



УДК 517.983+517.986

К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть \mathcal{M} – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ – точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} , $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ – банахово пространство τ -интегрируемых операторов. Получены следующие результаты.

Если $X = X^*$, $Y = Y^*$ – τ -измеримые операторы и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}$. В частности, если $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то $YX \in \mathfrak{S}_1$ и $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX) \in \mathbb{R}$. Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$.

Пусть A – τ -измеримый оператор. Если оператор A τ -компактен и $V \in \mathcal{M}$ является сжатием, то из $V^*AV = A$ следует, что $VA = AV$. Имеем $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*||A|$. Это представление является новым и для ограниченных идемпотентов в \mathcal{H} . Если $A = A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A) = \tau(\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|}) \in \mathbb{R}^+$. Если $A = A^2$ и A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален; тем самым, A является проектором. Если $A = A^3$ и A гипонормален или когипонормален, то A нормален; тем самым, $A = A^*$ $\in \mathcal{M}$ и является разностью двух взаимно ортогональных проекторов $(A + A^2)/2$, $(A^2 - A)/2$. Если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10638

Введение. Пусть \mathcal{M} – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ – точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} , $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ – банахово пространство τ -интегрируемых операторов. В работе получены следующие результаты об алгебраических и порядковых свойствах следа τ и элементов $*$ -алгебры $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов.

Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$ и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{и} \quad \tau(XY) = \tau(YX) \in \mathbb{R}$$

(теорема 2.1). В частности, если $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $XY \in \mathfrak{S}_1$, то

$$YX \in \mathfrak{S}_1 \quad \text{и} \quad \text{tr}(XY) = \text{tr}(YX) \in \mathbb{R}.$$

Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$$