КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Казанские студенческие олимпиады по математике, посвященные дню рождения Н.И. Лобачевского, ч. 2

Сборник задач

Казань — 2015

УДК 51, 37.8
Г82

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института вычислительной математики и информационных технологий
Протокол №4 от 10 декабря 2015 г.

заседания кафедры анализа данных и исследования операций
Протокол №4 от 3 декабря 2015 г.

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доцент В.А. Сочнева

Григорьева И.С., Лернер Э.Ю
Г82 Казанские студенческие олимпиады по математике, посвященные дню рождения Н.И. Лобачевского. Сборник задач. Часть 2: учеб.-мет. пособие/ Григорьева И.С., Лернер Э.Ю. – Казань: Казанский университет, 2015. – 36 с.

Математические олимпиады играют большую роль в пропаганде математического знания, повышении мотивации студентов к учебе. Олимпиады, проводимые в Казанском университете, давно стали междугородними и привлекают внимание студентов и преподавателей многих вузов.

В настоящем пособии приведены тексты задач олимпиад, состоявшихся в период 2010–2015 гг, ответы и указания к этим задачам и их решения. Пособие предназначено для студентов, готовящихся к олимпиадам, а также для тех, кто желает повысить свою математическую грамотность и расширить кругозор.

Оглавление

Введение

Студенческие олимпиады по математике проводятся в Казанском университете в течение многих лет. Они приурочены к дню рождения Н.И. Лобачевского 1-го декабря. Церемония проведения олимпиады приобрела различные традиции, создающие атмосферу праздника — дня математика, среди которых: место проведения — библиотека имени Н.И. Лобачевского, возложение цветов и фотографирование на фоне памятника Н.И. Лобачевскому, вечернее чаепитие с участием всех команд.

В первые годы в олимпиадах принимали участие только студенты казанского университета. Однако с 2009 года олимпиада стала междугородней. За прошедшие 6 лет к нам приезжали участники из Барнаула, Волгограда, Екатеринбурга, Иркутска, Йошкар-Олы, Краснодара, Нижнего Новгорода, Омска, Ростова на Дону, Саратова, Сарова, Уфы, Таганрога, Тюмени, Чебоксар, Элисты.

В составлении заданий принимали участие преподаватели университета и других вузов г. Казани. Это Д.Х. Муштари (председатель жюри в 2009–2012 гг.), В.А. Сочнева, М.Д. Бронштейн, И.С. Григорьева, А.Е. Заяц, И.Ш. Калимуллин, Э.Ю. Лернер, Е.В. Патрин, В.В. Шурыгин-ст. (председатель жюри с 2013 г.) и В.В. Шурыгин-мл.

Бессменным организатором и вдохновителем олимпиады является доцент каф. общей математики мехмата Валентина Алексеевна Сочнева.

Настоящее издание включает задачи 2010–2015 гг. и является продолжением сборника задач казанских студенческих олимпиад по математике (далее [1]), вышедшего в 2011 году и охватывающего задачи 1999-2010 гг.

Требуемый для решения уровень знаний в основном соответствует программе 1–2 курсов математических или физических специальностей. Отметим, что начиная с 2010 года на олимпиадах предлагается по 10 задач. Задачи подбираются из разных областей математики и доступны студентам разного уровня.

Как и в [1], кроме решений, к каждой задаче есть ответы или указания. Рекомендуем сначала попытаться решить задачу самостоятельно, а если не получается, то воспользоваться указаниями, и, только после получения собственных результатов, обратиться к предложенному решению.

Решения, найденные читателями, могут не совпадать с теми, что приведены в пособии. Если Вы нашли свое интересное решение или ошибку в нашем, сообщите об этом авторам по адресу igrigori_@mail.ru или eduard.lerner@gmail.com.

Задачи

Задачи, 2010 г.

Задача 1. Комплексные числа a,b, c таковы, что $|a| = |b| = |c| = r$. Найти модуль числа $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$.

Задача 2. Две вершины треугольника зафиксированы в точках A $(-1; 0)$ и B $(1; 0)$, а третья (точка C) движется по параболе $y = x^2 - 6x + 15$. Напишите уравнение кривой, которую описывает центр тяжести треугольника.

Задача 3. Из точки на плоскости отложено $2n$ векторов единичной длины. Они покрашены поочередно в красный и зеленый цвет. Просуммируем все вектора каждого цвета. Докажите, что разность двух этих сумм имеет длину не больше 2.

Задача 4. В множестве из 2010 элементов выбраны несколько подмножеств так, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент и никакие три не имеют общих элементов. Каково наибольшее возможное число таких подмножеств?

Задача 5. Найти интеграл $\int \frac{(x-1)^2\,dx}{x^2+e^x+1}$.

Задача 6. Пусть γ — отрезок, соединяющий точки a и $b\,i$ комплексной плоскости (a, b — вещественные, $a \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), а кривая Γ — его образ при отображении $w = \sin z$. Найти сумму углов, которые эта кривая составляет с вещественной и мнимой осями. *(В формулировке, предлагаемой на олимпиаде, особые точки a не были исключены, из-за чего решение оказалось более сложным, чем изначально предполагало жюри. Решение для этого случая см. в [1].)*

Задача 7. В игре «Что? Где? Когда?» в каждом раунде волчок останавливается в секторе номер x, где x равновероятно принимает одно из значений $0, 1, \ldots, 13$. При этом играет первый из секторов по часовой стрелке, который ранее не играл. Найти вероятность того, что после шести раундов сыграют (в любом порядке) сектора $1, 2, \ldots, 6$.

Задача 8. Имеется k одинаковых стеклянных шариков. Их кидают с некоторых этажей 1000 этажного дома. Требуется за наименьшее число бросаний X определить самый нижний этаж, при бросании с которого шарики разбиваются (или убедиться, что таких этажей в доме нет). Вычислить X **а)** для $k = 2$; **б)** для $k = 3$.

Задача 9. Функция $f(x)$ задана всей числовой прямой, причем в иррациональных точках она равна 0. Если же x представимо в виде несократимой дроби m/n, то $f(x) = m/n^3$. Будет ли эта функция дифференцируема в иррациональных точках? В 0?

Задача 10. Рассмотрим множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Будем говорить, что два множества из $2^{\mathbb{N}}$ эквивалентны, $X \sim Y$, если их симметрическая разность — конечное множество (т.е. X отличается от Y лишь конечным числом элементов). Существует ли такое отображение $f : 2^{\mathbb{N}} \mapsto 2^{\mathbb{N}}$, которое удовлетворяет условиям
1) $f(X) \sim X$;
2) $X \sim Y \Rightarrow f(X) = f(Y)$;
3) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Задачи, 2011 г.

Задача 1. Матрицы A и B не коммутируют между собой, т.е. $AB \neq BA$. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 коммутируют?

Задача 2. Кривая задана параметрически в виде $x = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $y = a_2t^2 + b_2t + c_2$. Может ли она пересекать саму себя под углом $45°$.

Задача 3. На шахматной доске проведено 64 вектора из центра клетки $d3$ в центры всех клеток доски. Найти длину суммы этих векторов (за единицу взята сторона клетки).

Задача 4. Сколько вещественных корней у многочлена $P(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1$?

Задача 5. Пусть q_{ij} — число общих делителей чисел i и j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Найти $\det(q_{ij})$.

Задача 6. Пусть последовательность a_n удовлетворяет условию $na_{n+1} = (n+1)a_n - \max(a_n; n^2)$; $n = 1, 2, \ldots$. Существует ли предел этой последовательности и если существует, чему он равен?

Задача 7. Существует ли функция $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}^+$ такая, что для каждой точки a отрезка $[0; 1]$ и всех $x \in [0; 1]$, таких, что $0 < |x - a| < f(a)$, выполняется $f(x) < f(a)$?

Задача 8. Найти сумму длин отрезков, из которых состоит множество $\{x \in \mathbb{R} : \left|\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^{-1}\right) > c\}$. Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различные точки на действительной прямой, $c > 0$.

Задача 9. **a)** На эллипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ выбраны точки M_1 и M_2 такие, что $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ (здесь O — начало координат). Доказать, что

$$\frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_1}\right)^2} + \frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

b) На эллипсоиде

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

выбраны точки M_1, M_2 и M_3 такие, что векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_3}$ попарно перпендикулярны (здесь O — начало координат). Доказать, что

$$\frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_1}\right)^2} + \frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

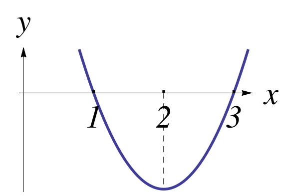
Задача 10. Пусть ξ, η — случайные величины, $\rho(\xi, \eta)$ — коэффициент корреляции между ξ и η, а для их матожидания M и дисперсии D выполнено: $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$. Доказать, что $M(\max\{\xi^2, \eta^2\}) \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2}$.

Задачи, 2012 г.

Задача 1. Докажите, что для монотонно возрастающей функции $f(x)$ уравнения $x = f(f(x))$ и $x = f(x)$ равносильны.

