое M_i является F_σ множеством, поэтому таковым будет M. Применяя S_{n-1} и S_0, имеем $\dim M \leq n-1$, $\dim N \leq 0$, что в силу теоремы 3.7 дает $\dim X \leq n$, то есть S_n верно. $\square$

Теорема 3.9. *Пространство имеет размерность $\leq n$, тогда и только тогда, когда оно представлено в виде суммы $n+1$ подпространств размерности ≤ 0.*

Доказательство проводится повторным применением утверждения D_k. Интересно представить интерпретацию, имеющую реальный физический смысл утверждения теоремы и провести аналогию с теоремой Банаха — Тарского (см. гл. 8, § 2, а также [9]).

2. Теорема Лебега.

Определение 3.5. *Если $X = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$, где O_i — открытые множества, то порядком покрытия $\{O_i\}$ называется наибольшее целое число n такое, что существуют $n+1$ элементов покрытия с непустым пересечением. Число $n+1$ называют кратностью покрытия.*

Определение 3.6. *Пусть $\{D_j\}$, $j \in J$ другое покрытие X : $X = \bigcup\limits_{j \in J} D_j$. Говорят, что $\{D_j\}$, $j \in J$ вписано в $\{O_i\}$, $i \in I$, если для каждого D_j найдется такое $_i$, что $D_j \subseteq O_i$.*

Теорема 3.10. *Пусть M — подмножество X размерности ≤ 0, а открытые (в X) множества U_1 и U_2 покрывают M. Существуют не пересекающиеся открытые множества V_1 и V_2, $V_1 \subseteq U_1, V_2 \subseteq U_2$, покрывающие M: $M \subseteq V_1 \bigcup V_2$.*

Доказательство. Не теряя общности, полагаем $X = U_1 \bigcup U_2$. В этом случае $C_1 = X - U_2$, $C_2 = X - U_1$ — два не пересекающихся замкнутых множества. Применяя теорему 3.2, получаем открытые множества V_1 и V_2 и замкнутое множество B со свойствами

$$V_1 \supset C_1, V_2 \supset C_2, V_1 \bigcap V_2 = \emptyset,\ X - B = V_1 \bigcup V_2,\ B \bigcap M = \emptyset,\ B = \overline{B}.$$

Отсюда можно заключить, что

$$V_1 \subseteq U_1,\ V_2 \subseteq U_2,\ V_1 \bigcup V_2 \supseteq M.\ \Box$$

Только что доказанную теорему . обобщает

Теорема 3.11. *Пусть X — пространство, M — его подпространство размерности ≤ 0, $M \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} O_r$, O_r — открытые множества. Существуют открытые множества $V_1, \ldots, V_r$, покрывающие M, такие, что $V_i \subseteq U_i$, i=1,2,... $V_i \bigcap V_j = \emptyset$, если $i \neq j$.*

Доказательство проводим индукцией по r, используя теорему 3.10. Предположим, что теорема доказана в случае $r-1$ и рассмотрим r множеств покрытия. Объединив два последних множества O_{r-1}, O_r в одно, получаем покрытие $O_1, \ldots, O_{r-2}, O_{r-1} \bigcup O_r$. По индуктивному предположению существуют открытые множества $V_1, \ldots, V_{r-1}$ такие, что

$$\bigcup_{i=1}^{r-1} V_i \supseteq M; V_i \subseteq O_i,\ i = 1, 2, \ldots, r-2;\ V_{r-1} \subseteq O_{r-1} \bigcup O_r;\ V_i \bigcap V_j = \emptyset,$$

если $i \neq j$. В силу теоремы 3.10 существуют открытые множества V'_{r-1}, V_r такие, что они покрывают $M \bigcap V_{i-1}$ и

$$V'_{r-1} \subseteq O_{r-1} \bigcap V_{r-1}, V_r \subseteq O_r \bigcap V_{r-1}, V'_{r-1} \bigcap V_r = \emptyset.$$

Множества $V_1, \ldots, V_{r-2}, V'_{r-1}, V_r$ образуют требуемое покрытие. $\Box$

Теорема 3.12 (Лебег). *Пусть X — пространство размерности $\leq n$. Тогда в его любое конечное открытое покрытие можно вписать открытое покрытие порядка $\leq n$.*

Доказательство. Пусть $\{O_i\}_{i \in I}$ — покрытие X. По теореме 3.9 множество X представимо в виде:

$$X = A_1 \bigcup A_2 \ldots \bigcup A_{n+1},$$

где каждое A_i имеет размерность ≤ 0. По теореме 3.11 множество A_i покрывается системой β^i открытых множеств, вписанных в исходное:

$$\beta^i = \{V_1^i, \ldots, V_{r(i)}^i\},\ i = 1, \ldots, n+1,\ V_j^i \bigcap V_k^i = \emptyset, \text{ если } j \neq k.$$

Множество $\beta = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} \beta^i$ — искомое покрытие. $\Box$

В изложении доказательства теоремы Лебега мы не раз обнаружим сходства с рассуждениями, связанными с теоремой Хелли. Например, принцип отделимости множеством двух других множеств;

объединение двух последних множеств покрытия в одно и переход благодаря этому к индукционному предположению и т. д.

Было бы интересно глубже проанализировать в плане сходства доказательства обеих теорем. Далее, из открытого покрытия компактного множества всегда можно выделить конечное покрытие, но теорема Лебега утверждает, что можно выделить не просто конечное подпокрытие, но и кратности $n+1$ (в пространстве E_n). Таким образом прослеживается и количественные совпадения между теоремами Лебега и Хелли.

Глава 8
Комбинаторные принципы

§ 1. Произвол и порядок

Есть математические теоремы, которые служат богатым источником для философских размышлений и порождают целые разделы математики.

Например, теория Рамсея. Если интерпретировать теоремы этой теории в абстрактно-философском духе, абстрагируясь от математической специфики объектов, в них учавствующих, то придем к заключению, что абсолютного хаоса быть не может. Есть какая-то аналогия и связь этого утверждения с утверждением, что не может быть концентрации энэргии без ее частичного рассеивания (второй закон термодинамики).

Чтобы понять лучше смысл сказанного, приведем одну простую теорему из комбинаторики, которая подтверждает тезис, что в «чистом» виде произвола нет. «Полная» свобода (хаос, произвол) — это предельные экстраполяции типа «ничто», «точка»...

Комбинаторные принципы интересны тем, что создают «нечто» из «ничего». В «произволе» выбора определенных подмножеств обнаруживают некоторую закономерность. Таким образом, свобода и в математике не может быть абсолютной.

Теорема 1.1 (принцип Дирихле). *Если n предметов разместить по r ячейкам, где $r < n$, то хотя бы в одну ячейку попадет больше одного предмета.*

Доказательство. На языке отображений принцип Дирихле записывается следующим образом. Пусть N и R — два конечных множества,

$$|N| = n > r = |R|,$$

и $f : N \to R$ — отображение из N в R. Тогда найдется такой элемент $a \in R$, что $|f^{-1}(a)| \geq 2$. Мы можем установить даже более сильное неравенство: существует такое $a \in R$, что

$$|f^{-1}(a)| \geq \left[\frac{n}{r}\right].$$

В самом деле, в противном случае мы имели бы $|f^{-1}(a)| < n/r$ для всех $a \in R$, и тогда выполнялось бы неравенство

$$n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r\frac{n}{r} = n,$$

что невозможно. $\square$

Главное в применении принципа Дирихле — так сформировать ячейки, что попадание в них двух или более элементов, равносильно выполнению между элементами определенного отношения.

Рассмотрим примеры [2].

Пример 1. Если из множества {1,2,3,. . . ,2n} выбрать любые $n+1$ чисел, то среди них найдутся два взаимно простых. Это утверждение следует из того, что среди выбранных должны найтись два числа, которые отличаются на единицу; $n+1$ число попадают в n «ячеек» $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$.

Пример 2. Пусть снова $A \subseteq$ {1,2,. . . ,2n} и $|A| = n+1$.Тогда в A найдутся такие два числа, что одно делит другое. Это утверждение выделяет два числа свойствами, противоположными тем, что в примере 1. Представим каждое число $a \in A$ в виде $a = 2^k m$, где m — нечетное число, $1 \leq m \leq 2n-1$. Поскольку в A содержится $n+1$ чисел, а количество нечетных делителей m не превосходит n, то одно из a делится на другое.

В следующем примере выбор чисел ограничен только их количеством, но в этой выборке наблюдается некоторая структура.

Пример 3. Любая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ из $mn+1$ различных действительных чисел содержит либо возрастающую подпоследовательность

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1})$$

длины $m+1$, либо убывающую последовательность

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \ldots > a_{j_{n+1}} \qquad (j_1 > j_2 > \ldots > j_{n+1})$$

длины $n+1$, либо обе такие последовательности. На этот раз применение принципа Дирехле более сложно. Поставим в соответствие каждому a_i число t_i равное длине *наибольшей возрастающей* подпоследовательности, которая начинается с a_i. Если $t_i \geq m+1$ для некоторого i, то с a_i начинается возрастающая подпоследовательность длины $m+1$. Поэтому предположим, что $t_i \leq m$ для всех i. Для функции $f : a_i \mapsto t_i$, отображающей $\{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ в $\{1, \ldots, m\}$, в силу (1) существует такое $s \in \{1, \ldots, \mathrm{m}\}$, что $f(a_i) = s$ для $\frac{mn}{m} + 1 = n + 1$ чисел a_i. Пусть $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}} (j_1 < j_2 < \ldots < j_{n+1})$ — эти числа. Рассмотрим теперь пары последовательных чисел $a_{j_i}, a_{j_{i+1}}$. Если $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$ хотя бы при одном $i \in \{1, \ldots, n\}$, то существует возрастающая подпоследовательность длины s, начинающаяся с a_{j_i+1}, что противоречит предположению $f(a_{j_i}) = s$. Значит, $a_{j_1} > a_{j_2} > \ldots > a_{j_{n+1}}$, т. е. существует убывающая подпоследовательность длины $n + 1$.

Принцип Дирихле несмотря на свою простоту позволяет доказывать известные теоремы теории чисел.

Пример 4. Малая теорема Ферма. *Если p – простое число, a — целое число, не делящееся на p, то $a^p - 1$ при делении на p дает остаток 1, т. е. $a^{p-1} = 1(\bmod p)$.*

Доказательство. Каждое из $p-1$ чисел $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ дает при делении на p ненулевой остаток (ведь a не делится p):

$a = k_1 p + r_1,$
$2a = k_2 p + r_2,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(p-1)a = k_{p-1} p + r_{p-1}.$

По принципу Дирихле, если число различных встречающихся здесь остатков меньше $p - 1$, то среди них найдутся по крайней мере два одинаковых. Но это невозможно, так как при $rn = rm$ число $(n - m)a = (k_n - k_m)p$ делится на p, что невозможно, ибо $|n - m| < p$ и a взаимно просто с p. Значит, все остатки $r_1, \ldots, r_{p-1}$ между собой различны и образуют перестановку чисел 1, 2, ..., p - 1. Перемножая все предыдущие равенста, получаем

$$(p-1)! a^{p-1} = N \cdot p + (p-1)!,$$

где N — некоторое целое число. Следовательно $(p - 1)! \cdot (a^{p-1} - 1)$ делится на p. $\square$

Пример 5. Китайская теорема об остатках. *Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты, то для любых остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 < r_i < a_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, существует число M, дающее при делении на a_i остаток r_i.*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема справедлива при $n = k-1$, т. е. существует число M, дающее остаток r_i при делении на a_i при $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Положим $d = a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$ и рассмотрим числа M, $M + d$, $M + 2d$, ..., $M + (a_k - 1)d$. Покажем, что хотя бы одно из этих чисел дает остаток r_k при делении на a_k. Допустим, это не так. Поскольку количество чисел равно a_k, а возможных остатков при делении этих чисел на a_k может быть не более чем $a_k - 1$, то среди них найдутся два числа, имеющих равные остатки (принцип Дирихле). Пусть это числа $M + sd$ и $M + td$. Тогда и разность $(M+sd)-(M+td) = (s-t)d$ делится на a_k, что невозможно, так как $0 < |s - t| < a_k$ и $d = a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ взаимно просто с a_k, ибо числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ попарно взаимно просты (по условию). Полученное противоречие опровергает сделанное предположение. Таким образом, среди рассматриваемых чисел найдется число N, которое при делении на a_k дает остаток r_k. В то же время при делении на $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ число N дает остатки $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ соответственно. $\square$

Организующая «сила» этой теоремы проявляется в рассуждениях Гёделя о нумерической представимости арифметических высказываний (см. гл. 9, § 2). «Хаос отрицает» и знаменитая

Теорема 1.2 (Рамсей). *Для каждого разбиения множества всех k-элементных подмножеств бесконечного множества S на конечное количество классов найдется некоторое бесконечное подмножество этого S, все k-эелемнтные подмножества которого лежат в одном классе.*

Доказательство. Достаточно рассотреть случай, когда S есть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Пусть теорема доказана для случая $k = m$ при любом разбиении m-элементных подмножеств S на любое конечное число классов.

Предположим, что $(m + 1)$-элементные подмножества S разбиты на N классов: $D_1, D_2, \ldots, D_N$. Образуем итерационный процесс построения последовательностей из элементов S.

Первый шаг. Выделяем a_1 и у оставшейся последовательности $a_2, a_3, \ldots$ разобьем m элементные подмножества следующим образом. Подмножество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}\}$ отнесем к классу ϵ_p, если $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}\} \in D_p$. По индукционному предположению существует подпоследовательноть последовательности $a_2, a_3, \ldots$, обозначим ее так

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, \ldots, \tag{1.1}$$

что все ее m-элементные подмножества содержатся вместе с элементом a_1 в классе D_{p_1}, $p_1 \leq N$.

Второй шаг. Повторяем проведенные выше рассуждения с последовательностью (1.1), выделив a_{11}. Получаем подпоследовательность

$$a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}, \ldots$$

такую, что все ее m элементные подмножества вместе с a_{11}, лежат в одном классе D_{p_2}, $p_2 \leq N$. Повторяя рассуждения для любого целого q получаем последовательность

$$a_{q1}, a_{q2}, \ldots, a_{qk}, \ldots$$

такую что все m-элементные подмножества ее вместе с элементом $a_{q-1,1}$ лежат в одном классе D_{p_q}. При этом множество $\{a_{qi}\}_{i=1}^{\infty}$ есть подмножество $\{a_{ri}\}_{i=1}^{\infty}$ при $r < q$. Поскольку числа $p_1, p_2, \ldots, p_q, \ldots$ все не превосходят N, то среди них одно число повторяется бесконечное число раз. Пусть

$$p_{m_1} = p_{m_2} = \ldots = p_{m_s} = M \leq N, S = 1, 2, \ldots$$

Тогда все $(m + 1)$-элементные подмножества последовательности

$$a_{m_1} = a_{m_2} = \ldots = a_{m_s}, \ldots$$

лежат в классе D_m. $\square$

Так же, как и с теоремой Гёделя (см. теорему Гудстейна гл. 9, § 4), можно с теоремой Рамсея связать абстрактно-всеобщее (философское по духу) высказывание.

Если имеется декартово множество обезличенных элементов с наведенной на нем структурой (в слысле Бурбаки), то существует натуральное число N, такое, что при $M_1 \subseteq M$ и $|M_1| \geq N$ на M_1, закономерно с необходимостью устанавливается некая подструктура, индуцированная исходной структурой.

Отметим связь этого высказывания с философскими аспектами синергетики.

§ 2. Истина и реальность

Прекрасно иллюстрирует взаимодействие противоположностей, таких как «очевидное — не очевидное», «истина — не истина» теорема Банаха — Тарского: *шар B допускает разбиение на конечное число множеств $B_1, B_2, \ldots, B_k$ таких, что передвижением D_j как твердых тел (переносами и повторами) из них можно составить шар вдвое большего радиуса, чем исходный, или несколько шаров такого же радиуса.* Точная формулировка и полное доказательство приводятся в [48].

Эта теорема дает яркий пример математического доказательства существования явления, которое нельзя обнаружить экспериментально. Можно сказать и так: математически истинное разбиение не реализуется на практике — нельзя из одного арбуза получить реально два таких же арбуза, из золотого шара — два таких же шара.

Анализ доказательства показывает, что основным математическим объектом, который приводит к «парадоксу», является аксиома выбора. Аксиому выбора очень трудно воспринять как неочевидную.

Поясним суть сказанного на упрощенном рассуждении, приведенном в [9].

Пусть фигурные скобки обозначают остаточную часть числа. Целая часть числа x, обозначается как $[x]$, и есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Остаток (или остаточная часть x) есть $x - [x] \equiv \{x\}$. Точки x и y назовем π-соизмеримыми, если

$$\{x - y\} = \{m\pi\}$$

при некотором целом, положительном или отрицательном m.

«Вживаясь» в задачу, установим первичные свойства «наблюдаемых».

1.$\{a\} = a - [a] \geq 0$.

2. Если $|a| \leq 1$, то $\{a\} = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 1 + a, & a < 0. \end{cases}$

Если b нецелое, то $[-b] = -[b] - 1$, $\{-b\} = 1 - \{b\}$.

3. Если n — целое число, то $[a \pm n] = [a] \pm n$, $\{a + n\} = \{a\}$.

4. $[a + b] = \begin{cases} [a] + [b] + 1, & \{a\} + \{b\} \geq 1, \\ [a] + [b], & \{a\} + \{b\} < 1, \end{cases}$

$$\{a + b\} = \begin{cases} \{a\} + \{b\} - 1, & \{a\} + \{b\} \geq 1, \\ \{a\} + \{b\}, & \{a\} + \{b\} < 1. \end{cases}$$

5. $\{a\} - \{b\} = \begin{cases} \{a - b\}, & \{a\} - \{b\} \geq 0, \\ -\{a - b\}, & \{a\} - \{b\} < 0. \end{cases}$

6. $\{\{a + b\} - a\} = \{b\}$.

7. $\{c + a\} - \{c + b\} = \{a\} - \{b\}$.

Установив 1–5, мы доказываем, что x, y есть отношение эквивалентности то есть:

1. $x \sim x$;

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, ибо

$$\{x - y\} = \{k\pi\} \Rightarrow \{y - x\} = 1 - \{x - y\} = 1 - \{k\pi\} = \{-k\pi\};$$

3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$, ибо

$$\{(x-y)+(y-z)\} = \begin{cases} \{x-y\}+\{y-z\}-1, & \{x-y\}+\{y-z\} \geq 1, \\ \{x-y\}+\{y-z\}, & \{x-y\}+\{y-z\} < 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \{k\pi\}+\{l\pi\}-1 = \{(k+l)\pi\}, & \{x-y\}+\{y-z\} \geq 1, \\ \{k\pi\}+\{l\pi\} = \{(k+l)\pi\}, & \{x-y\}+\{y-z\} < 1. \end{cases}$$

Отрезок [0,1] разобьем на непересекающиеся множества $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$, состоящие из π-соизмеримых чисел. В каждом Z_α фиксируем по одному элементу z_α (аксиома выбора), из которых образуем множество Z, и рассмотрим множества

$$Z^k = \{Z + k\pi\}, \quad k \text{ — любое целое число.}$$

Легко видеть, что Z^k переходит в $Z^p (p > k)$ при сдвиге одной части элементов Z^k на расстояние $\{(p-k)\pi\}$ вправо и другой части — на расстояние $1 - \{(p-k)\pi\}$ влево. Подобное имеет место и для случая $p < k$. Наконец очевидно, что Z^k в сумме дают весь отрезок $[0, 1]$. Из сказанного следует, что любая подпоследовательность Z^{γ_k} в сумме тоже дает весь отрезок $[0, 1]$ после предварительной перестройки множеств Z^{γ_k} как твердых тел. Поэтому, если семейство $\{Z^k\}$ разбито изначально на миллион бесконечных совокупностей $\{Z^{\gamma_k}\}$, то поскольку из каждой такой совокупности можно сложить отрезок [0,1], обсуждаемыми движениями из $\{Z^{\gamma_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots, 10^5$, можно сложить отрезок $[0, 10^6]$.

Разумеется, это пока лишь счетная равносоставленность (кубов неодинаковых размеров), представляющая собой первый шаг в направлении результата Банаха — Тарского, который в начале прошлого века осуществил Хаусдорф. Но эта простая схема рассуждений представляет в зародыше все идеи, необходимые для доказательства теоремы Банаха — Тарского. Подробное изложение этих идей см. в книге [18].

О соотношении «математических истин» и «реальных законов», резюмируя можно сказать, что в математике числовая прямая (а в реальном объективном мире, что представляет прямую?) часто «разрезается» на две части: часть, составленную из рациональных точек, и часть из иррациональных точек. Но этот «разрез» не реализуем физически. Ни одно реальное физическое явление не представляет собой этот «разрез», как не представляет точку, прямую, математическую индукцию и т. д. Но все предельные эти математические абстракции организуют рассуждения, которые приводят к продуктивным, результативным действиям на практике (опять действие!).

Глава 9
Принципы и логика формализации

§ 1. Введение

.

Что нельзя формализовать, так это напряжение в голове, сопровождающее мышление. Но математические теории (результат мышления) имеют определенную общую структуру. Это выяснилось усилиями Аристотеля, Кантора, Бурбаки и многих других.

Максимальная абстракция от конкретных объектов теории и связей между ними приводит к представлению теории формальной системой . Это позволяет подняться над разнообразием математических фактов исследуемой теории к ее целостности и тем самым выявить новые по качеству понятия и результаты. Примерами является теорема Гёделя о неполноте и «локальная» теория вокруг теоремы Гудстейна (они будут обсуждаться в настоящей главе).

Следуя нашему правилу — использовать, по-возможности, двойственный подход к рассмотрению проблемы, изложим в настоящей главе два различных способа формализации, представленные, соответственно, книгами Клини [28] и Бурбаки [12].

Способы находятся в двойственности, подобной двойственности «предметное бытие — идеальное бытие». Это станет ясным после краткого изложения формальной арифметики по Клини и теории множеств по Бурбаки. Последний «формализует» предметные объекты идеально через «квадрат Гильберта» $\square$, а связи между объектами через черту —. Тем самым в аксиоматике Бурбаки реализуется своеобразный принцип компактности (в отличие, скажем, от аксиоматики Цермело): можно не вводить бесконечный список объектов, хотя бы потенциально.

На протяжении всей главы полезно проследить, как «соединяются» рациональная математика (исследуема нами) и метаматематика как математика формальных систем.

При необходимости исследователь всегда может извлечь аксиоматику для своего предмета исследования из трактата Бурбаки (но это трудоемкая работа).

Любую формальную систему образуют:

1) Формальные символы.

2) Правила образования формул (определенных конечных последовательностей символов). Перечень аксиом.

3) Правила вывода. Определение формального доказательства (определенных конечных последовательностей формул).

§ 2. Арифметика как формальная система

1. Формальные символы. Определенные знаки, относительно которых утверждается, что мы можем различать и отождествлять их вложения.

1) Символы переменных: $x, y, z, \ldots, x_1, \ldots, a, b, c, \ldots, a_1, \ldots;$

2) Символы констант: 0;

3) Пропозициональные буквы $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots, \mathscr{A}_{12}, \ldots, \mathscr{X}, \ldots$ (используем заглавные курсивные буквы латинского алфавита, индексируемые или нет натуральными числами).

   Предикатные буквы с предикатными переменными:

$$\mathscr{A}(a), \mathscr{A}(a, b), \ldots, \mathscr{C}_{12}(a, b, c), \ldots$$

   (переменные в скобках различны). Символ конкретного предиката $:=$ (равняется).

4) Логические символы: $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists;$

5) Скобки: (,);

6) Символы арифметических операций: $'$ (содержательно обозначает взятие следующего натурального числа: $a' = a + 1$), $+, \cdot$

2. Формулы. Определенные конечные последовательности формальных символов выделяются как формулы. При интерпретации формулы соответствуют обычным предложениям.

Другие последовательности формальных символов могут быть содержательно интерпретированы как числа. Такие выражения называются *термами.*

Пример. Последовательность формальных символов $((a) + (b))$ содержательно интерпретируется как число, т. е. — это терм.

Определение терма и формулы дается по индукции. Приведем определение формулы.

Определение 2.1.

1) *Если* t_1, t_2 — *термы, то* $(t_1) = (t_2)$ *является формулой; Если* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *предикатная буква с предикатными переменными,* $t_1, \ldots, t_n$ — *термы, то* $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — *формула.*

2) *Если* A, B — *последовательности формальных символов, которые мы объявили формулами, то следующие последовательности тоже являются формулами:*
$(A) \supset (B), (A)\&(B), (A)\vee(B), \neg(A), \forall x(A), \exists x(B)$, *где* x — *любая переменная.*

3) *Никаких других формул, кроме получаемых через 1) и 2) нет.*

Формулы будем обозначать печатными заглавными латинскими буквами $A, B, C, X \ldots$

Перечень аксиом и правил вывода (вместе составляющих постулаты).

I. Постулаты исчисления высказываний:

1) $A \supset (B \supset A)$.[1)]

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$,

   1, 2 — аксиомы импликации.

3) $A\&B \supset A$.
   $A\&B \supset B$.

4) $A \supset (B \supset A\&B)$,

   3, 4 — аксиомы конъюнкции.

5) $A \supset A \vee B$.
   $B \supset A \vee B$.

6) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee C \supset C))$,

   6, 7 — аксиомы дизъюнкции,

7) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

8) $\neg(\neg A) \supset A$,
   7, 8 — аксиомы отрицания.

[1)]Первую аксиому правильнее было бы записать так: $((A) \supset ((B) \supset (C)))$. Для простоты записи примем соглашение: часть скобок опускать, если их можно однозначно восстановить. В ряду символов $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$ каждый предшествующий символ обладает более высоким рангом, чем последующий, и при восстановлении скобок, в первую очередь восстанавливаются скобки для символа самого высокого ранга, приписывая ему самую большую зону действия.

9) Правило вывода: $\dfrac{A, A \supset B}{B}$ черточку можно интерпретировать как слово «дает» (A и $A \supset B$ дают B).

II. Постулаты исчисления предикатов (t — терм, x — переменная), t свободен для x в Ax, то есть переменные входящие в t не попадают под действие соответствующих кванторов, когда t заменяет x :

1) $A(t) \supset \exists x A(x)$;
2) $\forall x A(x) \supset A(t)$;
3) Правило вывода: если C не содержит x свободно [1], то
$$\frac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)};$$
4) Правило вывода: $\dfrac{A(x) \supset C}{\forall x A(x) \supset C}$, где C не содержит x свободно.

III. Постулаты формальной арифметики — аксиомы Пеано:

1) $A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x)$ (принцип математической индукции);
2) $a' = b' \supset a = b$;
3) $\neg(a' = 0)$;
4) $a = b \supset ((a = c) \supset (b = c)$;
5) $a = b \supset (a' = b')$;
6) $a + 0 = a$;
7) $a + b' = (a + b)'$;
8) $a \cdot 0 = 0$;
9) $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

3. Конечные последовательности формул. Выделим классы конечных последовательностей формул — формальные выводы и формальные доказательства.

[1] Формула содержит x связно, если замена переменной на другую не влияет на смысл выражения, например как в записи интеграла: $\int f(x)dx \equiv \int f(y)dy$. Упрощая можно считать, что в данном случае C не содержит x вообще.

Пусть дано множество формул Γ. Последовательность формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *формальным выводом* из Γ и обозначается следующим образом:

$\Gamma \vdash A_1, A_2, \ldots, A_n$, или короче: $\Gamma \vdash A_n$, если каждая формула последовательности является аксиомой, либо принадлежит Γ, либо следует из предыдущих формул последовательности по одному из трёх правил вывода. Если множество Γ пусто, то последовательность называется *формальным доказательством*, а последняя формула A_n — *формальной теоремой* и обозначается $\vdash A_n$.

Пример (формального вывода).

Докажем формальную теорему: $\vdash a = a$

1) $(a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))$ — аксиома III.4;
2) $(0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))$ — аксиома I.1;
3) $((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) \supset (((0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))) \supset ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))))$ — аксиома I.1;
4) $((0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))) \supset ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$ — правило вывода I.9: $\dfrac{1., 3.}{4.}$;
5) Используем три раза правило вывода II.3 для 4., каждый раз подставляя вместо $\forall x \to \forall a, \forall b, \forall c$. Тогда в итоге получим:
$((0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))) \supset \forall a \forall b \forall c \quad ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$
6) $\forall a \forall b \forall c \quad ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$ — правило вывода I.9: $\dfrac{2., 5.}{6.}$;
7) Используем три раза аксиому II.2 и правило вывода I.9. В первый раз в качестве t берем $a + 0$ для формулы 6.
$\forall a \forall b \forall c \quad ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) \supset \forall b \forall c \quad (((a + 0) = b) \supset (((a + 0) = c \supset (b = c)))$;
8) $\forall b \forall c \quad (((a+0) = b) \supset (((a+0) = c \supset (b = c)))$ — правило вывода I.9: $\dfrac{6., 7.}{8.}$;
9) В качестве t подставляем a на места вхождений b в формуле 8:
$\forall b \forall c \quad (((a+0) = b) \supset (((a+0) = c \supset (b = c))) \supset \forall c \quad (((a+0) = a) \supset (((a + 0) = c) \supset (a = c))$;

10) $\forall c \quad (((a+0)=a) \supset (((a+0)=c) \supset (a=c))$ — правило вывода I.9: $\dfrac{8., 9.}{10.}$;

11) В качестве t подставляем a на места вхождений c в формуле 10, используем аксиому II.2:
$\forall c \quad (((a+0)=a) \supset (((a+0)=c \supset (a=c))) \supset \quad (((a+0)=a) \supset (((a+0)=a) \supset (a=a)));$

12) $((a+0)=a) \supset (((a+0)=a) \supset (a=a))$ — правило вывода I.9: $\dfrac{10., 11.}{12.}$;

13) $a+0=a$ — аксиома III.6; дважды используя правило вывода I.9, получаем:

14) $a=a$.

Мы сформулировали конкретную формальную систему-арифметику. В самом общем плане формальная система — это система подчиненная неким жестким, однозначно заданным правилам. Соответственно, «формализацию» можно определить как процедуру, цель которой — дать предельно четкое, однозначное и исчерпывающее описание объекта, подлежащего формализации. Для достижения этой цели, прежде всего, используется символическая форма записи тех правил, которым подчинена данная система. Сформулируем несколько общих требований к формализациям.

I. Необходимо, чтобы было формализовано как можно больше содержательных утверждений.

Проверим, что в формальной арифметике могут быть формализованы отношение порядка и отношение «быть остатком от деления a на b». Действительно, $a<b \Leftrightarrow \exists c(a+c=b \& \neg(c=0))$, $\quad \mathrm{rm}(a,b)=c \Leftrightarrow \exists d(bd+c=a \& c<b)$, где $\mathrm{rm}(a,b)$ — остаток от деления a на b. Напомним, что $a, b, c \ldots$ интерпретируются как целые положительные числа. Насколько сильна наша формализация показывает следующая

Теорема 2.1. *Существует такое арифметическое высказывание $\beta(c,d,i)$, представимое формулой нашей формализованной арифметики, что для всякой последовательности $\{a_i\}_{i=0}^n$, $a_i \in N$, найдутся c, d, такие, что $\beta(c,d,i)=a_i$ при $i=0,1,\ldots,n$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$S = max\{n, a_0, a_1, \ldots, a_n\};\ d = S!;$$

$$\delta(d,i) = (i+1)d+1, \quad i \in \{0,1,\ldots,,n\}.$$

Отметим свойства этих функций:

1) $\delta(d, i) \equiv d_i > a_i$;

2) d_i — взаимно простые числа.

Если p делит $d_i, d_j \quad i \neq j, j > i$, то $p \mid (d_j - d_i) = ((j - i)S!)$. Следовательно, p делит d, что невозможно.

Рассмотрим наборы из $n + 1$ значений функции $rm(c, d)$, когда c фиксировано, а d пробегает множество из $n+1$ попарно простых чисел $d_0, ..., d_1$. Пусть c последовательно принимает значения 0,1,2,3,... Для примера берём $n = 1, \quad d_0 = 3, \quad d_1 = 4$, получим следующие наборы:

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$\mathrm{rm}(c, 3)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...
$\mathrm{rm}(c, 4)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...

Мы видим, что когда c изменяется от 0 до 11, пара остатков $rm(c, 3)$, $rm(c, 4)$ пробегает всевозможные 12 упорядоченных пар чисел a_0, a_1, где $a_0 < 3, \quad a_1 < 4$. Чтобы установить это в общем случае, допустим, что $rm(c, d_0), \mathrm{rm}(c, d_1), \ldots, \mathrm{rm}(c, d_n)$ принимают соответственно значения $a_0, a_1, \ldots, a_n$ при $c = j$ и еще при $c = j + k (k > 0)$. Так как j и $j + k$ дают один и тот же остаток a_i при делении на $d_i (i = 0, ..., n)$ их разность k должна делиться на d_i; пусть $k = b_i d_i$. Итак $k = b_0 d_0 = b_1 d_1 = \ldots = b_n d_n$, то есть k содержит в качестве множителя каждое из $d_0, d_1, \ldots, d_n$. Так как по условию $d_0, d_1, \ldots, d_n$ попарно просты, то, по основной теореме арифметики, k должно делиться на их произведение $d_0 \cdot d_1 \cdots d_n$.

