Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.98

МАЖОРИРУЕМАЯ СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ НА ПОЛУКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА И СРЕДНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. М. Бикчентаев, А. А. Сабирова

Аннотация. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Доказано, что каждая порядково ограниченная последовательность τ-компактных операторов обладает подпоследовательностью, средние арифметические которой сходятся по мере τ. Доказан некоммутативный аналог леммы Пратта для пространства $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Результаты являются новыми даже для алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$. Получено приложение основного результата к пространствам $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p \leq 1$. Приведены примеры, показывающие необходимость перехода к средним арифметическим и существенность τ-компактности мажорирующего оператора.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный полуконечный след, измеримый оператор, топология сходимости по мере, спектральная теорема, банахово пространство, свойство Банаха — Сакса, среднее арифметическое.

Введение

Известно (см. пример 3.4 ниже и теорему 2.6.7 в [1]), что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ может сходиться к нулю по вероятности, но последовательность средних арифметических $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ может не сходиться к нулю по вероятности. Однако если, кроме того, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно интегрируема, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \to 0$ по вероятности. Закон больших чисел дает сходимость средних арифметических независимых одинаково распределенных интегрируемых случайных величин по вероятности [2, гл. III, § 3, теорема 2]. Существование подпоследовательностей со сходящимися средними арифметическими связано и со свойством Банаха — Сакса для банаховых пространств. Исследования в этом контексте проведены в [3].

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. В [4] получены результаты о сходимости средних арифметических

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки (госконтракт № 02.740.11.0193).

18. *Beltiţă D.* Lie theoretic significance of the measure topologies associated with a finite trace // Forum Math. 2010. V. 22, N 2. P. 241–253.
19. *Dodds P. G., Dodds T. K., Sukochev F. A.* Banach–Saks properties in symmetric spaces of measurable operators // Studia Math. 2007. V. 178, N 2. P. 125–166.
20. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
21. *Dodds P. G., Dodds T. K., de Pagter B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.
22. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. V. 74, N 2. P. 257–268.
23. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 41–54.
24. *Khiintchine A.* Über dyadische Bruche // Math. Z. 1923. Bd 18, Heft 1. S. 109–116.
25. *Бикчентаев А. М.* Об одном неравенстве для эрмитовых операторов // Алгебра и анализ: Материалы конф., посвящ. 100-летию Б. М. Гагаева. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 1997. С. 35–36.
26. *Lieberman A.* Spectral distribution of the sum of self-adjoint operators // Pacific J. Math. 1974. V. 53, N 1. P. 211–216.
27. *Ciach L. J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. Math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.

Статья поступила 25 февраля 2011 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
НИИ математики и механики
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Профессора Нужина, 1/37, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Сабирова Альбина Альбертовна
Казанской (Приволжский) федеральный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
fakhra@mail.ru