Задача 2. Судоку-куб. Куб разбит на 9^3 одинаковых кубиков. Можно ли каждому из них приписать число от 1 до 9 так, чтобы в каждой “строке”, “столбце” или “столбике” из 9 кубиков каждая цифра встречалась ровно по одному разу.

Задача 3. На рисунке представлена часть графика многочлена $y = P(x)$ (в точке 2 он имеет минимум среди всех значений на отрезке $[1, 3]$, а 1 и 3 являются его простыми корнями). Какой может быть степень этого многочлена?



Задача 4. При каких $a \in \mathbb{R}$ выполняется

$$I_1 = \int_0^a e^{x^2-2x}\,dx \geqslant I_2 = \int_0^a x\,e^{x^2-2x}\,dx\,?$$

Задача 5. Матрица размера $m \times n$ имеет ранг r. Нужно дополнить ее до квадратной так, чтобы полученная матрица стала невырожденной. Каков наименьший размер полученной квадратной матрицы?

Задача 6. Известно, что для некоторой дифференцируемой функции f при произвольной простой замкнутой кривой L интеграл $\oint_L (f(y)+x^2+1)\,dx - (xf(y)+e^{2y})\,dy$ равен площади области, ограниченной L . Найти f, если $f(0) = 0$.

Задача 7. У n-мерного куба покрашено k вершин. Окрасим также ребра, у которых окрашены обе вершины. **а)** Пусть окрашено более половины всех вершин. Тогда окрашено не меньше n ребер. **б)** Показать, что существует куб, у которого покрашена половина всех вершин, но ни одного ребра.

Задача 8. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на единичной окружности с центром в точке O. Известно, что $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = 0$. Доказать, что для любой точки B выполняется $\sum_{i=1}^n |\overrightarrow{BA_i}| \geqslant n$

Задача 9. Рассмотрим систему подмножеств $\{A_\alpha\}$, $A_\alpha \subset \mathbb{N}$ таких, что каждые два из них сравнимы в смысле включения (т.е. либо первое входит во второе, либо второе — в первое). Может ли такая система множеств быть несчетной?

Задача 10. На окружность бросают случайным образом $n > 1$ точек. Найти вероятность того, что окружность можно разбить на n равных дуг так, что на каждой дуге будет ровно одна точка (считаем, что в дугу входит ровно один из ее концов).

Задачи, 2013 г.

Задача 1. Найти ограниченное и непрерывное вместе с производной на всей числовой прямой решение дифференциального уравнения $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-|x|}$.

Задача 2. **а)** Существует ли на вещественной оси непрерывная функция, график которой пересекается с любой прямой на плоскости по крайней мере один раз?

б) Существует ли на неотрицательной полуоси непрерывная функция, пресекающаяся с любой горизонтальной прямой четное число раз?

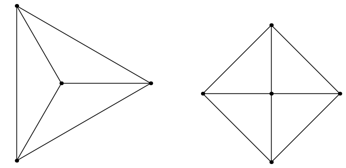
Задача 3. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$, дифференцируема и имеет непрерывную производную. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}}\, dx$.

Задача 4. Вершина C треугольника ABC неподвижна, а сторона AB постоянной длины $2a$ скользит вдоль данной прямой l. По какой линии движется центр окружности, описанной около треугольника?

Задача 5. При приеме в старшую группу детского сада проводится следующий экзамен. Перед ребенком случайной стороной раскладываются в ряд 35 карточек, на одной стороне карточек написана буква «м», на другой «а». Ребенок должен найти 4 подряд идущие карточки, на которых написано слово «мама». Сколькими в среднем способами ребенок может выполнить задание?

Задача 6. Введем следующее обозначение для n-ой итерации вещественной функции f : $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ раз}}(x)\ldots)) = f^{(n)}(x)$. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin^{(n)}(x) - \sin^{(n)}(x)}{x^3}$.

Задача 7. В городе Wheel метро состоит из кольцевой линии (n станций) и центральной станции, соединенной с каждой станцией кольцевой линии (см. рисунок, иллюстрирующий случаи $n = 3, 4$).



Руководство города решило устроить ремонт максимального числа перегонов, но так, чтобы с любой станции оставалась возможность добраться с помощью метро до любой другой. Сколькими способами руководство может осуществить свой замысел, если **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$?

Задача 8. Пусть числа a, b, c не все совпадают друг с другом. Описать все наборы параметров (a, b, c), при которых данная система уравнений имеет решения в действительных числах x, y, z:
$$\begin{cases} x^2 - zy = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$$

Задача 9. Относительно квадратной матрицы (a_{ij}) известно, что сумма ее элементов в каждом наборе, соответствующем произведению элементов, входящих в определитель (сумма элементов, выбранных по одному из каждого столбца и каждой строки, $\sum_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, σ — перестановка из S_n) одна и та же (не зависит от $\sigma \in S_n$). Доказать, что $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, где в матрице (b_{ij}) столбцы состоят из одинаковых элементов, а в матрице (c_{ij}) строки состоят из одинаковых элементов.

Задача 10. Даны две окружности ω_1, ω_2, расположенные вне друг друга. Найти геометрическое место центров M окружностей, каждая из которых касается обеих заданных окружностей.

Задачи, 2014 г.

Задача 1. Пусть $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Найдите значение 100-й производной $f^{(100)}(0)$.

Задача 2. Рассмотрим все (комплексные) корни уравнения $x^{2014} + 2015x + 2016 = 0$. Найдите сумму их 2014-ых степеней.

Задача 3. Пусть
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(\sin x)\, dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(\cos x)\, dx.$$
Какой из интегралов больше I_1 или I_2?

Задача 4. Квадратная матрица A размера 20×20 невырождена. Какое наименьшее значение может иметь ранг подматрицы 12×13 матрицы A? (подматрица получается вычеркиванием из A некоторых строк и столбцов).

Задача 5. Найти предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^k}{n^n}.$$

Задача 6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, причем

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}.$$

Докажите, что треугольник равносторонний.

Задача 7. Неразборчивый жених женится на первой желающей выйти за него замуж, а потом, как только встретит более привлекательную партию, оформляет развод и заключает новый брак. Потенциальные n невест (женщин, не возражающих против брака с ним) могут быть строго ранжированы по своей привлекательности, *но* встречаются жениху в случайном порядке, все их перестановки равновероятны. Хватит ли в среднем места в паспорте жениха для простановки всех штампов о браках и разводах, если $n = 50$, а паспорт вмещает всего 5 штампов о браках (вместе с 4 штампами о разводах)?

Задача 8. Пусть функции f и g заданы на всей числовой прямой. Может ли оказаться так, что $f(g(x)) = x^2$, а $g(f(x)) = x^3$ для всех $x \in \mathbb{R}$?

Задача 9. В каждой строке невырожденной квадратной $n \times n$ матрицы A стоит только одно отличное от 0 число, равное $+1$ или -1. Докажите, что найдется такое m, при котором m-я степень матрицы совпалаеи с матрицей, транспонированной к A, то есть $A^m = A^T$.

Задача 10. Рассмотрим множество неупорядоченных пар точек окружности. Наделим его естественной топологией (топологией произведения, фактор-топологией). Докажите, что полученное множество гомеоморфно листу Мёбиуса.

Задачи, 2015 г.

Задача 1 (4+3). Дан многочлен $P(x) = x^3 - ax - b$, где a и b — положительные числа. Доказать, что **1)** ровно один корень многочлена $P(x)$ является вещественным положительным числом; **2)** этот корень лежит в интервале $(\max\{\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}\}, \sqrt{a} + \sqrt[3]{b})$.

Задача 2 (3+4). **1)** Докажите, что площадь треугольника, заключенного между осями координат и касательной к линии $xy = 1$, $x, y, \geqslant 0$, не зависит от выбора точки касания. **2)** Докажите, что объем тетраэдра, заключенного между координатными плоскостями и касательной плоскостью к поверхности $xyz = 1$, $x, y, z \geqslant 0$, не зависит от выбора точки касания.

Задача 3. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \times \det(A - B).$$

Задача 4. Найти функцию $f : (\frac{1}{e}, \infty) \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$\int_0^{y'(x)} \frac{e^t\,dt}{1+2e^t} = \frac{1}{2}\ln x \tag{1}$$

с начальным условием $y(1) = -2/3$.

Задача 5. Пусть S_M обозначает центральную симметрию плоскости относительно точки M. Докажите, что точка W является центром тяжести треугольника ABC (точкой пересечения медиан) тогда и только тогда, когда композиция $S_W \circ S_C \circ S_W \circ S_B \circ S_W \circ S_A$ представляет собой тождественное преобразование.

Задача 6. Каких граней у 7-мерного куба $[0;1]^7 \subset \mathbb{R}^7$ больше, трехмерных или четырехмерных?

Задача 7. Пусть S — некоторый класс функций вида $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям: a) функции $f_1(x) = e^x - 1$ и $f_2(x) = \ln(x+1)$ принадлежат классу S; b) если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S, то функции $f(x) + g(x)$ и $f(g(x))$ также принадлежат S; c) если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \geqslant 0$, то функция $f(x) - g(x)$ также принадлежит S. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S, то и функция $f(x)g(x)$ тоже принадлежат классу S.