Поэтому упорядоченный набор чисел $\mathrm{rm}(c, d_0)$, $\mathrm{rm}(c, d_1)$, $\ldots$, $\mathrm{rm}(c, d_n)$ может снова совпасть с любой данной последовательностью чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не раньше, чем c возрастет на $d_0 \cdot d_1 \cdots d_n$. При этом получается как раз $d_0 \cdot d_1 \cdots d_n$ различных последовательностей чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Но последовательностей $a_0, a_1, \ldots, a_n$ таких, что $a_0 < d_0, a_1 < d_1 \cdots a_n < d_n$ тоже $d_0 \cdot d_1 \cdots d_n$. Поэтому каждая такая последовательность должна встретиться однажды в нашей таблице. В качестве требуемой теоремой формулы можно взять $\beta(c, d, i) = \mathrm{rm}(c, \delta(d, i))$.

Пример.

$$a^b = c \Leftrightarrow \exists p \exists q (\beta(p, q, 0) = 1) \& \forall i (b \geq i \geq 1 \supset \beta(p, q, i + 1) =$$

$$= \beta(p, q, i) \cdot a \,\&\, \beta(p, q, b) = c)$$

II. Формальная система должна быть непротиворечива. Замкнутые формулы (это формулы, которые не имеют свободных переменных) могут быть истинными или ложными (с содержательной точки зрения). Естественно потребовать, чтобы формализованная математическая теория включала в себя только содержательно истинные формулы в качестве формальных теорем. Если ограничиться только постулатами группы I, получаем формальную систему, называемую исчислением высказываний.

Имеет место

Теорема 2.2. *Формула исчисления высказываний формально доказуема тогда и только тогда, когда отвечающая ей пропозициональная функция равна тождественно единице.*

Доказательство опускаем.

Пропозициональная функция получается естественным образом, если интерпретировать значения букв как 1 (истина) или 0 (ложь). При этом значение формулы есть ее истинность как обычного предложения.

III. Формальная система должна быть богата теоремами.

§ 3. Теорема Гёделя

Определение 3.1. *Формальная система называется полной, если для всякой ее формулы A, не содержащих свободных переменных либо сама A доказуема, либо $\neg A$ доказуема.*

Следующий результат принципиально важен.

Теорема 3.1 (Гёдель). *Всякая формальная система, которая содержит в себе как часть формальную арифметику, является неполной. Всегда существуют высказывания, представляемые в этой формальной системе, которые содержательно истинны, но не доказуемы.*

Рассмотрение общей схемы доказательства теоремы Гёделя начнем с описания понятия *гёделевской нумерации.*

Гёдель изобрел способ, который позволил однозначным образом приписать некоторый номер (натуральное число) каждому элементарному символу, формуле или доказательству данной формальной системы, при этом соответствующий формальный объект однозначно восстанавливается по номеру.

1-я группа. Формальные символы.

k-му символу ставится в соответствие k−е простое число:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	
$\supset$	$\&$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$+$	$\cdot$	$'$	$=$	0	$($	$)$	a	b	$,\ldots,x,y,z,\ldots,\Big)$

2-я группа. Формулы.

Берется произведение последовательных простых чисел в степенях, которые являются номерами символов, составляющих формулу. Например: пусть A есть формула: $(a = b) \vee (a = 0)$. Тогда ее номер есть
$n(A) = 2^{37} \cdot 3^{43} \cdot 5^{29} \cdot 7^{47} \cdot 11^{41} \cdot 13^{5} \cdot 17^{37} \cdot 19^{43} \cdot 23^{29} \cdot 29^{31} \cdot 31^{41}$.

3-я группа. Формальные доказательства. Доказательство, представленное последовательностью формул $A_1, \ldots, A_p$ получает в соответствие число:

$2^{n(A_1)} \cdot 3^{n(A_2)} \cdot 5^{n(A_3)} \cdots p_p^{n(A_p)}$, где $n(A_i)$ — номер, поставленный в соответствие формуле A_i.

Если даны натуральные числа n и m, можно конструктивно проверить истинность $A(n, m)$, утверждающего, что m — это номер доказательства формулы с номером n. Продвигаемся далее к доказательству теоремы Гёделя.

Рассмотрим предикат $\mathscr{A}(a, b)$: a — гёделевский номер формулы, обозначенной далее как $A_a(x)$, b — гёделевский номер доказательства этой формулы, где вместо x подставлено a, т. е. формулы $A_a(a)$. Предикат $\mathscr{A}(a, b)$ — арифметическое высказывание о числах a и b.

1. $\mathscr{A}(a, b)$ — нумерически выразимое суждение, что означает существование формулы $A(a, b)$ со свойствами:
$\mathscr{A}(a, b) =$И$\Rightarrow \mapsto A(a, b)$,
$\mathscr{A}(a, b) =$Л$\Rightarrow \mapsto \neg A(a, b)$.
Для доказательства этого факта включим рассматриваемое арифметическое высказывание в более организованный и более общий класс объектов, как рядовой элемент. Это удастся, если мы на более высоком уровне откроем свойство исследуемого объекта, которое как родство повяжет элементы будущего класса. Так, формулу $A(a, b)$ рассмотрим как числовую функцию $\varphi(a, b) \in \{0, 1\}$ и определим следующий класс функций.

Определение 3.2. *Функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется примитивно рекурсивной, если она имеет один из следующих видов:*

1) $x' \equiv x + 1$,

2) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{const}$,

3) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i, i \in \{1, \ldots, n\}$,

4) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$= \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n, g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, *где* $\chi, g_1, \ldots, g_n$ *уже определены как примитивно рекурсивные.*

5) $\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$, *и для любого* y *выполняется равенство* $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = \chi(\varphi(y-1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, g, χ *примитивно рекурсивны.*

Пошаговое описание класса дает возможность параметризации каждого элемента класса, сопоставляя каждой функции число так, как, например, мы получаем гёделевский номер для формального доказательства. Для доказательства свойств идивида, можем применить метод математической индукции по этому параметру. В частности показывается, что описанный выше предикат $\mathscr{A}(a, b)$ определяет примитивно рекурсивную функцию $\varphi(a, b)$. А для примитивно рекурсивных функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по шагам их построения индукцией доказывается нумерическая представимость предиката $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$ при этом существенно используется функция Гёделя $\beta(c, d, i)$.

Замечание 3.1. Сокращая излагаемый материал книг Клини и Бурбаки мы руководствуемся высказыванием П. Рентелн и А. Дандеса (см. с. 17).

2. Рассмотрим формулу $\forall b \neg A(a, b)$, пусть эта формула имеет гёделевский номер $p \leftrightarrow A_p(a) \equiv \forall b \neg A(a, b)$. Содержательная интерпретация означает, что $A_p(p)$ утверждает о своей недоказуемости.

Дадим несколько определений.

Определение 3.3. *Формальная система непротиворечива, если в ней не доказуемы одновременно* A *и* $\neg A$.

Формальная система ω-непротиворечива, если в ней не доказуемы одновременно $\mapsto A(0); \mapsto A(1); \ldots; \mapsto A(n); \ldots; \mapsto \neg \forall x A(x)$ ни для какой формулы A.

Теорема 3.2. *Если формальная система, содержащая формальную арифметику в качестве подсистемы непротиворечива и* ω*-непротиворечива, то найдется геделевский номер формулы* q *такой, что в этой системе одновременно недоказуемы* $A_q(q)$ *и* $\neg A_q(q)$.

Доказательство. Рассмотрим $A_p(p)$, построенную по высказыванию $\mathscr{A}(a, b)$ выше. Пусть $\mapsto A_p(p) \Rightarrow \exists$ гёделевский номер доказательства этой формулы есть q. Следовательно, $\mathscr{A}(p, q) = \mathrm{true}$, так как $A(p, q)$ нумерически выражает наше высказывание $\Rightarrow \mapsto A(p, q) \Rightarrow \mapsto \exists b A(p, b) \Rightarrow \mapsto \neg \forall b \neg A(p, b) \equiv \mapsto \neg A_p(p)$. Получается, что доказуемы одновременно и $A_p(p)$ и $\neg A_p(p)$, т. е. система оказывается противоречивой. Допущение $\mapsto A_p(p)$ неверно. Поскольку $\forall b \neg \mathscr{A}(p,q)$ истинно, то по определению нумерической выразимости: $\mapsto \neg A_p(0), \mapsto \neg A_p(1), \mapsto \neg A_p(n), \ldots, \forall n \in N$. В силу ω-непротиворечивости неверно, что $\mapsto \neg \forall b \neg A(p,b) \equiv \mapsto \neg A_p(p)$, т. е. недоказуема и формула $\neg A_p(p)$. $\square$

Замечание 3.2. Немного усложняя доказательство, можно условие ω-непротиворечивости из предпосылок теоремы убрать.

§ 4. Ретроспективный взгляд на проведенные рассуждения

Мы можем интерпретировать теорему Гёделя следующим абстрактно-всеобщим высказыванием. Пусть у нас есть какое-то правило или конструкция, систематическое (т.е. оформлена система) применение которого приводит к неоспоримому справедливому утверждению, тогда столь же неоспоримо, что существует справедливое утверждение, которое нельзя доказать при помощи этого правила.

Например, возьмем за правило метод математической индукции. Тогда рассуждения, сходные с проведенными при доказательстве теоремы Гёделя показывают, что существует теорема, которая не доказуема математической индукцией, и которой, например, является удивительная теорема Гудстейна, подробно рассматриваемая далее в § 9.

Теорема Гёделя тесно связана с вопросом алгоритмической разрешимости (а так же с тем, что с понятием истины не формализуемо). Допустим, что для формальной системы отсутствует алгоритм, который для любой формулы показывает доказуемость формулы или доказуемость ее отрицания (система алгоритмически неразрешима).

Если эта система полна: $\forall A, \mapsto A$, либо $\mapsto \neg A$, то расположим все формальные доказательства в виде последовательности (в силу счетности множества формальных доказательств). Перебирая все формальные доказательства, найдем то, которое заканчивается либо на A либо на $\neg A$. Так получаем алгоритм распознавания: доказуема формула или нет, в противоречии с предположением. Следовательно, система не полна.

§ 5. Формализация теории множеств по Бурбаки

В нижеследующем сохраняются обозначения и способы нумерации Н. Бурбаки, с тем чтобы было легко найти необходимый пропущенный материал.

1. Формальные символы, формативные конструкции. Следующие формальные символы используются, и предполагается относительно них только то, что мы умеем различать и отождествлять их вхождения в наших конструкциях:

1) Логические знаки: $\square, \tau, \vee, \neg$.

2) Прописные заглавные и строчные латинские буквы, со штрихами или без них: $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}"$, $\ldots, a, b, \ldots, x, y, \ldots$

3) Специальные знаки: $=, \in, \sqsupset, -$.

Знакосочетание теории есть последовательность знаков этой теории, написанных рядом друг с другом, причем некоторые знаки, отличные от букв, могут быть соединены линиями, идущими над строкой и называемыми связями. Пример знакосочетания:

$$\overline{\overline{\tau \vee \neg \in \square}A' \in \square}A''.$$

Таким образом, знакосочетание не есть простая последовательность, а есть структурированная связями последовательность (что-то близкое к графу).

Для часто употребляемых знакосочетаний используются специальные обозначения, которые являются уже не символами формальной системы, а сокращающими запись содержательно понимаемыми метасимволами. Например, метасимвол $\Rightarrow$ есть обозначение знакосочетания $\vee\neg$, своего рода имя для этого знакосочетания.

Далее теория строится путем выделения определенных классов знакосочетаний: термов, соотношений, теорем. Чтобы описать эти классы, примем соглашения:

1) Произвольно взятые знакосочетания и буквы будем обозначать прямым шрифтом (или «прямыми» буквами латинского алфавита).

2) Пусть A - знакосочетание, x — буква. В последовательности знаков τA соединяем связью каждый экземпляр буквы x в A со знаком τ и, убирая x из A, каждое вхождение x заменяем символом $\square$. Так получаем новое знакосочетание, которое обозначается через $\tau_x(A)$ и не содержит x. Пример: символ $\tau_x(\in xy)$ изображает знакосочетание $\overline{\tau \in \square}y$.

3) Знакосочетание $(B|x)A$ получается заменой всех экземпляров буквы x в знакосочетании A на знакосочетание B.

4) Символ $A[x, y]$ означает знакосочетание A, в котором выделены вхождение букв x, y. Символ $A[B, C]$ обозначает знакосочетание, получамое при одновременной замене буквы x знакосочетанием B и буквы y знакосочетанием C во всех местах их появления в A.

Специальные знаки подразделяются на субстантивные и реляционные. Каждому специальному числу приписывается целое число, называемое его весом. Знаки $=, \in, \sqsupset$ имеют вес 2.

Знакосочетание называется знакосочетанием *первого рода,* если оно начинается со знака τ или с субстантивного знака или сводится к одной букве; в противном случае знакосочетание называется знакосочетанием *второго рода.*

Формативная конструкция теории $\mathcal{T}$ есть последовательность знакосочетаний, обладающая следующим свойством: для каждого знакосочетания A из последовательности выполняется одно из указанных ниже условий:

1) A есть буква;

2) В последовательности существует знакосочетание второго рода B, предшествующее A, такое, что A есть $\neg B$;

3) Существуют два знакосочетания второго рода B и C, предшествующие A (различные или нет), такие, A есть $\vee BC$;

4) Существует знакосочетание второго рода B, предшествующее A и буква x, такие, что A есть $\tau_x(B)$;

5) Существует специальный знак s веса n из $\mathcal{T}$ и n знакосочетаний первого рода $A_1, A_2, ..., A_n$, предшествующие A, такие, что A есть $sA_1A_2, \ldots, A_n$.

Мы называем *термами* (соответственно *соотношениями*) теории $\mathcal{T}$ знакосочетания первого рода (соответственно второго рода), *встречающиеся в формативных конструкциях теории* $\mathcal{T}$.

Пример. В теории множеств, в которой $\in$ есть реляционный знак веса 2, следующая последовательность является формативной конструкцией:

$$
\begin{gathered}
A \\
A' \\
A'' \\
\in AA' \\
\in AA'' \\
\neg \in AA''
\end{gathered}
$$

$$\vee\neg \in AA' \in AA''$$

$$\overline{\overline{\tau \vee \neg \in \square} A' \in \square} A''$$

Чтобы облегчить чтение дальнейшего, мы будем писать отныне в случае когда A — соотношение «Не (A)» вместо $\neg A$. Если A и B — соотношения, мы будем писать «(A) или (B)» вместо $\vee AB$ и $(A) \Rightarrow (B)$ вместо $\Rightarrow AB$. Иногда мы будем опускать скобки. Читатель сможет без труда определить в каждом случае, о каком знакосочетании идет речь.

Задание специальных знаков определяет термы и соотношения теории $\mathcal{T}$. Чтобы завершить построение теории $\mathcal{T}$, делают следующее:

1) Записывают сначала некоторое количество соотношений теории $\mathcal{T}$; эти соотношения называются *явными аксиомами* теории $\mathcal{T}$; буквы, встречающиеся в явных аксиомах — *константами* теории $\mathcal{T}$.

2) Задают одно или несколько правил, называемых *схемами* теории $\mathcal{T}$, которые должны обладать следующими особенностями:

   a) применение каждого такого правила $\mathfrak{R}$ дает соотношение теории $\mathcal{T}$;

   b) если T — терм теории $\mathcal{T}$, x — буква, R — соотношение теории $\mathcal{T}$, построенное применением схемы $\mathfrak{R}$, то соотношение $(T|x)R$ так же может быть построено применением схемы $\mathfrak{R}$.

Всякое соотношение, образованное применением какой-либо схемы теории $\mathcal{T}$, называется *неявной аксиомой* теории $\mathcal{T}$.

Всякий *доказательный* текст теории $\mathcal{T}$ состоит из:

1) вспомогательной формативной конструкции из соотношений и термов теории $\mathcal{T}$.

2) доказательства теории $\mathcal{T}$, т. е. последовательности соотношений теории $\mathcal{T}$, встречающихся во вспомогательной формативной конструкции, таких, что для каждого соотношения R этой последовательности выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

   a) R есть явная аксиома теории $\mathcal{T}$; или
   R получается применением схемы теории $\mathcal{T}$ к термам или соотношениям, встречающимся во вспомогательной формативной конструкции;

b) в упомянутой последовательности существует два отношения S, T, предшествующие R, такие, что T есть $S \Rightarrow R$.

Теорема теории $\mathcal{T}$ есть соотношение, *встречающееся в каком-нибудь доказательстве теории* $\mathcal{T}$.

Вместо «теорема теории $\mathcal{T}$» говорят так же «соотношение, *истинное (верное, справедливое)* в $\mathcal{T}$» или («предложение» , «лемма» , «следствие» и т. д.) Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, x — буква, T — терм теории $\mathcal{T}$, если $(T|x)R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, говорят, что T *удовлетворяет* в $\mathcal{T}$, *соотношению* R (или что T есть некоторое *решение соотношения* R), когда R рассматривается как соотношение по (относительно) x.

Соотношение называется *ложным* в $\mathcal{T}$, если его отрицание есть теорема теории $\mathcal{T}$. Говорят, что теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, когда можно написать соотношение, одновременно истинное и ложное в $\mathcal{T}$.

2. Схемы аксиом, классы теорем. Нижеследующие схемы S1-S4 есть неявные аксиомы (мы будем рассматривать в качестве $\mathcal{T}$ только теорию множеств):

S1. *Если A — соотношение теории $\mathcal{T}$, то соотношение (A или A)$\Rightarrow$ A есть аксиома теории* $\mathcal{T}$.

S2. *Если A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, то соотношение $A \Rightarrow$ (A или B) есть аксиома теории* $\mathcal{T}$.

S3. *Если A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, то соотношение (A или B) $\Rightarrow$ (B или A) есть аксиома теории* $\mathcal{T}$.

S4. *Если A, B или C — соотношения теории $\mathcal{T}$, то соотношение*

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \quad \textit{или} \quad A) \Rightarrow (C \quad \textit{или} \quad B))$$

есть аксиома теории $\mathcal{T}$.

Если R — знакосочетание и x — буква, то знакосочетание $(\tau_x(R)|x)R$ обозначается через «существует такое x, что R или через $(\exists x)R$. Знакосочетание «не $(\exists x)$(не R) обозначается через «для всякого xR», или через «каково бы ни было x, R» или через $(\forall x)R$. Сокращающие символы $\exists$ и $\forall$ называются соответственно *квантором существования* и *квантором всеобщности*. Буква x не встречается в знакосочетании, обозначаемом символами $(\exists x)R$ и $(\forall x)R$.

В дальнейшем буквой C и следующим за ним натуральным числом будем обозначать дедуктивные критерии, которые устанавливают общий вид для того или иного класса теорем.

C2. *Пусть A — теорема теории $\mathcal{T}$, T — терм теории $\mathcal{T}$, x — буква. Тогда $(T|x)A$ есть теорема теории $(T|x)\mathcal{T}$.*

C26. *Пусть $\mathcal{T}$ — логическая теория, R — соотношение, x — буква. Соотношения $(\forall x)R$ и $(\tau_x(\neg R)|x)R$ эквивалентны в $\mathcal{T}$.*

В самом деле, $(\forall x)R$ тождество с «не $(\tau_x($не $R)|x)($не $R)$» , а следовательно, и с «не не $(\tau_x($не $R)|x)R$».

C27. *Если R — теорема логической теории $\mathcal{T}$ и буква x не является константой этой теории, то $(\forall x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$.*

В самом деле, $(\tau_x($не $R)|x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$, согласно C2.

C28. *Пусть $\mathcal{T}$ — логическая теория, R — ее соотношение и x — буква. Соотношения «не $(\forall x)R$» и $(\exists x)($не $R)$ эквивалентны в $\mathcal{T}$.*

В самом деле, «не $(\forall x)R$» тождественно с «не не $(\exists x)($не $R)$».

Напомним, что буквой S обозначаются схемы аксиом.

S5. *Если R — соотношение теории $\mathcal{T}$, T — ее терм и x — буква, то соотношение $(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$ есть аксиома.*

C29. *Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, а x — буква. Соотношения «не $(\exists x)R$» и $(\forall x)($не $R)$ эквивалентны в $\mathcal{T}$.*

C30. *Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, T — ее терм и x — буква. Соотношение $(\forall x)R \Rightarrow (T|x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$.*

Если T и U — термы теории $\mathcal{T}$, то знакосочетание $= TU$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$ (называемое *соотношением равенства*). Это соотношение обозначается через $T = U$ или $(T) = (U)$.

S6. *Пусть x — буква, T и U — термы теории $\mathcal{T}$ и $R[x]$ — соотношение $\mathcal{T}$. Тогда соотношение $(T = U) \Rightarrow (R[T] \Leftrightarrow R[U])$ есть аксиома.*

S7. *Если R и S — соотношение теории $\mathcal{T}$, а x — буква, то соотношение $((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ есть аксиома.*

Отрицание соотношения $= TU$ обозначается через $T \neq U$ или через $(T) \neq (U)$ (где знак $\neq$ читается: «не равно», «отлично от»).

Теорема 5.1. *Соотношение $x = x$, где x — буква есть теорема теории множеств.*

Доказательство. Обозначим через S соотношение $x = x$ теории $\mathcal{T}$. Согласно C27 при всяком соотношении R из $\mathcal{T}$ соотношение

$(\forall x)(R \Leftrightarrow R)$ есть теорема в $\mathcal{T}$; следовательно, согласно S7, соотношение $\tau_x(R) = \tau_x(R)$, т. е. $(\tau_x(R)|x)S$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Принимая за R соотношение «не S» и учитывая C26, получим что $(\forall x)S$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Согласно C30, S поэтому есть теорема теории $\mathcal{T}$. $\square$

Если соотношение $(\forall y)(\forall z)(((y|x)R$ и $(z|x)R) \Rightarrow (y = z))$, где R — соотношение теории J, x — буква, y, z — буквы, отличные друг от друга и от x и не встречающиеся в R, есть теорема, то говорят, что R *однозначно* по x.

C45. *Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, а x — буква, не являющаяся константой теории $\mathcal{T}$. Если R — однозначно по x в $\mathcal{T}$, то $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Обратно, если для некоторого терма T теории $\mathcal{T}$, не содержащего x, $R \Rightarrow (x = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то R однозначно по x.*

Пусть R — соотношение в $\mathcal{T}$. Соотношение «$(\exists x)R$ и существует самое большое одно x, такое, что R» обозначается словами «существует единственное x, такое, что R». Если это соотношение является теоремой в $\mathcal{T}$, то говорят, что R есть соотношение, *функциональное* по x в $\mathcal{T}$.

Напомним, что теория множеств представляет собой теорию, в которой имеются реляционные знаки$=, \in$ и субстантивный знак $\sqsupset$ (все они имеют вес 2); кроме с хем S1-S7 она содержит так же схему S8, которая вводится далее, и явные аксиомы A1, A2, A3, A4 и A5 (перечисляются далее).

Эти явные аксиомы не содержат букв; иначе говоря, теория множеств является теорией без констант.

Определение 5.1. *Соотношение* $(z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$, *в котором встречаются только буквы x и y, записывается одним из следующих способов: $x \subset y, y \supset x$, «x содержится в y» , «x есть часть (от) y». Соотношение «не $(x \subset y)$» записывается как $x \not\subset y$ или $y \not\supset x$.*

Аксиомой экстенсиональности называется следующая аксиома.

A1. $(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \quad \text{и} \quad (y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

Интуитивно эта аксиома означает, что два множества, имеющие одни и те же элементы, равны.

Для того,чтобы доказать $x = y$, достаточно, стало быть, доказать $z \in y$ в теории, получаемой присоединением гипотезы $z \in x$, и $z \in x$ в теории, получаемой присоединением гипотезы $z \in y$, где z буква, отличная от x и y и от констант.

C48. *Пусть R — соотношение, x — буква, y — буква, отличная от x и не встречающаяся в R. Соотношение $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ однозначно по y.*

В самом деле, пусть z — буква, отличная от x и не встречающаяся в R. Присоединим гипотезы $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ и $(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$. Тогда последовательно получаются теоремы:

$$(\forall x)(((x \in y) \Leftrightarrow R) \text{ и } ((x \in z) \Leftrightarrow R)),$$

$$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \in z)), \ \subset z, z \subset y.$$

Согласно A1, $y = z$. Это доказывает C48.

3. Коллективизирующие соотношения.

Пусть R — соотношение, x — буква. Если y и y' обозначают буквы, отличные от x и не встречающиеся в R, то соотношения $(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$, $(\exists y')(\forall x)((x \in y') \Leftrightarrow R)$ тождественны. Так определенное соотношение (которое не содержит x) обозначается символом $\mathrm{Coll}_x R$.

Если $\mathrm{Coll}_x R$. — теорема теории $\mathcal{T}$, то мы говорим, что соотношение R является коллективизирующим по x и $\mathcal{T}$. В этом случае можно ввести вспомогательную константу, отличную от констант теории $\mathcal{T}$ и не встречающуюся в R, с помощью вводящей аксиомы $(\forall x)((x \in a) \Leftrightarrow R)$, или, что то же самое, когда a не является константой в $\mathcal{T}$, — с помощью аксиомы $(x \in a) \Leftrightarrow R$.

С интуитивной точки зрения сказать, что R — коллективизирующее по x соотношение, значит сказать, что существует такое множество, что объекты, обладающие свойством R, суть в точности элементы из a.

Примеры.

1) Соотношение $x \in y$ очевидным образом является коллективизирующим по x.

2) Соотношение $x \notin x$ не является коллективизирующим по x.

C49. *Пусть R — соотношение, x — буква. Если R является коллективизирующим по x, то соотношение $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$, где y есть буква, отличная от x и не встречающаяся в R, является функциональным по y.*

Это сразу же вытекает из C48.

Очень часто в дальнейшем мы будем располагать теоремой вида $\mathrm{Coll}_x R$. Тогда для изображения терма $\tau_y((\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R))$, не зависящего от выбора буквы y (отличной от x и не встречающейся в R), будет вводиться функциональный символ; мы будем использовать для этой цели символ $\mathcal{E}_x(R)$ соответствующий терм не содержит x. Именно об этом терме будет идти речь, когда мы будем говорить о «множестве (всех) таких x, что R». По определению соотношение $(\forall x)((x \in \mathcal{E}_x(R)) \Leftrightarrow R)$ тождественно с $\mathrm{Coll}_x R$; таким образом, соотношение R эквивалентно в этом случае соотношению $x \in \mathcal{E}_x(s)$.

C50. *Пусть R, S — два соотношения, а x — буква. Если R и S являются коллективизирующими по x, то соотношение $(\forall x)(R \Rightarrow S)$ эквивалентно с $\mathcal{E}_x(R) \subset \mathcal{E}_x(S)$, а соотношение $(\forall x)(R \Leftrightarrow S)$ эквивалентно с $\mathcal{E}_x(R) = \mathcal{E}_x(S)$.*

Аксиома двухэлементного множества.

A2. $(\forall x)(\forall y)Coll_z(z = x$ или $z = y)$.

Определение 5.2. *Множество $\mathcal{E}_x(z = x$ или $z = y)$, единственными элементами которого являются x и y, обозначается символом $\{x, y\}$.*

Таким образом, соотношение $z \in \{x, y\}$ эквивалентно «$z = x$ или $z = y$».

Множество $\{x, x\}$, обозначаемое просто символом $\{x\}$, называется множеством, единственный элемент которого есть x (или множеством, состоящим из единственного элемента x, или множеством, сводящимся к единственному элементу x), соотношение $z \in \{x\}$ эквивалентно $z = x$, соотношение $x \in X$ эквивалентно $\{x\} \subset X$.

Схемой отбора и объединения называется следующая схема:

S8. *Пусть R — соотношение, x и y — различные буквы, X и Y — буквы, отличные от x и y и не встречающиеся в R.*

Соотношение
$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)\mathrm{Coll}_x((\exists y)((y \in Y)$ и $R))$ есть аксиома.

C51. *Пусть P — соотношение, A — множество и x — буква, не встречающаяся в A. Соотношение «P и $x \in A$» является коллективизирующим по x.*

Теорема 5.2. *Соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ является функциональным по X.*

Доказательство. В самом деле соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ влечет $(\forall Y)(X \subset Y)$; стало быть, в силу аксиомы экстенсиональности соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ является однозначным по X. С другой стороны, соотношение $(\forall x)(x \notin C_Y Y)$ верно, а это доказывает, что соотношение $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$ верно. $\square$

Символ $C_A B$ означает дополнение B в A.

Терм $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$, соответствующий этому функциональному соотношению, изображается функциональным символом $\emptyset$, который называется пустым множеством.

Соотношение $(\forall x)(x \notin X)$, эквивалентное $X = \emptyset$, читается так: «множество пусто». Таким образом, терм, обозначаемый символом $\emptyset$, есть

$$\overline{\overline{\tau\neg\neg\neg \in \overline{\tau\neg\neg \in \square}\,\square}\,\square}$$

Знак $\sqsupset$ является в теории множеств субстантивным знаком веса 2. Если T, U — термы, то, стало быть знакосочетание $\sqsupset TU$ есть терм; этот терм обозначается обычно через (T, U). При таких обозначениях аксиомой пары называется следующая аксиома.

Аксиома пары.

A3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')((x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x'$ и $y = y'))$.

Соотношение $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$ обозначается словами «z есть пара». Если z — пара, то соотношение $(\exists y)(z = (x, y))$ и $(\exists x)(z = (x, y))$ являются функциональными по x и y соответственно. Термы $\tau_x((\exists y)(z = (x, y)))$ и $\tau_y((\exists y)(z = (x, y)))$ обозначаются соответственно символами $\mathrm{pr}_1 z$ и $\mathrm{pr}_2 z$ и называются соответственно первой и второй координатами z.

Определение 5.3. *Говорят, что $\mathfrak{g}$ есть график, если каждый элемент $\mathfrak{g}$ есть пара, или, иначе говоря, если справедливо соотношение:*

$$(\forall z)(z \in \mathfrak{g}) \Rightarrow (z \textit{ есть пара})).$$

Пусть $R[x, y]$ — соотношение, x и y — различные буквы. Пусть $\mathfrak{g}$ — буква, отличная от x и y и не встречающиеся в R . Если соотношение

$$(\exists \mathfrak{g})(\mathfrak{g} \text{ есть график и } (\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow ((x, y) \in \mathfrak{g})))$$

верно, то мы говорим, что *R обладает графиком по буквам x и y.* Тогда график $\mathfrak{g}$ единственный в силу аксиомы экстенциональности и называется *графиком соотношения R по x и y.*

Еще одно важное в построении формализации теории множеств определение. *Соответствием* между множеством A и множеством B называется тройка $\Gamma = (\mathfrak{g}, A, B)$, где $\mathfrak{g}$ — график, такой что $\mathrm{pr}_1 g \subset A$ и $\mathrm{pr}_2 \mathfrak{g} \subset B$. Мы говорим, что $\mathfrak{g}$ есть график соответствия Γ, A — область отправления и B — область прибытия соответствия.

Важно так же следующее

Определение 5.4. *График F есть* функциональный *график, если для каждого x существует не более чем один объект, соответствующий этому x относительно F. Соответствие $f = (F, A, B)$ есть* функция*, если его график F есть функциональны график, а его область отправления A равна его области определения* $\mathrm{pr}_1 F$.

В некоторых случаях функциональный график называется также семейством; область определения называется тогда множеством индексов, а область значений — множеством элементов семейства.

Вот как, например, используется определение семейства.

Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство множеств. Множество $\mathcal{E}_x((\exists i)(i \in I$ и $x \in X_i))$ называется *объединением* этого семейства и обозначается символом $U_{i \in I} X_i$.

Сильно сжатое описание формализации теории множеств, данной Бурбаки, закончим приведением последних аксиом.

Аксиома множества частей

A4. $(\forall X)\mathrm{Coll}_Y(Y \subset X)$.

Говорят, что множество X *равномощно множеству* Y, если существует взаимнооднозначное отображение множества X на Y. Описанное соотношение между X и Y обозначается через $\mathrm{Eq}(X, Y)$. Множество $\tau_z(\mathrm{Eq}(X, Z))$ называется *кардинальным числом* множества X, или мощностью множества, обозначается $\mathrm{Card}(X)$.

Натуральным числом называется кардинальное число n, для которого $n \neq n + 1$. Множество E конечно, если $\mathrm{Card}(E)$ конечное (натуральное) число.

Последняя аксиома

A5 (*аксиома бесконечности*). *Существует бесконечное* (*не являющееся конечным*) *множество.*

4. Общие замечания.

По сравнению с «привычными» нам аксиоматизациями (например, формальной арифметики) у Бурбаки в формальных предложениях, полностью расписанных, а не обозначенных с использованием принятых соглашений, нет:

()) Скобок. Сама последовательность знаков восстанавливает структуру получения формулы-предложения. Структура самого предложения «определяет скобки».

()) Предикатных букв с приданными переменными, типа $A(x, y), \ldots$

()) Кванторов $\forall, \exists$ как исходных формальных символов. Вместо них символы τ и $\square$ своим «взаимодействием» порождают кванторы неявно.

()) Соответственно, нет связанных переменных.

()) Есть всего одно правило вывода.

Бурбаки шаг за шагом показывает, что в его формализации теории множеств знакомые нам по каноническому изложению теории теоремы и принципы рассуждения представимы формальными теоремами. Интересно, как интерпретируется в его формализации математики гёделевкая формула $A_p(p)$, истинная при содержательной интерпретации, но недоказуемая и неопровержимая при данной формализации?

