КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра высшей математики и математического моделирования

И.Б. ГАРИПОВ, Р.М. МАВЛЯВИЕВ, А.М. НИГМЕДЗЯНОВА

МАТЕМАТИКА

для студентов направления подготовки Педагогическое образование
(профиль: право и иностранный язык)

Учебно-методическое пособие

Казань – 2016

УДК 51-7
ББК 22.1
Г-20

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 10 от 29 июня 2016 года

Рецензенты:
доктор физ.–мат. наук, доцент
А.А. Попов;
доктор физ.–мат. наук, доцент
С.В. Сушков

Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М., Нигмедзянова А.М.
Математика: учеб.-методич. пособие / И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев, А.М. Нигмедзянова. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 44 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с программой для студентов направления подготовки Педагогическое образование (профиль: право и иностранный (английский) язык). Пособие содержит основные сведения по курсу «Математика», типовые примеры с решениями по основам теории множеств, элементам математической логики, элементам комбинаторики, элементам теории вероятностей, элементам математической статистики, а так же задачи и примеры для самостоятельного решения.

© Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М., Нигмедзянова А.М., 2016
© Казанский университет, 2016

Оглавление

Введение 4
Тема 1. Основы теории множеств 5
Тема 2. Элементы математической логики 11
Тема 3. Элементы комбинаторики 19
Тема 4. Элементы теории вероятностей 24
Тема 5. Элементы математической статистики 38
Литература 44

Введение

Человек, не знающий математики,
не способен ни к каким другим наукам.
Более того, он даже не способен
оценить уровень своего невежества.
Роджер Бэкон

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки Педагогическое образование (профиль: право и иностранный (английский) язык). Оно составлено в соответствии с действующей программой курса «Математика» и охватывает следующие темы «Основы теории множеств», «Элементы математической логики», «Элементы комбинаторики»,«Элементы теории вероятностей»,«Элементы математической статистики».

Материал каждой темы разбит на три части. В первой части без доказательства приводятся основные теоретические сведения (определения, теоремы, свойства, формулы и т.д.) необходимые для решения задач. Для студента данная часть может играть роль краткого конспекта лекций.

Во второй части разобраны стандартные примеры, демонстрирующие применение тех или иных формул и теорем. Эта часть знакомит с различными приемами и методами решения задач.

Третья часть содержит задачи для домашней и самостоятельной работы студентов. При подборе примеров и задач использовались различные источники.

Тема 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1 Основные понятия и определения

В математике понятие множества является одним из основных (первичных) неопределяемых понятий. Под множеством понимают совокупность (собрание, семейство, ...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Например, множество студентов юридического факультета, множество натуральных чисел, и т.д.

Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ... Объекты из которых состоит множество, называют его элементами. Элементы множества обозначают малыми буквами a, b, c, ...

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$. Запись $x \notin X$ (или $x \overline{\in} X$) означает, что x не является элементом множества X.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых их перечисляют (если это возможно), либо указывают общее свойство, которым обладают все элементы множества.

Например, запись $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ означает, что множество A состоит из пяти элементов 1, 2, 3, 4, и 5; запись $B = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ означает, что множество B состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leq x \leq 1$; запись $C = \{x : x$ – студент 1 курса юридического факультета$\}$ означает, что множество C состоит из всех студентов первого курса юридического факультета.

Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае пишут $A \subset B$.

Например, множество студентов первого курса юридического факультета является подмножеством множества студентов юридического факультета.

Множества A и B называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$, т.е. если эти множества состоят из одних и тех же элементов.

Например, множества $A = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{1, 2\}$ равны.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Например, множество натуральных чисел, квадрат которых равен 3 является пустым.

При решении каждой конкретной задачи всегда имеется множество, явно или неявно заданное, за пределы которого мы заведомо выйти не можем. Т.е. любое данное множество является подмножеством этого множества. Такое множество называется универсальным множеством и обозначается U.

Например, если рассматривают множества студентов разных институ-

тов (факультетов) одного университета, то за универсальное множество можно брать множество студентов данного университета.

Операции над множествами.

Объединением (или суммой) двух множеств A и B называется множество, состоящие из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств A и B. Объединение (или сумму) двух множеств A и B обозначают $A \cup B$ и кратко записывают $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) двух множеств A и B называется множество, состоящие из элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A и множеству B. Пересечение (или произведение) двух множеств A и B обозначают $A \cap B$ и кратко записывают $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящие из элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$ и кратко записывают $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Если множество B является подмножеством множества A, то множество $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A.

Дополнение множества до универсального множества U обозначают $\overline{A}$ и кратко записывают $\overline{A} = \{x : x \notin A \text{ и } x \in U\}$.

Дизъюнктивной суммой (или симметрической разностью) двух множеств A и B называется множество, состоящие из элементов, каждый из которых принадлежит или множеству A или множеству B, но не обоим вместе. Дизъюнктивную сумму (или симметрическую разность) двух множеств A и B обозначают $A \triangle B$ и кратко записывают

$$A \triangle B = \{x : (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)\}.$$

Свойства операций над множествами.

Коммутативность:

$A \cap B = B \cap A$,

$A \cup B = B \cup A$.

Ассоциативность:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Дистрибутивность:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Закон поглощения:

$A \cup (A \cap B) = A$,

$A \cap (A \cup B) = A$.

Идемпотентность:

$A \cup A = A$,

$A \cap A = A$.

Инволютивность:
$\overline{\overline{A}} = A$.
Свойство нуля:
$A \cup \varnothing = A$,
$A \cap \varnothing = \varnothing$.
Свойство единицы:
$A \cup U = U$,
$A \cap U = A$.
Законы де Моргана:
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Для наглядного изображения операций над множествами используют круги Эйлера или диаграммы Венна. Обычно универсальное множество изображают прямоугольником (точнее точками прямоугольника), а множества фигурами (как правило, кругами), лежащими внутри этого прямоугольника.

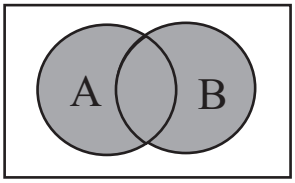

Рис. 1. $A \cup B$

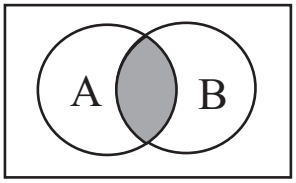

Рис. 2. $A \cap B$

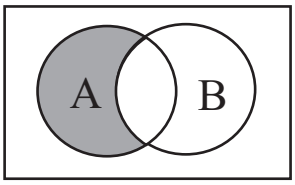

Рис. 3. $A \setminus B$

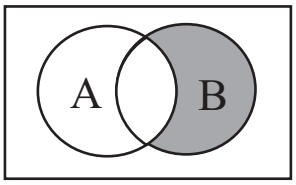

Рис. 4. $B \setminus A$

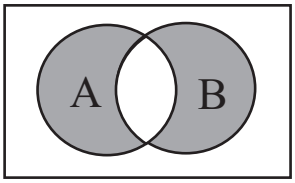

Рис. 5. $A \triangle B$

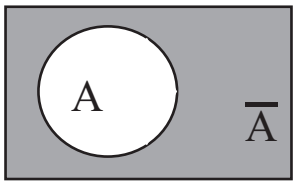

Рис. 6. $\overline{A}$

Мощность конечного множества.

Множества бывают конечные и бесконечные. Конечные множества содержат конечное число элементов. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

Мощностью конечного множества A называют число его элементов и обозначается $n(A)$. Из определения следует:
$n(A) + n(\overline{A}) = n(U)$;
$A = B \Rightarrow n(A) = n(B)$.
Для любых двух конечных множеств справедливы равенства:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$.
А так же
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$;

Декартово произведение двух множеств.

Декартовым произведением (или прямым произведением) множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Декартовое произведение множеств A и B обозначают $A \times B$ и кратко записывают $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Тогда
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
Поэтому $A \times B \neq B \times A$, если $A \neq B$.