Задача 8. Рассматриваются матрицы, состоящие из пяти строк и восьми столбцов, все строки которых попарно различны. Доказать, что во всякой такой матрице можно указать четыре столбца, при вычеркивании которых строки получившейся матрицы также будут попарно различны. Показать, что пять таких столбцов можно указать не всегда.

Задача 9. Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трех орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны $1/2$, результаты бросков независимы один от другого.

Задача 10. Последовательность $\{f_n\}$, состоящую из натуральных чисел, можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) = f_n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел). Для трех таких последовательностей a_n, b_n и c_n выполняются следующие условия: отображение a — сюръективно, отображение b — инъективно, $c_n = a_n - b_n + 1$. Доказать, что $c_n = 1$ для всех n.

Ответы и указания

10-1. r.
10-2. $y = 3x^2 - 6x + 5$.
10-3. Используйте проекцию на прямую, исходящую из начала координат и совпадающую по направлению с вектором искомой разности.
10-4. 63.
10-5. Выделите целую часть дроби под интегралом.
10-6. $\pi/2$
10-7. $1/448$.
10-8. **а)** $X = 45$; **б)** $X = 19$.
10-9. В иррациональных точках нет, в 0 — да.
10-10. Не существует.

11-1. Да.
11-2. Нет, не может.
11-3. $32\sqrt{10}$
11-4. 1 при нечетном n и 2 при четном $n > 0$.
11-5. 1.
11-6. $-\infty$
11-7. Нет, не существует
11-8. $2n/c$.
11-9. Пусть $\overrightarrow{OM_i} = \mathbf{e}_i r_i$, где $||\mathbf{e}_i|| = 1$. Запишите уравнение эллипса для точки M_i в терминах координат вектора $\mathbf{e}_i$.
11-10. Попробуйте записать неравенство в терминах $|\xi - \eta|$ и $|\xi + \eta|$.

12-1. Доказательство нетривиального следствия от противного.
12-2. Да, можно.
12-3. Степень многочлена не менее 2, но не равна 3.
12-4. При $a \in [0, 2]$.
12-5. $n + m - r$.
12-6. $f(y) = e^{-y} - 1$.
12-7. **а)** Воспользуйтесь индукциией по n. **б)** Куб представляе собой двудольный граф с равным числом вершин в каждой доле.
12-8. Представьте $|\overrightarrow{BA_i}|$ как $|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}|$.
12-9. Да, может.
12-10. $\frac{(n-1)!}{n^{n-2}}$.

13-1. $y = \begin{cases} \frac{1}{4}\exp(-x), & x \leqslant 0 \\ \exp(x)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right), & x > 0. \end{cases}$

13-2. **а)** Существует, например x^3; **б)** существует.

13-3. $\ln(e^x f(x) + 1) + C$.

13-4. По параболе.

13-5. В среднем 2-мя способами.

13-6. $n/3$.

13-7. **а)** 16 способами; **б)** 45 способами.

13-8. $a + b + c > 0$.

13-9. Любой минор матрицы (a_{ij}) обладает тем же свойством, что и вся исходная матрица (a_{ij}). Рассмотрите подходящие миноры второго порядка.

13-10. Две гиперболы с общими фокусами.

14-1. $-2 \times 100!$

14-2. -4060224.

14-3. $I_1 > I_2$.

14-4. Минимальный возможный ранг равен 5

14-5. Предел равен 1.

14-6. Условие эквивалентно тому, что $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{0}$.

14-7. В среднем места в паспорте хватит.

14-8. Нет, не может.

14-9. Совокупность всех таких матриц образует конечную группу относительно умножения матриц, при этом все матрицы ортогональны.

14-10. Множество упорядоченный пар точек окружности гомеоморфно тору.

15-1. **а)** Рассмотрите точки пересечения графика функции $y = x^3 - ax$ с осью абсцисс. **б)** Рассмотрите знак полинома $P(x)$ в точках, задающих концы рассматриваемого интервала.

15-2. Рассмотрите уравнение **а** касательной прямой; **а** касательной плоскости; найдите пересечение касательной с осями координат.

15-3. Решение легко получается преобразованием определителя (имеется несколько вариантов решения задачи).

15-4. $\frac{3x-1}{3}\left(\ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) - 1\right)$.

15-5. Симметрия плоскости относительно точки M с радиус-вектором $\mathbf{m}$ отображает точку с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в точку с радиус-вектором $\mathbf{x}+2(\mathbf{m}-\mathbf{x}) = 2\mathbf{m}-\mathbf{x}$.

15-6. Трехмерных.

15-7. Докажите, что $f(x)g(x) + f(x) + g(x) \in S$.
15-8. Рассмотрите строки матрицы как точки пространства $\mathbb{R}^8$.
15-9. Составьте систему уравнений, связывающую три переменных — вероятности выпадения 3-х орлов после того, как а) уже выпали два орла; б) уже выпали орел и решки; в) уже выпали решки и орел.
15-10. Воспользуйтесь принципом Дирихле при доказательстве от противного.

Решения

Решения задач, 2010 г.

10-1. Пусть $a = re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$, $c = re^{i\gamma}$. Имеем

$$\frac{ab + bc + ca}{a + b + c} = abc\frac{1/a + 1/b + 1/c}{a + b + c} = re^{i\alpha+i\beta+i\gamma}\,\frac{e^{-i\alpha} + e^{-i\beta} + e^{-i\gamma}}{e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}}$$

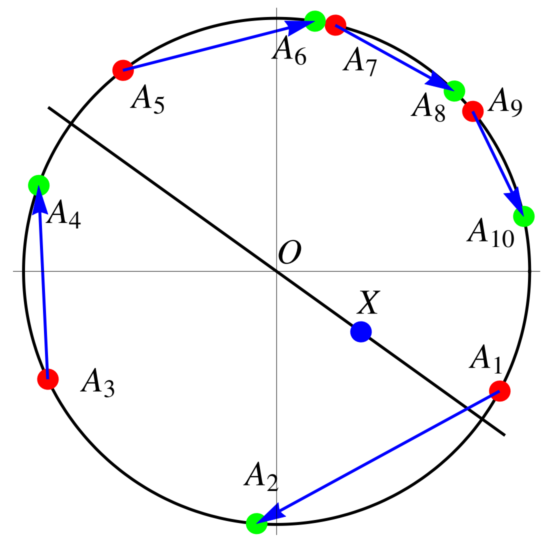
Величины в числителе и знаменателе дроби взаимно сопряженные. Поэтому их модули совпадают. Итак, модуль всего выражения равен r.

10-2. Центр тяжести треугольника — точка пересечения его медиан. В частности, медиана, проведенная из точки C, проходит через середину отрезка AB, т.е. через точку $O(0;0)$. Искомая точка $M(t,z)$ делит отрезок OC в отношении $2:1$, считая от точки C. Это значит, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC}$. Поэтому координаты t, z можно найти как $t = x/3$, $z = y/3$. Из этих соотношений следует, что $z = y(x)/3 = y(3t)/3 = 3t^2 - 6t + 5$.

10-3. Концы A_i данных векторов лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке O (нумерация идет по часовой стрелке). Нечетный номер соответствует красному цвету, а четный — зеленому. Имеем

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X} &= \left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n-1}}\right) = \\
&= \left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{OA_{2n}} - \overrightarrow{OA_{2n-1}}\right) = \\
&= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}
\end{aligned}$$

Проведем через центр O прямую, параллельную $\overrightarrow{X}$, и спроецируем на нее все слагаемые. Проекция вектора $\overrightarrow{X}$ на эту прямую будет совпадать с ним самим по абсолютной величине.



Все векторы $\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$ разобьются на две группы: те, которые сонаправлены $\overrightarrow{X}$, и которые противонаправлены. Заметим, что в каждой группе проекции точек A_i расположены на прямой в том же порядке, как и сами точки A_i на окружности. Это значит, что сумма проекций равна проекции суммы.

В каждой группе эта сумма не больше диаметра окружности, т.е. лежит в пределах от 0 до 2. Это значит, что разность двух сумм не больше $2 - 0 = 2$ и не меньше $0 - 2 = -2$.

10-4. Обозначим искомые подмножества через A_i, $i = 1, \ldots, k$. Построим таблицу, в клетках которой записаны общие элементы каждой пары множеств. Ясно, что таблица будет симметричной относительно главной диагонали. Все номера, стоящие выше диагонали, различны. Действительно, повторяющийся номер соответствовал бы двум парам множеств, т.е. принадлежал бы не менее, чем трем из них. Но тогда в таблице содержится $1+2+\ldots+(k-1) = (k-1)k/2$ элементов. Итак, $(k-1)k/2 \leqslant 2010$, откуда $k \leqslant 63$.

