ISSN 0869-8325

ТОМ
18
Выпуск
1

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция **«Финансовая и страховая математика»**
Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

1 – 8 V • 2011

Восемнадцатая Всероссийская школа-коллоквиум
по стохастическим методам

Двенадцатый Всероссийский симпозиум
по прикладной и промышленной математике
Весенняя сессия. Научные доклады. Часть I

16 – 23 X • 2010

Одиннадцатый Всероссийский симпозиум
по прикладной и промышленной математике

Региональный Макросимпозиум
«Насущные задачи прикладной математики на Кубани»
Осенняя сессия. Научные доклады. Часть III

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА
2011

XVIII ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-КОЛЛОКВИУМ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

XII ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

(весенняя сессия, 1 – 8 мая 2011 г.)

Восемнадцатая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам

А. М. Бикчентаев, А. А. Сабирова (Казань, К(П)ФУ). **Мажорируемая сходимость по мере измеримых операторов и свойство Банаха–Сакса.**

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, I — единица алгебры $\mathcal{M}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{M}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(I-P) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. В $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере [1]; $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй. Для обозначения сходимости последовательности $(X_n) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ к $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ в топологии t_τ используется запись $X_n \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что (X_n) сходится к X по мере τ.

Обозначим $\mu_t(X)$ *невозрастающую перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Множество τ-компактных операторов $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}}\colon \lim_{t\to\infty} \mu_t(X) = 0\}$ является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < \infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$, может быть определено как $L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}}\colon \mu(X) \in L_p(\mathbf{R}^+, m)\}$ с F-нормой (нормой для $1 \leqslant p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p$. Пусть $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^h$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать $\leqslant$.

С использованием свойства Банаха–Сакса для пространства $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ в [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и X_n, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, $X \geqslant 0$ с $|X_n|^2 \leqslant X$ ($n \in \mathbf{N}$). Тогда существует подпоследовательность (X_{n_i}), средние арифметические*

$$\widetilde{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_{n_i} \tag{1}$$

которой t_τ-сходятся к некоторому оператору $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ с $|\widetilde{X}|^2 \leqslant X$.

Следствие [3, теорема 2.3]. *Пусть $0 < p \leqslant 1$, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и X_n, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $X \geqslant 0$ с $|X_n|^2 \leqslant X^2$ ($n \in \mathbf{N}$). Тогда существует подпоследовательность (X_{n_i}), средние арифметические* (1) *которой сходятся в $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ к некоторому оператору $\widetilde{X}$ с $|\widetilde{X}|^2 \leqslant X^2$.*