Декартово произведение множества A на себя называется декартовым квадратом и обозначается $A \times A = A^2$. Для произведения n одинаковых множеств A используется обозначение $A^n = \underbrace{A \times A \times A \times ... \times A}_{n \text{ раз}}$.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1. Даны множества $A = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $A \triangle B$.

Решение.
$A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$A \cap B = \{0, 2, 4\}$,
$A \setminus B = \{-3, -1\}$,
$B \setminus A = \{1, 3, 5\}$,
$\overline{A} = \{-5, -4, -2, 0, 2, 4\}$,
$A \triangle B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$.

Пример 2. Доказать тождество $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

Решение. Решать эту задачу можно несколькими способами.

1 способ. Исходя из непосредственного определения операций, т.е. логически определять при каких условиях элемент будет принадлежать множеству, определяемому правой частью и левой частью, и, если эти условия совпадают, то тождество признается верным. Этот способ мы не будем рассматривать.

2 способ. С помощью диаграмм Эйлера-Венна, графически определяя множества-результаты. Если итоговые картинки совпадают, то тождество верно. Получаем,

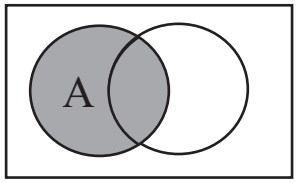

Рис. 7. A

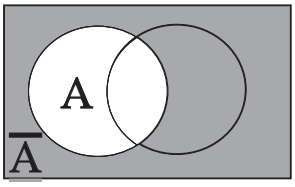

Рис. 8. $\overline{A}$

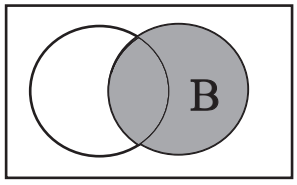

Рис. 9. B

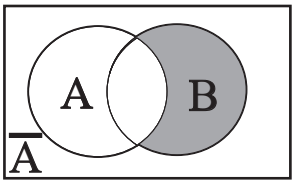

Рис. 10. $\overline{A} \cap B$

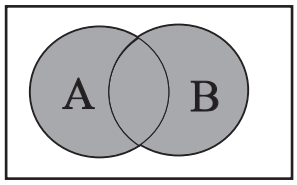

Рис. 11. $A \cup (\overline{A} \cap B)$

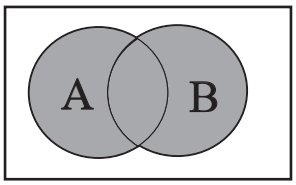

Рис. 12. $A \cup B$

3 способ. С помощью свойств операций над множествами:
$A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B.$

Пример 3. В студенческой группе 25 человек. Из них 16 знают английский язык, 12 – немецкий и 11 – оба языка. Сколько человек в группе не знают ни английского, ни немецкого языков?

Решение. Пусть A – множество студентов, знающих английский язык, B – множество студентов, знающих немецкий язык. Тогда
$n(U) = 25$, $n(A) = 16$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 11$,
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 16 + 12 - 11 = 17$ – число знающих хотя бы один язык;
$n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B) = 25 - 17 = 8$ – не знают оба языка.

1.3 Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Даны множества $A = \{x : -3 \leq x < 4\}$, $B = \{x : -1 \leq x \leq 6\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.

2. Дано множество $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 12\}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Найти множество B такое, что $B \subset A$, $B = \{x : x$ делиться на $4\}$.

3. Даны множества $X = \{$адвокат, прокурор, судья$\}$; $X = \{$адвокат, прокурор$\}$. Найти объединение и пересечение множеств.

4. Определите отношения между следующими понятиями и выразите эти отношения с помощью круговых схем:

а) Юрист; б) Женщина; в) Человек; г) Дочь; д) Адвокат.

5. Пусть X – множество студентов юридического факультета, а Y – множество студентов, проживающих в общежитии. Что представляет собой объединение и пересечение данных множеств.

6. Найдите пересечение, объединение множества A различных букв, входящих в слово «юриспруденция», и множества B различных букв, входящих в слово «конституция».

7. Определить число задолжников в группе, если известно, что задолженность по физкультуре имеют 5 человек, по математике – 6, иностранному языку – 7. Причем, каждый из задолжников имеет либо одну, либо три задолженности. При этом три задолженности имеют 2 человека.

8. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B и C. Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B – 16, фильм C – 19. Найти, сколько студентов просмотрели все три фильма.

9. В группе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 – в хоккей, 18 – в футбол. Увлекаются двумя видами спорта – баскетболом и хоккеем – четверо, баскетболом и футболом – трое, футболом и хоккеем – пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом. Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта? Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?

10. В юридической фирме 26 юристов являются специалистами по гражданскому праву, 27 – по уголовному, 23 – по административному. Кроме того 10 сотрудника являются специалистами по гражданскому и уголовному, 7 – по уголовному и административному, 9 – по гражданскому и административному, а 3 сотрудников являются специалистами во всех трех областях права. Сколько сотрудников работает в фирме?

11. На одну специальность в одном из ВУЗов поступало 120 человек. Абитуриенты сдавали три экзамена: по математике, по обществознанию и русскому языку. Математику сдали 60 человек, обществознание – 40. 30 абитуриентов сдали математику и обществознание, 30 – математику и русский язык, 25 – обществознание и русский язык. 20 человек сдали все три экзамена, а 50 человек – провалили. Сколько абитуриентов сдали русский язык?

Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1 Основные понятия и определения

Высказыванием называется повествовательное предложение, про которое всегда определенно можно сказать, является оно истинным (И) или ложным (Л). Например: «Сегодня – четверг», «Дважды два четыре», «$3 < 2$», «На улице идет снег».

Не являются высказываниями предложения «Здравствуйте!», «Юрфак – чемпион!», «Как дела?». Предложения «Он изучает юриспруденцию», «Это произошло на юрфаке» так же не являются высказываниями. Не ясно, кто изучает юриспруденцию и что произошло на юрфаке. Здесь можно выделить неизвестное в явном виде: «Студент X изучает юриспруденцию», «Событие Y произошло на юрфаке». В математике часто встречаются предложения, которые хотя и содержат определенное утверждение, но относительно которых нельзя утверждать, истинны они или ложны. Например, «$x > 2$», «$x^2 - 3x + 2 = 0$». Для того чтобы данные предложения стали высказываниями, необходимо конкретизация. Т.е. они превращаются в высказывания при замене неизвестного на какое-то конкретное значение. Такого рода предложения называются высказывательными формами. Преобразование высказывательных форм в высказывание может быть осуществлено не только конкретизацией переменных, но и употреблением слов «любой», «каждый», «всякий», «существует», «некоторые», «хотя бы один» и др. Например, «Некоторые студенты изучают юриспруденцию».

Высказывание называется простым, если никакая его часть сама не является высказыванием. В противном случае, высказывание называется сложным. Высказывания обозначают латинскими буквами A, B, C, ...

Логические операции. Сложные высказывания образуются из простых при помощи союзов «и», «или», «если ... то», «тогда и только тогда» и т.п. В математической логике эти союзы называются логическими связками. Логическим связкам иногда относят и частицу «не».

Отрицание высказывания. Этой логической связке соответствует частица «не». Отрицанием высказывания A называется высказывание, которое истинно, если данное высказывание ложно, и ложно, если данное высказывание истинно. Отрицание высказывания A обозначается $\overline{A}$ или $\neg A$ и читается «не A». Например, $A =$«подсудимый виновен», $\overline{A} =$«подсудимый не виновен».

Соответствие между высказываниями определяется в виде таблицы, которая называется таблицей истинности. В нашем случае таблица истинности имеет вид

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Конъюнкция высказываний. Этой логической связке соответствует союз «и». Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, которое истинно, если оба исходных высказывания истинны, и ложно, во всех остальных случаях. Конъюнкция двух высказываний A и B обозначается $A \wedge B$ или $A\&B$ и читается «A и B». Например, «Это преступление наказывается лишением свободы и конфискацией имущества». Таблица истинности для конъюнкции имеет вид

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкция высказываний. Этой логической связке соответствует союз «или». Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, которое ложно, если оба исходных высказывания ложны, и истинно, во всех остальных случаях. Дизъюнкция двух высказываний A и B обозначается $A \vee B$ и читается «A или B». Например, «Договор может быть заключен устной или письменной форме». Таблица истинности для дизъюнкции имеет вид

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Подчеркнем, что обыденной речи союз «или» может употребляться как в соединительном, так и в разделительном смысле. Например,

1. «Студент сдаст или провалит экзамен по математике». Очевидно, что одновременно сдать и завалить экзамен студент не может. В данном примере союз «или» употреблен в разделительном смысле (т.е. в смысле – «либо ... либо»).