Руководящей идеей изложения Бурбаки можно считать стремление не представлять математические объекты предметно, а представлять их идеально, через их организующую математический материал роль. Сравните с замечанием Труселла: «мы не знаем, что такое сила,но знаем, что с ней можно делать».

§ 6. Аксиомы теории множеств по Цермело — Френкелю

В литературе эта аксиоматика наиболее употребительна. Мы приводим её почти дословно из книги [55]. При этом сохранены её логические знаки. Определение формальных объектов близко к соответствующему определению Клини.

Прежде чем изложить аксиомы системы, мы опишем интуитивную модель этой теории. С этой целью рассмотрим сначала в качестве исходных понятий нулевое (пустое) множество $\wedge$ и операцию P, порождающую множество всех подмножеств. Из определения P непосредственно следует, что

$$P(\wedge) \text{ есть } \{\wedge\}, P(\{\wedge\}) \text{ есть } \{\wedge, \{\wedge\}\},$$

$$P\{\wedge, \{\wedge\}\} \text{ есть } \{\wedge, \{\wedge\}, \{\{\wedge\}\}, \{\wedge, \{\wedge\}\}\} \text{ и т. д.},$$

где $\{x\}$ есть единичное множество, образованное объектом $x, \{x, y\}$ есть множество, единственными элементами которого являются x и y и т.д. Пусть $p(k)$ обозначает k-е множество, полученное таким образом, отправляясь от $\wedge$, причем $p(0)$ есть $\wedge$, а $p(m)$ есть множество подмножеств $p(m-1)$. Продолжая этот процесс, для каждого конечного числа n можно получить множество с большим чем n числом членов, но никогда нельзя получить бесконечное множество. Поскольку для построения теории множеств необходимо наличие бесконечных множеств, мы введем новое предположение, что существует бесконечное множество I, которое содержит все входящие в $p(k)$, (k — конечное число) множества:

$$I = \{\wedge, \{\wedge\}, \{\{\wedge\}\}, \{\wedge, \{\wedge\}\}, \ldots\}.$$

Теперь к этому множеству мы можем применить операцию P и получить классы $P(I), P(P(I))$ и т. д. Мы будем обозначать k-е множество в этой последовательности множеств посредством $p(\omega + k)$, где $p(\omega)$ есть I, а $p(\omega + k)$ есть $P(p(\omega + k - 1))$. Мы получаем, таким образом, бесконечную иерархию бесконечных множеств, упорядоченных по возрастанию их кардинальных чисел. Далее определяется пространство S как совокупность всех множеств $p(g)(g = 0, 1, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots)$. Пространство S дает модель теории множеств Цермело.

Формальная система Цермело Z может быть описана следующим образом. Имеется только один вид переменных $x, y, \ldots$, представляющих множества, и первичный предикат $\in$, указывающий на отношение члена к классу («принадлежит»). Атомарные предложения имеют только следующий вид:$x \in y, z \in \omega$. Отправляясь от них, посредством связок элементарной логики и кванторов строятся другие предложения; предполагается, что принимаются аксиомы и правила вывода элементарной логики. Собственно аксиомами системы Z являются следующие:

Z1. Аксиома объемности. *Всякое множество определяется своими элементами, т. е. если два множества имеют одни и те же члены, то все, что выполняется для одного множества, выполняется и для другого: $x = y$ определяется как более краткая запись выражения $(z).(z \in x \equiv z \in y)$, и аксиома тогда записывается следующим образом:*

$$x = y \supset (\omega).(x \in \omega \supset y \in \omega).$$

Z2. Аксиома объединения. *Если даны два множества x и y, то $\{x, y\}$ также является множеством, т. е.*

$$(E\omega).(z).[z \in \omega \equiv (z = x \vee z = y)].$$

Z3. Аксиома выделения. *Для любого множества z и предложения $F(x)$ системы Z существует подмножество z, содержащее* *все те и только те множества* x, *для которых* $F(x)$ *истинно.* Символически:

$$(z).(Ey).(x).(x \in y \equiv [x \in z \,\&\, F(x)]),$$

где y не входит в $F(x)$.

Z4. Аксиома множества подмножеств.*Для любого множества существует множество его подмножеств:*

$$(z).(Ey).(x).[x \in y \equiv (\omega).(\omega \in x \supset \omega \in z)].$$

Z5. Аксиома множества-суммы *Для каждого множества существует его множество-сумма:*

$$(z).(Ey).(x).[x \in y \equiv (E\omega).(x \in \omega \,\&\, \omega \in z)].$$

Z6. Аксиома выбора (аксиома умножения). *Если* x *есть множество, элементы которого не пусты и не имеют общих членов, то его множество-сумма содержит по крайней мере одно подмножество* u, *имеющее в точности один общий элемент с каждым его членом:*

$$(x).[(y).(z).((y \in x \,\&\, z \in x) \supset [(E\omega).\omega \in y \,\& \sim (E\omega).(\omega \in y \,\&\, \omega \in z)])$$
$$\supset (Eu).y.(y \in x \supset (Ev).(t).[t = v \equiv (t \in u \,\&\, t \in y)])].$$

Z7. Аксиома Бесконечности. *Существует множество, которое содержит в качестве своего элемента нулевое множество и которое вместе с любым своим элементом* x *содержит единичное множество* $\{x\}$. В символах:

$$(Ez).[\wedge \in z \,\&\, (x).(x \in z \supset \{x\} \in z)].$$

Z8. Аксиома ограничения. *Для всякого предложения* $F(x)$ *из системы* Z, *такого, что* $(Ex)F(x)$, *существует множество* y, *такое, что* $F(y)$ *истинно, но ни для какой его части* z $F(z)$ *не является истинным.* В символах:

$$(Ex).F(x) \supset (Ey).(F(y) \,\&\, (z) \sim [z \in y \,\&\, F(z)]).$$

Z9. Аксиома подстановки. *Если одна из взаимнооднозначно соответствующих друг другу областей является множеством,* *то и другая также является множеством.* Другими словами, *если дано такое предложение $F(u, v)$, что*

$$(x).(y).(z).(\omega).([F(x, y) \quad \& \quad F(z, \omega)] \supset [(x = z) \equiv (y = \omega)]),$$

и если существует множество всех множеств u таких, что $(Ev)F(u, v)$ истинно, то существует множество всех множеств v, таких, что $(Eu)F(u, v)$ истинно.

§ 7. Частично-упорядоченные множества

Из математических структур, которые можно изложить, следуя Н. Бурбаки, прежде всего рассмотрим частично-упорядоченные множества. Результаты, изложенные в этом параграфе (см. подробнее в [30]), понадобятся нам для доказательства теоремы Гудстейна.

Пусть дано множество X, частично упорядоченное отношением $\leq$.

Определение 7.1. *Частично упорядоченное множество называется линейно упорядоченным или цепью, если любые два элемента его x и y сравнимы по порядку: $x \leq y$, либо $y \leq x$.*

Определение 7.2. *$C \subseteq X$ называются максимальной цепью, если для $\forall z \in X - C$ множество $C \cup \{z\}$ не является цепью.*

Определение 7.3. *Элемент m частично упорядоченного множества X называется максимальным (минимальным), если из $a \geq m (a \leq m)$ для некоторого $a \in X$ следует, что $a = m$.*

Определение 7.4. *Элемент m частично упорядоченного множества X называется верхней гранью для подмножества $P \subseteq X$, если для $\forall x \in P, m \geq x$, соответственно называется нижней гранью, если $\forall x \in P, m \leq x$.*

Теорема 7.1. *Следующие свойства частично упорядоченного множества X эквивалентны:*

(1) *Условие минимальности: всякое непустое подмножество множества X является частично упорядоченным множеством, содержащим минимальные элементы относительно этого подмножества.*

(2) *Условие индуктивности: любое свойство $\mathcal{E}(x)$ справедливо для всех элементов X, если оно выполняется для минимальных элементов X, а также для элементов a, у которых все предшественники этим свойством обладают, т. е. $x < a$ влечет $\mathcal{E}(x)$.*

(3) *Условие обрыва убывающих цепей: последовательность элементов из* $X : a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \ldots$ *содержит только конечное число элементов. Это равносильно тому, что, начиная с некоторого* n, *выполняется* $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$

Доказательство. Из (1) следует (2). Пусть $\mathcal{E}$ выполняется для минимальных элементов и для a, если выполняется для всех предшественников a. Предположим, что существует элемент $b \in X$, для которого $\mathcal{E}$ не выполняется. Рассмотрим собрание $\{b\} = B \subseteq X$ элементов b, для которых $\mathcal{E}$ не выполняется. Это множество не пустое; там есть минимальный элемент m, минимальный в B, но не в X. Все предшественники m свойством $\mathcal{E}$ обладают, следовательно, и m обладает. Противоречие говорит о том, что предположение $B = \emptyset$ не верно.

Из (2) следует (3). Пусть выполняется условие индуктивности. В качестве свойства $\mathcal{E}$ возьмем такое свойство: a обладает свойством $\mathcal{E}$, если любая убывающая цепь, начинающаяся с элемента a, конечна. Свойство верно для минимальных элементов, и пусть $\mathcal{E}$ выполняется для всех предшественников a. Рассмотрим любую убывающую цепь, начинающуюся с $a > a_1 > a_2 > \ldots$ Цепь, начинающаяся с a_1, конечна, потому конечна и рассматриваемая цепь. Отсюда следует, что $\mathcal{E}$ верно для всех элементов X. Следовательно, выполнено условие обрыва убывающих цепей.

Из (3) следует (1). Пусть выполнено условие обрыва убывающих цепей. Докажем, что верно условие минимальности. Пусть B подмножество X, и предположим, что B не содержит минимальных элементов. Берем любой элемент b_1 из B, найдется $b_2 \in B$ такой, что $b_2 < b_1$. Повторяя рассуждения, получим бесконечно убывающую цепочку $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n \ldots$ Получено противоречие, следовательно, B содержит минимальные элементы. □

2. Аксиома выбора.

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Аксиома выбора: если дано множество X, то существует функция φ, сопоставляющая каждому не пустому подмножеству A из X непустой элемент $\varphi(A)$ этого подмножества.

(2) Теорема Цермелло: всякое множество можно вполне упорядочить.

(3) Теорема Хаусдорфа: всякая цепь частично упорядоченного множества содержится в максимальной цепи.

(4) Теорема Куратовского — Цорна: если всякая цепь частично упорядоченного множества X обладает верхней гранью, то всякий элемент множества X предшествует максимальному элементу.

Доказательство. Из (1) следует (2). Пусть дано произвольное множество X. На основании аксиомы выбора отметим в каждом его не пустом подмножестве M по одному элементу $\varphi(M)$. Отмеченным будем называть непустое множество $A \subseteq X$, если оно может быть вполне упорядоченном таким образом, что $\varphi(X - [a]) = a$ для всякого элемента$a \in A$. Через $[a]$ обозначим множество элементов A, которые предшествуют a, т. е. $x < a$ эквивалентно $x \in [a]$. Отмеченным является, например, множество, состоящее из одного элемента $\varphi(X)$.

Рассмотрим два отмеченных подмножества A и B. Пусть C есть объединение всех совпадающих отрезков A и B, т. е. подмножеств M таких, что из $x \in M$ и $y < x$ следует $y \in M$. Первый элемент множества $A - C$, если последнее не пусто, в порядке, определенном на A обозначим через a. Аналогично, $b-$ есть первый элемент в множестве $B - C$. Имеем $a = \varphi(X - [a]) = \varphi(X - C)$; $b = \varphi(X - [b]) = \varphi(X - C)$, следовательно, имеется общий отрезок $C \cup \{a\}$ множеств A и B, включающий C. Используя максимальность C, заключаем, что на самом деле $A - C$ или $B - C$ пусто. Следовательно, одно из множеств, например, A, является отрезком другого. При этом порядок, индуцируемый множеством B на A совпадает с рассматриваемым на A порядком.

Итак, все отмеченные подмножества линейно упорядочены по включению, и порядки на них согласованы. На их объединении D определен, поэтому естественный линейный порядок: $x, y \in D$ полагаем $x \leq y$, если $x \leq y$ в отмеченном множестве, которому оба x и y принадлежат. Объединение D удовлетворяет условию минимальности, поскольку всякая убывающая цепь элементов D лежит во вполне упорядоченном отмеченном подмножестве, содержащим первый элемент цепи. Следовательно, D вполне упорядочено. Легко видеть, что оно и допустимо, поскольку отрезок множества D является отрезком и в одном из отмеченных множеств, из которых D слагается. Наконец, заметим, что D совпадает с X. Иначе, множество $\overline{D} = D \cup \{\varphi(X - D)\}$ было бы отмеченным и большим, чем D, если положить $\varphi(X - D)$ наибольшим элементом $\overline{D}$, т. е. (1)$\to$(2) доказано.

Из (2) следует (3). Пусть в частично упорядоченном множестве X взята произвольная цепь M. Если множество $X - M = B$ не пусто, вполне упорядочим B в порядке, который может отличаться от порядка в X. Отнесем первый элемент множества B к первому классу, если он в частичном порядке X сравним с каждым элементом из M, иначе отнесем его ко второму классу. Пусть b есть произвольный элемент B, и каждый из элементов B, строго предшествующих b в порядке множества B отнесен к одному из двух классов. Относим b к первому классу, если он сравним с каждым предшествующим элементом, уже входящим в первый класс или множество M; относим b ко второму классу в противном случае. Согласно условию индуктивности, B будет дизъюнктивной суммой этих двух классов: $B = B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Здесь элементы B_1 составляют первый класс. Остается заметить, что $M \cup B_1$ и будет максимальной цепью, содержащей цепь M.

Из (3) следует (4). Пусть дано частично упорядоченное множество X, в котором всякая цепь обладает верхней гранью. Если $a \in X$, то в качестве максимального элемента из X большего, чем a, можно взять верхнюю грань максимальной цепи, включающей в себя в качестве подцепи одноэлементное множество a.

Из (4) следует (1). Пусть дано произвольное множество X. Рассмотрим систему непустых подмножеств A такую, что на A можно определить функцию φ, относящую каждому подмножеству $M \in A$ элемент $\varphi(M) \in M$. Одно фиксированное подмножество, например, образует такую систему. Пусть A_1 и A_2 системы, обладающие отмеченным свойством, φ_1 иφ_2 соответствующие им функции. Полагаем $\varphi_1 \leq \varphi_2$, если A_1 подмножество A_2, и на элементах A_1 функция φ_1 совпадает с φ_2. Множество Φ введенных таким образом в рассмотрение функцией φ становится частично упорядоченным, удовлетворяющим условиям теоремы Куратовского — Цорна. Вследствие этого множество Φ обладает максимальным элементов ψ. Максимальность функции ψ влечет, что она определена на всех подмножествах множества X. $\square$

Возможность вполне упорядочить рассматриваемое множество M позволяет доказывать справедливость утверждения $\mathcal{E}(x)$ для любого элемента $x \in M$ методом трансфинитной индукции, т. е. доказываем $\mathcal{E}$ для наименьшего элемента вполне упорядоченного M, а затем доказываем справедливость $\mathcal{E}(x)$ при условии, что $\mathcal{E}$ имеет место для всех $y \leq x, y \in M$.

§ 8. Приложение 1. Порядковые числа (ординалы)

Мы следуем здесь книге [56] (см. также [14]). Будем говорить, что два частично упорядоченных множества порядково подобны (имеют одинаковый порядковый тип), если существует взаимно однозначное отображения одного на другое, сохраняющее порядок. Множество X и Y подобны, если функция $\varphi(x)$ определенная всюду на X, отображает взаимно однозначно X на Y, и если из $x_1 \leq x_2$ в X следует $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ в Y.

Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется порядковым числом или ординалом.

Каждый элемент a вполне упорядоченного множества A определяет *отрезок* P, равный множеству всех элементов $< a$, *остаток* Q, равный множеству всех элементов $\geq a$, и тем самым разбиение $A = P + Q$.

Обратно, каждое разбиение A начальный кусок P и концевой кусок Q есть разбиение, определяемое некоторым элементом a, именно первым элементом Q. Если a — первый элемент A, то следует положить $P = \emptyset$, $Q = A$.

Теорема 8.1. *Если f — подобное отображение вполне упорядоченного множества A на его подмножество B, то $f(a) \geq a$. для всех a из A.*

То есть при таком отображении ни один элемент не может иметь своим образом элемент, стоящий перед ним.

Доказательство. В самом деле, если бы существовали элементы a, для которых $f(a) < a$, то между ними был бы первый; пусть этот элемент есть a, а его образ есть $b = f(a)$, $b < a$. Тогда в силу подобия $f(b) < f(a)$, т. е. $f(b) < b$; следовательно, a — не первый из элементов, обладающий указанным свойством. $\square$

Следствие 8.1. *Вполне упорядоченное множество не может быть подобно своему отрезку.*

Доказательство. Если бы A было подобно отрезку B, определяемому элементом a, то $f(a) \in B$, следовательно, $f(a) < a$. $\square$

Свойство множества A быть подобным отрезку некоторого множества B сохраняется при замене множеств им подобным. Это оправдывает такое

Определение 8.1. *Если α и β два порядковых числа, A и B — вполне упорядоченные множества этих типов, то по определению*

$$\alpha < \beta \text{ или } \beta < \alpha$$

(α меньше β, β меньше α), если A подобно отрезку множества B.

Очевидно, справедлив транзитивный закон:

$$\text{если } \alpha < \beta,\ \beta < \gamma, \text{ то } \alpha < \gamma$$

(A подобно отрезку отрезка множества C, т. е. отрезку множества C).

В силу следствия не может быть $\alpha < \alpha$, т. е. соотношение $\alpha < \beta$ и $\alpha = \beta$ и исключает одно другое; то же самое можно сказать и относительно $\alpha > \beta$ и $\alpha = \beta$. То же самое относится и к соотношениям $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$, так как из $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ по транзитивности следовало бы $\alpha < \alpha$. Из соотношений $\alpha \mathrel{\substack{<\\=\\>}} \beta$ может иметь место только одно; покажем, что одно из них обязательно имеет место, т. е. два порядковых числа всегда сравнимы.

В последующем будем постоянно пользоваться следующим обозначением: каждое порядковое число α определяет множество

$$W(\alpha) = \text{множеству порядковых чисел} < \alpha,$$

которое называется *числовым отрезком. Числа множества* $W(\alpha)$ *все сравнимы между собой, и* $W(\alpha)$*, упорядоченное по величине, имеет тип* α*.* В самом деле, если

$$A = \{\ldots, a, \ldots, b, \ldots\}$$

вполне упорядоченное множества типа α, то по самому определению числа $< \alpha$ поставлены во взаимно однозначное и подобное соответствие отрезкам A, а тем самым элементам A: каждый элемент a определяет свой отрезок P_a типа π_a и если $a < b$, то P_a есть отрезок отрезка $P_b, \pi_a < \pi_b$.

Таким образом,

$$W(\alpha) = \{\ldots, \pi_a, \ldots, \pi_b, \ldots\},$$

что и доказывает наше последнее утверждение. Обратно, сказанное позволяет перенумеровать элементы вполне упорядоченного множества типа α при помощи соответствия этих элементов числам множества

$$W(\alpha) = \{0, 1, \ldots, \xi, \ldots\} \qquad (\xi < \alpha)$$

таким образом, чтобы в

$$A = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\xi, \ldots\} \qquad (\xi < \alpha)$$

индекс каждого элемента был типом соответствующего этому элементу отрезка. Так, например,

$$W(1) = \{0\}, W(2) = \{0, 1\}, W(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

для конечного $n > 0$, в то время, как $W(0) = \emptyset$ есть пустое множество.

Пусть теперь α, β — два порядковых числа, $A = W(\alpha), B = W(\beta)$ и $D = A \cap B$ — пересечение этих отрезков, т. е. множество тех порядковых чисел, которые одновременно $< \alpha$ и $< \beta$. Значит, D вполне упорядочено, его тип δ — порядковое число; мы утверждаем, что $\delta \leq \alpha$. Если $D = A$, то $\delta = \alpha$; если же $D \subset A$, то в разложении

$$A = D + (A - D)$$

D есть начальный кусок, $A - D$ — концевой кусок A. Действительно, если $\xi \in D, \eta \in A - D$, то ξ и η как элементы A сравнимы, следовательно, $\xi \gtreqless \eta$; но не может быть $\eta < \xi < \alpha$, β, так как тогда η принадлежало бы D; следовательно, имеем $\xi < \eta$. Но A тогда D есть отрезок A и $\beta < \alpha$; сверх того, очевидно, что δ есть первый элемент $A - D$ и $D = W(\delta)$. Таким образом мы имеем:

$$\delta \leq \alpha, \delta \leq \beta.$$

При этом невозможна комбинация $\delta < \alpha, \delta < \beta$, так как в этом случае мы бы имели $\delta \in D$, и, следовательно, возможны только три случая:

$$\delta = \alpha, \delta = \beta : \alpha = \beta,$$

$$\delta = \alpha, \delta < \beta : \alpha < \beta,$$

$$\delta < \alpha, \delta = \beta : \alpha > \beta.$$

Этим доказана

Теорема 8.2 (сравнения). *Два порядковых числа всегда сравнимы, т.е. между ними всегда существует одно и только одно из трех соотношений:*

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta, \alpha > \beta.$$

В частности, если $A \subseteqq B$, то $\alpha \leq \beta$. В самом деле, если $\alpha > \beta$, то B подобно отрезку P множества A, определяемому элементом $a \in A$, и при отображении B на P элемент a отображается в элемент множества P, который меньше, чем α, что противоречит теореме 8.1. Заметим, что α может равняться β и в том случае, когда $A \subset B$; но это может быть только тогда, когда A не есть отрезок B; так, например, все бесконечные подмножества натуральных чисел имеют тип ω.

Пользуясь теоремой Теорема Цермелло и теоремой сравнения, мы можем восполнить пробел, бывший до сих пор в теории кардинальных чисел (мощностей), доказав, что *любые два кардинальных числа сравнимы.* В самом деле, любые мощности a, b мы можем теперь рассматривать как мощности *вполне упорядоченных* множеств A, B соответственно типов α, β, и тогда

$$\text{или } \alpha = \beta, a = b,$$

$$\text{или } \alpha < \beta, a \leq b,$$

$$\text{или } \alpha > \beta, a \geq b.$$

Действительно, $\alpha < \beta$ означает, что A подобно отрезку множества B, следовательно, A эквивалентно подмножеству множества B.

Обратно, мы имеем:

$$\text{или } a = b, \alpha \lesseqqgtr \beta,$$

$$\text{или } a < b, \alpha < \beta,$$

$$\text{или } a > b, \alpha > \beta,$$

причем первая строчка выражает то обстоятельство, что при данной мощности множество может быть вполне упорядочено различными способами, например, при $a = N_0$ получаем, что α может быть равно $\omega, \omega + 1, \ldots$

Теорема 8.3. *В каждом (не пустом) множестве порядковых чисел существует наименьшее число; таким образом каждое множество порядковых чисел вполне упорядочено по величине своих элементов.*

Доказательство. В самом деле, если W — множество порядковых чисел и α — число этого множество, то, если α не есть наименьшее в W, пересечение $W \cdot W(\alpha)$, будучи подмножеством $W(\alpha)$, вполне упорядочено, как уже доказано, и наименьшее число этого множества есть наименьшее и в W. Следовательно, если W имеет тип β, то его можно записать в виде:

$$W = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\eta \ldots\} \qquad (\eta < \beta)$$

причем если $\xi < \eta$, то $\alpha_\xi < \alpha_\eta$. $\square$

Теорема 8.4. *Для каждого множества W порядковых чисел существует порядковые числа, большие всех чисел данного множества; в частности, существует первое, превышающее все числа множества.*

Доказательство. Выберем мощность α, большую, чем мощность всех порядковых чисел W; если α — порядковое число мощности a, то α больше всех порядковых W, короче: $\alpha > W$. Наименьшее из чисел $> W$ есть либо α, либо одно из чисел отрезка $W(\alpha)$. $\square$

На основании этой теоремы можно заключить, что понятие « множество всех порядковых чисел» немыслимо.

Числа $> \alpha$ имеют вид $\alpha + \beta (\beta > 0)$ и, обратно, только числа такого вида $> \alpha$ (A подобно $A + B$); наименьшее из чисел $> \alpha$ есть $\alpha + 1$.

Число $\lambda > 0$, которое не имеет числа, непосредственно ему предшествующего, т. е. такое число, для которого $W(\lambda)$ не имеет последнего элемента, называется *предельным числом;* наименьшие предельные числа суть $\omega,\ \omega + \omega = \omega 2,\ \omega 3, \ldots$ Порядковое число, не являющееся предельным, называется *изолированным;* все изолированные числа, кроме нуля, имеют вид $\alpha + 1$.

Если множество порядковых чисел

$$W = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\eta \ldots\} \qquad (\eta < \beta),$$

монотонно возрастающих вместе с η, не имеет последнего элемента (т. е. если β есть предельное число), то первое число $\lambda > W$, которое, очевидно, является предельным, называется *пределом* W и обозначается $\lambda = \lim W$, или, еще иначе, $\lambda = \lim \alpha_\eta$. Например, ω есть предел $0, 1, 2, \ldots a$, также любой возрастающей последовательности $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ конечных чисел α_ν: $\omega = \lim \nu = \lim \alpha_\nu$.

Трансфинитная индукция. Вместо обычного метода заключения от n к $n + 1$ в применении к порядковым числам имеет место следующий принцип.

Некоторое утверждение $F(\alpha)$ относительно порядкового числа α верно для любого α, если верно $F(0)$ и если из того обстоятельства, что $F(\xi)$ верно для всех $\xi < \alpha$, следует, что верно и $F(\alpha)$.

В самом деле, если бы $F(\beta)$ было не верно, то существовало бы наименьшее α, $0 \leq \alpha \leq \beta$, такое, что $F(\alpha)$ неверно, что приводит к противоречию, как в случае $\alpha = 0$, так и в случае $\alpha > 0$.

Трансфинитная индукция применяется не только в доказательствах, но и в определениях.

Функция $f(\alpha)$ от порядкового числа α определена для каждого α, если определено значение $f(0)$ и если при помощи уже данного определения $f(\xi)$ для $\xi < \alpha$ определено значение $f(\alpha)$.

Если заменить $f(0)$ через $f(\alpha_0)$, то необходимо небольшое видоизменение, а именно в этом случае $f(\alpha)$ соответственно верно или определено для $\alpha \geq \alpha_0$.

§ 9. Приложение 2. Об одном множестве базисного типа

Теорию упорядоченных, в частности, вполне упорядоченных множеств можно рассматривать как область математики, где проявляет себя развитие принципа математической индукции. Замечательное усиление этого принципа представляет также метод приоритета в теории рекурсивных функций [45].

Настоящее приложение имеет целью продемонстрировать эффективность трансфинитной индукции на примере доказательства существования множества вещественных чисел со свойством: любое другое ненулевое число однозначно представимо разностью чисел этого же множества.

Пусть ω_1 — первое, т. е. наименьшее, порядковое число среди чисел таких, что упорядоченные множества с таким порядковым типом имеют мощность множества вещественных чисел. Тогда вещественные числа можно поставить во взаимно-однозначное соответствие порядковым числам, меньшим чем ω_1. Будем считать, что множество $W(\omega_1) = \{1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \alpha, \ldots, \beta, \ldots\}, \alpha < \omega, \beta < \omega_1$, представляет все множество вещественных чисел R взаимно однозначным способом: $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_\omega, r_\omega + 1, \ldots, r_\alpha, \ldots, r_\theta, \ldots\}$, $\beta < \omega_1$, $\alpha < \omega_1$.

Фиксируем число $\beta < \omega_1$ и предположим, что построены вполне упорядоченные множества чисел $A_\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_\gamma, \ldots\}_{\gamma<\alpha} \subseteq R$ для любого порядкового числа $\alpha < \beta$ со свойствами:

1) $|a_i - a_j| \neq |a_k - a_m|$, если пара $\{a_i, a_j\} \neq \{a_k, a_m\}$, $a_i, a_j, a_m, a_k \in A_\alpha$,
2) $A_\mu \subset A_\eta$, если $\mu < \eta < \beta$.

Строим множество A_β. Первый случай: β — есть предельное число. Полагаем $A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$. Свойства 1 и 2, как легко проверяется, имеют место.

Второй случай: $\beta = \beta_1 + 1$. Пусть r_θ — первое число из R, не реализуемое в A_{β_1}, т. е. не представимое разностью двух чисел из из A_{β_1}. Берем $\alpha_{\beta_1+1}, \alpha_{\beta_1+2}$, не входящие оба одновременно в A_{β_1} (это можно сделать, ведь A_{β_1} счетно, а R не счетно!), так, что $|\alpha_{\beta_1+1} - \alpha_{\beta_1+2}| = r_\theta$.

Переберем случаи, когда добавление этой пары чисел к A_{β_1} нарушает условие 1:

1) Есть числа $a_k, a_n, a_p, a_q \in A_{\beta_1}$ такие, что выполняется одно из двух неравенств: $|a_k - a_n| = |a_p - a_{\beta_1+1}|$, или $|a_k - a_n| = |a_q - a_{\beta_1+2}|$. Но множество всех возможных пар $\{a_k, a_n\}$ и чисел a_p, a_q счетно, а множество, из которого выбирается $a_{\beta_1}, a_{\beta_1+1}$ несчетно.

2) Есть числа $a_k, a_n \in A_{\beta_1}$, такие, что $|a_k - a_{\beta_1+1}| = |a_n - a_{\beta_1+2}|$. Если середина отрезка $[a_k, a_n]$ не есть середина отрезка $[a_{\beta_1+1}, a_{\beta_1+2}]$, то $|a_k - a_n| = r_\theta$, что противоречит нереализуемости r_θ в A_β.

Следовательно, середина отрезка $[a_k, a_n]$ совпадает со средней точкой отрезка $[a_{\beta_1+1}, a_{\beta_1+2}]$. Возможных пар $\{a_k, a_n\}$ счетно. Следовательно, нам надо выбрать точки $a_{\beta_1+1}, a_{\beta_1+2}$ с условием $(a_{\beta_1+1}, a_{\beta_1+2})/2 \neq p$, где p принадлежит счетному множеству. Существует несчетное число сдвигов пары $\{a_{\beta_1+1}, a_{\beta_1+2}\}$, среди этих сдвигов $a_{\beta_1+1} - d, a_{\beta_1+2} - d, d \in R$ найдется сдвиг, позволяющий избежать появления случаев 1 или 2.

Следовательно, найдется пара чисел $a_{\beta_1+1}, a_{\beta_1+2}$ такая, что добавление их к A_β не нарушает условий 1, 2. Кроме того, $|a_{\beta_1+1} - a_{\beta_1+2}| = r_\theta$. Еще раз пройдемся по выводу этого заключения.

Если мы примем, что $a_{\beta_1+2} - a_{\beta_1+1} = r_\theta$, то уравнения:

$$|a_k - a_n| = |a_p - a_{\beta_1+1}|,$$

или

$$|a_k - a_n| = |a_q - a_{\beta_1+2}|, a_{\beta_1+1} + a_{\beta_1+2} = 2p,$$

при фиксированных a_k, a_n, a_p, a_q, p определяют конечное число значений a_{β_1+1}, а для всех возможных a_k, a_n, a_p, a_q, p — счетное число. В построении же множеств A_α, $\alpha < \omega_1$, можно выбрать a_{β_1+1} из несчетного множества, не выполняя вышеприведенные модульные равенства.

Итак, построив A_β для всех $\beta < \omega_1$, возьмем $A_{\omega_1} = \cup_{\beta<\omega_1} A_\beta$. Множество A_{ω_1} обладает свойством 1. Кроме того, для любого числа $r \in R$ найдется пара чисел a и b из A_{ω_1} со свойством $a - b = r$. Действительно, если это не так, то найдется первое число в упорядочении $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_\theta, \ldots\}_{\beta<\omega_1}$, для которого подобные a и b не найдутся. Пусть это будет r_γ,

Рассмотрим следующее отображение $\theta(\beta)$ для порядковых чисел $\beta < \omega_1$. При построении последовательности $\{A_\alpha\}$, $\alpha < \omega_1$, для множества $\{A_{\beta+1}\}$ определялось число r_θ. Его порядковый номер и есть $\theta(\beta)$. Отображение $\theta(\beta)$ монотонно: $\beta < \bar{\beta} \Rightarrow \theta(\beta) < \theta(\bar{\beta})$. Вследствие этого (теорема 8.1) имеем, что $\theta(\beta) \geq \beta$, поэтому $\theta(\beta)$ стремится к ω_1 при $\beta \to \omega_1$. По смыслу определения $\theta(\beta)$ любое число r_γ будет представлено парой чисел из $A_{\theta(\beta)}$, где $\theta(\beta) > \gamma$. Получается противоречие. Итак, доказана.

Теорема 9.1. *В множестве вещественных чисел существует подмножество чисел A такое, что каждое число $r \neq 0$ единственным способом представляется в виде $r = a_1 - a_2$, где $a_1, a_2 \in A$.*

Множество A, описываемое теоремой, обладает рядом замечательных свойств. Например, A имеет нулевую Лебегову меру, и, следовательно, R представлено в виде $R = A - A$, где A имеет меру ноль.