Очевидно, что мы можем создать некоторую таблицу, симметричную относительно главной диагонали, в которой все элементы лежащие выше её различны и взяты из множества $\{1, \ldots, 2010\}$. Эта таблица дает пример выбора A_i, $i = 1, \ldots, 63$, так как можно считать, что i-ое множество состоит из всех элементов соответствующей строки.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\ldots$
A_1		1	2	4	7	$\ldots$
A_2	1		3	5	8	$\ldots$
A_3	2	3		6	9	$\ldots$
A_4	4	5	6		10	$\ldots$
A_5	7	8	9	10		$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

10-5.

$$\int \frac{(x-1)^2\,dx}{x^2+e^x+1} = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2+e^x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{2x+e^x}{x^2+e^x+1}\right)dx =$$

$$= x - \int \frac{d(x^2+e^x+1)}{x^2+e^x+1} = x - \ln(x^2+e^x+1) + C.$$

10-6. Заметим, что при отображении sin вещественная ось переходит в вещественную, а мнимая — в мнимую. Рассмотрим треугольник с вершинами 0, a и bi. Его образом будет кривая Γ, концы которой соединены с точкой 0. Значит, искомая сумма равна сумме углов полученного криволинейного треугольника за вычетом прямого угла при вершине 0. Но функция $\sin(z)$ является аналитической, везде за исключением точек в которой $\cos(z) = 0$, то есть точек $z \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которые исключены по условию задачи. Поэтому рассматриваемое отображение является конформным и не меняет углов между линиями.

10-7. Искомое число есть $\frac{m}{n(14)}$, где $n(14)$ — общее число вариантов остановки волчка в 14 секторах при 6 бросаниях, а m — число вариантов, при которых выпадут секторы $1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что $n(14) = 14^6$. Заметим, что число m не зависит от общего числа секторов на волчке. Действительно, исследуемое событие означает, что волчок останавливался только на секторах 1–6, но никогда — на пустом промежутке перед сектором номер 7. Тогда не важно, сколько именно секторов есть между 7-ым и 1-ым.

Рассмотрим аналогичную задачу в случае 7 секторов. Тогда вероятность выпадения 6 конкретных секторов равна вероятности того, что не выпадет оставшийся седьмой сектор. Для каждого невыпавшего сектора она одинакова и, следовательно, равна $\frac{1}{7} = \frac{m}{n(7)} = \frac{m}{7^6}$. Значит, $m = 7^5$, а искомая вероятность равна $\frac{7^5}{14^6} = \frac{1}{7 \cdot 2^6} = \frac{1}{448}$.

10-8. Нам требуется по числу этажей в доме найти необходимое число бросков. Попробуем решить обратную задачу: по числу бросков найти этажность, для которой гарантированно можно определить самый нижний этаж разбития шаров.

Обозначим через $p(k, n)$ максимальную этажность дома, для которого это можно сделать k шарами за n бросаний. Можно считать, что $p(k, 0) = 0$.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Если мы бросим шарик хотя бы со второго этажа и он разобьется, то мы не узнаем, можно ли его было бросить с первого. Итак, один шарик надо бросать с 1-го, 2-го и так далее этажей, пока он не разобьется. Значит, $p(1, n) = n$.

Пусть теперь шариков больше, чем 1. Бросим первый шарик с этажа s_n. Если он разбился, то у нас остается $k - 1$ шарик, $n - 1$ бросок и $s_n - 1$ непроверенных этажей. Значит, $s_n - 1 \leqslant p(k - 1, n - 1)$ и максимальное $s_n = p(k - 1, n - 1) + 1$. В частности, $s_1 = p(k - 1, 0) + 1 = 1$. Более высокие, чем s_n, этажи проверять не надо, так что $p(k, n) \geqslant s_n$.

Если же при первом бросании шар остался цел, то мы имеем в распоряжении еще $(n-1)$ попытку и снова k целых шара. За $n-1$ попытку мы можем проверить $p(k, n-1)$ этажей, начиная с номера s_n+1 (все более низкие проверять уже не надо). Поэтому мы можем определить нужный этаж во всем интервале от 1 до $s_n + p(k, n-1)$.

Итак, $p(k,n) = s_n + p(k, n-1) = s_n + s_{n-1} + p(k, n-2) = \ldots = s_n + s_{n-1} + \ldots + s_1 + p(k, 0) = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Как мы показали выше, $s_n = p(k-1, n-1)+1$

а) Пусть у нас есть два шарика. Имеем $s_n = p(1, n-1) + 1 = n$. Тогда $p(2,n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Итак, за 44 броска можно проверить не более $\frac{44 \cdot 45}{2} = 990$ этажей, а за 45 — уже $\frac{45 \cdot 46}{2} = 1035$. Значит, 45 бросков хватит.

б) Для трех шариков имеем $p(3,n) = \sum_{i=1}^{n} s_i$, где $s_i = p(2, i-1)+1 = \frac{(i-1)i}{2}+1$. Последнее выражение можно переписать в виде $(i^3 - (i-1)^3 + 5)$. Суммируя по i от 1 до n, получим $p(3, n) = (n^3 + 5n)/3$. (*Замечание. Можно использовать и стандартные формулы для сумм степеней*).

Поскольку $(18^3 + 5 \cdot 18)/6 < 1000 < (19^3 + 5 \cdot 19)/6$, то $X = 19$.

10-9. Выберем какое-нибудь иррациональное число x_0 . Приращение $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x)$. Для рационального $x = \frac{m}{n}$ оно равно x/n^2. Известно, что для любого иррационального x_0 существует последовательность наилучших приближений, т.е. чисел вида $x = \frac{m}{n}$ таких, что $|\Delta x| = \left| x_0 - \frac{m}{n} \right| \leqslant 1/n^2$. В этих точках $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| = \left| \frac{x}{n^2 \Delta x} \right| \leqslant \left| \frac{x_0}{3} \right|$. Последнее неравенство верно в достаточно малой окрестности x_0. Итак, сколь угодно близко к числу x 0 существуют точки, в которых $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right|$ равно 0 (любые иррациональные), и точки, в которых $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right|$ отделено от 0. Значит, это отношение не имеет предела при $\Delta x \to 0$, а функция не имеет производной.

Исследуем теперь производную в точке 0. Имеем $\Delta x = x - 0 = x$, так что $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right|$ равно 0 для иррациональных x и $\frac{x/n^2}{x} = \frac{1}{n^2}$ для рациональных $x = \frac{m}{n}$ Если x находится достаточно близко к 0, $|x| < 1/k$, то $n > k$ и $n^{-2} < k^{-2}$.

Значит, $\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| = f'(0) = 0$.

10-10. Предположим, что искомое f существует. В силу свойств 1), 2) имеем $f(f(X)) = f(X)$ для всех $X = 2^{\mathbb{N}}$. Множество $f(\emptyset) = \emptyset$, т.е. конечно. Для любого конечного (т.е. эквивалентного $\emptyset$) множества K имеем $f(K) = f(\emptyset)$. Если пересечение множеств A и B конечно, то пересечение их образов есть $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset)$. Выберем произвольную бесконечную последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ бесконечных попарно не пересекающихся подмножеств $\mathbb{N}$. В силу свойства 1) последовательность $f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_n), \ldots$ будет состоять из бесконечных множеств. Как показано выше, образы $f(X_n)$ пересекаются между собой только по множеству $f(\emptyset)$.

Значит, множества вида $f(X_n) \setminus f(\emptyset)$ попарно не пересекаются. Выберем в каждом из них по одному элементу a_n (все они различны). Множество всех a_n обозначим через A.

Какое значение может принимать отображение f на множестве A? Пересечение $A \cap f(X_n) = \{a_n\}$ конечно, следовательно, $f(A) \cap f(f(X_n)) = f(A) \cap f(X_n) = f(\emptyset)$ для каждого n. В частности, пересечение $f(A)$ и $f(X_n)$ не содержит элемент a_n. Заметим, что в множество $f(X_n)$ элемент a_n входит. Значит, он не входит в $f(A)$.

Это верно при всех n, так что $f(A)$ отличается от A *бесконечным* числом элементов, что противоречит соотношению $A \sim f(A)$.

Решения задач, 2011 г.

11-1. Можно выбрать одну из матриц так, что ее квадрат равен нулевой или единичной матрице. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В то же время матрица $B^2 = E$, т.е. перестановочна с любой матрицей.

11-2. Точка самопересечения определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} x = a_1t^2 + b_1t + c_1 = a_1z^2 + b_1z + c_1 \\ y = a_2t^2 + b_2t + c_2 = a_2z^2 + b_2z + c_2 \end{cases},$$

где $z \neq t$. С учетом этого соотношения система приводится к виду $\begin{cases} -a_1(t+z) = b_1 \\ -a_2(t+z) = b_2 \end{cases}$. Пусть эта система имеет решение. Обозначим $t + z = \lambda$. Подставляя найденные значения b_i в уравнения кривой, получаем, что $\begin{cases} x = a_1(t-\lambda) + c_1 \\ y = a_1(t-\lambda) + c_2 \end{cases}$. Значит, $a_2x - a_1y = a_2c_1 - a_1c_2$. Если a_1 и a_2 не обращаются в 0 одновременно, то это — уравнение прямой, на которой и лежат все точки кривой. В противном случае x и y. постоянны.