2. «Холодное оружие может быть колющим или режущим». Но холодное оружие может быть одновременно колющим или режущим. В данном примере союз «или» употреблен в соединительном смысле.

Дизъюнкция – это соединительный союз «или».

Импликация высказываний. Этой логической связке соответствует союз «если ... то». Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание, которое ложно, если A – истинно, а B – ложно, и истинно, во всех остальных случаях. Импликация двух высказываний A и B обозначается $A \to B$ и читается «из A следует B». Например, «Если осужденный после отбытия наказания вел себя безупречно, то по его ходатайству суд может снять с него судимость до истечения срока погашения судимости». Таблица истинности для импликации имеет вид

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленция высказываний. Этой логической связке соответствует союз «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно». Эквиваленцией двух высказываний A и B называется высказывание, которое истинно, если истинности высказываний A и B совпадают. Эквиваленция двух высказываний A и B обозначается $A \leftrightarrow B$ и читается «A эквивалентно B». Например, «Деяние кража равносильно тайному хищению чужого имущества». Таблица истинности для импликации имеет вид

A	B	$A \leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Формулы логики высказываний. Используя буквенные обозначения высказываний (A, B, C, ...), знаки логических операций ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$), логические константы (И, Л) можно записать логические формулы.

Если нет скобок, логические операции выполняются в следующем порядке: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Одна и та же формула может иметь различные содержание. Например, высказывания «Число делиться на 5 без остатка тогда и только тогда, когда она заканчивается цифрой 5 или цифрой 0», «Я попаду на концерт в том и только в том случае, если куплю билет или мне дадут пригласительное».

Для каждой формулы можно составить таблицу истинности. Ее столбцы должны содержать результаты логических операций для каждого из наборов значений входящих в формулу высказываний A, B, C, ...

Если формула принимает значение И при любых значениях составляющих ее высказываний, то она называется тождественно истиной или тавтологией.

Если формула принимает значение Л при любых значениях составляющих ее высказываний, то она называется тождественно ложной или противоречием.

Логическая равносильность. Пусть имеем два высказывания P_1 и P_2. Высказыванию P_1 соответствует формула F_1, а высказыванию P_1 – формула F_1. Логические формулы F_1 и F_2 называются равносильными (эквивалентными), если при любых одинаковых истинностных значениях входящих в них переменных они принимают одинаковые значения истинности. Обозначается равносильность формул F_1 и F_2 следующем образом $F_1 \equiv F_2$. Равносильность формул можно установить сравнением таблиц истинности данных формул. Из определения равносильности и операции эквиваленции следует, что $F_1 \equiv F_2$ тогда и только тогда, когда $F_1 \leftrightarrow F_2 =$И.

Основные равносильности.

Закон тождества:

$A \equiv A$.

Закон противоречия:

$A \wedge \overline{A} \equiv$Л.

Закон исключения третьего:

$A \vee \overline{A} \equiv$И.

Закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{A}} \equiv A$.

Законы идемпотентности:

$A \wedge A \equiv A$,

$A \vee A \equiv A$.

Законы коммутативности:

$A \wedge B \equiv B \wedge A$,

$A \vee B \equiv B \vee A$.

Законы ассоциативности:

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$,

$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$.

Законы дистрибутивности:

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Законы де Моргана:

$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$,

$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Законы сочленения переменной с константой:

$A \wedge$И $\equiv A$,

$A \wedge$Л $\equiv$Л,

$A \vee$И $\equiv$И,

$A \vee Л \equiv A$.

Законы поглощения:

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$,

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$.

Законы склеивания:

$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \equiv B$,

$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \equiv B$.

Закон контрпозиции:

$A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$.

Всякую формулу, содержащую импликацию или эквиваленцию можно заменить равносильной формулой, не содержащей этих знаков:

$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$,

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$.

Обратные и противоположные утверждения. Логическое следование.

Пусть некоторое утверждение имеет вид $A \to B$. Тогда предложение

$A \to B$ называется прямым утверждением,

$B \to A$ называется обратным утверждением,

$\overline{A} \to \overline{B}$ называется противоположным прямому утверждению,

$\overline{B} \to \overline{A}$ называется противоположным обратному утверждению.

Например, пусть утверждение «Если подросток имеет приводы в полицию, то он склонен к правонарушениям» будет прямым (исходным). Тогда

«Если подросток склонен к правонарушениям, то он имеет приводы в полицию» является обратным утверждением;

«Если подросток не имеет приводы в полицию, то он не склонен к правонарушениям» является противоположным прямому утверждению;

«Если подросток не склонен к правонарушениям, то он не имеет приводы в полицию» является противоположным обратному утверждению.

Таблица истинности для этих утверждений имеет вид

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \to B$	$B \to A$	$\overline{A} \to \overline{B}$	$\overline{B} \to \overline{A}$
И	И	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И

Таким образом, прямому утверждению равносильно только утверждение противоположное обратному утверждению. На этом основан метод доказательства от противного, когда вместо $A \to B$ доказывается, что $\overline{B} \to \overline{A}$, если это более просто.

Пусть импликация $A \to B$ истинна. Тогда A называется достаточным условием для B, а B необходимым условием для A. При этом, как видно из таблицы истинности

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

истинность A гарантирует истинность B, а ложность A ничего не говорить об истинности значения B.

Если верно утверждение $A \to B$ и одновременно верно $B \to A$, то говорят, что B необходимое и достаточное условие для A, и A необходимое и достаточное условие для B.

Рассмотрим логическое следование в общем виде. Пусть предложению P_i $(i = 1, \ldots, n)$ соответствует формула F_i, а предложению Q – формула G. Формула G называется следствием (следует) из формул $F_1, ..., F_n$, если G истинна всякий раз, когда истинна каждая из формул $F_1, ..., F_n$, что записывается так: $F_1, ..., F_n \models G$. Формулы $F_1, ..., F_n$ называются посылками, а формула G называется заключением. Если пользоваться истинностными таблицами, то логического следования не будет, если найдется такой набор переменных, при котором все посылки истинны, а заключение ложно.

2.2 Примеры решения задач

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы $\overline{A} \vee \overline{B} \to B$.
Решение.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B} \to B$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	Л

Пример 2. В результате проведённых следственных мероприятий были установлены следующие неопровержимые факты:

1) если гражданин А. не является убийцей, то либо гражданин В. является убийцей, либо гражданин С., причем не оба одновременно;

2) если гражданин В. не является убийцей, то гражданин А. убийца, а гражданин С. – нет;

3) если гражданин А. убийца, то и гражданин В. убийца.

Выяснить, кто согласно указанным утверждениям является убийцей.

Решение. Введем обозначения $A =$«гражданин А. убийца», $B =$«гражданин В. убийца», $C =$«гражданин С. убийца». Тогда исходные факты примут следующий вид:

1) $\overline{A} \to (B \vee C) \wedge \overline{A \wedge B}$;

2) $\overline{B} \to A \wedge \overline{C}$;

3) $A \to B$.

Решение задачи сводится к исследованию на равносильность конъюнкции этих утверждений одному из высказываний A, B или C. Для этого составим таблицу истинности выражения

$(\overline{A} \to (B \vee C) \wedge \overline{A \wedge B}) \wedge (\overline{B} \to A \wedge \overline{C}) \wedge (A \to B)$

A	B	C	$(\overline{A} \to (B \vee C) \wedge \overline{A \wedge B}) \wedge (\overline{B} \to A \wedge \overline{C}) \wedge (A \to B)$
И	И	И	И
И	И	Л	И
И	Л	И	Л
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	Л

Сравнив результирующий столбец со столбцом для B, делаем вывод, что конъюнкция исходных данных равносильна B. Значит, убийцей является гражданин В.