§ 10. Приложение 3. Теорема Гудстейна

Теорема 10.1 (Гудстейн). *Все последовательности Гудстейна заканчиваются нулем.*

Последовательности Гудстейна (обозначим $G(n)$) определяется достаточно просто: используется представление натурального числа в виде суммы степенных членов с одинаковым основанием. Например, число 581, используя основание $n = 2$, представим в виде

$$581 = 512 + 64 + 4 + 1 = 2^9 + 2^6 + 2^2 + 2^0.$$

Разложим показатели степени по тому же принципу.

$$581 = 2^{2^3+1} + 2^{2^2+2} + 2^2 + 1 = 2^{2^{2+2}} + 2^2 + 1.$$

Подобное разложение (обозначим его $G(2)$) можно получить для любого числа.

Будем попеременно (рекурсивно) применять к получившемуся выражению две следующие операции:

(a) увеличение «основания» на 1;

(b) вычитание от всего выражения 1.

Таким образом, после применение операции (a) будет получено выражение:

$$3^{3^{3+1}+1} + 3^{3^3+3} + 3^3 + 1,$$

которое дает — если выписать его в обычной форме — сорокозначное число, начинающееся с 133027946...

После применения операции (b) получим

$$3^{3^{3+1}+1} + 3^{3^3+3} + 3^3$$

, обозначающееся как $G(3)$.

После нового применения операции (a) получим:

$$4^{4^{4+1}+1} + 4^{4^4+4} + 4^4,$$

это уже значительно большее число, состоящее из 618 знаков, которое начинается с 12926802...

После нового применения операции (b) получим:

$$4^{4^{4+1}+1} + 4^{4^4+4} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 3,$$

обозначающееся как $G(4)$.

После чего операция (a) дает нам:

$$5^{5^{5+1}+1} + 5^{5^5+5} + 3\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 3$$

, что является числом, которое имеет 10923 знака и начинается с 1274... Обратите внимание, что коэффициенты 3, которые возникают при этом, с необходимостью меньше, чем основание (в данном случае 5), и не изменяются с возрастанием последнего.

Применяя (b) вновь, получим число

$$5^{5^{5+1}+1} + 5^{5^5+5} + 3\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 3,$$

обозначающееся как $G(5)$, над которым мы опять производим последовательно действия $(a), (b), (a), (b), \ldots$ и т. д., насколько возможно. Вполне естественно предположить, что этот процесс никогда не завершится, потому что каждый раз мы будем получать все большие и большие числа. Однако это не так, как следует из поразительной теоремы Гудстейна, независимо от величины исходного числа (581 в нашем примере), мы в конце концов получим нуль!

Кажется невероятным, но это так. И чтобы в это поверить, проделаем вышеописанную процедуру, для начала, с числом 3. Для этого составим следующую таблицу:

Основание n	Запись последовательности $G(n)$	Значение
2	2^1+1	3
3	$(3^1+1)-1=3^1$	3
4	$4^1-1=3\cdot 4^0$	3
5	$3\cdot 5^0-1=2\cdot 5^0$	2
6	$2\cdot 6^0-1=6^0$	1
7	$7^0-1=0$	0

Если же попробовать то же самое с числом 4, то получим сначала вполне закономерно возрастающий ряд, значения которого находятся в третьем столбце следующей таблицы:

Значение этого ряда доходит до числа из 121210695 знаков, после чего начинает непреклонно уменьшаться вплоть до нуля.

Введем обозначения, чтобы понять, что происходит в структуре этих чисел. На каждом шаге растет только основание. Заменим изменяющееся обозначение на ординал ω. Перепишем нашу таблицу, учитывая введенное обозначение:

Теперь последовательность выглядит более регулярной! Простым вычитанием 1 на каждом шагу мы постепенно заменяем растущий множитель ω на константу, если он есть в правом слагаемом. Хотя

Основание n	Запись последовательности $G(n)$	Значение
2	2^2	4
3	$2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2$	26
4	$2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1$	41
5	$2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1$	60
6 7	$2 \cdot 6^2 + 6^1 + 5$ $2 \cdot 7^2 + 7^1 + 4$	83 109
...	...	...
11	$2 \cdot 11^2 + 11^1$	253
...	...	...
21	$2 \cdot 21^2 + 2$	884
...	...	...
41	$41^2 + 23 \cdot 41^1 + 6$	2630
...	...	...

Основание n	Запись последовательности $G(n)$	Значение
2	ω^ω	4
3	$2\omega^2 + 2\omega^1 + 2$	26
4	$2\omega^2 + 2\omega^1 + 1$	41
5	$2\omega^2 + 2\omega^1$	60
6 7	$2\omega^2 + \omega^1 + 5$ $2\omega^2 + \omega^1 + 4$	83 109
...	...	...
11	$2\omega^2 + \omega$	253
...	...	...
21	$2\omega^2 + 2$	884
...	...	...
41	$\omega^2 + 23\omega^1 + 6$	2630
...	...	...

значение ряда растет с основанием последовательности, но каждый раз структура ряда немного «упрощается». Так что структура представления $G(n)$ никогда не будет более «сложной», чем это было на первом шаге. Она переходит от вида ω^ω к $2\omega^2 + O(\omega)$, затем постепенно к $O(\omega)$, и в конце концов превращается в константу.

За счет этого становится видно, как скромная, незаметная операция (b) безжалостно «отщипывает» по кусочку от огромной башни «показателей» до тех пор, пока она не начинает постепенно таять и пока не исчезает полностью, хотя на это и уходит невообразимо большое число шагов.

Доказательство теоремы Гудстейна. В контексте $(n-1)$-й строки первой таблицы в арифметическом выражении основание n заменяем на ординал ω. Получаем корректно определенную последовательность λ_n порядковых чисел, представленную второй таблицей. Легко усматривается, что это — убывающая последовательность, мажорирующая исходную числовую. Убывающая последовательность порядковых чисел всегда конечна. Значит она заканчивается нулем. $\square$

То, что теорема Гудстайна недоказуема в арифметике Пеано, установили Кирви и Парис.

Материалы этого параграфа взяты из [68].

Глава 10
Аналогия как метаматематический принцип

§ 1. Введение

«Математик — это, тот кто находит аналогию
между утверждениями. Лучший математик - тот,
который устанавливает аналогию доказательств.
Более сильный математик тот, который замечает аналогию
теорий, но можно представить себе и такого, который
видит аналогию в аналогии».
С. Банах.

«Я больше всего дорожу аналогиями — моими
самыми дорогими учителями. Они знают все секреты
природы, и ими меньше всего следует пренебрегать в геометрии».
И. Кеплер.

Аналогию можно рассматривать как принцип получения по сходству определений, правдоподобных утверждений, доказательств.

Вот общая ситуация такого проявления аналогии. Пусть имеются объекты A и B (или явления), и наблюдается (устанавливается) множество отношений $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ между частями a_j и b_j, $j \in J$, объектов A и B. Мы экстраполируем по сходству: некоторое новое отношение μ, наблюдаемое в A, берется как возможное в B.

Чем существеннее отношения свойства λ_i и части a_j и b_j, тем правдоподобнее утверждения наличия μ в B.

Вообще, аналогия с высказанной точки зрения лежит в контексте восточного философского напряжения мысли — познавать истину через сопоставление. (Возможно, все творчество математика, не «уложенное» на бумагу, — это, скорее, работа мысли по Востоку, чем по Западу.)

§ 2. Примеры

Пример 2.1. Назовем медианной плоскостью тетраэдра плоскость, проходящую через ребро пирамиды и середину противолежащего ребра. Например, это плоскость треугольника MDC. Доказать, что шесть медианных плоскостей тетраэдра проходят через одну и ту же точку.

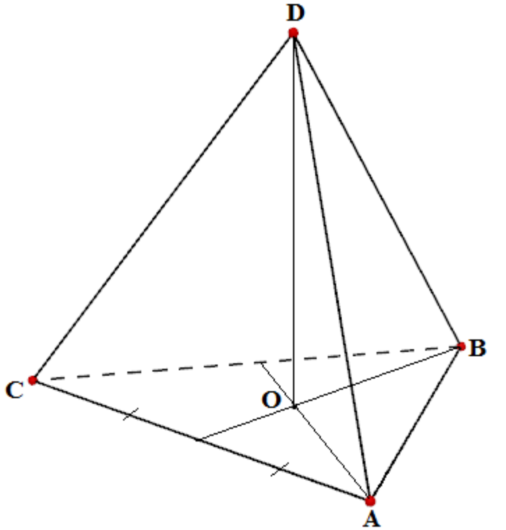

Рис. 1. Тэтраэдр

Найдем задачу аналогичную, но проще. Для этого применим своеобразную математическую индукцию — спустимся на ступень ниже. Перейдем от трехмерного пространства к двумерному — плоскости. Совершенно естественно, используя по сходству, медианы вместо медианных плоскостей, приходим к задаче: доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Будем считать, что доказательство этого известно, и вернемся к тетраэдру. Три медианные плоскости, имеющие общие точку D, имеют еще одну общую точку O, поскольку они проходят через медианы треугольника ABC. Следовательно, они все проходят через прямую DO. Рассмотрим три медианные плоскости, проходящие через стороны основания ABC.

Они пересекаются в одной точке. Эта точка принадлежит и остальным медианным плоскостям, например проходящей через ребро DB. Ибо показали уже, что медианные плоскости, проходящие через одну вершину B, имеют общую прямую. На последней лежит, следовательно, обсуждаемая точка.

Нижеследующие примеры взяты из книги Д. Пойя [40].

Пример 2.2. Вычислить сумму ряда $S = \sum\limits_{n-1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Эту сумму впервые вычислил Эйлер с помощью дерзкой аналогии. Вспомним теорему Безу. Полином $L_n(x)$ представляется согласно ей в виде:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n),$$

где α_i корни L_n.

Сравнивая слагаемые одной степени справа и слева от равенства, находим, что коэффициент при x^{n-1} равен $a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_1 + ... + \alpha_n)$, или иначе:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Сравнивая свободные члены, имеем равенство:

$$a_0 = (-1)^n a_n \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n.$$

В итоге полином $L_n(x)$ получает представление:

$$L_n(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)...\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Применим полученные равенства к многочлену: $P_{2n}(x) = b_0 - b_1x^2 + a_2x^4 - ... + (-1)^n b_n x^{2n}$ с четными степенями.

Пусть $\beta_1, \beta_1, \beta_2, -\beta_2, \ldots$ — его корни. Тогда согласно новому представлению

$P_{2n}(x) = (-1)^n b_n (x^2 - \beta_1^2)(x^2 - \beta_2^2)...(x^2 - \beta_n^2) = b_0 \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right)...\left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$, приравнивая коэффициенты при x^2, получаем что сумма квадратов чисел, обратных корням уравнения $P_{2n} = 0$, определяется формулой

$$b_1 = b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + ... + \frac{1}{\beta_n^2}\right) \qquad (2.1)$$

Рассмотрим новое уравнение $\sin(x) = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора, перепишем его в виде: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... = 0$.

Пусть $x \neq 0$, тогда $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - ... = 0$. По аналогии предположим, пусть формула (2.1) имеет место и для этого уравнения, где левая часть представляет полином бесконечного порядка. Корни нового полинома $\beta_k = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, ...$

Имеем:

$$(2.1) \Longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.2}$$

В силу свойств гладкости функции $\sin(x)$ правдоподобно, что формулу (2.2) можно строго доказать. Доказываемое получено по аналогии.

Пример 2.3. Теорема Ферма для многочленов.

Великой теоремой Ферма для чисел является следующее утверждение: $x^n + y^n = z^n$, при $n \geq 3$ не имеет решения в целых числах.

Более двухсот лет математики бились над доказательством, и только в 1995 году математик Вайлс дал, наконец, доказательство, используя алгебраическую геометрию. Рассмотрим аналог теоремы Ферма для полиномов: для $n \geq 3$ не существует решения уравнения $x^n(t) + y^n(t) = z^n(t)$, члены которого не равны тождественно константе и являются взаимно простыми полиномами по t. Материал взят из [34].

Удивительно то, что теорема для полиномов доказывается простыми средствами. Вначале установим, что имеет место:

Теорема 2.1 (Мейсона — Стотерса). *Пусть f, g, h — полиномы с комплексными коэффициентами, не равные константе и взаимно простые. Пусть выполняется равенство $f + g = h$. Тогда*

$$\max(\deg f, \deg g, \deg h) \leq n_0(fgh) - 1,$$

где $n_0(P(x))$ — число различных корней полинома $P(x)$.

Доказательство. Будем использовать производные и подберем подходящую операцию, переводящую произведения в сумму. Поскольку

$$[\ln\varphi(x)]_x^{'} = \frac{\varphi^{'}}{\varphi},$$

$$[\ln(\varphi(x)\cdot\psi)]_x^{'} = \frac{\varphi^{'}}{\varphi} + \frac{\psi^{'}}{\psi} = \frac{(\varphi\psi)^{'}}{\varphi\psi},$$

то таковой может служить операция (логарифмическая производная): $\varphi \to (\ln\varphi)^{'}$.

Равенство $f + g = h$ перепишем в виде $\dfrac{f}{h} + \dfrac{g}{h} = 1$.

Введем обозначения $R = \dfrac{f}{h}$ и $S = \dfrac{g}{h}$. Получаем последовательно

$$R'(t) + S'(t) = 0,$$

$$\frac{R'}{R}R + \frac{S'}{S}S = 0 \Rightarrow \frac{\frac{R'}{R}}{\frac{S'}{S}} = \frac{S}{R} = \frac{g}{f}. \tag{2.3}$$

В полученном равенстве воспользуемся разложениями

$f(t) = C_1 \prod (t-\alpha_i)^{m_i}, g(t) = C_2 \prod (t-\beta_i)^{n_i}, h(t) = C_3 \prod (t-\gamma_i)^{l_i};$
и производными от них:
$\dfrac{f'}{f} = \sum\limits_i \dfrac{m_i}{t-\alpha_i}, \dfrac{g'}{g} = \sum\limits_i \dfrac{n_i}{t-\beta_i}, \dfrac{h'}{h} = \sum\limits_i \dfrac{l_i}{t-\gamma_i}.$

Далее, согласно (2.1) и свойству логарифмической производной, имеем:

$$\frac{g}{f} = -\frac{\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h}}{\frac{g'}{g} - \frac{h'}{h}} = -\frac{\sum\limits_i \frac{m_i}{t-\alpha_i} - \sum\limits_i \frac{l_i}{t-\gamma_i}}{\sum\limits_i \frac{n_i}{t-\beta_i} - \sum\limits_i \frac{l_i}{t-\gamma_i}}. \tag{2.4}$$

Обозначим через $D(t) = \prod\limits_{i,j,k} (t-\alpha_i)(t-\beta_j)(t-\gamma_k)$ общий знаменатель во всех суммах. Тогда:

$\deg D(t) = n_0(f \cdot g \cdot h),$
$\deg \dfrac{D(t)}{t-\alpha_i} = n_0(f \cdot g \cdot h) - 1,$
$\deg \dfrac{D(t)}{t-\beta_j} = n_0(f \cdot g \cdot h) - 1, \deg \dfrac{D(t)}{t-\gamma_k} = n_0(f \cdot g \cdot h) - 1.$

Из равенства (2.4) следует $\dfrac{g}{f} = -\dfrac{\sum \frac{D}{t-\alpha_i} m_i - \sum \frac{D}{t-\gamma_k} l_k}{\sum \frac{D}{t-\beta_j} n_j - \sum \frac{D}{t-\gamma_k} l_k}.$

Поскольку g и f взаимно простые, из этого равенства следует, что степени f и g не превосходят степени числителя и знаменателя правой части, т.е не превосходят числа $n_0(f \cdot g \cdot h) - 1$, и мы получаем

$$\max(\deg f, \deg g) \le n_0(f \cdot g \cdot h) - 1. \ \Box$$

Доказав теорему Мейсона — Стотерса, переходим к доказательству теоремы Ферма для многочленов. Предположим обратное: пусть $x(t), y(t), z(t)$ попарно взаимные простые многочлены, отличные от постоянной решения уравнения

$$x^n(t) + y^n(t) = z^n(t), n \geq 3 \tag{2.5}$$

Обозначим $f(t) = x^n(t), g(t) = y^n(t), h(t) = z^n(t)$. По теореме Мейсона — Стотерса

$\deg x^n(t) \leq n_0(x^n y^n z^n) - 1$,

$n\mathrm{deg}x^n(t) \leq n_0(x(t)) + n_0(y(t)) + n_0(z(t)) - 1 \leq \mathrm{deg}x(t) + \mathrm{deg}y(t) + \deg z(t) - 1$,

$n \deg y(t) \leq \deg x(t) + \deg y(t) + \deg z(t) - 1$,

$n \deg z(t) \leq \deg x(t) + \deg y(t) + \deg z(t) - 1$.

Сложим три неравенства, получим:

$(n-3)(\deg x(t) + \deg y(t) + \deg z(t)) \leq -3$; т.к $n \geq 3$, слева положительное число, справа отрицательное, следовательно полиномов таких, что $x^n + y^n = z^n$ нет. $\square$

Этот пример показывает, также, как и задача о четырех красках, что для предельного, идеального случая (в данном случае для чисел, полиномов нулевой степени) доказательство бывает более сложным. В проблеме четырех красок для географической карты, сравнительно быстро получили решения для всех поверхностей, не гомеоморфных сфере. А для решения задачи на сфере пришлось привлекать ЭВМ. Аналогично, в знаменитой проблеме Пуанкаре, входящей в список наиболее важных математических проблем двадцать первого века, составленный известным математиком Смейлом, решение в пространствах размерности больше трех было получено сравнительно быстро (самим Смейлом). В привычном нам трехмерном пространстве решение было получено недавно российским математиком Перельманом.

Попытаемся по аналогии, по сходству переложить изложенное доказательство на доказательство теоремы Ферма для чисел. В доказательстве мы использовали существенно, что степень произведения равна сумме степеней сомножителей; нетрудно заметить что этим аналогом для чисел будет логарифм (по любому основанию, большему единицы) $\deg \leftrightarrow \log n$.

Аналог числа $n_0(f)$ определим, привлекая следующее построение его для полиномов. Если $f(t) = C_1 \prod\limits_i (t - \alpha_i)^{m_i}$, то по нему строим $f_0 = C_1 \prod\limits_i (t - \alpha_i)$, тогда $n_0(f) = \deg f_0$.

Это цепь построений легко моделируется на числах. Надо начать с разложения $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$; убираем показатели и в качестве f_0 возьмем $N_0(n) = p_1, p_2, \ldots, p_r$. Следующий шаг взятия степени заменяем взятием логарифма. Испытываем как $n_0(f)$ число $\log N_0(n)$.

Теперь теорема Мейсона — Стотерса для целых чисел должна формулироваться так: если a, b, c — натуральные числа, взаимно простые, и $a + b = c$, то $\max(\log a, \log b, \log c) \leq \log N_0(abc) - 1$.

Преобразуя последнюю формулу, получаем

$$\log \max(a, b, c) \leq N_0(abc) - \log d,$$

где d — основание логарифма. Следовательно, для некоторого числа k имеет место: $\max(a, b, c) \leq kN_0(abc)$.

На довольно простых примерах обнаруживается, что это неравенство при всевозможных a, b, c не имеет место ни для каких k. Чтобы выйти из положения, мы используем очень часто применяемый метод: «ε-поправку». Соответствующая «ε-поправка» выглядит так: при данном $\varepsilon > 0$ существует константа $k(\varepsilon)$, зависящая от ε, но не зависящая от a, b, c, такая, что для всех ненулевых взаимно простых чисел a, b, c таких, что $a + b = c$, выполняется неравенство:

$$\max(a, b, c) \leq k(\varepsilon)(N_0(abc))^{1+\varepsilon}.$$

Это утверждение получило название «гипотеза abc».

Покажем что гипотеза abc влечет теорему Ферма. Пусть x, y, z — целые числа, для которых, выполняется $x^n + y^n = z^n$. Обозначим $x^n = a, y^n = b, z^n = c$ и применим гипотезу abc. Согласно гипотезе:

$x^n \leq k(\varepsilon)(N_0(x^n y^n z^n)^{1+\varepsilon}) = k(\varepsilon)N_0(xyz)^{1+\varepsilon}$,

$y^n \leq k(\varepsilon)(N_0(x^n y^n z^n)^{1+\varepsilon})$,

$z^n \leq k(\varepsilon)(N_0(x^n y^n z^n)^{1+\varepsilon})$,

$x^n y^n z^n \leq k^3(\varepsilon)N_0(xyz))^{3+3\varepsilon} \leq k^3(\varepsilon)(xyz)^{3+3\varepsilon}$,

$(xyz)^{n-3\varepsilon-3} \leq k^3(\varepsilon)$.

Считаем $n - 3\varepsilon - 3 > 0$,

$(n - 3\varepsilon - 3)\log(xyz) \leq 3\log(\varepsilon)$,

$(n - 3\varepsilon - 3) \leq \dfrac{3\log k(\varepsilon)}{\log(xyz)}$,

$n \leq 3 + 3\varepsilon + 3\dfrac{3\log k(\varepsilon)}{\log(xyz)}, xyz > 2, \log(xyz) > \log 2$,

$n \leq 3 + 3\varepsilon + 3\dfrac{3\log k(\varepsilon)}{\log(2)}$.

Осталось проверить теорему Ферма для конечного числа значений n. Это можно сделать на ЭВМ с помощью специальной программы.

Впечатляющее применение аналогии можно найти при построении квантовой механики в книге [50]. Как в примере 2.3, структура и понятия классической гамильтоновой механики «переделываются» для описания «квантовых явлений».

Глава 11

Вариативный и эволюционный ряды

Цель главы — ввести новые понятия, обсуждая определенный математический материал и рассматривая его в связи с философскими категориями, в частности, с категорией «иерархия».

«Если нам не удается найти решение математической проблемы, то часто причина этого заключается в том, что мы еще не овладели достаточно общей точкой зрения, с которой рассматриваемая проблема представляется лишь отдельным звеном в цепи родственных проблем. Отыскав эту точку зрения, мы не только делаем доступной для исследования данную проблему, но и овладеваем методом, применимым к родственным проблемам».

Давид Гильберт.

§ 1. Вариативный ряд

Применим эту точку зрения на аналогию, которая интерпретирует аналогию как родовое сходство, вскрывающее существенную общность за оболочкой поверхностных общих моментов, частностей.

При исследовании какого-либо явления или объекта в математике ряд, в который встраивается как член исследуемый объект, является обычным и необходимым явлением. Обычно ряд строится путем вариации первичных характеристик-параметров или формы исследуемого, а уже затем вскрывается внутреннее родство объектов, нечто существенное, что объединяет члены ряда, и что этим рядом продуцируется.

Ряд, через который вскрывается сущностное сходство членов ряда, не проявляемое членами в отдельном от ряда бытии, назовем вариативным рядом. Собственно, вариативный ряд, это элементарное пространство с той точки зрения, что члены ряда вскрывают некую сущность за процессом изменения членов ряда. Приведем примеры.

Пример 1. Теорема Пифагора.

Изобразив геометрически величины, входящие в доказываемое равенство $a^2 + b^2 = c^2$, мы получим рисунок, с которого начинали свои рассуждения и древние греки («Пифагоровы штаны»).

Попробуем варьировать формы воздвигаемых на сторонах треугольника фигур, естественно, придерживаясь каких-то принципов; в данном случае, требуя подобия всех трех фигур. Выясним, не кроется ли за элементами ряда какая-то закономерность.

Открытие, даже очень скромное открытие, требует, чтобы что-то было подмечено, осознана какая-то связь. Действие и рефлексия мышления на изменившиеся обстоятельства — два основных принципа математика.

Если отношение площади S_c фигуры, построенной на гипотенузе c, к площади c^2 соответствующего квадрата «пифагоровых штанов» обозначим через λ, то из подобия всех фигур имеем и для стороны $a : S_a = \lambda a^2$, и для стороны $b : S_b = \lambda b^2$. Рефлексия(осознание) только что полученных фактов дает нам умозаключение: равенство $S_c = S_a + S_b$ выполняется или не выполняется сразу для всех объектов ряда. Нет ли такого члена в ряду, где это равенство очевидно? Такой «мутант» легко построить. В нем все фигуры S_a, S_b, S_c — прямоугольные треугольники, равные соответственно ABC, ADC, DBC, где DC — высота, опущенная на гипотенузу.

Бросим ретроспективный взгляд на приведенное доказательство, (заметим, что доказать более общее иногда проще). Здесь мы выявили «родовое» свойство всех фигур ряда. Отметим также, что «решает» задачу наиболее «экономично построенный» член вариативного ряда.

Подчас, выяснить в задаче действующие лица, формирующие соответствующий ряд, — и есть решающий шаг в решении.

Оторвемся от изложения примеров для ряда философского характера высказываний:

1) Вариативный ряд обнажает свойство, которое относится к сущности объекта, свойство вскрывается через ряд. Через вариацию материала членов ряда свойство проглядывает как нечто устойчивое через неустойчивый хаос вариаций. Неверно думать, что есть отдельно свойство и отдельно ряд, вскрывающий сущностное свойство членов ряда. Свойство есть потому, что есть ряд; свойство и ряд образуют целостность.

2) Вариативный ряд есть движение. Движение по вариативному ряду не сводимо к движению по пространству и времени! По пространству и времени движется одно, уже взятое как известное. Движение по вариативному ряду вскрывает (формирует) это одно и вскрывает это одно как родовое свойство, как некую математическую теорему.

3) Понимание сущности приходит через объединение в один ряд

разных, казалось бы, явлений. Прекрасный пример этому — возникновение понятия о тяготении и современного понятия силы в теоретической механике. Ньютон объединил аналогией падение яблок с дерева, притяжение планет к солнцу и движение тела при приложении к нему силы — эти три взаимодействия рассмотрел в одном ряду.

4) Сущность — это самый глубокий инвариант ряда. Ряд есть всегда неопределенность, всегда уравнение, и в движении ряда решается это уравнение, выявляется и обогащается содержанием понятие, формируется теорема.

5) Ряд означает взгляд с более общих принципов, чем частности задачи.

6) «Тайная гармония» (Гераклит) — это вскрытая сущность членов (частей) ряда (целого).

Вернемся к примерам.

Пример 3. Вариативный ряд возникает чаще всего через вариацию параметров формы или конструкции объекта. Иногда центральным для построения ряда является выбор формы представления математического объекта. Рассмотрим формулу:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Как построить к ней вариативный ряд? Проблема прояснится, если мы представим $a^2 - b^2$ как определитель:

$$a^2 - b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Теперь мы можем в качестве следующего члена взять определитель:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3). \tag{1.2}$$

Формулу, аналогичную (1.1), мы установим, заметив, что сумма элементов каждой строки $a + b + c$. Как следствие получаем, что определитель (1.2) должен делиться на $a + b + c$:

$$3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = (a+b+c)(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2). \tag{1.3}$$

Итак, обнаружена какая-то существенная закономерность, порождающая формулу (1.1), (1.3). В общем вариативном ряду на n-ом месте стоит то, что в математике называется определителем циклической матрицей n-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & a_{1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Есть специальный раздел матричной алгебры, занимающийся циклическими определителями. Нами здесь открыта только одна формула из развиваемой в этом разделе теории.

Пример 4. Рассмотрим ряд (где варьируется форма):

$$\operatorname{tg}\alpha = t,\ \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{tg}3\alpha = \frac{3t-t^3}{1-3t^3}, \\ \operatorname{tg}4\alpha = \frac{4t-t^4}{1-6t^2+t^4},\ \dots \tag{1.5}$$

«Тайная гармония» этого ряда представляется формулой Эйлера:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.6}$$

Эта формула непосредственно приводит к ряду (1.5), если заметить, что

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \\ = \cos^n\theta + C_n^1\cos^{n-1}(i\sin\theta) + C_n^2\cos^{n-2}(i\sin\theta)^2 + \dots$$

Разделив эти равенства на $\cos n$, приравняв мнимые части, приходим к формуле для $\operatorname{tg} n\alpha$, представленного в ряду (1.5). Но что ведет к «обнаружению» сущности — к формуле (1.6)? Составление нового ряда: выстроим коэффициенты последовательных степеней t, встречаемых у члена ряда (1.5):

$$\{1\}, \{1; 2; -1\}, \{1; 3; -3; -1\}, \{1; 4; -6; -4; 1\}, \dots$$

Если отбросим знаки (закономерность расположения знаков легко формализуется), то получим строки треугольника Паскаля.

Теперь уже можно натолкнуться на идею использовать бином Ньютона, а по расположению знаков — на многочлен $(a+ib)^n$.

Все исследование должно вестись под главенством вопроса: какова общность членов ряда и в чем причина этой общности?

§ 2. Эволюционный ряд

Аналогия как средство обнаружения рода объекта («стада», в котором объект есть одно) «работает» в вариативном ряду, выявляя общность как внутреннюю сущность членов рода-ряда.

Вариативный ряд работает на одном уровне абстракции, а точнее, на одной ступени иерархической системы, которой представлена вся математики Ибо, по сути, вся математика — это восхождение от работы в определенных понятиях к работе над более абстрактными понятиями, охватывающими отношения между понятиями и объектами предыдущего, предшествующего уровня.

При «восхождении» абстракции образуется эволюционный ряд, в котором наполняется новым содержанием сущность явления или понятия благодаря обсуждению в большем контексте, привлечению более широкого круга отношений. Организуется более обширная территория мышления, в администрацию управления которой обсуждаемое понятие входит в новом чине.

Внешне тот факт, что одно движется по эволюционному ряду, схватывается опять аналогией. Но теперь аналогия есть проявление развития содержания понятия, математического объекта. Ряд, в котором объект предстает нам в своем развитии, назовем эволюционным рядом.

Пример 1. Рассмотрим некоторые члены эволюционного ряда для теоремы Пифагора.

Формула Бине — Коши. Пусть $n < m$, где n и m — натуральные числа. Множество взаимно однозначных отображений λ множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, m\}$, сохраняющих естественный порядок, т. е. возрастающих отображений: $i < j \Rightarrow \lambda(i) < \lambda(j)$, обозначим через $\Lambda(m, n)$. Далее рассмотрим прямоугольную матрицу с n столбцами и m строками.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратную матрицу, выделяемую отображением λ:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a_{\lambda(1),1} & a_{\lambda(1),2} & \ldots & a_{\lambda(1),n-1} & a_{\lambda(1),n} \\ a_{\lambda(2),1} & a_{\lambda(2),2} & \ldots & a_{\lambda(2),n-1} & a_{\lambda(2),n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\lambda(n),1} & a_{\lambda(n),2} & \ldots & a_{\lambda(n),n-1} & a_{\lambda(n),n} \end{pmatrix},$$

обозначим через A_λ. Формула Бине — Коши записывается в виде

$$(\det A)^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (\det A_\lambda)^2. \tag{2.1}$$

Поверхностное сходство формулы (2.1) с теоремой Пифагора через сумму квадратов очевидно. Однако имеется существенная общность, которую мы постараемся раскрыть.

Для этого рассмотрим более общий, чем матрицы, математический объект — операторы. Пусть $L : E_n \to E_m$ — линейное отображение n-мерного пространства E_n в евклидово пространство E_m размерности m. Если $n < m$, то якобиан $\|L\|$ отображения определяется равенством:

$$\|L\| = \det (L^* L), \tag{2.2}$$

где L^* — оператор, сопряженный к L, определяемый отношением

$$x \cdot L^* y = Lx \cdot y, \, \forall x \in E_n, \, \forall y \in E_m.$$

Введем в рассмотрение специальные операторы P_λ (проекторы пространства E_m). Если $\lambda \in \Lambda(m,n)$, то пусть

$$P_\lambda : E_m \to E_n, \; P_\lambda(x_1, \dots, x_m) = (x_{\lambda(1)}, x_{\lambda(2)}, \dots, x_{\lambda(n)}).$$

В новых терминах формула Бине — Коши выглядит так:

$$\|L\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (\det (P_\lambda \cdot L))^2. \tag{2.3}$$

Эквивалентность (2.1) и (2.3) легко устанавливается, если в (2.3) заменить операторы, представляющими их в некотором базисе матрицами. Кроме матриц и операторов в новое пространство рассуждений включим n-мерные меры Лебега и Хаусдорфа: $L^n(A)$ и $H^n(A)$. Заметим, что мера обобщает понятие объема, площади, длины.

Воспользуемся следующим свойством меры Хаусдорфа [**?**, с. 72].

Пусть $L : R^n \to R^m$ — линейное отображение и $n \leq m$. Тогда $H^n(L(A)) = \|L\| L^n(A)$ для всех $A \subseteq R^n$.

Умножим (2.3) на $(L^n(A))^2$. В итоге получаем

$$[H^n(L(A))]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} [H^n(P_\lambda(L(A)))]^2. \tag{2.4}$$

Теперь, учитывая сделанное выше замечание, мы видим, что и по смыслу формула (2.1) обобщает теорему Пифагора.

«Новая» теорема Пифагора действует в гораздо большем контексте, вбирает в себя (организует) гораздо больше фактов. Но что самое примечательное, в таком абстрактном восхождении в нечто единое объединяются, казалось бы, совершенно разные ранее установленные теоремы.