Замечание. Кривая, описанная в задаче, может быть параболой, лучом или точкой на плоскости.

11-3. Пусть O — центр доски; M — центр клетки $d3$; M_i, $i = 1, \dots, 64$ — центры всех 64 клеток доски. Имеем $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_i}$. Сумма этих векторов равна $64\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{64} \overrightarrow{OM_i}$ Последняя сумма равна $\overrightarrow{0}$, так как все векторы разбиваются на пары противоположных друг другу. Длина вектора $\overrightarrow{MO}$ равна $\sqrt{1.5^2+0.5^2}=\sqrt{10}/2$.

11-4. Заметим, что $x=1$ является корнем многочлена $P(x)$. Для остальных x преобразуем многочлен к виду

$$P(x)=nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x-1}.$$

Все сводится к подсчету корней, отличных от 1 для многочлена $Q(x)$, стоящего в числителе этой дроби.

Имеем $Q'(x)=n(n+1)x^n-(n+1)nx^{n-1}=n(n+1)x^{n-1}(x-1)$. Производная обращается в 0 при $x=0$ и $x=1$. Кроме того, $Q(0)=1$, $Q(1)=0$. В зависимости от четности n имеется два варианта поведения функции $Q(x)$.

а) n —четное.

x	$-\infty$	<0	0	$(0,1)$	1	>1
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Функция $Q(x)$ имеет два корня: 1 (кратности 2) и еще один в промежутке $(-\infty,0)$.

б) n —нечетное.

x	<0	0	$(0,1)$	1	>1
$Q'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Функция $Q(x)$ имеет единственный корень: 1 (кратности 2).

11-5. Первая строка матрицы (q_{ij}) состоит из единиц. Вычтем ее из всех последующих. Тогда в клетках останется количество общих делителей i и j, не считая 1. В частности, в строке с номером 2 будут стоять 1 (в столбцах с четными номерами) и 0 (в нечетных столбцах).

Вычтем эту строку из всех строк, номера которых делятся на 2. Тогда в строках, начиная с третьей, будут стоять количества всех общих делителей кроме 1 и 2. Продолжая этот процесс, получим матрицу, у которой каждый элемент равен числу общих делителей i и j, *не меньших* i.

Ясно, что ниже диагонали в такой матрице стоят 0, а на диагонале — 1.

11-6. Имеем $na_{n+1}=(n+1)a_n-\max(a_n;n^2)\leqslant(n+1)a_n-a_n=na_n$, следовательно, $a_{n+1}\leqslant a_n$, то есть последовательность не возрастает. Более того, пока $n^2\leqslant an$, $a_{n+1}=a_n=a_1$, т.е. последовательность при таких n постоянна. Как только $n^2\geqslant a_1$, имеем $na_{n+1}=(n+1)a_n-\max(a_n;n^2)=(n+1)a_n-n^2\leqslant a_1+na_1-n^2$, откуда $a_{n+1}\leqslant a_1/n+a_1-n$, поэтому $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

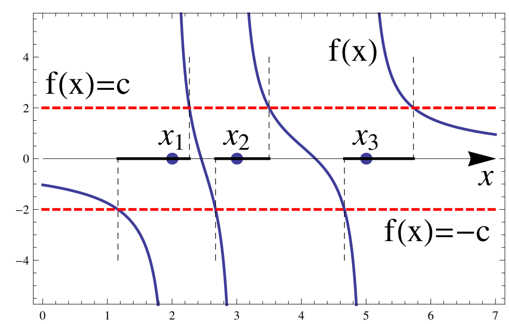
11-7. Докажем промежуточный факт, что искомая функция стремится к 0 в любой точке отрезка. Пусть $0 < |x-a| < f(a)$, тогда $f(x) < f(a)$. Насколько велико может быть значение $f(x)$?

Если $f(x) > |x-a|$, то $f(a) < f(x)$, чего быть не может. Значит, для всех x, достаточно близких к a , имеем $0 < f(x) \leqslant |x-a|$. Из этого по теореме о двух милиционерах и следует, что $f(x)$ стремится к 0.

Докажем теперь, что функция с таким свойством не может принимать только положительные значения. Обозначим $A_n = \{x \in [0;1] : f(x) > 1/n\}$. Если это множество бесконечно, то у него существует предельная точка x_n. Тогда $\lim_{x\to x_n} f(x) \geqslant 1/n$, что противоречит предположению.

Итак, множества A_n конечны, а их объединение не более чем счетно. Но в него входят все точки, для которых $f(x) > 0$. Таким образом, существует бесконечное число точек, в которых $f(x) = 0$.

11-8. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-x_i}$. Ее производная отрицательна, так что она убывает на всех интервалах между соседними корнями (и вне них). При этом она пробегает все значения от 0 до $-\infty$ при $x \in (-\infty, \min_i\{x_i\})$; все значения от ∞ до 0 при $x \in (\max_i\{x_i\}, \infty)$; все значения от $+\infty$ до $-\infty$ между каждой парой соседних корней.



Значит, около каждой точки x_i существует промежуток, в котором $f(x) > c$ или $f(x) < -c$. Это промежуток между корнями уравнений $f(x) = -c$ и $f(x) = c$. Сумма длин этих промежутков есть $A - B$, где A — сумма корней уравнения $f(x) = c$, B — уравнения $f(x) = -c$.

Уравнение $f(x) = c$ можно переписать в виде:

$$\sum_{j=1}^n \prod_{i:i\neq j} (x-x_i) = c\prod_{i=1}^n (x-x_i).$$

Перенесем все слагаемые на правую сторону и приведем подобные. Коэффициент при x^n равен c, коэффициент при x^{n-1} равен $-c(x_1+x_2+\ldots+x_n)-n$. Последнее слагаемое получается из n слагаемых левой части. Итак, уравнение приводится к виду

$$c\,x^n - \left(c\sum_{i=1}^n x_i + n\right) x^{n-1} + \ldots = 0.$$

По теореме Виета сумма корней такого уравнения есть $A = (c\sum_{i=1}^n x_i + n)/c$. Величину B получаем, заменив c на $-c$, то есть $B = (c\sum_{i=1}^n x_i - n)/c$. Итак, $A - B = 2n/c$.

11-9. а) Имеем $\overrightarrow{OM_1} = r_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Тогда перпендикулярному вектору соответствует полярный угол $\varphi + \pi/2$, т.е. в координатах он имеет вид $\overrightarrow{OM_2} = r_2(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Тот факт, что точка M_1 лежит на эллипсе, записывается в виде $r_1^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$, откуда $\frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$.

Аналогично $\frac{1}{r_2^2} = \frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}$. Складывая эти равенства, получаем желаемое.

б) Запишем заданные вектора через их орты, т.е. $\overrightarrow{OM_i} = \mathbf{e}_i r_i$, где векторы $\mathbf{e}_i = (e_i^1, e_i^2, e_i^3)$ единичные и попарно ортогональные. Подставляя координаты $\overrightarrow{OM_i}$ в уравнение эллипса, получаем, что

$$\frac{1}{r_i^2} = \frac{(e_i^1)^2}{a^2} + \frac{(e_i^2)^2}{b^2} + \frac{(e_i^3)^2}{c^2}$$

Сложим три таких равенства, получим

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{\sum_{i=1}^3 (e_i^1)^2}{a^2} + \frac{\sum_{i=1}^3 (e_i^2)^2}{b^2} + \frac{\sum_{i=1}^3 (e_i^3)^2}{c^2}$$

Координаты (e_i^j) образуют ортогональную матрицу. Для такой матрицы не только сумма квадратов элементов столбца равна 1, но и сумма квадратов элементов каждой строки. Это и завершает доказательство.

Заметим, что оно подходит для пространства любой размерности.

11-10. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\mathrm{M}(\max(\xi^2, \eta^2)) - 1 \leqslant \sqrt{1-\rho^2}.$$

Заметим, что $1 = \frac{\mathrm{M}\,\xi^2 + \mathrm{M}\,\eta^2}{2}$.

Преобразуем левую часть. Имеем $\mathrm{M}(\max(\xi^2, \eta^2)) - 1 = \mathrm{M}(\max(\xi^2, \eta^2)) - \frac{\mathrm{M}\,\xi^2 + \mathrm{M}\,\eta^2}{2}$. Но $\max(\xi^2, \eta^2) - (\xi^2 + \eta^2)/2 = |\xi^2 - \eta^2|/2 = |\xi - \eta||\xi + \eta|/2$. Итак, левую часть неравенства можно представить в виде $\frac{1}{2}\,\mathrm{M}xy$, где $x = |\xi - \eta|$, $y = |\xi + \eta|$.