Пример 3. Известно, что если гражданин А. не встречал этой ночью гражданина В., то гражданин В. – убийца. Гражданин А. говорит неправду или гражданин В. не убийца. Гражданин А. говорит правду. Верно ли, что гражданин А. встретил ночью гражданина В.?

Решение. Пусть $X =$«гражданин А. встретил гражданин В.»; $Y =$«гражданин В. – убийца»; $Z =$«гражданин А. говорит правду», т.е. имеет место $\overline{X} \to Y, Z \vee Y, Z, X$. Составим таблицу истинности для посылок и заключения, которая имеет следующий вид:

X	Y	Z	$\overline{X} \to Y$	$Z \vee Y$
И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л

Первый столбец таблицы представляет собой заключение, третий, четвертый и пятый столбцы соответствуют посылкам. На пятом наборе все посылки принимают значение И, а X (заключение) является ложным утверждением. Поэтому утверждение о том, что гражданин А. встретил ночью гражданина В., неверно.

2.3 Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Среди следующих предложений выделите высказывания, установите, истинны они или ложны:

а) река Волга впадает в Каспийское море;

б) всякий человек имеет брата;

в) пейте томатный сок;

г) который час?

д) ни один человек не весит более 1000 кг;

е) для всех вещественных чисел x и y верно равенство x+y=y+x;

ж) Казань – столица Республики Татарстан.

2. Рассмотрите сложные суждения, выразите их в символической записи:

а) Если он при пожаре выпрыгнет из окна, то рискует получить либо ожоги, либо травму, либо и то и другое;

б) Исправительные работы могут назначаться как с лишением свободы, так и без него.

3. Составить таблицу истинности для формулы $(X \wedge Y) \to (Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{Z})$.

4. Докажите с помощью таблиц истинности равносильность формул: $P \to (Q \wedge R)$ и $(P \to Q) \wedge (P \to R)$.

5. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

6. Иванов, Петров и Сидоров подозреваются в совершении преступления. В ходе следствия они дали следующие показания. Иванов: Петров виновен, а Сидоров – нет. Петров: Если Иванов виновен, то виновен и Сидоров. (Они всегда действуют сообща). Сидоров: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен. Необходимо установить:

а) Могут ли быть истинны все показания?

б) Предполагая, что показания всех обвиняемых истинны, укажите, кто виновен, а кто нет.

в) Если невиновный говорит истину, а виновный лжет, то кто невиновен, а кто виновен?

г) Если все трое невиновны, то кто лжесвидетельствует?

7. Три свидетеля ограбления банка дали показания. Первый свидетель заявил, что грабители скрылись на автомобиле зеленого цвета марки «Жигули». Второй свидетель утверждал, что это была черная «Волга». Третий свидетель настаивал на «Москвиче» не темного цвета. Как выяснилось позже, каждый свидетель был лицом заинтересованным и поэтому указал правильно либо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Тема 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

3.1 Основные понятия и определения

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучается задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчёте их числа.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил: правила сложения и правила умножения.

Правило суммы. Если некоторый объект (элемент) x можно выбрать n_1 способами, а объект (элемент) y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Например, если в группе 14 девушек и 6 юношей, то дежурного можно выбрать 14+6 способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Правило умножения. Если первый объект (элемент) x можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент) y можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Например, если в группе 14 девушек и 6 юношей, то двух студентов разного пола, для выполнения различных заданий, можно выбрать $14 \cdot 6 = 84$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Основные формулы комбинаторики.

Обычно в комбинаторике рассматривается идеализированный эксперимент по выбору наудачу m элементов из n различных элементов. При этом элементы:

а) не возвращаются обратно (схема выбора без возвращений или без повторений);

б) возвращаются обратно (схема выбора с возвращением или с повторениями).

Схема выбора без возвращений.

Размещением из n элементов по m элементов $(0 < m \leq m)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащие m элементов. Таким образом, размещения из n элементов по m элементов отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, из трех элементов $\{a, b, c\}$ можно составить следующие размещения по два элемента:

$\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, b\}$. Их число $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Перестановкой из n элементов называется размещения n элементов по n элементов. Таким образом, перестановки из n элементов отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

Например, из трех элементов $\{a, b, c\}$ можно составить следующие перестановки:

$\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.

Их число $P_3 = 3! = 6$.

Сочетанием из n элементов по m элементов $(0 < m \leq m)$ называется любое подмножество данного множества, содержащие m элементов. Таким образом, сочетания из n элементов по m элементов отличаются друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Например, из трех элементов $\{a, b, c\}$ можно составить следующие сочетания по два элемента:

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Их число $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Имеют место формулы

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (m \leq n),$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

Схема выбора с возвращением.

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это размещения с возвращением. Размещения из n элементов по m элементов с возвращением отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их расположения, или количеством повторений элементов.

Число размещений из n элементов по m элементов с возвращением обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Например, из трех элементов $\{a, b, c\}$ можно составить следующие размещения по два элемента с возвращением:

$\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, b\}$.

Их число $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно, но без последующего упорядочивания, то говорят, что это сочетания с возвращением.

Число сочетаний из n элементов по m элементов с возвращением обозначается символом $\overline{C}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Например, из трех элементов $\{a, b, c\}$ можно составить следующие сочетания по два элемента с возвращением:

$\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

Их число $\overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Пусть в множестве n элементами имеется m различных элементов. При этом, 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз, ..., m-й элемент повторяется n_m раз, причем $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$.

Перестановки из n элементов данного множества называется перестановками с повторениями из n элементов. Число перестановок из n элементов с повторениями обозначается символом $P_n(n_1, n_2, ..., n_m)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_m!}.$$

Например, из элементов множества $\{a, a, b, b, c\}$ можно составить $P_5(2, 2, 1) = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$ различных перестановок из 5 элементов с повторениями.

3.2 Примеры решения задач

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если

а) цифры не повторяются;

б) цифры повторяются.

Решение. а) Первую цифру можно выбрать 5 способами. После того как первое место занято, вторую цифру можно выбрать 4 способами. Для заполнения 3 цифры остается 3 способа. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов расстановки цифр, т.е. можно составить 60 трехзначных чисел.

б) Если цифры повторяются, то трехзначных чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Данную задачу можно было решить и используя комбинаторные формулы. Все трехзначные числа составленные из цифр 1, 2, 3, 4, 5 отличаются друг от друга либо порядком их следования , либо самими цифрами. Следовательно они являются размещениями из 5 элементов по 3. В первом случае получаем размещения без повторений. Их число $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$. А во втором случае размещения с повторениями. Их число $\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

Пример 2. На собрании группы присутствуют 25 студентов. Сколькими способами можно: а) выбрать президиум из 3 человек; б) выбрать 3 человек – председателя, секретаря, члена президиума; в) рассадить в президиуме 3 человек.

Решение. Из множества $\{1,2,\ldots,25\}$ состоящего из номеров по списку студентов группы, наугад последовательно выбираются 3 числа. В результате получим соединение, состоящее из 3 различных элементов и соответствующее возможному выбору 3 человек.

В случае а) в полученном соединении несущественен порядок расположения элементов, следовательно, это сочетание по 3 элемента из 25, число которых равно $C_{25}^3 = 2300$.

Для случая б) уже существенен порядок расположения элементов, так как небезразлично кто из трех выбранных будет председателем, секретарем или членом президиума. Поэтому, полученное соединение является размещением по 3 элемента из 25, число которых равно $A_{25}^3 = 13800$.

В случае в) число способов, которыми можно рассадить 3 человек, выбранных в президиум собрания, равно числу перестановок из 3 элементов, т.е. $P_3 = 3! = 6$.

Пример 3. В вазе стоят 10 красных и 4 белых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать

а) 3 гвоздики;

б) 1 красную гвоздику и 2 белых гвоздик.

Решение. а) Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то 3 гвоздики можно выбрать $C_{14}^3 = \frac{14!}{3!(14-3)!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364$ способами.