Возьмем, к примеру, матрицу ($n = 2$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

По определению

$$\|A\|^2 = \det(A^*A) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j1}a_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j1}a_{j2} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j2}a_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j2}a_{j2} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{j1}^2 a_{j2}^2 - \sum_{j=1}^{n} (a_{j1}a_{j2})^2.$$

С другой стороны, по формуле Бине — Коши

$$\|A\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \left(a_{\lambda(1)\lambda(1)} \cdot a_{\lambda(2)\lambda(2)} - a_{\lambda(1)\lambda(2)} \cdot a_{\lambda(2)\lambda(1)}\right)^2 \geq 0.$$

Сравнивая два выражения, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j1}^2 \sum_{j=1}^{n} a_{j2}^2 - \sum_{j=1}^{n} (a_{j1}a_{j2})^2 \geq 0,$$

а это — неравенство Коши — Буняковского, играющее фундаментальную роль в анализе.

Вообще, движение по эволюционному ряду есть восхождение ко все более абстрактному и к всеединому. Только в своем движении по эволюционному ряду теорема Пифагора проявляется в его всеобщности и необходимости.

В эволюционном ряду теоремы Пифагора стоят декартова система координат, ортонормированный базис гильбертова пространства и некоторые другие центральные понятия современной математики.

Следующие примеры, формирующие представление об эволюционном ряде, мы уже подробно не описываем. Они просто иллюстрируют, что эволюционные ряды «пронизывают» всю математику.

Пример 2. Эволюционным «потомком» классической теоремы Гаусса — Остроградского является структурная теорема для функций с локально ограниченной вариацией [63].

Теорема 2.1. *Пусть U — открытое подмножество в E_n. Для $f \in BV_{loc}(U)$ существует мера Радона μ на U и μ-измеримая функция $\sigma : U \to E_n$, такие что*

(i) $|\sigma(x)| = 1$ *μ-п.в.*

(ii) $\int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx = -\int_U \varphi(\sigma) \cdot \sigma(x) d\mu$

для всех $\varphi \in C_c^1(U, E_n)$.

Пояснение обозначений в формулировке теоремы 2.1, а также ее доказательство можно найти в [?]. Это же замечание относится к теореме 2.2.

Пример 3. Непосредственно за комбинаторной леммой Шпернера в соответствующем эволюционном ряду стоит основная теорема об индексе для отображения комплексов. [49, с. 73]

Теорема 2.2. *Пусть C^k — ориентированная симплициальная k-цепь, S_r^k — ориентированный симплекс, f^k — отображение вершин симплексов цепи C^k в вершины симплекса S_r^k, a — выделенная вершина симплекса S_r^k, приведенная граница C^k относительно f^k и a есть $\delta(C^k, f^k, a)$; приведенное отображение f^k относительно a есть f^{k-1}. Тогда k-мерный индекс L отображения f^k над C^k равен $(k-1)$-мерному индексу K отображения f^{k-1} над $\delta(C^k, f^k, a)$, то есть $L = K$.*

Везде в примерах этого пункта аналогия есть следствие существования инварианта ряда, двигающегося по ряду с развитием. Такой инвариант именно в силу своего движения и развития перестает быть классическим математическим объектом. Для пояснения своей мысли приведем следующий «парадокс».

В понятие «человек» как содержание входит свойство «быть человеком и вчера» (человек из «вчера» он сам или его мать). Применим метод математической индукции. Если k дней назад человек был, то по содержанию понятия он был и $k+1$ дней назад. Получается, он был всегда. Так что Дарвин «ошибался», утверждая происхождение человека от обезьяны.

Этот пример по «философскому» содержанию имеет общее со знаменитой теоремой Геделя о неполноте любой формальной системы, включающий арифметику, в частности, принцип математической индукции.

Напряжение мышления, улавливающего содержание понятия в эволюционном ряду, замечательно согласуется со следующим высказыванием Гегеля [15, с. 306].

«Познание движется от содержания к содержанию. Это движение вперед определяет себя прежде всего таким образом, что оно начинает с простых определенностей и что следующие за ними определенности становятся все богаче и конкретнее. Ибо результат содержит свое начало, и движение этого начала обогатило его новой определенностью. Всеобщее составляет основу; потому движение вперед не следует принимать за процесс, протекающий от чего-то иного к чему-то иному. В абсолютном методе понятие сохраняется в своём инобытии, всеобщее — в своем обособлении, в суждении и реальности; на каждой ступени дальнейшего определения всеобщее возвышает всю массу своего предыдущего содержания, и не только не оставляет позади себя, но несет с собой все приобретенное и обогащается внутри себя».

Вариативный ряд (B-ряд) и эволюционный ряд (Э-ряд) интерпретируют в контексте метаматематики горизонтальные и вертикальные линии — два базисных понятия схемы иерархии Э.М. Хакимова [53]. Здесь они развертываются и наполняются математическим содержанием. Мы отличаем рациональную метаматематику от формализуемой средствами математической логики и основным понятием сделали ряды. Именно в развертывающихся рядах, нам кажется, можно объединить математическое содержание и содержание категорий диалектики логики.

Предельно экстраполируя, можно сказать, что вариативный ряд в актуальной своей завершенности дает одно - сущность понятия или теоремы. Эволюционный ряд отрицает эту завершенность, перенося сущность в развитие. Каждый объект находится на пересечении Э-ряда и B-ряда.

Вариативный ряд строится по частностям, но отрицает эти частные, вскрывая сущность понятия (теоремы, явления). Эволюционный ряд снимает отдельное бытие, в себе бытие понятия, теоремы, обращаясь и переходя все время к идеальному внебытию.

Цель наших дальнейших исследований - выявление категорий, определяющих движение по ряду, и формирование соответствующих математических структур.

Глава 12
Эволюция понятия «пространство» в математике

Первоначально понятие о пространстве возникло как представление о евклидовом трехмерном пространстве, с которым отождествлялся весь физический мир. Считалось, что он существует объективно, отражает истинные законы строения мира. С появлением неевклидовой геометрии Лобачевского (он отказался от аксиомы единственности параллельной прямой, проходящей через точку вне этой прямой, и, опираясь на остальные аксиомы, построил непротиворечивую теорию) такое представление полностью разрушилось, больше нельзя было говорить об объективной реальности исключительно евклидовой геометрии.

Таким образом, понятие пространства, от физического и объективного перешло в математике к абстрактному инструменту, основанного на понятии множества, и являющимся одним из важнейших в постановках и развитии теории.

Первая интерпретация пространстве вообще на этой основе может быть таковой: это не пустое вместилище любых возможных объектов, явлений, процессов, взаимоотношений, а само множество всех возможных объектов, явлений, процессов, взаимоотношений, образующие иерархическую структуру (наподобие теории типов).

Элементарным же в подобной интерпретации является элементарное пространство (совокупность родственных, по какому-либо признаку объектов). Любую математическую задачу можно определить в терминах элементарного пространства.

Элементарное пространство есть воплощение локального подхода в понимании пространства как категории. Каждая задача, проблема имеют свое сущностное пространство. Нет абсолютно пространства, в котором все объясняется. Подтверждение этому можно найти и в современной теоретической физике. Для объяснения некоторых явлений микромира вводятся общие топологические пространства «далекие» от евклидовых или римановых.

Итак, опираясь на теорию множеств, будем строить эволюционный ряд понятия (сущности) «пространство» (в математике).

§ 1. Метрическое пространство

Будем двигаться от конкретных понятий к абстрактным, опираясь на основные свойства понятий евклидового пространства. Использование характерных свойств расстояния позволяет сформулировать

Определение 1.1. *Метрическим пространством называется любое множество X, на котором определена вещественнозначная функция $\rho(x, y)\colon X \times X \to R$ со свойствами:*

1) $\forall x, y \ \rho(x, y) \geq 0, \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\forall x, y \in X \ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\forall x, y, z \in X \Rightarrow \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Примеры метрических пространств.

1) Пространство E_3 определяется как множество упорядоченных троек вещественных чисел, и если

   $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$$

   Свойства 1)–3) легко проверяются. Неравенство 3) есть обычное неравенство треугольника.

2) Пространство $C[a, b]$ есть пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с естественным определением операций сложения и умножения. Если $\varphi, \psi \in C[a, b]$, то

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

   Докажем, что $\rho(\varphi, \psi)$ метрика:

   $\rho(\varphi, \psi) \geq 0$

   $\rho(\varphi, \psi) = \rho(\psi, \varphi)$

   $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - \psi(x)| \Rightarrow$

   $\sup |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \sup |\varphi(x) - f(x)| + \sup |f(x) - \psi(x)|$

   Таким образом, $\rho(\varphi, \psi)$ удовлетворяет всем свойствам метрики.

3) Другим употребительным метрическим пространством является пространство интегрируемых с квадратом функций

$$L^2[a,b] = \left\{ \varphi : \int\limits_a^b \varphi(x)^2 dx < \infty \right\}.$$

Если $\varphi, \psi \in L^2[a,b]$, то расстояние расстояние между ними определяется равенством

$$\rho(\varphi,\psi) = \left(\int\limits_a^b (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Первый этап построения теории метрических пространств начинается с определений по аналогии с определениями в евклидовом пространстве.

Определение 1.2. *Открытый шар $B_r(x)$ радиуса r с центром в точке x есть множество*

$$B_r(x) = \langle y : y \in X, \rho(x,y) < r \rangle.$$

Определение 1.3. *Замкнутый шар $\overline{B}_r(x)$ радиуса r с центром в точке x есть множество*

$$\overline{B}_r(x) = \langle y : y \in X, \rho(x,y) \leq r \rangle.$$

Не все утверждения, справедливые в евклидовом пространстве, имеют место в произвольном метрическом пространстве, например, утверждение о единственности центра шара.

Пример. Определим метрику на $X = \{a,b,c\}$:
$\rho(a,b) = \rho(a,c) = \rho(b,c) = 2$,
$\rho(a,a) = 0$, $\rho(b,b) = 0$, $\rho(c,c) = 0$,
$\rho(a,b) = \rho(b,a)\ \forall a,b \in X$,
$\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)\ \forall a,b,c \in X$.

Следовательно, определили метрическое пространство X, ρ, в котором $B_3(a) = B_3(b) = B_3(c) = X$.

Определение 1.4. *Пусть даны $r > 0$ и точка a, тогда $V \subset X$ называется окрестностью точки a, если V содержит шар $B_r(a)$, т. е. $V \supseteq B_r(a)$, $r > 0$.*

Определение 1.5. *Множество $O \subseteq X$ называется открытым множеством, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и окрестность этой точки, т. е. если O является окрестностью каждой своей точки.*

Определение 1.6. *Множество $F \subseteq X$ называется замкнутым, если оно является дополнением к открытому множеству, т.е. $X - F$ открыто.*

Предложение 1.1. *Фундаментальные свойства открытых множеств.*

1) $X, \emptyset$ — открытые множества,

2) Если $O_1, O_2, \ldots, O_k$ какой-то произвольный конечный набор открытых множеств, то пересечение этого набора тоже открытое множество.

3) Сумма любого числа открытых множеств является открытым множеством:

   $\forall \alpha \in I, O_a$ — открыто $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} O_a$ — открыто.

Доказательство.

1) $\forall a \in X, B_r(a) \subset X, r > 0 \Rightarrow X$ — открытое множество по определению. Если $a \in \emptyset$, то $B_r(a) \subseteq \emptyset$ по смыслу импликации.

2) Пусть
$$a \in \bigcap_{i=1}^{k} O_i \Rightarrow a \in O_i \ \forall i.$$
   Существуют $r_i > 0$ такие, что $B_{r_i}(a) \subseteq O_i, r > 0$. Пусть $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, тогда $B_r(a) \subseteq O_i \ \forall i$.

3) $a \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha \Rightarrow \exists \alpha : a \in O_\alpha$ и $\exists r > 0$, что $B_r(a) \subseteq O_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha$. $\square$

Предложение 1.2. *Фундаментальные свойства замкнутых множеств.*

1) $X, \emptyset,$ — замкнутые множества,

2) Если $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — какой-то произвольный конечный набор замкнутых множеств, то сумма множеств этого набора тоже замкнутое множество.

3) Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством:

   $\forall \alpha \in I, F_a$ — замкнуто $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_a$ замкнуто.

Доказательство.

1) X открыто, значит, его дополнение $X - X = \emptyset$ замкнуто.

2) F_i замкнуто $\Rightarrow O_i = X - F_i$— открыто

   $\bigcap\limits_{i=1}^{k} O_i = \bigcap\limits_{i=1}^{k}(X - F_i) = X - \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ открыто по первому предложению, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ замкнуто, так как является дополнением к открытому.

3) Аналогично п.2 (нужно воспользоваться принципом двойственности). $\square$

Определение 1.7. *Пусть X — метрическое пространство, $M \subseteq X$, точка $a \in X$ называется предельной точкой для множества M, если каждая окрестность точки a содержит точку из M, не равную a.*

Теорема 1.1. *Множество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Пусть F задано, по определению $X - F = O$ — открытое множество, по определению открытого множества в нём нет предельных точек для F. Обратно. Пусть F содержит все свои предельные точки. Рассмотрим множество $X - F$, $a \in X - F$, a — не предельная точка. Тогда $\exists V_a$ — окрестность точки a, которая не содержит точек из F, следовательно, $V_a \subseteq X - F \Rightarrow X - F$ открыто. $\square$

Определение 1.8. *Пусть $M \subseteq X$, ρ. $\overline{M}$ — замыкание множества M есть множество M со всеми присоединенными к M предельными точками.*

Теорема 1.2. *Замыкание множества M есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M.*

Доказательство. Имеем, $\overline{M}$ — замкнутое множество. Пусть a — предельная точка для $\overline{M}$. Примем,что

$$V(a) = B_r(a), r > 0, b \in B_r(a) \cap (\overline{M} - a)$$

$\exists\rho > 0, B_\rho(b) \subseteq B_r(a), \rho < r - \rho(a,b), \exists m \in M, m \in B_\rho(b) \Rightarrow m \in B_r(a) \Rightarrow a$ — предельная точка для $M \Rightarrow a \in \overline{M}$.

Пусть некоторое замкнутое множество F содержит M, тогда F содержит все предельные точки для M, следовательно, $F \supseteq \overline{M}$. □

Определение 1.9. *Дано метрическое пространство X, ρ. Множество $M \subseteq X$ называется всюду плотным, если для $\overline{M}$ — замыкания M — выполняется $\overline{M} = X$.*

Пример. Пусть $X \equiv R_1$, M — множество рациональных чисел. $\overline{M} = R_1$, т. е. множество рациональных чисел всюду плотно.

Определение 1.10. *Система множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ покрывает (есть покрытие множества) $M \subseteq X$, если*

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \supseteq M.$$

Определение 1.11. *Метрическое пространство X, ρ называется сепарабельным, если в X существует счетное всюду плотное множество.*

Пример. Пространство R_1 сепарабельно, так как множество всех рациональных чисел, входящие в него, счетно и всюду плотно.

Определение 1.12. *Метрическое пространство X, ρ называется линделёфовым, если из любого покрытия X открытыми множествами можно выделить счетное покрытие, то есть, если*

$$\forall\alpha \in I, O_\alpha \text{ — открыто и } \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha \supseteq X, \text{ то } \exists\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \in I, \text{ и}$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\alpha_i} \supseteq X.$$

Теорема 1.3. *Сепарабельное метрическое пространство линделёфово.*

Доказательство. Пусть X, ρ сепарабельно и $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество. Пусть система $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ открытых множеств покрывает X, т. е.

$$\bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha \supseteq X.$$

Пусть a — произвольный элемент из X. Так как $\{O_\alpha\}$ покрывают X, то $\exists\alpha \in I, a \in O_\alpha \Rightarrow B_r(a) \subseteq O_\alpha$ (так как O_α открытое множество, то содержит и шар радиуса $r > 0$ с центром в точке a), число r можно считать рациональным числом. Так как $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ всюду плотное, то $\exists a_m \in B_{r/3}(a) \Rightarrow a \in B_{r/3}(a_m) \Rightarrow B_{r/3}(a_m) \subseteq B_r(a) \subseteq O_\alpha$.

Рассмотрим совокупность полученных шаров $\{B_{r/3}(a_m)\}$, когда a пробегает все X. Система этих шаров счетная, так как $r/3$ пробегает счетное множество (потому что r рациональное число), элементов a_m — тоже счетное количество, значит, система счетна. Но каждое из них входит в некоторое O_α. Из покрытия $\{O_\alpha\}$ оставляем только те множества, которые содержат шар из построенной совокупности, их счетное число и они покрывают X. $\square$

Определение 1.13. *В метрическом пространстве X, ρ множество M называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса, т. е.*

$$\sup_{a,b \in M} \rho(a,b) < \infty.$$

Определение 1.14. *Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N$ и $\forall m$: $(\rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon)$; N, n, m — натуральные числа.*

Определение 1.15. *Множество M метрического пространства X, ρ называется компактным, если каждая последовательность попарно различных элементов из X содержит подпоследовательность, которая сходится к какому-то элементу из M, то есть, если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in M$, то существует подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ и $a \in M$, такие что $\lim\limits_{i \to \infty} x_{n_i} = a$.*

Определение 1.16. *Множество M метрического пространства X, ρ называется вполне ограниченным, если каждая последовательность попарно различных элементов из M содержит фундаментальную подпоследовательность.*

Теорема 1.4. *Множество M вполне ограничено тогда и только тогда когда $\forall \varepsilon > 0$ множество M можно покрыть конечным числом шаров радиуса, не превосходящего ε.*

Доказательство.

1) Пусть M вполне ограничено по определению. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что M нельзя покрыть никаким конечным числом шаров радиуса ε. Строим последовательность: в качестве m_1 берём любой элемент из M. Рассмотрим шар $B_\varepsilon(m_1)$, он не покрывает $M \Rightarrow \exists\ m_2 \notin B_\varepsilon(m_1), m_2 \in M$. Возьмем $B_\varepsilon(m_1) \bigcup B_\varepsilon(m_2)$, они тоже не покрывают M, следовательно,

$\exists m_3 \notin B_\varepsilon(m_1) \bigcup B_\varepsilon(m_2), m_3 \in M$ и т. д. На k-м шаге построили $m_1, m_2, \ldots, m_k$, такие что они не содержатся в сумме шаров с центрами в предыдущих элементах с радиусом ε. Возьмем из множества $M - B_\varepsilon(m_1) \bigcup B_\varepsilon(m_2) \ldots \bigcup B_\varepsilon(m_k) \neq \emptyset$ элемент m_{k+1}, получаем бесконечную последовательность попарно различных элементов, таких что $\rho(m_i, m_j) \geq \varepsilon$. Значит, из этой последовательности никак нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность, и предложение о существовании ε неверно.

2) Обратно. Пусть M можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε для любого ε, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность элементов из M. Берём последовательность чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots \varepsilon_n > \cdots > 0$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Тогда M можно покрыть конечным числом шаров

$$B_{\varepsilon_1}(y_1), B_{\varepsilon_1}(y_2), \ldots, B_{\varepsilon_1}(y_p),$$

следовательно, в одном из этих шаров есть бесконечная подпоследовательность исходной последовательности:

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots\} \subseteq \{x_1, x_2 \ldots\}.$$

Рассуждаем аналогично с $\varepsilon_2 : B_{\varepsilon_2}(z_1), B_{\varepsilon_2}(z_2), \ldots$ покрывают M, а потому существует последовательность $\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots\} \subseteq \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots\} \subseteq \{x_1, x_2 \ldots\}$ и $\rho(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}) < \varepsilon_2\ \forall i, j$,
Продолжая, получаем следующую таблицу:

$$\begin{gathered}
x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots \longleftrightarrow \varepsilon_1, \\
x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots \longleftrightarrow \varepsilon_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots \longleftrightarrow \varepsilon_k, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

где каждая строка есть подмножество предыдущей. Выбираем диагональную последовательность

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(k)}, \ldots \rho(x_i^{(i)}, x_{i+m}^{(i+m)}) < \varepsilon_i\ \forall m > 0.$$

Последовательность фундаментальна по построению. Таким образом, из исходной последовательности выделили фундаментальную подпоследовательность. $\square$

Теорема 1.5. *Множество M, подмножество метрического пространства X, ρ, компактно тогда и только тогда, когда из любого открытого покрытия M можно выделить конечное открытое покрытие.*

Доказательство.

1) Пусть M компактно по определению, значит, из любой последовательности можем выделить сходящуюся подпоследовательность (а любая такая подпоследовательность фундаментальна), следовательно, M является вполне ограниченным.

   Возьмем последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$. Берём ε_1и покрываем M конечным числом шаров $B_{\varepsilon_1}(a_1^1) \cup B_{\varepsilon_1}(a_2^1) \cup .. \cup B_{\varepsilon_1}(a_{k_1}^1) \supseteq M$.

   Из каждого шара берем по одному элементу, принадлежащему M:

   $\{m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, .., m_{k_1}^{(1)}\}$.

   Аналогично для ε_2 получаем конечное подмножество:

   $\{m_1^{(2)}, m_2^{(2)}, .., m_{k_2}^{(2)}\} \subseteq M$.

   Повторяем этот процесс построения для всех

   $\varepsilon_l : \{m_1^{(l)}, m_2^{(l)}, .., m_{k_l}^{(l)}\} \subseteq M$.

   Объединяя эти последовательности, получаем счётную последовательность

$$\Phi \equiv \{m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \dots, m_{k_1}^{(1)}, m_1^{(2)}, m_2^{(2)}, \dots, m_{k_2}^{(2)}, \dots, m_{k_l}^{(l)}, \dots\},$$

   которая тоже счетная. Она всюду плотная в $M \Rightarrow \overline{\Phi} \supseteq M \Rightarrow$ (M рассматриваем как самостоятельное метрическое пространство). Пространство M является сепарабельным и по теореме 3 линделёфовым. Так как M линделёфово, то из заданного покрытия можно выделить счётное подпокрытие $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}, \dots$, $\alpha_i \in I$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_{\alpha_i} \supseteq M$. Начиная с $i = 1$ выкидываем O_{α_i}, если оно содержится в сумме предыдущих. Оставшиеся, по-прежнему, покрывают M. Предполагая, что эта процедура проделана, выбираем элементы $a_i \in O_{\alpha_i} - \bigcup\limits_{j<i} O_{\alpha_j}$, $a_i \in M$. Не теряя общности и пользуясь условием исходным компактности, будем считать, что сама последовательность $\{a_i\}$ сходится к a, $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a$. Для некоторого α_k $a \in O_{\alpha_k}$, но $a_j \notin O_{\alpha_k}$, если $\alpha_j > \alpha_k$. С другой стороны, по определению предела в O_{α_k} содержатся все члены последовательности, начиная с какого-то номера. Получили противоречие. Значит, последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ не является бесконечной, последовательность $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \ldots, O_{\alpha_n}, \ldots$ тоже конечная.

2) Далее, $M \subseteq X, \rho$ и для M выполняется условие: из всякого открытого покрытия M можно выделить конечное покрытие M. Покажем, что M замкнутое множество: Пусть $b \notin M$ — предельная точка множества $M, b \in \overline{M}$, $\{m_1, m_2, .., m_k, \ldots\} \in M$ и $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = b$ множество $\{m_1, m_2, .., m_k, \ldots, b\} \equiv F$ замкнутое, так как содержит в себе все свои предельные точки; тогда множество $X - F = O$ открытое. Выберем открытые множества B_k, такие что $\forall k\ m_k \in B_k$, $m_i \notin B_k\ \forall i \neq k$ Тогда $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, O$ покрывают M. (По предположению из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}, O$, покрывающее M. Поэтому последовательность $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ конечная, что противоречит построению, следовательно M содержит все свои предельные точки, M замкнуто. Пусть теперь дана бесконечная последовательность из $M : a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \subseteq M$. Предположим, что из этой последовательности нельзя выделить никакую сходящуюся подпоследовательность к элементу из M. Множество $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ замкнутое, потому что содержит все свои предельные точки (иначе бы существовала подпоследовательность сходящаяся к предельной точке)) Берем открытое множество $X - F = O$ и открытое множество $B_n\ a_n \in B_n, a_m \notin B_n\ \forall m \neq n$ $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, O$ покрывают M, а потому можно выделить конечное подпокрытие $B_{n_1} \bigcup B_{n_2} \bigcup \ldots \bigcup B_{n_k} \bigcup O \supseteq M$. Тогда элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ конечное число — опять противоречие, значит, последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ имеет сходящуюся подпоследовательность. $\square$

Краткий итог. При переходе от евклидово пространства E_n к метрическому пространству X мы оставили лишь метрику ρ. Построенная теория, опирающаяся только на метрику, получилась содержательной. Отметим, что во всех важнейших теоремах участвуют открытые множества. Выделим существенные свойства открытого множества и пойдем дальше: откажемся от метрики. Будем строить теорию, опираясь только на свойства открытого множества.

Хотя метрика пропадает из определения, она неявно, идеально, полагается в некоторых организуемых ею отношениях. Фундаментальные свойства метрики раскрываются как определенные отношения в классе открытых множеств.

§ 2. Общие топологические пространства

Усилим напряжение предыдущей мысли, цитируя Дж.Л. Келли [25].

«Путь, по которому эволюционировала общая топология, во многом характерен для математики. Сначала замечается сходство некоторых ситуаций, аналогии и повторения в рассуждениях. Затем предпринимаются попытки выделить понятия и методы, общие для различных примеров: при условии, что анализ достаточно глубок, есть надежда найти теорию, которая охватывает многие или даже все наши примеры и достойна самостоятельного изучения. Именно на этом пути после длительного экспериментирования было получено понятие топологического пространства. Оно — естественный продукт непрерывного процесса консолидации, абстрагирования и обобщения. Чтобы избежать формализма и обобщения, каждую возникающую таким образом абстракцию следует испытать с целью выяснения, действительно ли центральные идеи воплощены в ней. Это испытание обычно заключается в сравнении абстрактно построенного объекта с объектами, от которых он произошел.»

Многие теоремы теории метрических пространств могут быть доказаны только с использованием свойств открытых множеств, которые мы назвали фундаментальными. Этот факт подсказывает важность введения рассмотрение пространств, в определении которых эти свойства заложены.

1. Базовые определения.

Определение 2.1. *Общим топологическим пространством называется множество X, в котором выделено семейство подмножеств $\tau = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$, где I — не пустое множество индексов, со свойствами:*

1. $\emptyset$, $X \in \tau$, здесь $\emptyset$, как везде в этой лекции, обозначает пустое множество;

2. $\bigcap_{i=1}^{k} O_{\alpha_i} \in \tau$, где при любом натуральном числе k

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I;$$

3. $\bigcup_{\alpha\in M} O_{\alpha_i} \in \tau$, для любого множества $M \subseteq I$.

Определение 2.2. *Множества, которые входят в τ, называются открытыми множествами, говорят также, что в X определена топология τ.*

Следующие определения даются по аналогии с теорией метрических пространств.

Определение 2.3. *Замкнутым называется множество, которое является дополнением к открытому.*

Определение 2.4. *Окрестностью точки α называется любое множество, содержащее открытое подмножество, которому принадлежит α.*

Аналогично случаю метрических пространств, в терминах окрестности и открытого множества определяются предельная точка, сходящаяся последовательность, компактность, непрерывность. Дадим, например, определение непрерывности в терминах открытых множеств. Пусть даны два топологических пространства X и Y, с топологиями τ и σ соответственно. Отображение φ пространства X в пространство Y называется непрерывным, если для любого $O \in \sigma$ множество $\varphi^{-1}(O) \in \tau$.

Пример. Топологическое доказательство бесконечности множества простых чисел. Рассмотрим следующую топологию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Положим для $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$,

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждое множество $N_{a,b}$ есть бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия. Назовем множество $O \subseteq \mathbb{Z}$ *открытым*, если O пусто или для каждого $\alpha \in O$ существует такое $b > 0$, что $N_{a,b} \subseteq O$. (*Замкнутыми* называются множества $S \subseteq \mathbb{Z}$, дополнения к которым являются открытыми, и только такие множества.) Ясно, что объединение открытых множеств является открытым. Если O_1, O_2 — открытые множества и $a \in O_1 \cap O_2$, причем $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ и $N_{a,b_2} \subseteq O_2$, для которых $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, то $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. Поэтому конечное пересечение открытых множеств тоже открыто. Это семейство открытых множеств индуцирует топологию на $\mathbb{Z}$.

Теперь отметим два факта:

(A) Любое непустое открытое множество бесконечно.

(B) Любое $N_{a,b}$ является замкнутым.

В самом деле, (A) следует из определения. Далее заметим, что

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} - \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

значит, $N_{a,b}$ замкнуто как дополнение к открытому множеству. До сих пор о простых числах мы не упоминали; теперь, наконец, они появляются. Так так любое число $n \neq 1, -1$ имеет некоторый простой делитель p и, следовательно, содержится в $N_{0,p}$, мы приходим к выводу, что

$$\mathbb{Z} - \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}\,.$$

Если бы $\mathbb{P}$ было конечно, то $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ было бы замкнуто как конечное объединение замкнутых согласно (B) множеств. Поэтому $\{1, -1\}$ как дополнение к замкнутому множеству было бы открытым, что противоречит (A).

Следует заметить, что не все результаты теории метрических пространств имеют место для общих топологических пространств. Так, в метрических пространствах, если точка x является предельной точкой для множества M, то существует последовательность принадлежащих M точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которая сходится к x:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, x_n \in M.$$

В топологических пространствах возможна иная ситуация: точка x может являться предельной для множества M, но ни одна последовательность из M к ней не сходится. Такая ситуация часто имеет место для так называемых слабых топологий в банаховых пространствах. Чтобы определить предельную точку через сходимость последовательностей элементов, надо обобщить понятие последовательности.

Определение 2.5. *Система множеств $F = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $A_\alpha \subseteq X$ называется фильтром, если выполнены следующие условия:*

1) *Ни одно множество A_α не пустое, то есть $A_\alpha \neq \oslash$ для всех $\alpha \in I$;*

2) *Пересечение конечного числа множеств из F принадлежит мно жеству F: если $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_k} \in F$, то $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \ldots \cap A_{\alpha_k} \in F$;*

3) *Если $A_\alpha \in F$ и $B \supseteq A_\alpha$, то $B \in F$.*

Дадим пример фильтра. Пусть a — точка топологического пространства X, $a \in X$. Тогда $F = \{V(a)\}$ — множество всех окрестностей точки a представляет собой фильтр.

Пусть даны два фильтра: $\Phi = \{B_\beta\}_{\beta\in J}$, $F = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Будем говорить, что фильтр Φ мажорирует фильтр F и обозначать это так: $\Phi \succ F$, если каждое множество A_α из F принадлежит также Φ: $A_\alpha \in F \Rightarrow A_\alpha \in \Phi$.

Определение 2.6. *Фильтр F в топологическом пространстве X сходится к точке α, если F мажорирует фильтр окрестностей точки α.*

Покажем, что в метрическом пространстве сходимость последовательности элементов эквивалентна сходимости определенного фильтра, построенного по последовательности.

Фильтр F для последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ строится следующим образом. Сначала образуются множества S_N, состоящие из всех членов последовательности с номерами большими N. Эта совокупность образует базис фильтра, то есть пересечение любого конечного числа множеств S_{N_i}, $i = 1, 2, \ldots k$, не пусто. Искомый фильтр F, который называется фильтром сечений последовательности $\{x_n\}$, есть семейство множеств, каждое из которых содержит пересечение конечного числа множеств вида S_N, или равносильно, просто некоторое множество S_N.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x метрического пространства. Тогда, как следует из определения сходимости в метрическом пространстве, любой шар $B_\varepsilon(x)$ с центром в точке x радиуса ε содержит множество $S_N = \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}$ для некоторого N. То есть $B_\varepsilon(x)$ принадлежит фильтру сечений, и последний, поэтому, мажорирует фильтр окрестности точки x.

Обратно, если фильтр сечений последовательности $\{x_n\}$ мажорирует фильтр окрестностей точки x, то окрестность вида $B_\varepsilon(x)$ содержит сечение вида $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$, то есть все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Таким образом, $x_1, x_2, \ldots$ сходится и в смысле старого определения.

Перейдем, наконец, к определению сходимости через семейство элементов. Пусть множество индексов I частично упорядочено отношением порядка $\leq$ и фильтруется вправо по этому порядку, то есть $\forall i_1, i_2 \in I\ \exists i_3 \in I : i_1 \leq i_3$ и $i_2 \leq i_3$. Множества $I_k = \{i \in I : i \geq k\}$ образуют, очевидно, базис фильтра, когда k пробегает I.

Определение 2.7. *Направленность в X, τ — это семейство элементов $\{x_i\}_{i\in I}$, где I частично упорядочено и фильтруется по отношению к порядку. Направленность $\{x_i\}$ сходится по определению к $x \in X$, если для всякой окрестности $V(x)$ точки x существует $k \in I$, что $x_i \in V(x)$, если $i \geq k$. Так определенная сходимость, легко видеть, равносильна сходимости по фильтру подмножеств F, порожденному базисными множествами*

$$\Phi_k = \{x_i : i \geq k\}, \quad k \in I.$$

Для общих топологических пространств справедливо утверждение: a — предельная точка множества M тогда и только тогда, когда существует направленность из элементов M, отличных от a, сходящаяся к a. Для доказательства утверждения надо взять фильтр F окрестностей точки a в качестве множества индексов I. Отношение порядка $V^1(a) \geq V^2(a), V^1(a), V^2(a) \in F$ на множестве I равносильно включению $V^1(a) \subseteq V^2(a)$. Соответствующая направленность возникает, когда в каждом множестве $V(a) \cap M$ выбираем элемент $X_{V(a)}$.