Теперь преобразуем подкоренное выражение. Заметим, что при заданных условиях $\rho = \mathrm{M}\,\xi\eta$, так что

$$1-\rho^2 = \left(\frac{\mathrm{M}\,\xi^2 + \mathrm{M}\,\eta^2}{2}\right)^2 - (\mathrm{M}\,\xi\eta)^2 = \frac{1}{4}\,(\mathrm{M}\,\xi^2 + \mathrm{M}\,\eta^2 - 2\,\mathrm{M}\,\xi\eta)(\mathrm{M}\,\xi^2 + \mathrm{M}\,\eta^2 + 2\,\mathrm{M}\,\xi\eta).$$

Последнее выражение есть $\frac{1}{4}\,\mathrm{M}\,x^2\,\mathrm{M}\,y^2$.

Итак, доказываемое утверждение можно переписать в виде $\mathrm{M}xy \leqslant \sqrt{\mathrm{M}\,x^2 \cdot \mathrm{M}\,y^2}$. Это неравенство верно для всех случайных величин x, y.

Решения задач, 2012 г.

12-1. Из второго соотношения первое очевидно следует.

Следствие второго соотношения из первого будем доказывать от противного. Предположим, что для некоторого a выполняется первое соотношение $f(f(a)) = a$, но $f(a) \neq a$. Обозначим $b = f(a)$. По предположению имеем $a = f(b)$. Но тогда разности $a-b$ и $f(a)-f(b)$ противоположны (по знаку), что противоречит возрастанию функции f.

12-2. Расположим куб в первом октанте, взяв сторону малого кубика за 1. Пронумеруем кубики тремя числами (m, n, k) — координатами самой ближней к началу координат вершины куба. Эти числа будут меняться от 0 до 8. Тогда в каждом кубе можно поставить число $(m+n+k) \bmod 9 + 1$.

12-3. Многочлен с корнями 1 и 3 можно записать в виде

$$P(x) = (x-1)(x-3)Q(x) = (x^2-4x+3)Q(x).$$

Найдем производную $P'(x) = (2x-4)Q(x) + (x^2-4x+3)Q'(x)$. Ее значение в точке 2 равно $P'(2) = -Q'(2) = 0$.

Разложим многочлен $Q(x)$ по степеням $(x-2)$, $Q(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \ldots$, здесь $a_1 = Q'(2) = 0$. Значит, $Q(x)$ либо константа (чтобы рисунок был справедлив в качестве неё можно взять любое положительное число), либо многочлен степени n не меньше 2. В качестве последнего можно взять, например, $Q(x) = (x-2)^n + 2^n$, он положителен на отрезке $[1, 3]$.

12-4. Имеем

$$I_2 - I_1 = \int_0^a (x-1)e^{x^2-2x}\,dx = \int_0^a e^{x^2-2x}/2\,d(x^2-2x) = \left(e^{(a-2)a} - 1\right)/2.$$

Последнее выражение отрицательно при отрицательном показателе степени, т.е. при $a \in [0, 2]$.

12-5. Пусть размер искомой матрицы будет $k \times k$. Сначала добавим к матрице новые столбцы (в количестве $k-n$ штук). Полученные таким образом m строк должны быть линейно независимыми, т.е. ранг промежуточной матрицы должен быть равен m. Но исходная матрица имела r независимых столбцов, значит, добавить нужно как минимум $m-r$ столбцов, из которых ровно $m-r$ не зависят от r исходных. Это возможно тогда и только тогда, когда имеется необходимое количество добавляемых столбцов, то есть если $k - n \leqslant m - r$.

Далее к матрице добавляем строки, чтобы сделать ее квадратной. Это возможно сделать, соблюдя требование невырожденности: если исходные m строк были линейно независимы, всегда можно найти еще $k - m$ не зависящих от них строк длиной k.

Итак, требуется лишь, чтобы $k \geqslant n + m - r$, откуда и получаем минимальный размер искомой матрицы.

12-6. Применим формулу Грина. Дифференцируя вторую скобку по x, а первую скобку по y получаем, что интеграл равен $\iint_D (-f(y) - f'(y))\,dxdy$, где D — область, ограниченная L. С другой стороны, он равен $\iint_D 1\,dxdy$. *В силу произвольности* D подынтегральное выражение в первом интеграле тождественно равно 1. Имеем дифференциальное уравнение $f'(y) = 1 - f(y)$, его решение есть $1 + Ce^{-y}$. С учётом начального условия получаем, что $C = 1$.

12-7. а). Для $n = 1$ одномерный куб есть одно ребро, утверждение задачи очевидно. Далее доказываем по индукции. $(n+1)$-мерный куб получается из n-мерного его “движением” вдоль “$n+1$-й оси”. По предположению индукции либо в перемещаемом n-мерном кубе, либо в том, который получился после перемещения, есть n закрашенных рёбер. Но рёбра, вдоль которых мы “двигались”, не могут все остаться незакрашенными — любая вершина $(n+1)$-мерного куба являются концом одного и только одного ребра, а закрашенных вершин больше половины, то есть больше, чем рассматриваемых рёбер.

б). Закрасим любую вершину, не будем красить её соседей, зато покрасим соседей соседей и т.д. Поскольку n-мерный куб представляет собой связный граф, то в конце концов мы рассмотрим все вершины, а поскольку все циклы в нашем графе имеют чётную длину, то мы не получим противоречия. То, что мы покрасим при этом ровно половину вершин, следует из “равноправправности” всех вершин куба и того, что если бы мы начали с соседа нашей начальной вершины и НЕ стали бы его красить, то получили бы ровно такую же раскраску.

12-8. Каждое слагаемое представим в виде $|\overrightarrow{BA_i}| = |\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}|$. Умножим это выражение на $|\overrightarrow{OA_i}| = 1$. Получим

$$|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}||\overrightarrow{OA_i}| \geqslant (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OA_i}) = 1 - (\overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OA_i}).$$

Суммируя эти неравенства, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{BA_i}| \geqslant n - \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OA_i}) = n - (\overrightarrow{OB_i}, \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}) = n.$$

12-9. Известно, что множество $\mathbb{Q}$ счетное, т.е. каждому его элементу можно поставить в соответствие номер, т.е. представить каждое рациональное число как p_n, $n \in \mathbb{N}$. Но из $\mathbb{Q}$ можно выбрать искомую систему подмножеств. Соответствующие номера дадут решение задачи. Например, можно взять $A_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : p_n < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Конечно, все эти множества будут бесконечными (для конечных множеств ответ был бы отрицательным).

12-10. Введем обозначения. "Брошенные" точки обозначим A_i, а граничные точки равных дуг — через B_i. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что одна из вершин B_k совпадает с одной из точек A_ℓ — очевидно, что множество $\{B_i\}$ можно поворачивать вокруг центра окружности до тех пор, пока не произойдёт совпадения, при этом, если разбиение на дуги было искомым, то оно останется таковым и после "поворота до упора". Заметим так же, что если искомое разбиение на дуги существует, то, с точностью до нулевой вероятности, точка A_ℓ определена однозначно — совместив конец дуги с любой другой точкой A_m , мы обнаружим на одной из дуг две точки. Действительно, центральный угол по часовой стрелке между A_ℓ и любой точкой A_m при $m > \ell$ составляет более $2\pi(m-\ell)/n$. Поэтому, если мы совместим начало дуги с Am, то дойдя по часовой стрелке до A_ℓ, мы обнаружим "лишние" точки.

Итак, для каждого ℓ и фиксированного набора дуг, "стартующего" с A_ℓ, нужно найти вероятность того, что остальные $(n-1)$ точек распределятся по одной на дуге (конкретно, на $n-1$ дугах, не считая той, что занята точкой $A-\ell$), а потом просуммировать по всем выбора ℓ — умножить на n. Легко видеть, что для фиксированного ℓ эта вероятность равна

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

Решения задач, 2013 г.

13-1. Решаем уравнение отдельно для $x > 0$ и $x < 0$. Получаем, что

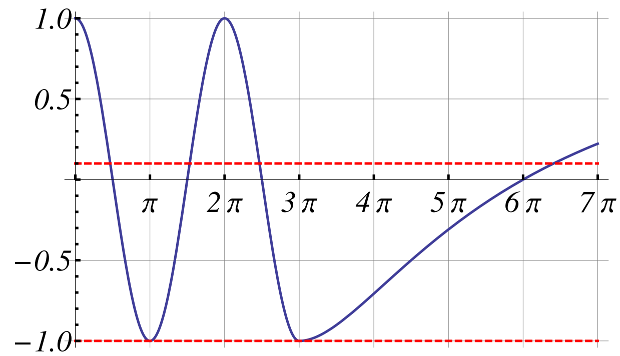
$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} + e^x(C_1x + C_2), & x \leqslant 0 \\ e^x\left(\frac{x^2}{2} - C_3x + C_4\right), & x > 0. \end{cases}$$

Из ограниченности следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Осталось согласовать значения y и y' в 0.

13-2. а) Существует, например x^3.
б) Существует, например

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant 3\pi, \\ \cos \frac{3\pi^2}{x}, & x > 3\pi, \end{cases}$$

(см. график справа).