б) Красную гвоздику можно выбрать C_{10}^1 способами, а 2 белых гвоздик

можно выбрать C_4^2 способами. Поэтому 1 красную гвоздику и 2 белых гвоздик, по правилу умножения можно выбрать $C_{10}^1 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ способами.

3.3 Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. В классе из 30 учеников учитель назначает 2 дежурных. Сколько существует различных вариантов назначения дежурных?

2. В лифт девятиэтажного дома вошли 4 человека (на первый этаж). Сколько всего имеется способов их выхода на остальных трех этажах?

3. Для класса в конкретный день проводится 5 уроков по 4 различным предметам. Сколько существует различных вариантов расписания уроков на этот день?

4. Замок автоматической камеры хранения содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 10 секторов. В каждом секторе первого диска написана одна буква русского алфавита, а на трех последующих дисках в каждом секторе по одному целому числу от 0 до 9. Шифр набирается установкой определенного сектора на каждом диске. Сколько существует различных вариантов набора шифра при закрытии замка?

5. Для школьного спектакля из 17 мальчиков необходимо выбрать четверых на роли Атоса, Партоса, Арамиса и д'Артаньяна. Сколькими способами можно произвести такой выбор?

6. На вершину горы ведут 7 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом опуститься с нее, если подъем и спуск должны происходить по различным тропинкам?

7. Среди учеников класса пятеро бегают быстрее других, четверо прыгают выше других, трое прыгают дальше других. Сколькими способами учитель может составить команду из 6 человек, в которую входят по 2 участника по каждому из видов спорта (бегу, прыжкам в длину, прыжкам в высоту)?

8. Сколькими способами владелец одной карточки лотереи Спортлото (5 из 36) может зачеркнуть 5 номеров?

9. Учитель решил за один вечер посетить родителей четверых учеников. Сколькими способами он сможет это сделать, если несущественен порядок посещения?

10. У школьника имеются 3 красные, 3 синие и 2 зеленые закладки для книг. Сколькими способами школьник может разложить по одной закладке в 8 различных учебников?

11. На окружности выбрано 10 точек. а) Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? б) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

12. Сколько партий должны сыграть между собой 10 учеников, участвующих в шахматном турнире класса?

13. Сколькими способами можно рассадить 24 учеников класса (12 мальчиков и 12 девочек) так, чтобы за каждой партой сидели мальчик и девочка.

14. У Коли имеются восемь, а у Саши – шесть разных почтовых марок. Сколько существует различных вариантов обмена двумя марками между мальчиками?

15.Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5 можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

16. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет различного достоинства?

17. На книжной полке стоят 12 различных книг. Сколькими способами можно выбрать 5 книг, при условии, что выбранные книги не стояли рядом на полке?

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1 Основные понятия и определения

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным событиям. Явление имеет массовый характер, если оно может быть повторено многократно. Теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы, т.е. математические модели.

Случайные события. Опыт, эксперимент, наблюдение явления будем называть испытанием. Результат (исход) испытания называется событием. События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ...

Например, испытание: однократное бросание игральной кости; событие $A = \{$выпадение 3 очков$\}$, $B = \{$выпадение натурального числа очков$\}$, $C = \{$выпадение более 6 очков$\}$.

Событие называется *случайным*, если оно может произойти, а может и не произойти в результате данного испытания.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступить в результате данного испытания и обозначается через Ω.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате данного испытания и обозначается через $\varnothing$.

Например, при однократном бросании игральной кости событие
$A = \{$выпадение 3 очков$\}$ – случайное, $B = \{$выпадение натурального числа очков$\}$ – достоверное, $C = \{$выпадение более 6 очков$\}$ – невозможное.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из

них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Например, при однократном бросание игральной кости события $A = \{$выпадение четного числа очков$\}$ и $B = \{$выпадение более 3 очков$\}$ являются совместными, а события $C = \{$выпадение четного числа очков$\}$ и $D = \{$выпадение нечетного числа очков$\}$ являются несовместными.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называют попарно-несовместными, если любые два из них несовместные.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, если они попарно-несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

Несколько событий в данном испытании называются равновозможными, если ни одно из них не является объективно более возможным чем другие, т.е. все события имеют равные «шансы».

Действия над событиями.

Суммой событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т.е. или A, или B, или A и B вместе).

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий (т. е. и A и B одновременно) .

Разностью событий A и B называется событие $A - B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т. е. $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило).

Событие A влечет событие B (или A является частным случаем B), если из того, что происходит событие A, следует, что происходит событие B; записывают $A \Rightarrow B$.

Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то события A и B называются равными; записывают $A = B$.

Например, если $A = \{$попадание цели первым стрелком$\}$, $B = \{$попадание цели вторым стрелком$\}$, то $A + B = \{$попадание цели хотя бы одним стрелком$\}$, $A \cdot B = \{$попадание цели обеими стрелками$\}$. $\overline{A} = \{$не попадание цели (промах) первым стрелком$\}$.

События и действия над ними, аналогично действиям над множествами, можно наглядно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна: достоверное событие Ω изображается прямоугольником; элементарные случайные события — точками прямоугольника; случайное событие — областью внутри него.

Свойства операций над событиями.

Коммутативность:

$A + B = B + A$,
$A \cdot B = B \cdot A$.
Ассоциативность:
$(A + B) + C = A + (B + C)$,
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
Дистрибутивность:
$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$,
$A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$.
Закон поглощения:
$A \cdot (A + B) = A$,
$A + A \cdot B = A$.
Идемпотентность:
$A + A = A$,
$A \cdot A = A$.
Закон двойного дополнения:
$\overline{\overline{A}} = A$.
Закон исключения третьего:
$A + \overline{A} = \Omega$.
Закон противоречия:
$A \cdot \overline{A} = \varnothing$.
Законы де Моргана:
$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$,
$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

$\overline{\Omega} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \Omega$.
$A + \Omega = \Omega, \quad A \cdot \Omega = A$.
$A + \varnothing = A, \quad A \cdot \varnothing = \varnothing$.
$A - B = A \cdot \overline{B}$,

Вероятность события. Пусть в n испытаниях некоторое событие A наступило n_A раз. Число n_A называется частотой события A, а отношение

$$\frac{n_A}{n} = P^*(A)$$

называется относительной частотой события A в рассматриваемой серии испытаний.

Отсюда следуют свойства относительной частоты:
1) $0 \leq P^*(A) \leq 1$;
2) $P^*(\varnothing) = 0$;
3) $P^*(\Omega) = 1$.

Например, если при 1000 бросаниях монеты герб появился 489 раз, то число 489 будет частотой появления герба, а $P^*(A) = \frac{489}{1000}$ относительной частотой.

Вероятность события это число, выражающее степень возможности его появления в рассматриваемом испытании. Вероятность события события A обозначается $P(A)$ или p. Существует несколько определений вероятностей. Рассмотрим некоторые из них.

Статистическое определение вероятностей. Рассмотрим испытание, которое можно повторять любое число раз, в котором наблюдается некоторое событие A.

Статистической вероятности события A называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний. Согласно данному определению,

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Классическое определение вероятности. Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими полную группу несовместных событий. Такие исходы называются элементарными исходами (событиями), случаями, шансами. Случай, который приводит к наступлению события A, называется благоприятным ему. Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятных событию A, к общему числу n случаев, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

.

Например, если в урне находится 6 белых и 4 черных шара, то вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10},$$

т.к. всего шаров $n = 6 + 4 = 10$, а количество благоприятных исходов $m = 6$.

Геометрическое определение вероятности. Когда рассматривают классическое определение вероятности, имеют дело всегда с конечным числом элементарных событий, т.е. число возможных исходов данного испытания конечно. Однако, иногда результатов испытания — событий — может бесконечное число.