2. Аксиомы отделимости.

В топологических пространствах важную роль играет возможность отделить два множества друг от друга содержащими их открытыми непересекающимися множествами.

Определение 2.8. *Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, и называется T_1-пространством, если для любых различных точек a и b из X существует окрестность V_a точки a, не содержащая $b : b \notin V_a$.*

Определение 2.9. *Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет второй аксиоме отделимости, и называется T_2-пространством, или хаусдорфовым, или отделимым, если для любых двух различных точек a и b из X существует окрестность V_a точки a и окрестность V_b точки b, которые не пересекаются: $V_a \cap V_b = \emptyset$.*

Определение 2.10. *Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет третьей аксиоме отделимости, и называется T_3-пространством, или регулярным, если для любой его точки a и любого замкнутого множества F, не содержащего a, существует окрестность точки V_a точки a и окрестность V_F множества F, которые не пересекаются: $V_a \bigcap V_F$.*

Определение 2.11. *Топологическое пространство X называется вполне регулярным тогда и только тогда, когда для каждой точки x и любой ее окрестности U существует непрерывная функция f на X со значениями в замкнутом интервале $[0, 1]$, равная нулю в точке x и единице на множестве $X - U$.*

Определение 2.12. *Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет четвертой аксиоме отделимости, и называется T_4-пространством, или нормальным, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F и Φ из X существуют их непересекающиеся окрестности V_F и V_Φ: $V_F \cap V_\Phi = \emptyset$.*

Все метрические пространства нормальны.

В дальнейшем обсуждаются только хаусдорфовы пространства, и это не будет специально оговариваться. В частности, говоря о нормальных пространствах, мы предполагаем, что все точки являются замкнутыми множествами. Это равносильно выполнению T_2-аксиомы.

Следующую теорему, важную для многих разделов математики, приводим еще и потому, что ее доказательство полностью копирует доказательство элементарной теоремы о компактности.

3. Теорема компактности Тихонова.

Компактные множества играют большую роль в теории евклидовых пространств. Встает вопрос: насколько богато компактными множествами общее топологическое пространство? Оказывается, есть конструкция (играющая важную роль сама по себе в функциональном анализе), которая по имеющимся компактным пространствам позволяет построить новые компактные пространства. Эта конструкция называется произведением топологических пространств по Тихонову. Без подробного объяснения отметим, что для банаховых пространств конструкция произведения моделирует определение слабой топологии.

Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство с топологией $\tau = \{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Определение 2.13. *Система множеств $\{F_\beta\}_{\beta \in I}$ называется центрированной, если каждое конечное подмножество семейства имеет непустое пересечение:*

$$F_{\beta_1} \cap F_{\beta_2} \cap ... \cap F_{\beta_k} \neq \emptyset,$$

для любых натуральных k и индексов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ из I.

Лемма 2.1. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система замкнутых подмножеств пространства X имеет не пустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X компактно, $\{F_\beta\}_{\beta \in I}$ центрировано, $\{F_\beta\}$-замкнутое для любого β множество. Предположим, что $\cap_{\beta \in I} F_\beta = \emptyset$. Рассмотрим открытые множества $O_\beta = X - F_\beta$. Система $\{O_\beta\}$ открытых множеств покрывает X. Из определения компактности следует, что из системы можно выделить множества $O_{\Upsilon_1}, O_{\Upsilon_2}, \ldots, O_{\Upsilon_k}$ такие, что $\cup_{i=1}^n O_{\Upsilon_i} = X$. Откуда следует, что $\cap_{i=1}^n F_{\Upsilon_i} = \emptyset$. Возникшее противоречие опровергает предположение. Аналогичными рассуждениями доказывается, что если любая центрированная система замкнутых множеств пространства X имеет не пустое пересечение, то X компактно. $\square$

Пусть дано множество топологических пространств X_i, $i \in I$. Образуем новое множество, обозначаемое $X = \prod_{i \in I} X_i$, называемое декартовым произведением множеств X_i, $i \in I$. Элементами произведения являются функции φ, определенные на множестве индексов I и отображающих каждый индекс i в элемент множества $X_i : \varphi(i) \in X_i$. Других элементов X не содержит.

Если I линейно упорядочено (а часто I берется вполне упорядоченным), то φ удобно представлять строкой, где индексы с выбранным порядком на I представляют места, и где на месте, помеченном индексом i стоит элемент $X_i : \varphi(i) \in X_i$. Если фиксирован порядок индексов $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$, то произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$ записывают также в виде:

$$X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_k} \times \cdots$$

К примеру, если $I = \{1, 2\}$, то $X_{i_1} \times X_{i_2}$ представляется как множество функций φ таких, что $\varphi(1) = x_1 \in X_1$, $\varphi(2) = x_2 \in X_2$; таким образом, как множество упорядоченных пар $\{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$.

Определим топологию на X, если на каждом X_i определена топология τ_i.

Пусть α — любое конечное подмножество: $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq I$, k — произвольно взятое натуральное число, индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ также берутся произвольно из I. Пусть для каждого α_i выбрано открытое множество $O_{\alpha_i} \in \tau_i$.

Подмножеству α поставим в соответствие множество O^α представленное как следующее произведение:

$$\alpha \leftrightarrow O^\alpha = \prod_{i \in I} Y_i, \text{ где } Y_i = \begin{cases} X_i, & i \notin \alpha, \\ O_{\alpha_j}, O_{\alpha_j} \in \tau_{\alpha_j}\ , & i = \alpha_j \in \alpha. \end{cases}$$

Топологию τ, называемую тихоновской топологией произведения X, задают всевозможные объединения множеств O_α.

Теорема 2.1 (Тихонов). *Если каждое пространство X_i компактно, то и их произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$ компактно.*

Доказательство. Пусть топология τ_i определяется системой открытых множеств $\{O_k^{(i)}\}_{k \in B_i}$, и относительно топологии τ_i пространство X_i компактно. Мы положили, что базисное открытое множество в X есть $O^\alpha = O^\alpha_{\alpha_1} \times O^\alpha_{\alpha_2} \times \cdots \times O^\alpha_{\alpha_k} \times \cdots$, где $O^\alpha_{\alpha_k} \in \tau_k$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_k \in I$. В произведении на месте, помеченном индексом j, не входящим в набор α, стоит множителем соответствующее пространство X_j.

Открытыми множествами по определению тихоновской топологии являются всевозможные объединения множеств O^α. По определению замкнутое базисное множество $F^\alpha = X - O^\alpha$ есть дополнение к базисному открытому множеству O^α. Множество F^α, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, имеет следующее строение: $F^\alpha = (F^\alpha_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \cdots) \cup (X_{\alpha_1} \times F^\alpha_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \cdots) \cup \cdots \cup (X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times F^\alpha_{\alpha_n} \times \cdots)$, где каждое $F^\alpha_{\alpha_k} = X - O^\alpha_{\alpha_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а не выписанные сомножители в слагаемых совпадают с соответствующими пространствами.

Для краткой записи слагаемые в представлении F^α обозначим следующим образом:

$$F^\alpha = \Phi^\alpha_{\alpha_1} \cup \Phi^\alpha_{\alpha_2} \cup \cdots \cup \Phi^\alpha_{\alpha_n},$$

где

$$\Phi^\alpha_{\alpha_1} = (F^\alpha_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \cdots), \cdots, \Phi^\alpha_{\alpha_n} = (X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times F^\alpha_{\alpha_n} \times \cdots).$$

Множества вида Φ^α_i назовем фундаментальными замкнутыми множествами.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если какая-то система базисных замкнутых множеств вида $\mathcal{F} = \{F^\alpha\}$, $\alpha \in J$ центрирована, то вся система имеет не пустое пересечение. Каждый символ α обозначает конечный мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$. Набор мультииндексов α из $\mathcal{F}$ есть J.

Возьмем конкретное множество F^α из $\mathcal{F}$ и вместо него оставим в системе $\hat{\mathcal{F}}$ фундаментальное замкнутое множество из его представления $\Phi^\alpha_{\alpha_1} = (F^\alpha_{\alpha_1} \times \cdots)$, где не выписанные сомножители совпадают с соответствующими пространствами. Если теперь условие центрированности для $\mathcal{F}$ нарушается, то это означает, что будет центрированной система $\mathcal{F}$, в которой у F^α оставлены все слагаемые кроме $\Phi^\alpha_{\alpha_1}$. В этом случае, удаляя $\Phi^\alpha_{\alpha_1}$, переходим к рассмотрению $\Phi^\alpha_{\alpha_2}$ и проводим для него такие же рассуждения, как и для $\Phi^\alpha_{\alpha_1}$. Если же условие центрированности выполняется, то заменим в $\mathcal{F}$ множество F^α на $\Phi^\alpha_{\alpha_1}$ и переходим к следующему множеству из $\mathcal{F}$. В любом случае в конце концов вместо F^α после выполнения вышеописанных операций остается одно слагаемое вида $\Phi^\alpha_{\alpha_k}$. Аналогичные рассуждения проводим с каждым множеством, входящим в $\mathcal{F}$ (вполне упорядочивая $\mathcal{F}$ и применяя условие индуктивности). В итоге получаем центрированную систему множеств вида: $\Phi^\alpha_{\alpha_i} = (F^\alpha_{\alpha_1} \times \cdots)$, где α пробегает исходное множество мультииндексов J, а α_i при фиксированном α есть индекс из I, входящий в α. Напомним, что $X_{\alpha_i} - F^\alpha_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$, и по построению система замкнутых множеств $\{F^\alpha_{\alpha_i}\}_{\alpha \in J}$, отвечающих фиксированному α_i, центрирована в X_{α_i}.

Пусть y_{α_i} принадлежит пересечению этих множеств. Функция, которая ставит в соответствие α_i элемент y_{α_i} входит в каждое F^α. $\square$

Глава 13
Принцип организации и привлечения идеального бытия

§ 1. Пример

Все числа распределяются на два класса — алгебраические и трансцендентные. Число называется алгебраическим , если оно является корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами (не умаляя общности, эти коэффициенты можно считать целыми); в противном случае число называют трансцендентным.

Теорема 1.1 (Эрмит). *Основание натуральных логарифмов e — число трансцендентное.*

Доказательство. Допустим, что e служит корнем уравнения

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_m e^m = 0, \tag{1.1}$$

где все коэффициенты $c_0, \ldots, c_m$ — целые числа.

Основная идея: найти материал математического анализа, который организует число e по своей сущности. Можно сказать и так: найти идеальное бытие денотата e — пример рассуждения, где целиком сущность e. Простой способ обнаружения «инобытия» e — просмотреть формулы из какого-либо справочника. Мы возьмем из известной книги И.М. Рыжика и И.С. Градштейна [46] формулу

$$\int f(x) e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{a^k}. \tag{1.2}$$

Здесь $f(x)$ — многочлен степени n, a — вещественное число, отличное от нуля.

Полагая в (1.2) $a = -1$ и заменяя неопределенный интеграл определенным, имеем

$$\int_0^b f(x) e^{-x}\, dx = e^{-x}[f(x) + f^{(1)}(x) + \cdots + f^{(n)}(x)]\Big|_0^b.$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $F(x)$, получаем

$$f(x) + f^{(1)}(x) + \cdots + f^{(n)}(x) = F(x), \tag{1.3}$$

$$e^b F(0) = F(b) + e^b \int_0^b f(x)e^{-x}\,dx.$$

Формула (1.3) целиком обусловлена сутью числа e, например, использованием при выводе характеризующего функцию e^x равенства: $y'(x) = y(x)$.

Обладая свободой выбора полинома f, в частности, его степени и выбора числа b, будем «развивать» содержание двух форм (1.3) до получения противоречия. Сначала воспользуемся наличием равенства (1.1). Полагая последовательно $b = 0, 1, 2, \ldots, m$; умножая получаемые равенства соответственно на $c_0, c_1, \ldots, c_m$, складывая получаем

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)e^{-x}\,dx. \quad (1.4)$$

Рассмотрим последнее слагаемое с сумме (1.4). Полагая $c = |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_m|$, $i \in [0, m]$, $M = \max\limits_{x\in[0,m]} |f(x)|$, имеем

$$\Big|\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)e^{-x}\,dx\Big| < ce^m(m+1)mM. \quad (1.5)$$

Если M допускает оценку вида $M \le \dfrac{[\varphi(m)]^q}{q!}$, где q стремится к бесконечности с ростом степени n полинома $f(x)$, а $\varphi(m)$ — некоторое положительное число, зависящее от m, то правая часть (1.5) (а вместе с ней и последнее слагаемое в (1.4)) стремятся к нулю с ростом n. Итак, чтобы «избавиться» от последнего слагаемого в (1.4), мы должны выбирать $f(x)$, допускающим указанную оценку. Кроме того желательно, чтобы $F(0), F(1), \ldots, F(m)$ были целыми числами, имеющими определенное свойство, которое и привело к противоречию.

Например, если $F(0), F(1), \ldots, F(m)$ — целые числа, кратные числу p, а $c_0F(0)$ нет; при этом p связано с n.

Эти предварительные рассуждения можно реализовать , например, выбирая $f(x)$ таким:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-m)^p, \quad (1.6)$$

p — простое число, больше m и $|c_0|$. Имеем необходимую оценку

$$M \le \frac{1}{(p-1)!}m^{p-1}m^p \ldots = \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}m^m.$$

Далее, производные полинома $f(x)$ порядка p и выше имеют целые коэффициенты, делящиеся на p, ибо

$$(x^l)^{(q)} = l(l-1)\cdots(l-q+1)x^{l-q}, \quad l \geq q,$$

а при $q \geq p$, произведение $l(l-1)\dots(l-q+1)$ делится на p. С другой стороны, при $x = 1, 2, \dots, m$ полиномы $f(x)$ и его первые $p-1$ производные обращаются в нуль, и это влечет, что $F(0), F(1), \dots, F(m)$ будут целыми числами, кратными p,

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots$$

Все слагаемые , начиная со второго делятся на p , но $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p m!$ и на p не делится. Итак, вся сумма

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_mF(m)$$

есть целое число, не делящиеся на p. Следовательно, при больших p равенство (1.4) невозможно. □

Резюме. «Сработали»:

1) идеальное бытие числа e;

2) устранение последнего слагаемого в (1.4) предельным процессом;

3) переход к целым числам и выявление свойства (делимость на p) у всех слагаемых $c_iF(i)$, кроме одного.

Собственно, об идеальном бытии объекта идет речь в приводимом ниже тексте из книги [24].

> «Характерный тип абстракции ведущий, к полному игнорированию физической природы геометрических объектов, встречается не только в традиционных границах математики. Примером служит предложенная Эрнстом Махом (на основе работ Джеймса Максвелла) трактовка понятия температуры. Для определения температуры необходимо ввести понятия *теплового равновесия* и *теплового контакта*; последние же крайне трудно, если вообще возможно , определить в логически приемлемых терминах. Однако, как показывает анализ, все что на самом деле нужно, — это свойство *транзитивности* теплового равновесия , т. е. постулат (называемый иногда *нулевым началом* термодинамики), утверждающий что если (A и B) и (A и C) находятся в тепловом равновесии, то и (B и C) находятся

в тепловом равновесии. Для полноты нужно ещё добавить в некотором смысле обращение этого нулевого начала: если A, B и C находятся в тепловом равновесии, то этим свойством обладают (A и B) и (A и C). Так же, как в геометрии, здесь необязательно знать логически точный смысл терминов; достаточно уметь объединять их в осмысленные (т. е. допустимые) предложения.»

§ 2. Пример второй

Ориентируясь на приведенное высказывание Улама и Каца, организуем идеальное бытие множества рациональных чисел. Упор сделаем на отношение порядка между ними. Напомним

Определение 2.1. *Множество M упорядочено бинарным отношением $R(x, y)$, если выполняются свойства:*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow R(x, x), \\ \forall x, y \in M \Rightarrow R(x, y) \& R(y, x) \Rightarrow x = y, \\ \forall x, y, z \in M \Rightarrow R(x, y) \& R(y, z) \Rightarrow R(x, z). \end{cases}$$

Определение 2.2. *Пусть множество M упорядочено отношением $R(x, y)$, а множество L — отношением $S(x, y)$. Если существует взаимно однозначное отображение φ множества M на множество L, сохраняющее порядок: $R(x, y) \Rightarrow S(\varphi(x), \varphi(y))$, будем говорить, что M и L порядково подобны (изоморфны) и имеют одинаковый порядковый тип.*

Разобьем линейно упорядоченные множества на непересекающиеся классы, собирая в один класс все множества, попарно подобные между собой. Каждому такому классу сопоставим свой символ, который назовём порядковым типом класса. Так , символ η будет оюозначать порядковый тип рациональных чисел с их естественным порядком; символ λ — тип множества вещественных чисел; ω — тип множества натуральных чисел.

Определение 2.3. *Линейно упорядоченное множество M, не имеющее наименьшего или, иными словами, первого элемента (такого $a \in M$, что $\forall x \in M \;\; a \leq x$) и не имеющее наибольшего, то есть последнего элемента (такого $b \in M$, что $\forall x \in M \;\; b \geq x$), называется неограниченным.*

Определение 2.4. *Линейно упорядоченное множество M плотное, если в нем не существует соседних элементов, то есть $\forall x, y \in M, x < y, \exists z \in M$ такое, что $x < z < y$.*

Порядковые типы η, λ представляют плотные и неограниченные множества. Порядковый тип интервала (0,1) есть λ, потому что функция $\varphi(x) = \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2})$ осуществляет взаимно однозначное монотонное отображение интервала $(0, 1)$ на всю прямую $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 2.1. *Пусть A — счетное линейно упорядоченное множество, B — неограниченное плотное множество. Тогда существует подмножество множества B, которое подобно $A : C \sim A$. Все счетные, неограниченные, плотные множества подобны и, следовательно, имеют тип η.*

Доказательство. Представим A в виде последовательности :

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}. \tag{2.1}$$

Зафиксировав любой элемент b_1 из B_1 сопоставим его $a_1 : b_1 \leftrightarrow a_1$. Пусть элементам $a_1, a_2, \dots, a_n$ поставлены в соответствие элементы множества $B : b_1, b_2, \dots, b_n,$, сохраняющие порядок элементов a_i : $a_i < a_j \sim b_i < b_j, i, j \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим элемент a_{n+1} из A. Вследствие неограниченности и плотности B найдется элемент b_{n+1} из B, который находится в том же отношении порядка к элементам $b_1, b_2, \dots, b_n$, что и $a_1, a_2, \dots, a_n,$. Ставим b_{n+1} в соответствие a_{n+1}. Осталось положить $C = \{b_i\}, i = 1, 2, \dots$

Пусть теперь, добавочно, A неограничено и плотно , а B счетно , то есть B представимо в виде последовательности :

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}. \tag{2.2}$$

Требуемое соответствие между A и B строим так. Начинаем с a_1 и ставим ему произвольно элемент из B, например b_1. Далее берем первый элемент из последовательности (2.2) , ещё не поставленный в соответствие элементам A. В данном случае это b_2. Из последовательности (2.1) выбираем первый элемент, который к a_1 относится по порядку так же, как b_2 к b_1. На третьем шаге построения берем сначала первый элемент из (2.1), ещё не поставленный в соответствие элементам из B, и выбираем по нему элемент из B, находящийся в таком же соответствии к уже выбранным, в каком находится взятый последний элемент из A ко всем предыдущим. Поступая так и дальше: при нечетным шаге $2i + 1$ выбирая первый элемент из (2.1), ещё не участвовавший в соответствии; а при четном $2i$, соответственно, из (2.2), получаем соответствие между элементами множества A и B, доказывающие их порядковое подобие. □

Итак, в целом множество рациональных чисел однозначно характеризуется как линейно упорядоченное плотное неограниченное счетное множество. Везде, где появляется подобное отношение между элементами какого-либо множества, можно считать, что «проступают» на арене действия рациональные числа в своей совокупности. Такое идеальное бытие совокупности рациональных чисел есть действенный инструмент в доказательствах (например, теоремы Урысона о существовании непрерывной функции в топологических пространствах, излагаемой ниже)

§ 3. Теорема Урысона о продолжении функций

Лемма 3.1. *Пусть даны нормальное топологическое пространство (X, τ), замкнутое множество $F \subseteq X$ и открытое множество U, содержащее F. Тогда существует открытое множество Γ, содержащее F, замыкание $\overline{\Gamma}$ которого содержится в U:*

$$F \subseteq \Gamma \subseteq \overline{\Gamma} \subseteq U.$$

Доказательство. Множество $\Phi = X - U$ замкнуто и не пересекается с F. По аксиоме существует открытые множества $\Gamma \supseteq F$ и $W \supseteq \Phi$ такие, что они не пересекаются, $\Gamma \cap W = \emptyset$. Ни одна точка W не является предельной для Γ, и потому

$$\overline{\Gamma} \cap W = \emptyset. \tag{3.1}$$

Из формулы (3.1) следует, что $\overline{\Gamma}$ содержится в дополнении к W, в множестве $X - W \subseteq X - \Phi = U$. $\square$

Лемму 3.1 можно интерпретировать следующим образом. Если дана пара (F, U), состоящая из замкнутого множества F, содержащегося в открытом множестве U, то она обладает «порождающей силой», приводит в двум аналогичным парам (F, Γ) и $(\overline{\Gamma}, U)$, последние в свою очередь порождают соответствующие пары и т. д.

Рассмотрим совокупность ε всех открытых множеств Γ, получаемых в описанном процессе, $(U \notin \varepsilon)$. Множество ε линейно упорядочено по включению. По построению оно не обладает ни первым, ни последним элементом,то есть неограничено, а также плотно. Согласно ранее доказанному ε изоморфно по порядку множеству рациональных чисел из интервала $(0, 1)$.

Этот изоморфизм позволяет обозначить множества, входящие в ε, через Γ_r, где r — рациональное число из $(0, 1)$. При этом

$$r_1 < r_2 \Rightarrow V_{r_1} \subseteq \overline{V}_{r_1} \subseteq \Gamma_{r_2}. \tag{3.2}$$

Если обозначим X как Γ_1, то условие (3.2) будет иметь место для любого $r \in (0, 1]$.

Определим функцию $f(x)$ на X следующим образом:

$$f(x) = \inf\{r : r \in (0,1], x \in \Gamma_r\}.$$

Рассмотрим следующую окрестность точки $f(x)$ для положительных малых чисел ε:

$$D = (f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon),$$

предполагая, что $0 < f(x) < 1$. Пусть $f(y) \in D$. Существует рациональные числа r_1, r_2, r_3 такие, что

$$f(x) - \varepsilon < r_1 < r_2 < f(y) < r_3 < f(x) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $y \notin \Gamma_{r_2} \supseteq \overline{\Gamma}_{r_1}$, а потому

$$y \in \Gamma_{r_3} - \overline{\Gamma}_{r_1}, \tag{3.3}$$

где последнее множество открыто. Обратно, легко видеть, что из условия (3.3) следует $f(y) \in D$.

Таким образом, $f^{-1}(D)$ как сумма открытых множеств является открытым множеством, а потому по определению функция f непрерывна в рассматриваемой точке x.

Непрерывность f в точке x, в которой $f(x) = 1$, устанавливается аналогичными рассуждениями, если вместо интервала D взять интервал $(f(x) - \varepsilon, 1]$.

В итоге, доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть F и Φ — два замкнутых множества в нормальном топологическом пространстве X, которые не пересекаются. Существует непрерывная функция $(f(x)$, отображающая X на интервал $[0,1]$, такая, что $(f(x) = 0$, если $x \in F$, и $(f(x) = 1$, если $x \in \Phi$.*

Глава 14
Эволюция понятия величины в математике

Введение. В настоящей главе рассматривается «естественное» развитие понятия «вектор» в понятие «тензор» через общее понятие векторного пространства.

Богатство содержания в развитии достигается через включение в рассмотрение двойственности между векторным пространством и его сопряженным (взаимные базисы) и рассмотрением «идеального бытия» тензора (то, как он организует обширный математический материал). Категорная характеристика тензора позволяет переходить от полилинейных операторов к линейным.

Через «криволинейные» системы координат понятие тензора можно обобщить на риманово пространство — общие топологические пространства, где каждая точка обладает «евклидовой» окрестностью. Ни категорный подход ни теория римановы пространств здесь не излагаются. Мы ограничимся рассмотрением тензора в криволинейных системах координат, введенных для евклидова пространства.

К рассмотрению величины как оператора (тензора) двойственным является рассмотрение величины как меры. Этот двойственный подход здесь также не рассматривается.

К содержанию этой главы наиболее близка книга [20].

§ 1. Тензорное представление физических величин

1. Обобщение понятия «вектор».

Физическая величина — это физическое явление, которое устойчиво повторяется и достаточно полно характеризуется числовыми характеристиками.

Пример. Сила — это определенный класс взаимодействий физических тел (силовое,тепловое взаимодействие).

Понять явление — значит включить его в более широкий класс явлений и выявить, какие связи оно организует в этом классе.

При геометрическом представлении силы a сила представляется с помощью вектора — направленного отрезка, $|a|$ — величина силы, длина этого отрезка. Недостатком приведенного математического описания силы является недостаточная определенность, присущая всякому интуитивному представлению. Для более точного определения в пространстве вводится система прямоугольных декартовых координат (СК), и вектор характеризуется своими координатами в этой системе.

Но сила – это взаимодействие между телами, и она по сущности никак не зависит от выбора системы координат. И чтобы представить инвариантность инвариантность силы относительно выбора СК рассмотрим сразу все СК. Всю эту актуальную бесконечность представляет закон, связывающие координаты a в двух системах: исходной $x = (x_1, x_2, x_3)$ и новой $x^H = (x_1^H, x_2^H, x_3^H)$.

$$a_i^H = \sum_{i=1}^{3} a_k \frac{\partial x_i^H}{\partial x_k}, \text{где } i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

индексом «н» отмечаются величины в новой системе координат.

Закон (1.1) есть инвариантная характеристика изменений (при переходе от одной СК к другой).

Определение 1.1. *Пусть в каждой мыслимой СК указана тройка чисел a_1, a_2, a_3 таким образом, что при переходе от СК X к СК X^H (новой) координаты меняются по формуле* (1.1), *тогда будем говорить, что это* **бесконечное множество троек определяет вектор.** *Важно, что можно задать только закон* (1.1) *и координаты в одной априори фиксированной системе (актуальная бесконечность всех систем переходит в потенциальную).*

С целью вникнуть в суть $\partial x_i^H / \partial x_k$ в определении 1.1 рассмотрим следующий рисунок. Пусть координата x_2 точки A изменилась на Δx_2 при сохранении остальных координат, A переходит в точку C. Изменение координаты x_1^H составит Δx_1^H.

$$\frac{\partial x_1^H}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to \infty} \frac{AB}{AC} = \cos a = \cos(x_1^H, x_2) = (e_2 \cdot e_2^H)$$

Исследуя этот вывод, получаем следующую формулу:

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i^H} = \frac{\partial x_i^H}{\partial x_k} \text{ — для декартовых систем координат.}$$

Анализируя определение 1.1, далее замечаем, что под координатами a_1, a_2, a_3 можно понимать элементы любого линейного пространства (ЛП).

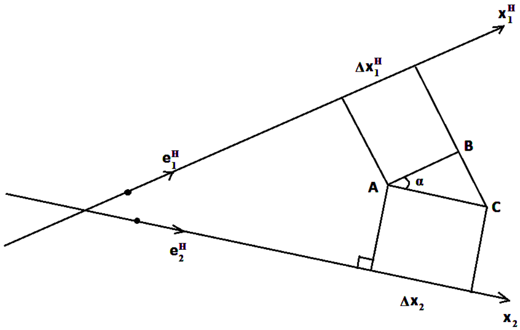

Рис. 1. К определению 1.1

Определение 1.2. *Если в каждой СК евклидова пространства E_3 указана упорядоченная тройка элементов a_1, a_2, a_3 фиксированного линейного пространства, которая при переходе от одной СК к другой меняется по закону* (1.1)*, то* **все эти тройки образуют обобщенный вектор.**

Данное определение естественным образом распространяется на пространство E_n.

Пример. Пусть $C^\infty = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций. Рассмотрим векторное пространство линейных операторов $L : C^\infty \longrightarrow C^\infty$.

В любой СК $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в E_n указываем следующие n линейных операторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \nabla.$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ есть оператор : $\varphi \longrightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Покажем, что оператор ∇ является обобщенным вектором. Пусть выбрана другая система координат.

$$x_n^H = (x_1^H, x_2^H, ..., x_n^H) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1^H}, \frac{\partial}{\partial x_2^H}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n^H}\right)$$

Физическая величина φ (скажем температура) задана в системе x, в системе x^H представляется так:

$$\varphi = \varphi(x_1(x_1^H, \ldots, x_n^H), \ldots, x_n(x_1^H, \ldots, x_n^H)).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_1^H}\varphi(x_1,\, \ldots, x_n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1^H} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1^H} + \cdots + \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1^H} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_1^H}\right)\varphi.$$

Таким образом, правило дифференцирования сложной функции приводит к формуле

$$\frac{\partial}{\partial x_i^H} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial x_i^H}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Следовательно, ∇ есть обобщенный вектор в линейном пространстве операторов.

2. Аффинный ортогональный тензор.

Рассмотрим случай, когда в каждой СК пространства E_3 в качестве a_1, a_2, a_3 будем брать сами векторы трехмерного пространства E_3, так что:

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}),\ a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}),\ a_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Определение 1.3. *Пусть для каждой СК указана упорядоченная тройка векторов таким образом, что при переходе от одной СК к другой она меняется по закону* (1.1), *тогда соответствующий обобщенный вектор называется аффинным ортогональным тензором второго ранга* (AOT).

Если дан аффинный ортогональный тензор $A = \{(a_1, a_2, a_3)\}$, то каждой системе координат X ставим в соответствии матрицу

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, где i-ю строку занимают координаты вектора a_i.

При переходе к новой системе координат X^H получаем матрицу $A^H = (a_{ij}^H)$, $i, j = 1, 2, 3$. Имеем

$$a_i^H = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i^H} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl} e_l \frac{\partial x_k}{\partial x_i^H}.$$

Здесь e_i, e_i^H — орты соответствующих осей системы координат X и X^H. Тогда

$e_j^H = (\cos(x_j^H, x_1), \cos(x_j^H, x_2), \cos(x_j^H, x_3)) = \left(\frac{\partial x_j^H}{\partial x_1}, \frac{\partial x_j^H}{\partial x_2} \frac{\partial x_j^H}{\partial x_3}\right)$,

$a_{ij}^H = a_i^H \cdot e_j^H, \quad e_l \cdot e_j^H = \frac{\partial x_l}{\partial x_j^H}$. Таким образом,

$$a_{ij}^H = \sum_{k,l=1}^{3} a_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x_i^H} \frac{\partial x_l}{\partial x_j^H} \tag{1.2}$$

Обратное тоже верно. Если в любой СК указана матрица, элементы которой при переходе от одной СК к другой меняются по правилу (1.2), то эта матрица определяет АОТ, обобщенными координатами которого являются строки этой матрицы.

Примеры тензоров.

1. Тензор напряжений Коши.

Пусть в пространстве имеется сплошная среда, занимающая определенную область Ω. Рассмотрим площадку ΔS, окружающую точку P и ориентированную выбором единичной нормали n. Со стороны частиц сплошной среды, которые расположены с той стороны площадки, куда направлен вектор n, действует сила F, плотность которой $p_n(x) = \lim\limits_{\Delta S \to \infty} \dfrac{\vec{F}}{\Delta S} \equiv p_n(P)$, при $x = P$. В каждой точке сплошной среды получаем три вектора: $(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$, где $p_{ei}(x)$, где e_i выбирается как нормаль, p_i — плотность силы, действующей на площадку S, перпендикулярную орту e_i и проходящую через точку x.

Покажем , что эта тройка векторов образует тензор. Выберем «кусок» сплошной среды в виде тетраэдера $DABC$, ребра DA, DC, DB которого параллельны осям x_1, x_2, x_3, а грань ABC имеет внешнюю нормаль $n = (n_1, n_2, n_3)$ (рис. 2).

Выпишем все действующие на $DABC$, силы и приравняем их сумму нулю — условие равновесия.

На грань ABC со стороны оставшихся вне пирамиды частиц среды действует сила $p_n \cdot S$, на грань ADC — $(-p_2 S_2)$;, на грань DCB — $(-p_1 S_1)$; на грань ADB — $(-p_3 S_3)$. Здесь через S, S_1, S_2, S_3 обозначены площади соответствующих граней.

Пусть массовая плотность внешних сил есть $f(x)$, тогда по определению $f(x)\rho(x)dx$ есть сила, действующая на массу $dm = \rho(x)dx$, заполняющую элементарный объем dx. На него же действует сила инерции $p(x)dx\dfrac{dv}{dt}$ (если среда находится в движении со скоростями $v(x,t)$ в точках x).