13-3. Умножим обе части обе части подынтегрального выражения на e^x. Имеем

$$\int \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x f(x) + 1} dx = \int \frac{(e^x f(x) + 1)'}{e^x f(x) + 1} dx = \ln(e^x f(x) + 1) + C.$$

13-4. Выберем систему координат на плоскости, по отношению к которой ℓ — это ось абсцисс, а точка C лежит на оси ординат и имеет координаты $(0; 2c)$. Движущиеся точки A и B имеют координаты $(2u; 0)$ и $(2u+2a; 0)$ соответственно. Середина стороны AC имеет координаты $(u; c)$. Вектор $\overrightarrow{CA}$ имеет координаты $(2u; -2c)$, а вектор, перпендикулярный $\overrightarrow{CA}$ имеет координаты $(c; u)$. Серединные перпендикуляры к AC и AB имеют соответственно уравнения: $x = u + ct$, $y = c + ut$ и $x = 2u + a$. Решая эту систему, находим координаты центра тяжести описанной окружности $x = 2u + a$, $y = c + u(u + a)/c$. Исключая параметр u, получим уравнение кривой, по которой движется центр описанной окружности:

$$y = c + \frac{(x-a)(x+a)}{4c} = \frac{1}{4c}x^2 + c - \frac{a^2}{4c}.$$

13-5. Рассмотрим случайную величину ξ_i, которая равна 1, если 4 карточки с номерами i, $i+1$, $i+2$, $i+3$ составляют слово «мама» и 0 в противном случае. Вероятность того, что i-ая величина будет равна 1, есть 1/16.

Искомое количество способов есть сумма $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{32}$. Поскольку среднее от суммы равно сумме средних, то

$$\mathrm{M}\,\xi = \mathrm{M}\,\xi_1 + \mathrm{M}\,\xi_2 + \ldots + \mathrm{M}\,\xi_{32} = 32\left(1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{15}{16}\right) = 2.$$

13-6. Пусть $f(x) = x + ax^3 + o(x^3)$ и $g(x) = x + bx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Тогда $g(f(x)) = x + (a+b)x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Применяя эту формулу для $g \equiv f$, получаем, что $f^{(n)}(x) = x + nax^3 + o(x^3)$. Кроме того, если g — функция, обратная к f, то $g(x) = x - ax^3 + o(x^3)$.

Имеем при $x \to 0$: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, тогда $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Числитель дроби принимает вид

$$\left(x + n\frac{x^3}{6}\right) - \left(x - n\frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = n\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

13-7. а) У руководства имеется 6 возможностей для реализации замысла, если из центральной станции можно будет проехать в 2 стороны (Рис. 1). В случае, если центральная станция будет тупиковой, то к аналогичным 6 возможностям добавляется еще три (Рис. 2). Наконец, надо не забыть вариант, когда из центральной станции будут расходиться 3 ветки.

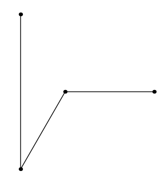


Рис. 1

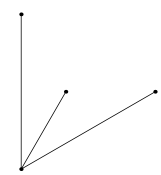


Рис. 2

б) Аналогично варанту а) имеется по 8 возможностей оставить по одной (случай 1), две (случай 2) или три (случай 3) подряд идущих веток из центральной станции, одновременно оставив подрядыдущие прогоны по кольцевой линии, начинающиеся идти по часовой или против часовой стрелки от одной из “крайних” оставленных веток. Если оставленные прогоны по кольцевой линии не таковые, то это добавляет еще 4 варианта к случаю 2 (аналогичные Рис. 2), и 8 вариантов к случаю 1. Наконец, имеется 4 возможности не ремонтировать ровно две центральные ветки напротив друг друга и одна воможность вообще ничего исходящее из центральной станции не ремонтировать.

Отметим, что эту задачу (при числе кольцевых станций $n = 3, 4$) можно решать множеством простых способов, все они при аккуратной организации перебора дадут правильный ответ. Интересно решение этой задачи для произвольного n. Оно может быть осуществлено как с помощью рекуррентного соотношения (аналогично общему рекуррентному соотношению для многочлена Татта, искомое число для произвольного графа метро есть его частный случай), так и с помощью матричной теоремы Киркгофа о деревьях.

13-8. Умножая первое уравнение на y, второе – на z, третье – на x, и складывая между собой, получаем $ay + bz + cx = 0$. Аналогично, умножая первое уравнение на z, второе – на x, третье – на y, и складывая, получвем $az + bx + cy = 0$.

Используя скалярное произведение векторов $\langle\cdot,\cdot\rangle$ эти уравнения можно переписать как

$$\langle(c,a,b),(x,y,z)\rangle = 0; \quad \langle(b,c,a),(x,y,z)\rangle = 0. \tag{2}$$

Условие коллинеарности векторов (c,a,b) и (b,c,a) ($(c,a,b) = k(b,c,a)$) приводит к системе уравнений относительно $\{a,b,c\}$, которая имеет лишь нулевое решение. Однако, в силу условия задачи хотя бы одно из чисел a,b,c не равно 0. Значит, уравнения (2) (относительно $\{x,y,z\}$) независимы. Их решением будет любой вектор, пропорциональный векторному произведению $[(c,a,b),(b,c,a)]$. То есть $(x,y,z) = \lambda(a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab)$. Для конкретизации λ нам нужно подставить эти выражения для $\{x,y,z\}$ в одно из уравнений системы.

Пусть, для определёности, $a \neq 0$. Подставляя эти выражения в первое уравнение, получаем, что $\lambda^2(a^3+b^3+c^3-3abc)a = a$, то есть $\lambda^2(a^3+b^3+c^3-3abc) = 1$. Чтобы существовало ненулевое λ, являющееся решением этого уравнения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $a^3+b^3+c^3-3abc > 0$.

Это можно считать ответом. Однако заметим, что левую часть можно разложить на множители в виде $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)/2$. Второй сомножитель в условиях задачи положителен, так что разрешимость системы сводится к условию $a+b+c > 0$. Система будет иметь два решения, отличающихся знаком.

13-9. 1) Очевидно, любой минор матрицы (a_{ij}) (рассматриваемый как матрица, подматрица) обладает тем же свойством, что и сама матрица (a_{ij}). В частности, для миноров второго порядка выполняется $a_{1j} + a_{ik} = a_{1k} + a_{ij}$, откуда $a_{ik} - a_{1k} = a_{ij} - a_{1j}$.

2) Отсюда следует, что если положить $b(j) = a_{1j}$, то $a_{ij} - b_j = c(i)$. То есть матрица $(b_{ij}) = (a_{1j})$ (все строки которой совпадают с первой строкой матрицы (a_{ij})) и матрица $(c_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij})$ удовлетворяют условию задачи.

13-10. Обозначим центры и радиусы заданных окружностей через O_1, O_2 и r_1, r_2 соответственно. Расстояние между центрами обозначим через d. Также введем обозначения $d_1 = |O_1M|$, $d_2 = |O_2M|$. Через R обозначим радиус искомой окружности ω. Если точка M лежит вне окружности ω_1, то выполняется одно из соотношений $R = d_1 - r_1$ или $R = d_1 + r_1$, в первом случае ω_1 лежит вне искомой ω, а во втором — внутри неё.

Если же точка M лежит внутри окружности ω_1, то соотношения примут вид $R = r_1 - d_1$ или $R = d_1 + r_1$. Аналогичные соотношения верны для второй окружности.

Чтобы по расстояниям d_1, d_2 можно было построить точку M, они должны удовлетворять условиям $d_1 + d_2 \geqslant d$; $-d \leqslant d_1 - d_2 \leqslant d$. Приравняем выражения для радиуса с разными индексами. Получим 9 вариантов:

(1) $d_1 - r_1 = d_2 - r_2$; значит, $d_1 - d_2 = r_1 - r_2 = \text{const}$.

(2) $r_1 - d_1 = d_2 - r_2$; значит, $d_1 + d_2 = r_1 + r_2$. Случай невозможен, так как $r_1 + r_2 < d$.

(3) $d_1 + r_1 = d_2 - r_2$; значит, $d_2 - d_1 = r_1 + r_2 = \text{const}$.

(4) $d_1 - r_1 = r_2 - d_2$; этот случай аналогичен случаю (2).

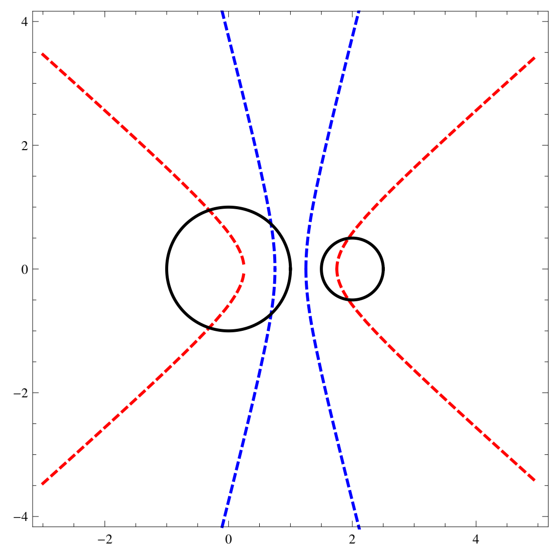
(5) $r_1 - d_1 = r_2 - d_2$; невозможно (точка M не может лежать внутри обеих окружностей).