Пусть случайное испытание можно представить себе как бросание точки наудачу в некоторую геометрическую область Ω (на прямой – отрезок, на плоскости – фигура, или в пространстве – тело). Элементарные исходы – отдельные точки Ω, любое событие – подмножество этой области. При этом попадание точки в область Ω – достоверное событие, а подмножество этой области – случайное. Предполагается, что все точки области Ω равноправны. Тогда вероятность попадания точки в подмножество $A \subset \Omega$ пропорционально его мере (длине, площади, объёму) и не зависит от его расположения и формы.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области A к меры области Ω, т.е.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где где $m(A)$, $m(\Omega)$ – геометрические меры (длины, площади или объемы).

Например, вероятность того, что точка брошенная в квадрат, попадет внутрь вписанного в квадрат круга, равна

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\pi(a/2)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4},$$

где $m(\Omega) = a^2$ – площадь квадрата, $m(A) = \pi r^2 = \pi(a/2)^2$ – площадь вписанного в квадрат круга.

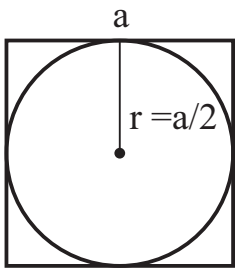

Рис. 13

Вероятность события обладает следующими свойствами:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;

2) $P(\varnothing) = 0$;

3) $P(\Omega) = 1$.

Основные теоремы теории вероятностей.

Событие A называется зависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A, причем $P(A) \neq 0$, обозначается символом $P(B|A)$. Таким образом,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Аналогично

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0.$$

Из данных формул получаем, что вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Формулу вычисления вероятности произведения двух событий можно распространить на любое число событий. Например, для трех событий данная формула имеет вид

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

Событие A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет, т.е. если A и B независимыми, то $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Таким образом, если события A и B независимыми, то формула вероятности произведения событий имеет вид

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B).$$

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Теорема. Пусть события $B_1, B_2, ..., B_n$ образуют полную группу. Тогда для любого события имеет место формула полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + ... + P(B_n)P(A|B_n).$$

События $B_1, B_2, ..., B_n$ называют гипотезами.

Теорема. Пусть события $B_1, B_2, ..., B_n$ образуют полную группу. Тогда условная вероятность события B_k, $k = 1, 2, ...n$ при условии, что событие A произошло, вычисляется по формуле Байеса

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}.$$

Схема испытаний Бернулли. Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p может произойти событие A или произойти противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. Такого рода схема испытаний называется схемой Бернулли. Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно m раз вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, ...n.$$

Случайные величины. Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает заранее известное то или иное значение.

Случайные величины бывают дискретными и непрерывными.

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется дискретной случайной величиной.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется непрерывной случайной величиной.

Например, число студентов на занятии по математике есть дискретная случайная величина. Данная случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, ... n (где n количество студентов в группе), но заранее неизвестно сколько их будет сегодня. Возраст человека непрерывная случайная величина. Она может принимать значения из промежутка $[0, 225]$.

Будем рассматривать только дискретные случайные величины.

Случайные величины обозначаются буквами $X, Y, Z, ...$ Запись $X = x$ означает, что случайная величина X приняла значение x, запись $P(X = x)$ означает вероятность того, что случайная величина X приняла значение x.

Случайная дискретная величина считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми эта величина принимает данные значения, т.е. если задан закон распределения дискретной случайной величины. В этом случае о случайной величине говорят, что она подчинена данному закону распределения.

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Закон распределения может быть задан с помощью таблицы, которая называется рядом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Так как в каждом испытании случайная величина X принимает одно и только одно возможное значение, то события $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ образуют полную группу, следовательно $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан графически. Для этого на оси абсцисс откладываем возможные значения дискретной случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений. Ломанную соединяющую точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n) называют многоугольником или полигоном распределения

Числовые характеристики случайной величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют число, равное сумме произведений всех возможных значений вели-

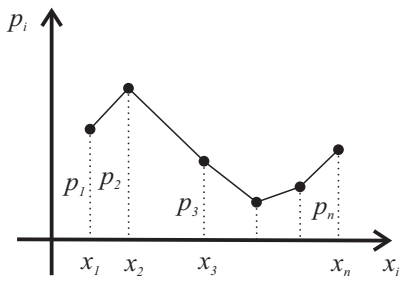

Рис. 14. Полигон распределения

чины X на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно является средним значением случайной величины. Таким образом, математическое ожидание обозначает, какое значение случайная величина принимает «в среднем», однако случайные величины с равным математическим ожиданием могут существенно отличаться по степени близости к нему. Рассмотрим случайные величины X и Y заданные своими рядами распределения

X	99	101
p	0,5	0,5

Y	0	200
p	0,5	0,5

Очевидно, что $M(X) = M(y) = 100$. Но если для величины X отклонение от 100 незначительно, то для величины Y оно весьма заметно, т.е. хотя математические ожидания случайных величин X и Y совпадают, но значения этих величин имеют различный разброс вокруг своего математического ожидания. Для характеристики рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания вводят понятие дисперсии.

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания, т.е.

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2p_1 + (x_2 - M(X))^2p_2 + ... + (x_n - M(X))^2p_n.$$

Дисперсия может быть вычислена по более простой формуле

$$D(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + ... + x_n^2p_n - (M(X))^2.$$

Неудобство при использовании дисперсии для оценивания рассеивания случайной величины состоит в том, что единицы измерения дисперсии являются квадратами единиц измерения самой случайной величины. Чтобы получить размерность совпадающий размерностью случайной величины вводят понятие среднее квадратическое отклонение свободна от этого недостатка.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

4.2 Примеры решения задач

Пример 1. Доказать формулу $A + B = A + \overline{A}B$.

Решение. Доказать данную формулу, как и в случае множеств, можно несколькими способами:

- исходя из непосредственного определения операций;
- с помощью диаграмм Эйлера-Венна;
- с помощью свойств операций над событиями;
- с помощью таблицы истинности, если ставить в соответствие событию 1 если оно произошло, и 0 если оно не произошло.

Докажем используя свойства операций над событиями:

$$A + \overline{A} \cdot B == \overline{A} \cdot B + A = (A + \overline{A}) \cdot (A + B) = \Omega \cdot (A + B) = A + B.$$

Пример 2. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

Решение. 1 способ. Событие $A = \{$вынут цветной шар$\}$. Всего шаров $n = 10$ – число всех равновозможных случаев. Цветных шаров $m = 3 + 5 = 8$ – число случаев, благоприятствующих событию A. Следовательно, согласно классическому определению вероятностей

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

2 способ. Вероятность вынуть красный шар $P(A) = \frac{3}{10}$, синий $P(B) = \frac{5}{10}$. Так как события A и B несовместны, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 0,8.$$

Пример 3. В урне 2 белых и 7 черных шара. Из нее последовательно вынимают два шара. Какого вероятность того, что второй шар окажется белым при условии, что первый шар был черным?

Решение. Пусть $A = \{$первый шар черный$\}$, $B = \{$второй шар белый$\}$. Так как событие A же произошло то в урне осталось 8 шаров, из которых 2 белых. Следовательно,

$$P(B|A) = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Пример 4. Из колоды карт (в колоде 36 карт) выбирают две. Какого вероятность того, что будут вынуты 2 туза.

Решение. Пусть $A = \{$первая карта туз$\}$, $B = \{$вторая карта туз$\}$. Событию вынутые карты тузы соответствует $A \cdot B$. Так как события A и B зависимые, то

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} = \frac{1}{105}.$$

Пример 5. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность выпадения двух шестерек.

Решение. Пусть $A = \{$выпадение 6 очков при первом бросании игральной кости$\}$, $B = \{$выпадение 6 очков при втором бросании игральной кости$\}$. Тогда AB – выпадение 6 очков при двух бросаниях. Так как события A и B независимые, то

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Пример 6. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность выпадения хотя бы одной шестерки.

Решение. Пусть $A = \{$выпадение 6 очков при первом бросании игральной кости$\}$, $B = \{$выпадение 6 очков при втором бросании игральной кости$\}$. Тогда $A+B$ – выпадение хотя бы одной 6 очков при двух бросаниях. Так как события A и B совместные, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Пример 7. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению.