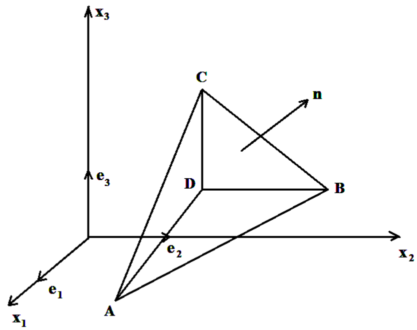

Рис. 2. К определению тензора Коши

Итак, условие равновесия принимает вид

$$p_n S - \sum_{i=1}^{3} p_i S_i + \rho(x) f(x) V - \rho(x) \frac{dv}{dt} V = 0, \tag{1.3}$$

где V — объем пирамиды $ABCD$, который предполагается малым и стягивается к точке D. Поделим (1.3) на S и перейдем к пределу, когда $A, B, C \to D$

$$p_n(P) - \sum_{i=1}^{3} p_i(P) \frac{S_i}{S} + f(P)\rho(P) \lim_{s\to 0} \frac{V}{S} - \rho(P) a(P) \lim_{s\to 0} \frac{V}{S} = 0.$$

Здесь $S_i/S = \cos\widehat{(e_i, n)} = n_i$, поскольку S_i — проекция S. Таким образом, получаем:

$$p_n(P) = \sum_{i=1}^{3} n_i p_i(P). \tag{1.4}$$

Перейдем от СК (e_1, e_2, e_3) к новой СК (e_1^H, e_2^H, e_3^H). В формуле (1.4) примем $n = e_k^H$. Тогда

$$p_k^H(P) = \sum_{i=1}^{3} p_i(P) \cos\widehat{(e_k^H, e_i)}, \text{ но } \cos\widehat{(e_k^H, \vec{e}_i)} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k^H} \equiv \frac{\partial x_k^H}{\partial x_i}.$$

Таким образом, $p_k^H(P) = \sum\limits_{i=1}^{3} p_i(P) \dfrac{\partial x_k^H}{\partial x_i}$. Мы видим, что тройка векторов (p_1, p_2, p_3) образует тензор (напряжений Коши).

В любой СК тензор напряжений Коши ставит в соответствии единичному вектору n по формуле (1.4) вектор p_n.

3. Интерпретация тензора как оператора.

Любой тензор определяет некоторый оператор в базисном векторном пространстве. Обратно, любой линейный оператор в векторном пространстве можно рассматривать как тензор.

1) Вначале рассмотрим пространство E_3, $A = (a_1, a_2, a_3)$, где

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix},$$

т. е. мы перешли к записи a_i как вектора столбца. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

а в новой координатной системе:

$$a^H_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \frac{\partial x_k}{\partial x^H_i} \frac{\partial x_i}{\partial x^H_j}.$$

Определим оператор в E_3 формулой: вектору $b = (b_1, b_2, b_3)$ поставим в соответствие вектор $c = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$. Проверим, что значение c оператора не зависит от выбора координатной системы, представляющей b.

Для другой системы координат:

$$b = (b^H_1, b^H_2, b^H_3), \quad A = (a^H_1, a^H_2, a^H_3),$$

$$\vec{b} \longrightarrow \sum_{i=1}^{3} b^H_i a^H_i = \sum_{i=1}^{3} b_j \frac{\partial x_j}{\partial x^H_i} a_k \frac{\partial x^H_j}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} b_j a_k \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{3} b_j \frac{\partial x_j}{\partial x^H_i} \frac{\partial x^H_i}{\partial x_k}}_{\frac{\partial x_j}{\partial x_k}} \right) = \sum_{k=1}^{3} b_k a_k = c,$$

т. е. получаем тот же самый вектор c в независимости от системы координат.

2) Обратно. Пусть дан линейный оператор $A : E_3 \to E_3$. Фиксируем в E_3 некоторый базис (e_1, e_2, e_3) и рассмотрим векторы (Ae_1, Ae_2, Ae_3). Убедимся, что тройка векторов $a_i = Ae_i$, $i = 1, 2, 3$ образует тензор. Перейдем к новой СК:

$$(e_1^H, e_2^H, e_3^H) \longrightarrow (Ae_1^H, Ae_2^H, Ae_3^H),$$

$$Ae_1^H = A\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1} Ae_i\right) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} Ae_i,$$

где

$$e_i^H = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} e_i, a_{i1} = e_1^H e_i = \cos(x_i, x_1^H),$$

$$Ae_1^H = \sum_{i=1}^{3} \cos(x_1^H, x_i) Ae_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_1^H} = a_1^H. \ \square$$

Сравним матрицу оператора A и матрицу тензора $A = (a_1, a_2, a_3)$. По определению $Ae_k = a_k$, так как в матрице оператора в k-м столбце записываются координаты вектора Ae_k, то матрица тензора совпадает с матрицей оператора.

Пример. Комплексные числа. Пусть C — множество комплексных чисел; E_2 — евклидово двумерное пространство. Рассмотрим в нем следующий оператор A: каждый вектор a поворачивается на угол φ по часовой стелке, а длина $|a|$ увеличивается в λ раз, где $\lambda > 0$. По доказанной теореме этому оператору соответствует некоторый тензор. Выясним, что это за тензор.

Зафиксируем СК. Пусть $a = (x_1, x_2)$, тогда

$A(a) = (\lambda(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \lambda(-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi))$.

Составим матрицу оператора A. Для этого применим последовательно оператор к $(1, 0)$, а затем к $(0, 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda\cos\varphi & \lambda\sin\varphi \\ -\lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda\cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda\sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нашему оператору соответствует следующее представление:

$$\lambda(\cos\varphi I + \sin\varphi J), \text{ где } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Любое комплексное число имеет вид $\lambda(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $i = \sqrt{-1}$. Сравнивая представления, оператора и комплексного числа, делаем заключение: линейное пространство операторов A изоморфно пространству комплексных чисел.

Вывод. Множество C комплексных чисел мы можем рассматривать как множество тензоров второго ранга.

§ 2. Общее определение тензора

1. Двойственное определение тензора для криволинейных координатных систем.

Пусть $\Omega \subset E_n$, E_n — евклидово пространство, координаты точек Ω являются функциями параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\begin{gathered} x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Предполагается, что декартова система координат x фиксирована, точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ принадлежат области D евклидова пространства E_m, $m \leq n$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ называются криволинейными координатами в Ω.

Примерами криволинейных координат в E_3 служат сферические координаты r, θ, φ :

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_2 = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_3 = r\cos\theta,$$

$$0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta < \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

цилиндрические координаты r, φ, z :

$$x_1 = r\cos\varphi,$$

$$x_2 = r\sin\varphi,$$

$$x_3 = z$$

$$0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty.$$

В этих примерах $m = n = 3$. Если $m = n - 1$, то получаем гиперповерхность в E_n. Так, поверхность в E_3 определяется уравнениями: $x_1 = x_1(\alpha^1, \alpha^2), x_2 = x_2(\alpha^1, \alpha^2), x_3 = x_3(\alpha^1, \alpha^2), \alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in D$.

Если $m = 1$, в E_n, получаем кривую $x_i = x_i(\alpha),\ i = 1, \ldots, n$, $\alpha \in [a, b]$.

В общем случае функция $x = x(\alpha)$ определяет многообразие размерности m в пространстве E_n.

1.1. Рассмотрим подробнее случай $m = n = 3$ и попробуем выявить инварианты, связанные с функцией $x = x(\alpha)$ при определенных преобразованиях. Мы уже не раз отмечали, что инварианты обеспечивают развитие теории.

Пусть $r = r(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — радиус вектор точки области, которая характеризуется тремя криволинейными координатами $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$. Возникают функции

$$x_i = x_i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \text{ и } \alpha^i = \alpha^i(x_1, x_2, x_3),\ i = 1, 2, 3.$$

Введем векторы

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial \alpha^2},\ r_2 = \frac{\partial r}{\partial \alpha^2},\ r_3 = \frac{\partial r}{\partial \alpha^3}.$$

По определению частной производной r_1, r_2, r_3 — касательные к кривым, на которых у точки меняется соответственно только α^1, α^2 или α^3. Зададим следующую тройку чисел a_H^1, a_H^2, a_H^3 для вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$, заданного декартовыми координатами a_1, a_2, a_3:

$$a_H^i = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_k}, i = 1, 2, 3.$$

По этой тройке чисел построим вектор:

$$\sum_{i=1}^{3} a_H^i r_i. \tag{2.2}$$

Определим тройку чисел:

$$a_i^H = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i}.$$

Этой тройке чисел поставим в соответствие вектор:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i r^i, \tag{2.3}$$

где r^i определяется равенствами $r^i \cdot r_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Тройка векторов $\{r^i\}$ называется базисом, взаимным с базисом $\{r_j\}$. При переходе к криволинейным координатам следующие величины в общем не равны:

$$\frac{\partial \alpha^1}{\partial x_k} \neq \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^1}.$$

Докажем, что векторы (2.2) и (2.3) совпадают с вектором a (инвариантны относительно перехода от $\{r_i\}$ к $\{r^j\}$). Проверим равенство:

$$\sum_i a_H^i r_i = a$$

$$\sum_i a_H^i r_i = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} r_i = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial \alpha^i} = \sum_{i,j,k} a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} e_k \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i} =$$
$$= \sum_{j,k} e_k \sum_i a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i} = \sum_{j,k} e_k a_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j}.$$

Здесь $\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_k j$, поэтому из всей суммы по j останется только одно слагаемое при k=j. Получим:

$$\sum_i a_H^i r_i = \sum a_k e_k = a.$$

Аналогично доказывается, что вектор a совпадает с (2.3):

$$\sum_{k=1}^{3} a_i^H r^i = a,$$

$$\sum_i a_i^H r^i = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha_i} r^i = \sum_{i,j,k} a_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha^i} e_k \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} =$$
$$= \sum_{j,k} e_k \sum_i a_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} = \sum_{j,k} e_k a_j \frac{\partial x^j}{\partial x^k}.$$

Здесь $\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta_{kj}$, поэтому из всей суммы по j останется только одно слагаемое при k=j. Получим:

$$\sum_i a_i^H r^i = \sum a_k e_k = a.$$

Таким образом, имеем:

$$a = \sum a_H^i r_i = \sum a_i^H r^i. \tag{2.4}$$

Определение 2.1. *Числа $\{a_H^i\}$ называются контравариантными компонентами вектора a, числа $\{a_i^H\}$ называются ковариантными компонентами вектора a.*

Вектор a, представленный в виде в виде (2.2), называется контравариантным вектором, а в виде (2.3), — ковариантным вектором.

Легко проверяется, что при переходе от системы координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ к другой криволинейной системе координат $(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, контравариантные компоненты меняются по закону:

$$a^i = \sum_{k=1}^{3} a^k \frac{\partial \beta^i}{\partial \alpha^k}, \tag{2.5}$$

а ковариантные компоненты меняются по закону:

$$a_i = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial \alpha^k}{\partial \beta^i}. \tag{2.6}$$

Пользуясь рассмотренным подробно случаем представлении вектора a в криволинейной системе координат E_3, введем следующие общие определения.

Определение 2.2. *Пусть для любой криволинейной СК $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^m)$, определенной на многообразии Ω, указаны функции $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$, $\ldots A_m(\alpha)$, на Ω. Пусть при переходе от одной криволинейной СК к другой эти функции меняются по правилу $A_k^H = \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha_k^H}$. Тогда будем говорить, что совокупность функций $A_1(\alpha) \ldots A_m(\alpha)$ образует* **ковариантный вектор.**

Определение 2.3. *Если в каждой криволинейной СК на многообразии Ω указаны m функций $A^1(\alpha) \ldots A^m(\alpha)$ т.о., что при переходе к новой СК α^H они меняются по закону $A_H^k = \sum_{i=1}^{m} A^i \frac{\partial \alpha_k^H}{\partial \alpha_i}$, то они образуют* **контравариантный вектор.**

В общем случае

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_k^H} \neq \frac{\partial \alpha_k^H}{\partial \alpha_i},$$

но для декартовой СК контравариантные и ковариантные координаты векторы совпадают.

Определение 2.4. *Пусть в криволинейной СК* $(\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$, *указаны* m^2 *функций* $A_{ij}(\alpha)$ *таким образом, что при переходе от одной СК к другой они меняются по закону* $A_{ij}^H(\alpha^H) = \sum\limits_{p,q=1}^{m} A_{pq}\frac{\partial\alpha^p}{\partial\alpha_i^H}\frac{\partial\alpha^q}{\partial\alpha_j^H}$. *Тогда будем говорить, эти функции определяют* **ковариантный тензор второго ранга**.

Определение 2.5. *Пусть в криволинейной СК определены* m^2 *функций* $A_{ij}(\alpha), i, j = 1, 2 \ldots, m$, *на многообразии* Ω *и при переходе от одной СК к другой они меняются по закону* $A_H^{ij} = \sum\limits_{p,q=1}^{m} A^{pq}\dfrac{\partial\alpha_H^i}{\partial\alpha^p}\dfrac{\partial\alpha_H^j}{\partial\alpha^q}$. *Тогда будем говорить, что эти функции определяют* **контравариантный тензор второго ранга**

Аналогично определяется тензор любого ранга. Например, тензор третьего ранга определяется m^3 функциями $\{A_{ijk}(\alpha)\}$ и соответствующим правилом преобразования.

2. Примеры.

Пусть $S \subseteq E_3$ — поверхность: $r = r(\alpha)$, $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in D$.

Точки, у которых меняется только α^2 или только α^1 образуют координатные линии α^2 и α^1 на S. Рассмотрим векторы, касательные к координатным линиям α^i. Пусть $\frac{\partial r}{\partial\alpha^1} \equiv r_1$; $\frac{\partial r}{\partial\alpha^2} \equiv r_2$. Поставим в соответствие каждой точке $\alpha \in D$ матрицу $(g_{ij}) = (r_i \cdot r_j)$, $i, j = \{1, 2\}$. Покажем, что $g \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ — ковариантный тензор. Действительно,

$$g_{ij}^H = \frac{\partial r}{\partial\alpha_H^i}\cdot\frac{\partial r}{\partial\alpha_H^j} = \sum_{p,q}\frac{\partial r}{\partial\alpha^p}\frac{\partial\alpha^p}{\partial\alpha_H^i}\frac{\partial r}{\partial\alpha^q}\frac{\partial\alpha^q}{\partial\alpha_H^j} = \sum_{p,q}\frac{\partial\alpha^p}{\partial\alpha_H^i}\frac{\partial\alpha^q}{\partial\alpha_H^j}g_{pq},$$

т. е. g является ковариантным тензором, который называется *метрическим тензором поверхности.*

В общем случае, пусть задано многообразие $\Omega \subseteq E_m$ криволинейной системой координат $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Положение каждой частицы E_m определяется радиус-вектором $r = r(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Вновь строим матрицу $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, где $g = r_{\alpha^i} \cdot r_{\alpha^j}$, матрица определяет тензор, который является ковариантным и называется *фундаментальным метрическим тензором многообразия* Ω.

Вернемся к рассмотрению евклидового пространства E_3 и поверхности S. В каждой точке S рассматривается нормаль n единичной длины: $|n| = 1$, $n \perp S$. Определяем функции $b_{ij}(\alpha)$ следующим образом: $b_{ij} = n_i \cdot r_j$, где $n_i = \dfrac{\partial n}{\partial \alpha^i}, r_j = \dfrac{\partial r}{\partial \alpha^j}$.

Матрица $b_{ij} \equiv h$ также является тензором, который называется *тензором второй квадратичной формы поверхности.*

Система функций $(c_{ij}(\alpha))$, где $c_{ij} = n_i \cdot n_j \equiv \gamma_{ij}$ определяет тезор — *тензор третьей квадратичной формы поверхности.*

Гаусс доказал, что тензоры g, h, γ определяют поверхность с точностью до положения в пространстве, и что между ними имеет место следуещее соотношение:

$$\gamma_{ij} - 2Hh_{ij} + K\mathrm{g}_{ij} = 0,$$

где H — средняя кривизна поверхности, равная $\frac{k1+k2}{2}$, K — полная кривизна поверхности, равная $k_1 k_2$, где k_1, k_2 — главные кривизны координатных линий α^1 и α^2 соответственно.

§ 3. Начала тензорного анализа

1. Операции поднятия и опускания индекса тензора. Операции, которые мы сейчас введем и изучим, важны для представления тензора инвариантными выражениями при переходе от рассматриваемого базиса к взаимному.

Рассмотрим контравариантный вектор $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$. Покажем, что функции

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} a^k \mathrm{g}_{ik} \equiv a^k \mathrm{g}_{ik} \tag{3.1}$$

образуют ковариантный вектор. Для последнего выражения принято соглашение, знак Σ опускать, подразумевая, что по повторяющемуся индексу, который встречается и вверху, и внизу, проводится суммирование.

Операция, определяемая формулой (3.1), называется *операцией опускания индекса* у вектора a.

Если дан тензор второго ранга $\{a^{ij}\}$, то операция опускания индекса определяется следующим образом:

$$a_{i\cdot}^{\cdot j} = a^{kj} \mathrm{g}_{ki},$$

где по j вектор ведет себя как контравариантный тензор; по i — как ковариантный тензор, т. е. при замене переменных эти компоненты тензора преобразуются по закону:

$$a_{i\cdot}^{\cdot j} = \sum_{p,q=1}^{n} a_{q\cdot}^{\cdot p} \frac{\partial \alpha^q}{\partial \alpha_H^i} \frac{\partial \alpha_H^j}{\partial \alpha^p}$$

и задают смешанный тензор второго ранга.

Можно опустить оба индекса и получить ковариантные компоненты:

$$a_{ij} = a^{kl} \mathrm{g}_{ki} \mathrm{g}_{lj}.$$

Рассмотрим более подробно (3.1).

$$\begin{cases} a^1 \mathrm{g}_{11} + a^2 \mathrm{g}_{12} + \ \ldots \ + a^n \mathrm{g}_{1n} = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^1 \mathrm{g}_{n1} + a^2 \mathrm{g}_{n2} + \ \ldots \ + a^n \mathrm{g}_{nn} = a_n \end{cases}$$

Пользуясь этой системой равенств, мы можем $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ выразить через $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$a^k = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & a_1 & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & a_n & \ldots & g_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{ik} \Rightarrow a^k = a_i g^{ik}$$

где Δ — определитель системы, а g^{ik} есть алгебраическое дополнение к g_{ik}, деленное на Δ.

Доказывается, что g^{ik} — тензор с контравариантными компонентами.

Если применим операцию опускания индексов у тензора $\{\mathrm{g}^{ik}\}$, то получим фундаментальный метрический тензор:

$$(g^{ik} \mathrm{g}_{i\alpha}) g_{k\beta} = \delta_\alpha^k g_{k\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

2. Тензоры как элементы пространства формальных выражений

Рассмотрим контравариантный тензор $a = (a^{ij}), i, j = 1, 2, 3$. Поставим ему в соответствие формальное выражение $\sum\limits_{i,j} a^{ij} r_i r_j$. Операции сложения и умножения на число над подобными формальными выражениями определим естественным образом. Покажем, что $\sum\limits_{i,j} a^{ij} r_i r_j$ инвариантно относительно преобразований СК, от СК $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ перейдем к новой СК $(\alpha^{1H}, \alpha^{2H}, \alpha^{3H})$. Поскольку (r_1, r_2, r_3) образуют обобщенный ковариантный вектор, то

$$\sum_{i,j} a^{ij} r_i r_j = \sum_{i,j} \sum_{p,q} a_H^{p,q} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha_H^p} \frac{\partial \alpha^j}{\partial \alpha_H^q} \left(\sum_m r_m^H \frac{\partial \alpha_H^m}{\partial \alpha^i} \right) \left(\sum_n r_n^H \frac{\partial \alpha_H^n}{\partial \alpha^j} \right) =$$

$$= \sum_m \sum_n r_m^H r_n^H \sum_{i,j,p,q} a_H^{p,q} \underbrace{\left(\frac{\partial \alpha_H^m}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha^p} \right)}_{\frac{\partial \alpha_H^m}{\partial \alpha^p} = \delta_{mp}} \left(\frac{\partial \alpha_H^n}{\partial \alpha^j} \frac{\partial \alpha^j}{\partial \alpha_H^q} \right) = \sum_{p,q} a_H^{p,q} r_p^H r_q^H.$$

В силу инвариантности формального выражения тензор a определяет оператор в том пространстве, в которое вложено многообразие Ω: если $b \in E_3$, то $b \to \sum\limits_{i,j} a^{ij} r_i (r_j b)$ — рассмотренная выше инвариантность означает, что данное определение корректно, т. е. не зависит от СК. Изложенные выше рассуждения можно провести относительно тензора $(a^{i_1 i_2 \cdots i_k})$ ранга k. Инвариантном будет формальное выражение $a^{i_1 i_2 \cdots i_k} r_{i1} r_{i2} \ldots r_{ik}$.

Рассмотрим многообразие размерности два, то есть поверхность в E_3, где уравнение поверхности S есть $r = r(\alpha^1, \alpha^2), (\alpha^1, \alpha^2) \in D$.

Пусть $r_i = \frac{\partial r}{\partial \alpha^i}, i = 1, 2, r_i \cdot r_j = g_{ij}$, если $a = a^1 r_1 + a^2 r_2$, то пара (a^1, a^2) образует контравариантный вектор и если $a = a_1 r^1 + a_2 r^2, r^i \cdot r^j = g^{ij}$, то пара (a_1, a_2) образует ковариантный вектор на поверхности S, при условии, что $\sum\limits_i a^i r_i$ и $\sum\limits_i a_i r^i$ есть инвариантные формальные выражения.

Пусть дан тензор $\mathrm{g}_{ij} = (r_i \cdot r_j)$, ему соотносится формальное выражение $\sum\limits_{i,j} \mathrm{g}_{ij} r^i r^j$. В общем случае, если некоторое множество Ω параметризовано параметрами $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ и находится в E_m, то определено n^2 функций $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n = \{r_i \cdot r_j\}$ так, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j} \mathrm{g}_{ij}(\alpha) d\alpha^i d\alpha^j$ положительно определена.

Эта форма определяет расстояние в E_m между точками многообразия $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ и $(\alpha^1 + d\alpha^1, \ldots, \alpha^n + d\alpha^n)$ по формуле:

$$\rho(\alpha, \alpha + d\alpha) = \sum_{i,j=1}^n \mathrm{g}_{ij} d\alpha^i d\alpha^j.$$

Определение 3.1. *Многообразие Ω с определенным таким образом расстоянием между двумя соседними бесконечно близкими точками называется римановым пространством с метрикой $g = \{g_{ij}\}$.*

3. Тензорная производная.

Рассмотрим на Ω фундаментальный метрический тензор $(g_{ij}) = (r_i \cdot r_j)$, а также систему чисел:

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{il}}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^l} \right\}. \tag{3.2}$$

где $i, j, l \in \{1, \ldots, m\}$. Эту систему чисел мы назовем *символами Кристоффеля I рода*, и определяются они вторыми производными от радиус-вектора r, характеризующего положение в E_n точки многообразия $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$.

Покажем, что $\Gamma_{l,ij} = r_l \cdot r_{ij}$, где $r_l = \dfrac{\partial r}{\partial \alpha^l}$, $r_{ij} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j}$:

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^j}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha^i}\frac{\partial r}{\partial\alpha^l}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha^i}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha^j}\frac{\partial r}{\partial\alpha^l}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha^l}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha^i}\frac{\partial r}{\partial\alpha^j}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^j\partial\alpha^i}\frac{\partial r}{\partial\alpha^l} + \frac{\partial r}{\partial\alpha^i}\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^l\partial\alpha^j} + r_{ij}r_l + r_j r_{li} - r_{il}r_j - r_i r_{jl}\right\} = r_{ij}r_l,$$

т. е. (3.2) выполняется.

Числа вида $\Gamma^l_{ij} = \mathrm{g}^{lk}\Gamma_{k,ij}$, будем называть *символами Кристоффеля II рода,* $\Gamma^l_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{g}^{lk}\Gamma_{k,ij}$, $\Gamma^l_{ij} = r^l \cdot r_{ij}$, где $r^l = \mathrm{g}^{lk} r_k$.

Важность символов Кристоффеля состоит в том, что через них можно выразить вторые производные r:

$$r_{ij} = \Gamma^l_{ij} r_l \tag{3.3}$$

Умножим (3.3) скалярно на r^p, тогда $r_{ij} \cdot r^p = \sum\limits_l \Gamma^l_{ij}(r_l \cdot r^p)$, т. е. равенство $\Gamma^p_{ij} = r^p \cdot r_{ij}$ верно.

Перейдем к другой СК: $\alpha \to \alpha^H$.

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial\alpha^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial\alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sum_{p,q}\left(g^H_{pq}\frac{\partial\alpha^p_H}{\partial\alpha^l}\frac{\partial\alpha^q_H}{\partial\alpha^j}\right) + \ldots\right),$$

$\mathrm{g}^H_{pq} = g^H_{pq}(\alpha^1_H, \ldots, \alpha^m_H)$,

$$\Gamma_{l,ij} = \sum_{p,q,r=1}^{m}\Gamma^H_{p,qr}\frac{\partial\alpha^p_H}{\partial\alpha^l}\frac{\partial\alpha^q_H}{\partial\alpha^i}\frac{\partial\alpha^r_H}{\partial\alpha^j} + \sum_{p,q=1}^{m}\frac{\partial\alpha^p_H}{\partial\alpha^l}\frac{\partial^2\alpha^q_H}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}\cdot g^H_{pq}.$$

Таким образом, система символов Кристоффеля не является тензором. Возникает вопрос: каким образом их нужно «подправить», чтобы получить тензоры?

Пусть $a = \sum\limits_{i=1}^{m} a^i r_i$. Тогда

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha^j} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^j}r_i + a^i\frac{\partial r_i}{\partial\alpha^j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^j}r_i + a^i r_{ij}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} r_i + a^i \Gamma_{ij}^l r_l \right) == \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial a^l}{\partial \alpha^j} + \sum_i a^i \Gamma_{ij}^l \right) r_l.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^j} \left(\sum_i a^i r_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial a^l}{\partial \alpha^j} + \sum_{i=1}^{m} a^i \Gamma_{ij}^l \right) r_l. \tag{3.4}$$

По определению

$$\frac{\partial a^l}{\partial \alpha^j} + a^i \Gamma_{ij}^l = \nabla_j a^l$$

есть ковариантная производная от a^l. Система m^2 функций $\{\nabla_j a^i\}$ образуют тензор. Это следует из равенства (3.4), которое можно переписать так:

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha^j} = \sum_{l=1}^{m} (\nabla_j a^l) r_l.$$

Другая важная особенность символов Кристоффеля состоит в том, что через них явно выражаются производные от тензора.

Пусть $A = (a^{lk})$ — контравариантный тензор, и $A = \sum\limits_{l,k=1}^{m} a^{lk} r_l r_k$ — инвариантное формальное выражение этого тензора.

Легко доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^j} A = \sum_{l,k=1}^{m} \nabla_j a^{lk} r_l r_k, \text{ где } \nabla_j a^{lk} = \frac{\partial a^{lk}}{\partial \alpha^j} + \sum_p \Gamma_{jp}^k a^{lp} + \sum_q \Gamma_{jq}^l a^{qk}.$$

Отметим, что ковариантная производная от ковариантных компонент вектора берется по формуле:

$$\nabla_j a^l = \frac{\partial a_l}{\partial \alpha^j} - a_i \Gamma_{jl}^i \quad (\text{по } i \text{ суммируется!}).$$

4. Тензоры в физической теории пространства.

В общей теории относительности физическое пространство считается четырехмерным римановым пространством. Фундаментальную роль в теории этого пространства играет тензор Римана — Кристоффеля

$$R_{i\nu\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{i\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{i\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^i \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^i \partial x^\mu} \right\} -$$

$$- g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\lambda i}\Gamma_{\rho,\mu\nu} + g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\lambda\nu}\Gamma_{\rho,\mu i}.$$

и производный от него тензор Риччи

$$R_{\nu\lambda} = g^{i\mu}R_{i\nu\lambda\mu}.$$

Напоминаем, что по повторяющимся индексам производится суммирование.

Основное уравнение общей теории относительности получено Д. Гильбертом:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\Pi G}{c^4}T_{ik}.$$

Здесь $R = R_{ik}g_{ik}$, T_{ik} — тензор энергии-импульса материи, компоненты которого выражаются через плотность, потоки импульса и другие величины, характеризующие материю и ее движение; c, Π, G — константы. c — скорость света, G — постоянная тяготения.

Глава 15

Доказательства с помощью компьютера

Введение

В современных математических исследованиях все шире практикуется использование компьютеров для проведения доказательств. В этой главе мы продемонстрируем возможности применения вычислительных машин на примере так называемых конфигурационных теорем, которые есть утверждения относительно систем прямых на плоскости.

> *«В 1953 году, я понял, что прямая линия ведет человечество к упадку. Тирания прямой стала абсолютной. Прямая линия — это нечто трусливое, прочерченное по линейке, без эмоций и размышлений; это линия, не существующая в природе. И на этом насквозь прогнившем фундаменте построена наша обреченная цивилизация.»*
>
> Ф. Хундертвассер

§ 1. Элементарное пространство прямых.

Рассмотрим систему из n прямых общего положения, т. е. никакие две прямые не параллельны и через точку пересечения двух прямых никакая другая прямая не проходит. Базовая конфигурационная теорема для них есть

Теорема 1.1 (Манелая). *Пусть дан треугольник ABC и точки C_1, B_1, A_1 на прямых AB, AC, BC, соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой и тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \tag{1.1}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть прямая l пересекает прямые AB, BC, AC соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Проведем произвольную прямую p, пересекающую прямую l в

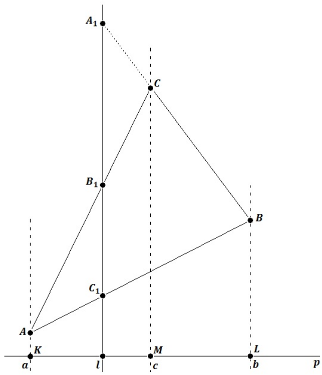

Рис. 1. К доказательству теоремы Манелая

точке N, а через точки A, B, C соответственно прямые a, b, c, параллельные прямой l и пересекающие p в точках K, L, M. По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{KN}{NL};\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{LN}{NM};\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{NM}{NK}.$$

Перемножая равенства и учитывая, что

$$\frac{KN}{NL}\cdot\frac{LN}{NM}\cdot\frac{NM}{NK}=1,$$

получаем искомое равенство.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если смотреть на (1.1), как на уравнение, определяющее, например, C_1 при известных остальных точках, то это уравнение имеет единственное решение. Из этого факта следует достаточность. □

Преобразуем формулу Менелая. Взяв $(\triangle OBB_1\&SA)$, получим:

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}\cdot\left(\frac{SB_1}{SB}\right) \tag{1.2}$$

Если бы прямые AA_1 и BB_1 были параллельными, имело бы место *соотношение Фалеса:*

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}. \tag{1.3}$$

Таким образом, формула Менелая имеет вид формулы Фалеса (1.3) с «поправочным» коэффициентом $\dfrac{SB_1}{SB}$. Здесь и впредь запись

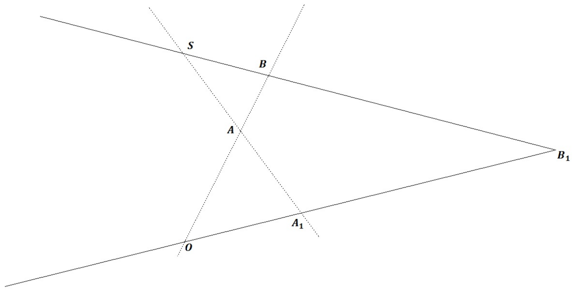

Рис. 2. Полный четырехугольник

($\triangle ABC_1 \& MN$) будет означать применение теоремы Менелая к треугольнику ABC, пересекаемому прямой MN.

Рассмотрим еще одно изменение формы теоремы Менелая:

$$\underline{OB_1 \cdot SA_1} \cdot AB = \underline{OB \cdot SA} \cdot A_1B_1 (\triangle OAA_1 \& SB_1) \tag{1.4}$$

Подчеркнутые произведения аналогичны произведению , определяющему площадь в треугольниках OSB_1 и OSB. Неподчеркнутые же множители «подправляют» эти «площади» до равенства.

Итак, мы получим «фалесную» форму (1.2) и «площадную» форму (1.4) исодной формулы Менелая (1.1) Эти интерпритации подсказывают, когда и как надо использовать теорему Менелая.
В формулах (1.1), (1.2), (1.4) участвуют три пропорции (отношения отрезков). Можно развить теорему до равенств с четырьмя пропорциями вида $(-)(-)(-)(-) = 1$.

