

Геометрическое описание областей с максимальными константами Харди
Ф. Г. Авхадиев
Казанский (Приволжский) федеральный университет, favhadiev@kpfu.ru

Пусть $d \geq 2$ — натуральное число, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, не совпадающая со всем пространством. Рассмотрим следующее неравенство Харди: для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} dx \geq c_p(s, \Omega) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta^s(x)} dx.$$

Здесь $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ — расстояние от точки x до границы области, постоянная $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ выбрана оптимальной, т. е. определена однозначно как максимальная величина, допустимая в этом вариационном неравенстве.

Хорошо известно, что существуют области, для которых приведенное неравенство не является содержательным, т. е. существуют области, для которых $c_p(s, \Omega) = 0$. С другой стороны, $c_p(s, \Omega) = (s-1)^p/p^p$ для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ при любых допустимых значениях параметров d , p и s . Известно также, что $c_p(s, \Omega) \leq (s-1)^p/p^p$ для любой области, граница которой содержит хотя бы одну "регулярную" граничную точку, в этом смысле константы Харди для выпуклых областей являются максимальными из возможных. Рядом авторов были найдены экзотические примеры невыпуклых областей, для которых константы Харди $c_2(2, \Omega)$ также максимальны, т. е. равны $1/4$.

Нами обнаружены и геометрически описаны широкие семейства невыпуклых плоских и пространственных областей, в которых указанное неравенство Харди справедливо с этой максимальной константой $(s-1)^p/p^p$. Эти семейства существенно зависят от размерности области и параметров $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$. Отметим, что аналитической основой наших построений являются новые одномерные неравенства типа Харди со специальными весами и новые константы, связанные с этими неравенствами и гипергеометрическими функциями. В докладе будут приведены как опубликованные (см. [1], [2]), так и новые результаты автора, относящиеся к этой тематике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00351-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Г. Авхадиев, "Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна $1/4$ ", Известия РАН. Сер. матем., том 78, № 5 (2014), 3-26.
2. Ф. Г. Авхадиев, " L_p -неравенства типа Харди в областях, r -близких к выпуклым", Известия вузов. Матем., № 1 (2015), 84-88.