Решение. Вероятность получить задачу по дифференциальному исчислению (событие B_1) равна $P(B_1) = 0,4$, интегральному исчислению (событие B_2)-$P(B_2) = 0,6$. Если событие A означает, что задача решена, то $P(B_1|A) = 0.9$, $P(B_2|A) = 0.5$. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P(B_1|A)+P(B_2)P(B_2|A) = 0,4{\cdot}0,9+0,6{\cdot}0,5 = 0,36+0,3 = 0,66.$$

Пример 8. Игральную кость бросают 10 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет а) 2 раза; б) хотя бы 1 раз.

Решение. Проводится 10 независимых испытаний. В каждом испытании событие $A = \{$ выпал 6 очков $\}$ может произойти с вероятностью $p = \frac{1}{6}$ или может не произойти с вероятностью $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Т.е. дана схема Бернулли. Для нахождения искомых вероятностей применяем формулу Бернулли

а) здесь $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-2} \approx 0,291.$$

б) Искомая вероятность равна

$$P_{10}(m > 0) = P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) +$$

$$+ P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10).$$

Но в этом случае, можно найти и следующим образом

$$P_{10}(m > 0) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-0} \approx 0,838.$$

Пример 9. В денежной лотереи разыгрывается 1 выигрыш в 100000 рублей, 10 выигрышей по 10000 рублей и 100 выигрышей по 100 рублей при общем числе билетов 10000. Найти закон распределения случайного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

X	0	100	10000	100000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

Найдем его математическое ожидание:

$M(X) = 0 \cdot 0,9889 + 100 \cdot 0,01 + 10000 \cdot 0,001 + 100000 \cdot 0,0001 = 21$ руб.

$M(X) = 21$ руб. есть справедливая цена одного билета.

Пример 10. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, ряд распределения которой

X	1	3	5
p	0,2	0,5	0,3

Решение.

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,3 = 0,2 + 1,5 + 1,5 = 3,2,$$

$$D(X) = 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,5 + 5^2 \cdot 0,3 - 3,2^2 = 0,2 + 4,5 + 7,5 - 10,24 = 1,96,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,96} = 1,4.$$

4.3 Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Пусть A, B и C – три произвольные события. Выразить через них следующие события

а) произошли все три события;

б) произошло только событие A;

в) произошло хотя бы одно из событий;

г) ни одного события не произошло;

д) произошли события A и B, но событие C не произошло;

е) произошло одно из этих событий;

ж) произошло не более двух событий.

2. В ящике имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Найдите вероятность того, что вынутое яйцо некачественное.

3. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное число очков.

4. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

5. В сосуд емкостью 10 л попала ровно одна болезнетворная бактерия. Какова вероятность зачерпнуть ее при наборе из этого сосуда стакана воды (200 мл)?

6. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

7. Вероятность того, что человек умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что он не умрет на 71-м году?

8. Бросается один раз игральная кость. Определите вероятность выпадения 3 или 5 очков.

9. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

10. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

11. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар

12. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают из колоды 2 карты. Определите вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

13. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

14. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

15. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

16. Найдите вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

17. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найдите вероятность того, что все две вынутые детали окажутся стандартными.

18. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найдите вероятность того, что в семье:
а) все девочки; б) дети одного пола.

19. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

20. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пики или туз?

21. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

22. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найдите вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

23. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найдите вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

24. Студент М может заболеть гриппом (событиеA) только в результате либо переохлаждения (событие B), либо контакта с другим больным (событие C). Требуется найти $P(A)$ если $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,5$; $P(B|A) = 0,3$; $P(C|A) = 0,1$ при условии несовместимости B и C.

25. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки для карманного фонарика. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

26. Пусть случайная величина X — число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Найдите закон распределения случайной величины X.

27. Производятся два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий.

28. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичесное отклонение случайной величины

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

28. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичесное отклонение случайной величины

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Тема 5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

5.1 Основные понятия и определения

Математическая статистика – это раздел математики, посвященный методам сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Генеральной совокупностью называется множество объектов, для которых рассматривается изучаемый признак.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. Но зачастую проводить сплошное обследование трудно или дорого. Например, нецелесообразно вскрывать каждую консерву или взрывать каждый снаряд. В этих случаях наилучшим способом обследования является выборочное наблюдение, т.е. из генеральной совокупности выбирают часть ее объектов (выборку) и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют часть отобранных объектов из генеральной совокупности.

Количество объектов в генеральной совокупности и выборке называется соответственно *объемом генеральной совокупности* и *объемом выборки*. Объем генеральной совокупности обозначается через N, а объем выборки обозначается через n.

Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной*. Если объекты выборки уже не возвращаются в генеральную совокупность, то

выборка называется *бесповторной*. При большом объеме генеральной совокупности стирается различие между повторной и бесповторной выборкой.

При выборочном методе для получения достоверных результатов важным является свойство *репрезентативности* (достоверности) выборки, которое означает, что каждый объект генеральной совокупности имеет равную возможность попасть в выборку.

Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют реализацией выборки и обозначают строчными буквами $x_1, x_2, ..., x_n$. Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Операция расположения значений $x_1, x_2, ..., x_n$ по неубыванию называется ранжированием статистических данных. Полученная таким образом последовательность $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$, $(x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)})$ называется вариационным рядом.

Пусть варианта x_1 встречается в выборке n_1 раз, варианта x_2 – n_2 раза, варианта x_k – n_k раз. При этом $n_1+n_2+...+n_k = n$ раз. Элементы $x_1, x_2, ..., x_k$ называются вариантами.

Частотой варианты x_i называется число n_i, показывающее, сколько раз эта варианта встречается в выборке.

Относительной частотой варианты называется число

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}.$$

Перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот называется статистическим распределением выборки или статистическим рядом. Статистическое распределение записывают в виде таблицы. Первая строка содержит варианты, а вторая – их частоты n_i или p_i^*

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

Если число различных значений в выборке велико, то составляют интервальный статистический ряд. В первую строку таблицы статистического распределения вписывают частичные промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_0, x_1)$, ..., $[x_{k-1}, x_k)$, которые берут обычно одинаковыми по длине $h = \frac{x_{max}-x_{min}}{k}$, k – число интервалов.

Более точно шаг можно рассчитать с помощью формулы Стерджеса:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + \log_2 n},$$

где $k \approx 1 + \log_2 n = 1 + 3,322 \lg n$ – число интервалов.

Начало первого интервала рекомендуется брать величину

$$x_{\text{нач}} = x_0 = x_{min} - \frac{h}{2}.$$

Во второй строке статистического ряда вписывают количество наблюдений n_i, попавших в каждый интервал

x_i	$[x_0, x_1)$	$[x_0, x_1)$	...	$[x_{k-1}, x_k)$
n_i	n_1	n_2	...	n_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

Статистическое распределение для наглядности изображается в виде полигона и гистограммы. Полигон, как правило, служит для изображения дискретного статистического ряда, а гистограмма непрерывного статистического ряда.

Полигоном частот называют ломанную, соединяющую точки

$$(x_1, n_1),\ (x_2, n_2),\ ...,\ (x_k, n_k),$$

а полигоном относительных частот – точки

$$(x_1, p_1^*),\ (x_2, p_2^*),\ ...,\ (x_k, p_k^*).$$

Варианты x_i откладываются на оси абсцисс, а частоты или относительные частоты – на оси ординат.

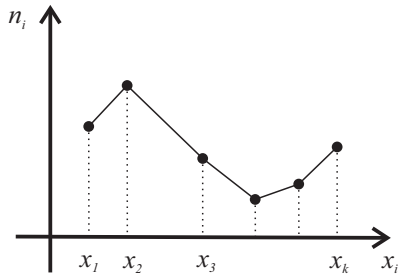

Рис. 15. Полигон частот

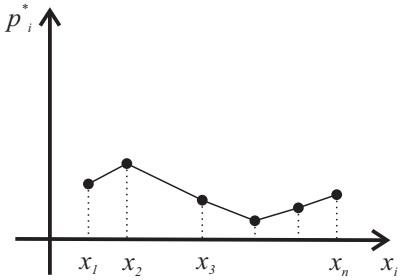

Рис. 16. Полигон относительных частот

Полигон относительных частот является аналогом многоугольника распределения.