Первое соотношение. Имеет место (рис. 2) следующее равенство:

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{OB_1}{O_1A} \cdot \frac{SB}{SB_1} = 1. \tag{1.5}$$

Доказательство.

$$(\triangle ABS \& OB_1) \Rightarrow \frac{AO}{OB} \cdot \frac{BB_1}{B_1S} \cdot \frac{SA_1}{A_1A} = 1. \tag{1.6}$$

$$(\triangle OAA_1 \& SB_1) \Rightarrow \frac{AB}{BO} \cdot \frac{OB_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1S}{SA} = 1. \tag{1.7}$$

Перемножив (1.6) и (1.7), получим

$$\left(\frac{AO}{OB} \cdot \frac{SA_1}{SA}\right) \left(\frac{OB_1}{B_1S}\right) \left(\frac{BB_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1S}{A_1A} \cdot \frac{AB}{BO}\right) = 1. \tag{1.8}$$

Преобразуем то, что заключено во вторые скобки:

$$\frac{OB_1}{B_1S} = \left(\frac{OB_1}{OA_1} \cdot \frac{SB}{SB_1} \cdot \frac{OA_1}{SB}\right). \tag{1.9}$$

Рассмотрим произведение

$$\frac{OB_1}{B_1S} \cdot \frac{OA_1}{SB} \cdot \frac{BB_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1S}{A_1A} \cdot \frac{AB}{BO} = m. \tag{1.10}$$

Для входящего в (1.10) отношения $\frac{BB_1}{B_1A_1}$ имеем

$$(\triangle A_1SB_1\&OB) \Rightarrow \frac{B_1B}{SB} \cdot \frac{SA}{AA_1} \cdot \frac{A_1O}{OB_1} = 1. \tag{1.11}$$

Подставим выражение для $\frac{BB_1}{B_1A_1}$, полученное из (1.11) в (1.10):

$$m = \frac{OA_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1}{A_1A} \cdot \frac{AB}{BO} \cdot \frac{AA_1}{SA} \cdot \frac{OB_1}{A_1O} = \frac{A_1S}{SA} \cdot \frac{AB}{BO} \cdot \frac{OB_1}{B_1A_1} = 1.$$

Из (1.8) , (1.9) и $m = 1$ получаем (1.5). $\square$

Второе соотношение. Имеет место (рис. 2) следующее равенство (*симметричная форма первого соотношения*):

$$\frac{OA}{AB} \cdot \frac{SA}{AA_1} \cdot \frac{A_1B_1}{OB_1} \cdot \frac{BB_1}{SB_1} = 1. \tag{1.12}$$

Доказательство. По «площадной форме» формулы Менелая имеем

$$SA \cdot OB \cdot A_1B_1 = SA_1 \cdot OB_1 \cdot AB \Rightarrow \frac{SA}{AB} = \frac{SA_1}{OB} \cdot \frac{OB_1}{A_1B_1},$$

$$OA \cdot SA_1 \cdot BB_1 = OB \cdot SB_1 \cdot AA_1 \Rightarrow \frac{OA}{AA_1} = \frac{OB}{BB_1} \cdot \frac{SB_1}{SA_1}.$$

Перемножив эти соотношения, получим

$$\frac{SA}{AB} \cdot \frac{OA}{AA_1} = \frac{OB_1}{A_1B_1} \cdot \frac{SB_1}{BB_1}.$$

Отсюда и следует (1.12). $\square$

Мы привели простые примеры конфигурационных теорем. Классические теоремы проективной геометрии (теоремы Дезарга, Паппа, Паскаля, ...) тоже принадлежат к классу конфигурационных теорем.

Далее на втором примере изложим идеи привлечения вычислений на компьютере для доказательства подобных теорем.

§ 2. Одно отображение четырехугольника

Рассмотрим четыре точки K, L, M, N, образующие выпуклый четырехугольник $KLMN$. Опишем функцию, которая ставит в соответствие этой четверке другую четверку точек A, B, C, D. Берем сторону четырехугольника, например KN. Из вершины K проводим прямую перпендикулярно к NM, а из вершины N — прямую, перпендикулярную к KL. Точку A пересечения этих перпендикуляров соотносим стороне KN. Аналогично, стороне NB соотносим точку B, стороне ML точку C, стороне LK точку D.

Построение искомых точек A, B, C, D поясняет (рис.3) (предполагаем, что у исходного четырехугольника $KNML$ нет переменных сторон).

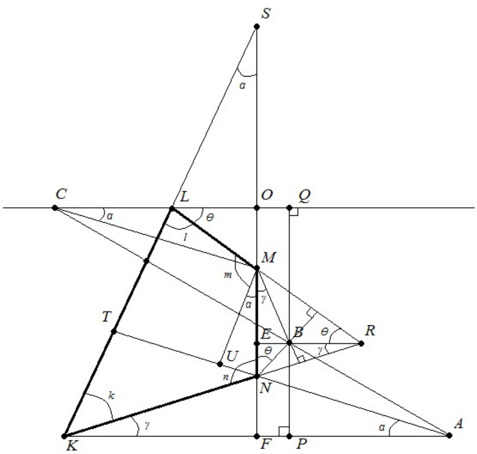

Рис. 3. Построение искомых точек

Теорема 2.1. *Точки A, B, C, D всегда лежат на одной прямой.*

Доказательство. Опишем стратегию доказательства этого факта. Достаточно доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой, а так же точки A, D, C. Рассмотрим, к примеру, точки A, B, C. Набор свободно выбираемых параметров, однозначно определяющих рассматриваемую конфигурацию, назовем базисом конфигурации. В нашей задаче всю конфигурацию (рис.3) определяют, например, параметры l, m, n, a, b. Здесь l, m, n, k — углы при вершинах L, M, N, K соответственно, a — длина отрезка LM, b — длина MN, c — длина KN.

Геометрический факт расположения точек A, B, C на одной прямой нужно свести к выполнению некоторого алгебраического равенства, которое относительно базисных параметров будет тождеством. Последний факт существенно облегчает проверку равенства.

Изучая (рис. 3), заключаем, что B лежит на прямой AC, если треугольники ABP и BCQ подобны, что равносильно выполнению равенства $\frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{PA}$. Поскольку $EQ = BQ$, $EF = BP$, достаточно доказать, что

$$\frac{CQ}{PA} = \frac{EO}{EF}. \tag{2.1}$$

Участвующие в равенстве (2.1) отрезки необходимо выразить через l, m, n, a, b. Имеем:

$$\frac{EB}{ME} = \operatorname{tg}\gamma, \frac{EB}{EN} = \operatorname{tg}\theta, b = EB(\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\theta), \gamma = n - \frac{\pi}{2}, \theta = m - \frac{\pi}{2},$$

$$EB = \frac{-b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}. \tag{2.2}$$

Вычислим, далее,

$$\begin{gathered}\alpha = \pi - k - n = l + m - \pi, OM = \sin\theta = -\cos m,\\ NF = c\sin\gamma = -c\cos n, UN = b\sin\alpha, TU = a\sin l.\end{gathered}$$

Отсюда:

$$C = \frac{b\sin\alpha + a\sin l}{\sin k}. \tag{2.3}$$

Используя (2.2) и (2.3), перепишем (2.1):

$$\frac{a\cos m\operatorname{ctg}(l+m) + \frac{b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}}{c\cos n\operatorname{ctg}(l+m) - \frac{b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}} = \frac{a\cos m + \frac{b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}\operatorname{tg} n}{a\cos n - \frac{b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}\operatorname{tg} m}.$$

Здесь C определяется равенством (2.3), а $\alpha = \pi - k - n$. Перейдем к производному отношению, сложив числители и знаменатели.

$$\frac{(a\cos m + c\cos n)\operatorname{ctg}(l+m)}{c\cos n\operatorname{ctg}(l+m) - \frac{b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}} = \frac{(a\cos m + c\cos n) - b}{c\cos n - \frac{b}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}\operatorname{tg} m}. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) имеет вид

$$\frac{\alpha_{11}a+\alpha_{12}b}{\alpha_{21}a+\alpha_{22}b}=\frac{\beta_{11}a+\beta_{12}b}{\beta_{21}a+\beta_{22}b}. \tag{2.5}$$

и должно выполняться для всех $a\geq 0, b\geq 0$. Это влечет, что следующих три величины A_1, A_2, A_3 (коэффициенты квадратичной формы, получаемой из (2.5) освобождением от знаменателя и переводом всех членов в одну сторону) должны для всех l, m, n обращаться в нуль:

$$A_1=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}=0, A_2=\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{12}\\ \alpha_{22} & \beta_{22}\end{vmatrix}=0,$$
$$A_3=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}=0. \tag{2.6}$$

Равенства (2.6) проверяются стандартными выкладками с использованием известных формул тригонометрии.
Вычисление A_1:

$$\begin{aligned}A_1=&\left(\cos m+\frac{\sin l}{sink}\cos n\right)\operatorname{ctg}(l+m)\frac{\sin l}{sink}\cos n-\\&-\frac{\sin l}{sink}\cos n\operatorname{ctg}(l+m)\left(\cos m+\frac{\sin l}{sink}\cos n\right)=\\&=\cos m\cos n\operatorname{ctg}(l+m)\frac{\sin l}{sink}\times\\&\times\left(\cos m+\frac{\sin l}{sink}\cos n-\cos m-\frac{\sin l}{sink}\cos n\right)=0.\end{aligned}$$

Вычисление A_2:

$$\begin{aligned}A_2=&\frac{\sin\alpha}{\sin k}\cos n\operatorname{ctg}(l+m)\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k}\cos n-\frac{\operatorname{tg}m}{\operatorname{tg}m+\operatorname{tg}n}\right)-\\&-\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k}\cos n\operatorname{ctg}(l+m)-\frac{1}{\operatorname{tg}m+\operatorname{tg}n}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k}\cos n-1\right)=\\&=\frac{1}{\operatorname{tg}m+\operatorname{tg}n}\left(\sin n\frac{\sin\alpha}{\sin k}\operatorname{ctg}(l+m)+\frac{\sin\alpha\cos n}{\sin k}-1\right),\end{aligned}$$

но $\sin\alpha=-\sin(l+m)$, поэтому

$$\begin{aligned}A_2=&\frac{-1}{\sin k(\operatorname{tg}m+\operatorname{tg}n)}[\sin n\cos(l+m)+\sin(l+m)\cos n+\sin k]=\\&=-\frac{1}{\sin k(\operatorname{tg}m+\operatorname{tg}n)}[\sin(l+m+n)+\sin k]=0.\end{aligned}$$

Вычисление A_3:

$$A_3 = \cos m \operatorname{ctg}(l+m)\left(\frac{\sin\alpha\cos n}{\sin k} - \frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}\right) =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}\frac{\sin l\cos n}{\sin k} + \frac{\sin l\cos n}{\sin k}\operatorname{ctg}(l+m)\frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n} -$$
$$- \cos m\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k}\operatorname{ctg}(l+m)\cos n - \frac{1}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}\right).$$

Принимая во внимание, что $\sin(\alpha) = -\sin(l+m)$, получаем, что равенство $A_3 = 0$ равносильно следующему

$$(\sin k\sin m - \sin l\sin n\operatorname{ctg}(l+m) = \cos m\sin k + \sin l\cos n),$$

или (расписывая $\operatorname{ctg}(l+m)$) — равенству

$$\frac{\cos l\cos m - \sin l\sin m}{\sin l\cos m + \cos m\sin k} = \frac{\cos m\sin k + \sin l\cos n}{\sin k\sin m - \sin l\sin n}.$$

Освобождаемся от знаменателей, получаем, что, действительно:

$$\sin l\sin k(\cos^2 m + \sin^2 m) + \sin^2 l\cos(m+n) + \sin l\cos l\sin(n+m) =$$
$$= \sin l(\sin k + \sin(l+n+m)) = 0.$$

Доказательство того, что точки A, D, C лежат на одной прямой во всем аналогично проведенному для точек A,B,C. $\square$

Заключение. Идея проведенного нами доказательства проглядывается сразу. Вычисления длинны, но стандартны. Идея «базис из свободных параметров $\Rightarrow$ алгебраическое тождество» срабатывает эффективно во многих случаях. Например, так может быть проведено доказательство теоремы Паскаля и других теорем проективной геометрии.

Всегда полезно обсудить проведенное доказательство, развивая примененные принципы в абстрактно-всеобщие соображения и высказывания, которые затем в будущем можно использовать как руководство к действию.

Проведенное нами доказательство дает повод нам задуматься над тем, что такое (математическое) доказательство. Мы легко наметили план действий, но «черновая вычислительная часть доказательства занимает много места». Правда, эту часть работы можно переложить на ЭВМ.

Примерно по этой схеме была решена знаменитая проблема четырех красок: четырех красок достаточно, чтобы раскрасить плоскую карту так, чтобы все смежные области были окрашены в разные цвета. Задача о раскраске карты сводится к задаче теории графов, или заменить каждую область графа вершиной графа, каждую границу области — ребром. В полученной задаче нужно раскрасить вершины графа так, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета.

Хим описал сведение общей задачи к проверке гипотезы для определения (приводимых) конфигураций карт. Аннель и Хакен реализовали эту идею, получили примерно 1500 приводимых конфигураций. Для анализа последних использовали компьютер.

Альтернативный путь доказательства сложной гипотезы состоит в обнаружении (дополнительными исследованиями и анализом специальной литературы) какого-то замечательного математического факта, берущего на себя роль центрального организатора распределений. На этом пути затрачивается больше творческих усилий. Для доказательства задачи, обсуждаемой выше, роль этого центрального организатора играет теорема о центральной точке или центральной окружности системы прямых общего положения.

Внимательный анализ проведенного нами доказательства выявляет следующее: равенство (2.4) достаточно проверить для N наборов параметров базисаa, b, l, m, n. При этом N можно достаточно легко оценить хотя бы с избытком, а сами наборы достаточно свободнорасполагаются в пространстве R^5, где R — множество вещественных чисел. Это, конечно, не четкое замечание, и для ассоциативного усвоения изложенной мысли приведем следующее утверждение. Чтобы доказать, что полином $P_n(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ тождественно равен нулю, достаточно доказать, что $P_n(z_i) = 0$ для $n+1$ точек $z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}$, Используя сказанное, мы можем провести доказательство теоремы целиком на ЭВМ. На плоскости выберем сетку точек (x_i, y_i), клетки которой есть квадрат со стороной $h = a/N$. Выбор h, a, N делаем по условию задачи.

Составляем программу для ЭВМ проверки истинности теоремы для случаев, когда четырехугольник $KLMN$ выбирается с вершинами в узлах сетки (см. рис. 4). Каждый такой выбор есть выбор параметров l, m, n, a, b. Если для всевозможных выборок теорема верна, то она верна и в общем случае.

Еще один повод задуматься после конфигурационных теорем, что такое хаос в сообществе родственных математических объектов? Произвол положения прямых в системе n прямых общего положения есть ли хаос? В только что рассмотренной задаче произволу выбора четырех точек соответствует инвариант — расположенность по прямой другой четверки, определяемой первой. А в общей системе прямых со-

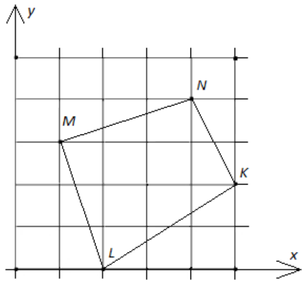

Рис. 4. Сетка для выбора вершин

ответствует либо центральная точка, либо центральная окружность.

Можно ли привести пример сообщества родственных (однотипных) объектов, которое никакой закономерности взаимодействия не даст? Много примеров для обнаружения порядка при произволе выбора дают принцип Дирихле и теория Рамсея. Другой порядок в хаосе обнаруживает теория фракталов. Хаос изучает также теория динамических систем.

«Высшее назначение математики —
находить порядок в хаосе, который нас окружает»
Н. Винер.

«Если можно найти порядок в хаосе, то есть ли сам хаос?»
Дигаш.

Глава 16

Мышление в двойственности

1. Базовые двойственности. Основной двойственностью для объекта является «предметное бытие — идеальное бытие». С ней связана двойственность «A — не-A», здесь не-A не утверждение отсутствия A, а все, что отличается от A, будучи связанным с A; так сказать, «внешнее бытие» A. Не-A определяет контекст пребывания A.

Вообще двойственность объектов A и B — это создание единства сопоставлением A и B. Объект B не отрицает или заменяет A, но выявляет сущностные свойства A во взаимодействии с ним. Наоборот: так же «поступает» A по отношению к B.

В нашем сознании также наблюдается фундаментальная двойственность: утверждающее Я и возражающее Я. Употребляя слова Хайдеггера, в нас имеет место «вопрошающее присутствие» оппонента. Оппонент организует внутреннюю дискуссию (собственно, мышление), не отрицая, но приводя факты извне, вне установленных логических следствий.

2. Двойственность как единство. Единство двойственности в том, что объект есть процесс движения от одного полюса двойственности к другому. Для математика важно, обнаружив для проблемы значимость определенной двойственности, раскрыть «творческую силу», взаимодействия этих полюсов.

Именно противополагание является «энергией», «силой», движения рассуждений. Особая роль здесь двойственности « явление — сущность». За «явленным нам» формой стоит сущностное содержание.

Вот характерная элементарная задача, где осознание присутствия этой двойственности, помогает найти решение. Имеется тысяча бочек с вином. В одной из бочек вино отравлено, при этом действие яда проявляется через 20 часов. Требуется за сутки определить эту бочку, имея в распоряжении всего 9 подопытных мышей.

Приступая к решению, мы ясно осознаем конечное возможное число наших действий. После некоторого раздумья мы приходим к выводу, что универсально действие описывается так: каждому мышу даем попробовать вино из определенных бочек. В это действие «вписано» любое другое возможное действие, поэтому возникает «напряжение мысли», что решение явлено нам в форме этого действия («закодированное» решение перед нами) При осмыслении проблемы: из каких бочек дать вино конкретной мыши, — естественно приходим к последовательности номеров бочек, из которых проба берется. «Обернем» отношение: мышь $\longrightarrow$ последовательность номеров «пробуемых» бочек. Пусть каждая iая бочка, $i = 1, 2, \ldots, 1000$, однозначно закодирована последовательностью $d_i = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_9^i)$, где c_k^i есть символ $+$, или символ $-$. Таких последовательностей $2^9 > 1000$, так что упомянутая кодировка возможна. Из i-й бочки даем попробовать j-й мыши, если c_j^i есть $+$. В результате этого эксперимента получаем последовательность d, где символ $-$ стоит на k-м месте, если k-я мышь осталась жива после 20 часов; стоит $+$, иначе. Та бочка отравлена, код которой совпадает с d.

Приведем также вариативный ряд высказываний, создающий полноту восприятия мысли, что препятствие в решении является нам иной формой, предвестником решения.

«Превосходно, что мы столкнулись с парадоксом. Значит, есть надежда на прогресс.» Нильс Бор.

«И кажется преграда на пути лишь камнем, чтобы на нем точить и править силы.» Эмиль Верхерн.

«Научился ли ты радоваться препятствию?» Надпись на камне в Тибете.

«Пессимист видит в возможности препятствие, оптимист видит возможность в препятствии.»

«Перед ошибкою я закрываю дверь.

В смятении истина: «Как я войду теперь?» Р. Тагор.

«Необходимо понять препятствие и сделать его объектом исследования» Р. Дигаш.

3. Двойственности и рациональные принципы. Перечислим некоторые двойственности, для которых напряжение понимания взаимодействия внутри них, «схваченное» абстрактно-общим высказыванием как принцип, помогают нам в продвижении к математическому доказательству: «предметное бытие — идеальное бытие»; «действие — рефлексия»; «форма — содержание»; «явление — сущность»; «движение — остановка» («движение есть — движения нет»); «конечное — бесконечное»; «хаос – порядок»; «локальное — глобальное»; «элементарное — системное»; «форма — превращенная форма»; «силлогистическое мышление — ассоциативное». Есть ряд других.

Каждой двойственности соответствует вариативный ряд абстрактно-общих высказываний, помогающих понять эту двойственность. некоторые из этих высказываний имеют всеобщий характер, характер «аксиом».

I. «Из ничего ничего не рождается». Эта «аксиома» имеет основанием двойственности: «предметное бытие объекта — идеальное бытие объекта»; «действие — рефлексия на действие».

II. «Абсолютно нет абсолютной отделенности». Если объект B отличается от объекта A, то своим отличием B уже характеризует A.

В предельной форме «аксиома» II дает основные операторы α и β ассоциативного мышления. Оператор α создает смысловое единство объектов A и B, полагая, что A и B во всем совпадают, кроме одного качества. Оператор β создает единство, имеющее самостоятельность по смыслу, полагая, что A и B различны во всем, кроме одного свойства.

Иллюстрацией к сказанному является двойственность понятия натурального числа. Число три, например, выступая как мера, есть $\alpha(A, B)$, где A, B — две ели, B в 3 раза выше A (рис. 1).

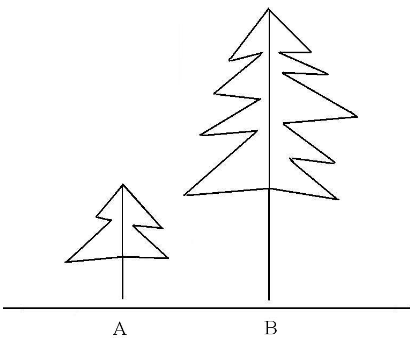

Рис. 1. Число три как мера высоты

С другой стороны три выступает как кардинальное число, есть $\beta(A, B)$, где A — скажем, стадо из трех баранов, а B — три дерева.

Можно развить теорию — логику ассоциативного мышления, опираясь на операторы α и β.

III. «Любой процесс, порождающий однотипные объекты, есть объект, представляющий более «высокую» сущность». Необходимо явно предъявить эту сущность. Начинаем понимание сущности, осознав «направление» процесса, выявив «сингулярный член», перестроив процесс как «предельный переход» и т. д.

4. «Философская» система координат. Примем, что в описании

конкретной двойственности участвует конечное число слов заданного алфавита. Оставляем в стороне важный вопрос: «Возможно ли однозначно передать конечным текстом понимание данной дуальности?»

В силу принятого соглашения всевозможные двойственности образуют счетное множество, и мы их перечисляем: $\sigma_1, \sigma_1, \ldots$. Каждое σ_i есть двойственность «$A_i - -B_i$». Объекту a припишем число двоичное $\alpha \in [0;1]$, $\alpha = 0, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$. Здесь n_k есть 1, если A_k существенно определяет содержание объекта a, и $n_k = 0$, если a находится в области «действия» B_k. Рассматривается ситуация (контекст), исключающая совместность A и B. Опять же «опускаем» случай «пограничного» состояния a.

Таким образом, последовательность двойственностей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ образует счетную координатную систему, определяющую любой объект (на момент рассмотрения) вполне определенным вещественным числом α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Хорошо бы продуктивно для математики и физики развить эти рассуждения (имея аналогию с геделевскими номерами в получении метатеорем). Сейчас же ограничимся одним математическим утверждением (лемма 1 ниже), которое совместно со своим доказательством моделирует в каком-то плане описанную ситуацию с «философской» системой координат. Дуальности «заменяют» пары чисел 1 и 2, с различным расположением в различных квадратах прямоугольной сетки на плоскости. Объект a представляет траекторию определенного движения на этой плоскости.

Возможно, есть аналогия того, что нам нужно для развития сформулированной выше мысли с проведенными ниже рассуждениями. По крайней мере, даже такая простая математическая модель ситуации с «философской» системой координат приводит к математически значимым результатам.

5. Точная формулировка задачи. Рассмотрим разбиение некоторого квадрата на прямоугольники, указанным на рисунке способом. Пусть все прямоугольники разбиты на 2 класса. Прямоугольники первого класса помечаем цифрой 1, второго цифрой 2. Противоположные стороны квадрата помечаем одинаковой цифрой: либо 1, либо 2.

Лемма 1. *Всегда найдется лента из прямоугольников одного класса, соединяющая противоположные стороны квадрата того же класса. Лентой назовем последовательность прямоугольников таких, что два соседних прямоугольника имеют общий отрезок.*

Доказательство. Начнем движение с точки A. Движемся по

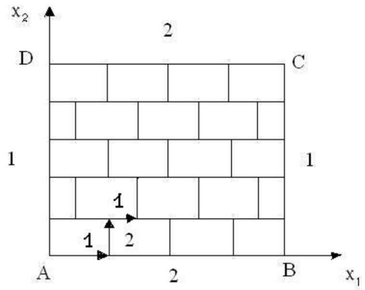

Рис. 2. Разбиение квадрата

ребрам прямоугольников таким образом, чтобы слева была область, помеченная 1, а справа 2.

Заметим, что движение не может закончиться во внутренней точке, так как мы имеем всего два случая нумерации прямоугольников, с вершиной, к которой мы подошли.

В обоих случаях движение может продолжаться и выражает сущностное свойство элементарного графа.

На сторонах квадрата движение тоже не может закончиться, за исключением ситуации, когда мы находимся в точках B и D. Если движение заканчивается в точке D, то существует лента из прямоугольников 2 класса, соединяющая стороны AB и DC. Если же в точке B, то существует лента из 1 класса, соединяющая стороны AD и BC. $\square$

Замечание 1. «Вес» леммы, ее значимость оценивается через следствия. Из леммы, например, следует теорема Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 1 (Брауэр). *Пусть φ — непрерывное отображение замкнутого квадрата $ABCD$ в себя. Тогда существует такая точка x_0 квадрата, что $\varphi(x_0) = x_0$. Иными словами, существует неподвижная точка отображения φ.*

Доказательство. Разобьем квадрат на прямоугольники с диагональю, имеющей длину меньшую или равную некоторому заданному числу h. Не теряя общности, предположим, что вершины прямоугольников при отображении сдвигаются не параллельно осям. Каждой вершине будем сопоставлять пару знаков из $(+)$ и $(-)$. Если $P_1 = \varphi(P)$, то полагаем

$P \longleftrightarrow (+,-)$, если координата x у P_1 больше, чем координата x у P, а координата y соответственно меньше.

$P \longleftrightarrow (+,+)$, если обе координаты P_1 больше, чем соответствующие координаты точки P. Аналогично определяются соответствия

$P \longleftrightarrow (-,+)$ и $P \longleftrightarrow (-,-)$.

Заметим, что:

На стороне DC вершины помечены парой $(?,-)$, на стороне AD вершины помечены парой $(?,-)$, на стороне AB вершины помечены парой $(?,+)$, на стороне BC вершины помечены парой $(-,?)$.

Знак «?» означает, что на этом месте может стоять как $(-)$, так и $(+)$.

Как мы уже заметили, движение не осуществляется строго влево или вправо (иначе изменяем отображение на заданную малую величину ε). Вследствие этого, значения могут быть только $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$, $(-,-)$.

Разобьем прямоугольники на два класса следующим образом: к первому классу относим прямоугольники, у которых все четыре вершины имеют один и тот же знак ($+$ либо $-$) на первой позиции, иначе относим прямоугольник ко второму классу.

Напомним, что стороны прямоугольника помечены единицей, если они перпендикулярны оси x; помечены двойкой, если перпендикулярны оси y. Легко увидеть, что не существует ленты первого класса, соединяющей стороны AD и BC. Поэтому существует лента второго класса, которая соединяет стороны 2 и 2 (AB и CD). У этой ленты найдется такой прямоугольник, у которого в наборах знаков для вершин среди первых знаков имеются и $(+)$, и $(-)$, также и у вторых знаков встречаются и $(+)$, и $(-)$.

Рассмотрим такой прямоугольник из ленты. Пусть точки A_1, B_1, C_1, D_1 берутся из множества его вершин.

Если A_1 соответствует $(+,?)$, то $[\varphi(A_1) - A_1]_x > 0$. Устремляя в нашей поправке ε отображения φ, число ε к 0, получаем

$$[\varphi(A_1) - A_1]_x \geq 0, \qquad (1)$$

где φ — исходное, «неисправленное» отображение.

Возьмем точку, где выполняется условие:

$B_1 \longleftrightarrow (-,?)$. Для него аналогично получаем

$$[\varphi(B_1) - B_1]_x \leq 0. \qquad (2)$$

Также найдутся точки C_1 и D_1, где

$$C_1 \longleftrightarrow (?,+) \qquad [\varphi(C_1) - C_1]_y \geq 0, \qquad (3)$$

$$D_1 \longleftrightarrow (?, -) \qquad [\varphi(D_1) - D_1]_y \leq 0. \tag{4}$$

Для каждого $h = h_k$ находим свой прямоугольник, и пусть $h_k \to 0,\ k \to \infty$.

Квадрат — компактное множество, поэтому можем считать, что соответствующие точки $A_k,\ B_k,\ C_k,\ D_k$ стремятся к P.

В неравенствах (1)–(4) переходим к пределу, устремляя $k \to \infty$. Получим:

$$[\varphi(P)-P]_{x_1} \geq 0,\ [\varphi(P)-P]_{x_1} \leq 0,\ [\varphi(P)-P]_{x_2} \geq 0,\ [\varphi(P)-P]_{x_1} \leq 0,$$

следовательно, $\varphi(P) = P$. $\square$

В работе [60] эти рассуждения обобщаются на любое n-мерное евклидово пространство.

Литература

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970.

2. Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. М.: Мир, 2006.

3. Акофф Р. Искусство решения проблем. М.: Мир, 1982.

4. Альберти М. Творчество в математике. Мир математики. Т. 20. М.: De AYOSTINI, 2014.

5. Арнольд В.И. О представлении функции нескольких переменных. Матем. просвещение, вып.3, 1958.

6. Биркгофф Г. Математика и психология. М.: Советское радио, 1977.

7. Блехман И. И., А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1983.

8. Боно Э. Серьезное творческое мышление. СПб.: ПитерПаблишинг, 2003.

9. Босс В. Интуиция и математика. М.: Айрис-пресс, 2003.

10. Бугаенко В.О. Обобщенная теорема Ван дер Вардена. М.: МЦНМО, 2006.

11. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.

12. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.

13. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.

14. Верещагин Н.К., Шень А. Начала теории множеств М.: МЦНМО, 2008.

15. Гегель Г.В. Наука логики. Т. 3. М.: Мысль, 1972.

16. Грэхем Р. Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

17. Гуревич В., Волмен Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
18. Губа В.С., Львовский С.М. Парадокс Банаха — Тарского. М.: МЦНМО, 2012.
19. Дзикини А. Творчество в науке. М.: УРСС, 2001.
20. Дмитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001.
21. Дорофеев Г.В., Пчелинцев С.В. Многочлены с одной переменной. М.: Просвещение. 2001.
22. Ильенков Э.В. Проблема противоречия в логике//Диалектическое противоречие. М.: Изд-во полит. лит. 1979, с. 122–143.
23. Кановей В.Г. Аксиома выбора и аксиома детерменированности. М.: Наука, 1984.
24. Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. М.: Мир, 1971.
25. Келли Д. Общая топология. М.: Наука, 1981.
26. Клайн М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.
27. Клайн М. Математика. Поиск истины. М.: Мир, 1988.
28. Клини С. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
29. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.
30. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре М.: Наука, 1973.
31. Латыпов Н. Турбулентное мышление. М.: АСТ, 2013.
32. Латыпов Н. Бигуди для извилин. М.: АСТ, 2014.
33. Латыпов Н. Основы интеллектуального тренинга. СПб.: Питер, 2005.
34. Ленг С. Математические беседы для студентов. Ижевск.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
35. Литлвуд Дж. Математическая смесь. М.: Наука, 1990.
36. Мамардашвили М.М. Философские чтения. СПб.: Азбука-классика, 2002г.

37. Мигдал А. Б. От догадки до истины. М.: Просвещение, 2008.

38. Новиков П.С., Адян С.И. О бесконечных периодических группах//Известия АН СССР. Серия матем., т.32, №1–№3, 1968.

39. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. М.: УРСС, 2003.

40. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: ИЛ, 1957.

41. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука. 1970.

42. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1959.

43. Прасолов В.В.. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 2006.

44. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.

45. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

46. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1980.

47. Словарь философских терминов. М.: ИНФРА-М, 2004.

48. Справочная книга по математической логике, ч. II. М.: Наука, 1982.

49. Томпкинс Ч. Лемма Шпернера и некоторые ее обобщения. В сб. Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968.

50. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой теории для студентов-математиков. Л.: ЛГУ, 1980.

51. Философская энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1960.

52. Философский словарь М.: Республика, 2003.

53. Хакимов Э.М.. Диалектика иерархии и неиерархии в философском и научном знании. Казань.: ФЭН, 2007.

54. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

55. Хао Ван, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств. М.: ИЛ, 1963.

56. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.

57. Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел. М.: ОГИЗ, 1947.

58. Шагидуллин Р.Р. Аксиоматизируемость одной проекции универсально аксиматизируемого класса алгебраических систем//Исследования по прикладной математике. Казань.: КГУ, 1973, с. 23–27.

59. Шагидуллин Р.Р. Рациональные принципы математики и теории иерархии//Динамика и развитие иерархических (многоуровневых) систем. Казань, 2007, с. 89–98.

60. Шагидуллин Р.Р. Комбинаторная лемма для разбиения Лебега — Брауэра куба в евклидовом пространстве//Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2008. Т. 150, кн. 2, с. 124–129.

61. Шагидуллин Р.Р. Топологические методы в механике сплошной среды. Казань.: КГУ, 2009.

62. Шереметьев К. Интеллектика. Как работает ваш мозг. СПб.: Весь, 2014.

63. Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функции. Новосибирск: Научная книга, 2002.

64. Эткинз П. Десять великих идей науки. Как устроен наш мир. М.: АСТ. 2008.

65. Appel K., Haken W.// Ill. J. Math., v 21, №4, 1977, pp 429–490.

66. Appel K., Haken W., Koch J.// Ill. J. Math, v 21, №4, 1977, pp 491-567.

67. Graham R. Rothschild Ramsey Theory. John Wiley, 1980.

68. http://lukepalmer.wordpress.com/2011/07/20/on-why-goodstein-sequences-should-terminate/

69. Morley M. Categoricity in power// Trans.Amer. Math.Soc., v 114, pp 514–538, 1965.

Научное издание

Шагидуллин Ростем Рифгатович

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕТАМАТЕМАТИКИ

На обложке: фото **А. Шнегаса**

Дизайн обложки
Р.М. Абдрахмановой

Подписано в печать 06.07.2017.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Book Antiqua». Усл. печ. л. 14,18.
Уч.-изд. л. 13,31. Тираж 100 экз. Заказ 183/6.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28

ISBN 978-5-00019-839-1