Гистограммой частот (относительных частот) называют ступенчатою фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ – плотность частоты, ($\frac{p_i^*}{h}$ – плотности относительных частот).

Числовые характеристики статистического распределения. Для выборки определяют ряд числовых характеристик,аналогичным тем, что в теории вероятностей определяются для случайных величин.

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид

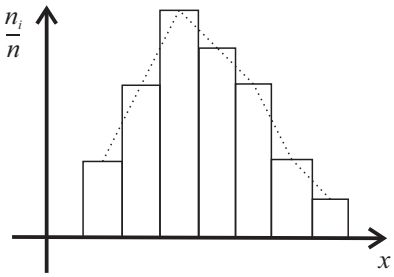

Рис. 17. Плотность частоты

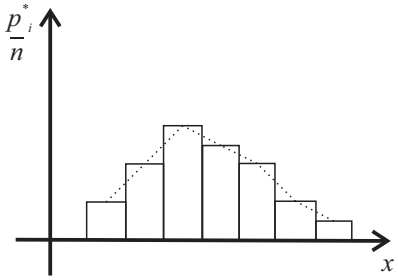

Рис. 18. Плотность относительной частоты

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

Выборочным средним $\overline{x}_B$ называется среднее арифметическое всех значений выборки

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n}$$

или

$$\overline{x}_B = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + ... + x_k p_k^*.$$

Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x}_B$, т.е.

$$D_B = \frac{(x_1 - \overline{x}_B)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_B)^2 n_2 + ... + (x_k - \overline{x}_B)^2 n_k}{n}$$

или

$$D_B = (x_1 - \overline{x}_B)^2 p_1^* + (x_2 - \overline{x}_B)^2 p_2^* + ... + (x_k - \overline{x}_B)^2 p_k^*.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение выборки определяется формулой

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

При решении практических задач используется исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Модой M_o^* вариационного ряда называется варианта, имеющий наибольшую частоту.

Медианой M_e^* называется значение, которое делить вариационный (ранжированный) ряд пополам. Если вариационный ряд имеет нечётное число членов ($n = 2k + 1$), то $M_e^* = x_{(k+1)}$, где $x_{(k+1)}$ варианта расположенная в

середине ранжированного ряда. Если вариационный ряд имеет четное число членов ($n = 2k$), то $M_e^* = \frac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}$.

Размахом R вариационного ряда называется число $R = x_{max} - x_{min}$.

5.2 Примеры решения задач

Пример 1. По сведениям автоинспекции, количество дорожных происшествий на улицах города X в первую декаду месяца было таким:

$$6, 8, 10, 7, 6, 11, 9, 8, 7, 8.$$

Найти статистическое распределение выборки. Найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, размах.

Решение. Проранжировав статистические данные (т.е. исходный ряд), получаем вариационный ряд

$$6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11.$$

Вычислив частоты и относительные частоты вариантов

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 9, \quad x_5 = 10, \quad x_6 = 11,$$

получаем

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 1, \quad n_5 = 1, \quad n_6 = 1,$$

$$p_1^* = 0,2, \quad p_2^* = 0,2, \quad p_3^* = 0,3, \quad p_4^* = 0,1, \quad p_5^* = 0,1, \quad p_6^* = 0,1.$$

Отметим, что $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6 = 10 = n$, а $p_1^*+p_2^*+p_3^*+p_4^*+p_5^*+p_6^* = 1$.

Используя полученные результаты составим статистическое распределение выборки

x_i	6	7	8	9	10	11
n_i	2	2	3	1	1	1
p_i^*	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

Для наглядности статистическое распределение изобразим в виде полигона

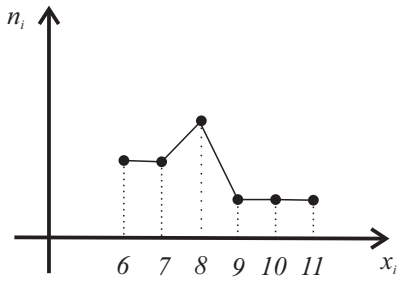

Рис. 19. Полигон частот

Вычислим числовые характеристики статистического распределения:
- выборочное среднее:

$$\overline{x}_B = \frac{6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 8\cdot 3 + 9\cdot 1 + 10\cdot 1 + 11\cdot 1}{10} =$$

$$= \frac{12 + 14 + 24 + 9 + 10 + 11}{10} = \frac{80}{10} = 8;$$

- выборочная дисперсия:

$$D_B =$$

$$= \frac{(6-8)^2\cdot 2 + (7-8)^2\cdot 2 + (8-8)^2\cdot 3 + (9-8)^2\cdot 1 + (10-8)^2\cdot 1 + (11-8)^1\cdot 2}{10} =$$

$$= \frac{8 + 2 + 0 + 1 + 2 + 3\cdot 2}{10} = 1,6;$$

- выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{1,6} \approx 1,26;$$

- исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{10}{9}\cdot 8 \approx 8,89;$$

- исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{8,89} = 2,98;$$

- мода: $M_o^* = 8$;
- медиана: $M_e^* = \frac{8+8}{2} = 8$;
- размах: $R = 11 - 6 = 5$.

5.3 Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. УВД города Y опубликовало сводку о числе правонарушений, совершенных подростками за первые 20 дней месяца:

$$8, 6, 13, 4, 13, 13, 12, 9, 7, 6, 12, 14, 13, 1, 217, 6, 8, 12, 7, 12.$$

Найти статистическое распределение выборки. Найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, размах.

2. Данные по раскрываемости краж в пяти районах города (в процентах от общего числа зарегистрированных краж) сведены в таблицу

Номер района	1	2	3	4	5
Число краж	30	10	18	15	7
Число раскрытых краж	16	9	7	8	7

Найдите средний процент раскрываемости краж по городу.

3. Комиссия изучала состояние борьбы с преступностью в регионе. Случайным образом выбрано 20 районов и по ним были представлены данные о числе раскрытых убийств: 11, 6, 12, 1, 3, 1, 6, 20, 10, 1, 1, 3, 3, 1, 23, 11, 3, 6, 10, 3. Составьте по этим данным прогноз для всего региона.

4. Имеется годовая сводка о преступлениях с применением огнестрельного оружия в 40 районах: 7, 16, 15, 16, 6, 7, 12, 8, 3, 14, 13, 4, 9, 17, 2, 6, 3, 4, 19, 5, 5, 1, 7, 19, 1, 6, 3, 6, 1, 2, 9, 3, 2, 2, 1, 8, 10, 1, 3, 1. Составьте по этим данным интервальный ряд, постройте гистограмму и ответьте на следующие вопросы. Каков диапазон значений переменной величины X – числа преступлений? Какой из полученных вами разрядов имеет наибольшую частоту и как это можно истолковать? Какова доля тех районов, в которых совершено от шести до двенадцати преступлений с применением оружия?

Литература

1. Абубакиров Н.Р. , Малакаев М.С. Математика: Учебно-методическое пособие. Казань: Казанский федеральный университет, 2010, 72 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для студентов вузов. М.: Академия, 2003, 571 с.

3. Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник-практикум по теории вероятности с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979, 114 с.

4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов. Москва: Высшая школа, 2003, 404 с.

5. Згадзай О.Э., Казанцев С.Я., Филиппов А.В. Информатика и математика для юристов: Учебник. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2000, 294 с.

6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. для студентов вузов, обучающихся по экон. спец. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2006, 573 с.

7. Нигмедзянова А.М., Сушков С.В. Теория вероятности и математическая статистика (Методическое руководство по высшей математике для студентов нематематических специальностей вузов. Часть 3.). Казань: ABC-color, 2009, 48 с.

8. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис-пресс, 2006, 608 с.

9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004, 256 с.

10. Рассолов М.М., Чубукова С.Г., Элькин В.Д. Элементы высшей математики для юристов: Учеб. пособие. М.: Юристъ, 1999, 184 с.

11. Роганов Е. А., Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М. Математика и информатика для юристов: Учебник. М.: МГИУ, 2005, 364 с.