(6) $d_1 + r_1 = r_2 - d_2$; значит, $d_1 + d_2 = r_2 - r_1$. Случай невозможен, так как $r_2 - r_1 < d$.

(7) $d_1 - r_1 = d_2 + r_2$; значит, $d_1 - d_2 = r_1 + r_2 = \text{const}$.

(8) $r_1 - d_1 = d_2 + r_2$; значит, $d_1 + d_2 = r_1 - r_2$. Случай невозможен, так как $r_1 - r_2 < d$.

(9) $d_1 + r_1 = d_2 + r_2$; значит, $d_2 - d_1 = r_1 - r_2 = \text{const}$.



Итак, остается только 4 соотношения, в каждом из которых разность расстояний от точки M до точек O_1, O_2 постоянна. Как известно, ГМТ этого соотношения — ветвь гиперболы. Условия (1) и (9) дают две ветви одной гиперболы, то же можно сказать и об условиях (3) и (7). Получаем две софокусные гиперболы, $|d_1 - d_2| = r_1 + r_2$ и $|d_2 - d_1| = r_1 - r_2$ (считаем, что $r_1 > r_2$). В случае, если окружности имеют равные радиусы, последняя гипербола вырождается в прямую (серединный перпендикуляр отрезка O_1O_2). Тот же ответ можно получить и расчетом.

Решения задач, 2014 г.

14-1. Перепишем функцию в виде $f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x(1-x)}{1-x^3}$ и разложим ее в ряд Тейлора. Получим, что

$$f(x) = 1-(2x-2x^2)(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3n}+\ldots) = 1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-2x^7+2x^8-\ldots$$

Мы видим, что коэффициенты повторяются через три, так что при степени 100 будет стоять то же коэффициент, что и при степени 1, то есть -2. С другой стороны, коэффициент при сотой степени ряда (многочлена) Тейлора есть $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$.

14-2. Для каждого корня x_i уравнения выполняется равенство $x^{2014} = -2015x - 2016$, так что искомая сумма может быть переписана в виде $-2015\sum_i x_i - 2014 \times 2016$. Но, в силу теоремы Виета, сумма всех корней равна 0, так что искомая сумма равна -2014×2016.

14-3. Классическая в этом случае замена $x \mapsto \pi/2 - x$, приводит к (известному) равенству

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx,$$

так что второй интеграл можно переписать как $\int_0^{\pi/2} \sin(\cos x)\,dx$, Но при $x \in (0;\pi/2)$ выполняется $\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$. Первое неравенство следует из $\sin x < x$, а второе — еще и из убывания косинуса.

14-4. Минимальный возможный ранг равен 5. Если бы ранг равнялся четырем или меньше, то проводя элементарные преобразования минора (с сопутствующими преобразованиями всей матрицы), мы бы получили минор размера 12×13, у которого 8 строк из 12 — нулевые. Но тогда преобразованная исходная матрица 20×20 (по-прежнему невырожденная) содержит 8 строк с нулями в 13 столбцах. Следовательно максимальный ранг подматрицы, составленной из этих 8 строк исходной матрицы был бы равен $20 - 13 = 7$, эти строки линейно зависимы. Противоречие с невырожденностью исходной матрицы.

Минимальный ранг 5 достигается, если у единичной матрицы 20×20 рассмотреть левый нижний угол.

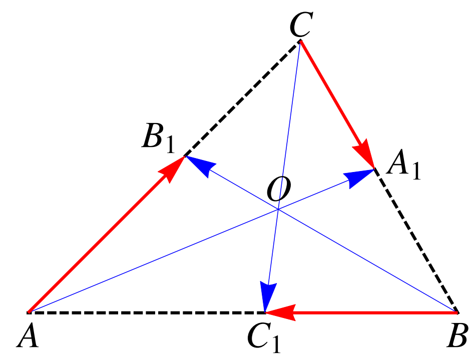
14-5. Отделим от суммы последнее слагаемое, $\sum_{k=1}^{n} k^k/n^n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^k/n^n$ Во втором слагаемом числитель можно оценить геометрической прогрессией с основанием n:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^k < \sum_{k=0}^{n-1} n^k = \frac{n^n - 1}{n-1}, \quad \text{следовательно} \quad 0 < \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^k}{n^n} < \frac{n^n - 1}{(n-1)n^n} < \frac{1}{n-1}.$$

По теореме о зажатой последовательности $\sum_{k=1}^{n-1} k^k/n^n$ стремится к 0.

14-6. Пусть биссектрисы треугольника пересекаются в точке O. Введем обозначения $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$. Имеем

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \tag{3}$$



Указанная в условии сумма может быть переписана в виде $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$ (сумма "синих-тонких" векторов равна сумме "красных-жирных").

Последнюю сумму можно записать в виде $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b} + \nu\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Вычитая из этого уравнения (3), умноженное на ν, получим, что $(\lambda - \nu)\overrightarrow{a} + (\mu - \nu)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. В силу линейной независимости векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ получаем, что $\lambda = \nu = \mu$.

Используем тот факт, что биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилегающих сторон. Мы доказали, что $a : b = c : c = c : a$. Из этого следует, что $a = b = c$.

14-7. Пусть ξ_i, $i = 1, \ldots, 50$ — случайная величина, принимающая значение единица, если после встречи с i-й по счёту невестой в паспорте жениха появляется штамп о браке и ноль в противном случае. Вероятность принятия значения единица есть вероятность того, что i-я невеста будет лучше всех предыдущих, что при случайной перестановке невест равно $1/i$.

Матожидание количества штампов в паспорте жениха совпадает с суммой матожиданий ξ_i, то есть с $1 + 1/2 + \ldots + 1/50$. Последняя сумма, геометрически очевидно (в силу убывания функции $1/x$), меньше чем $1 + \int_1^{50} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln 50$, то есть меньше 5.

14-8. Заметим, что функция f должна быть инъективна, то есть принимать при разных аргументах различные значения. В противном случае и композиция $g \circ f$ была бы не инъективна. Применим ко второму равенству функцию f. Получим, что $f(g(f(x))) = f(x^3)$. Левую часть можно переписать как $f \circ g(f(x)) = f^2(x)$. Итак, $f(x^3) = f^2(x)$. Подставим в это равенство в качестве х значения $0, 1$ и -1. Для каждого из них $x^3 = x$, так что все три числа $f(0)$, $f(1)$ и $f(-1)$ удовлетворяют уравнению $a = a^2$. Но у этого уравнения только два различных корня. Пришли к противоречию.

14-9. Заметим, что ненулевые элементы стоят в попрано различных строках и в попарно различных столбцах матрицы (в силу ее невырожденности). Поэтому данная матрица ортогональная, то есть $A^T = A^{-1}$. Произведение двух матриц такого вида также является матрицей того же вида. Рассмотрим набор степеней $E, A, A^2, \ldots, A^k, \ldots$. Среди них может быть лишь конечное число различных (так как вообще матриц заданного вида конечное число). Пусть, например, $A^k = A^l$, $k > l$. Тогда $A^{k-l-1} = A^{-1} = A^T$.

14-10. Множество упорядоченных пар точек окружности гомеоморфно тору. Его можно рассматривать как квадрат, $ABCD$, противоположные стороны которого попарно склеены с сохранением ориентации: $\overrightarrow{AB}$ с $\overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{BC}$ с $\overrightarrow{AD}$ Кроме того, отождествляя пары (x, y) и (y, x), мы склеим наш квадрат по диагонали AC.

Получим прямоугольный равнобедренный треугольник ACD, у которого еще надо склеить $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ (с указанными ориентациями). Для осуществления этой склейки сначала разрежем треугольник по высоте DE. После склейки $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ получим квадрат, у которого нужно еще склеить противоположно ориентированные две стороны разреза DE.

Решения задач, 2015 г.

15-1. 1) График функции $y = x^3 - ax$ пересекает ось абсцисс в трех точках $0, \pm\sqrt{a}$, поэтому при $b > 0$ график функции $y = x^3 - ax - b$ пересекает положительную часть оси абсцисс только в одной точке.

2) Пусть c — корень многочлена $P(x)$.

Функция $y = x^3 - ax - b$ при $x > c$ возрастает. Подставляя $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ в многочлен $P(x)$, с очевидностью получаем, что $P(\sqrt{a}) < 0$, $P(\sqrt[3]{b}) < 0$, $P(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}) > 0$.

15-2. 2) Касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет уравнение

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0) = 0.$$

Подставляя $y = 0, z = 0$, найдем точку пересечения с осью Ox. Имеем: $y_0z_0x - y_0z_0x_0 - x_0z_0y_0 - x_0y_0z_0 = 0$. Поэтому $x = 3x_0$.

Аналогично, $y = 3y_0$, $z = 3z_0$. Следовательно, объем тетраэдра равен

$$\frac{1}{6} \times 27x_0y_0z_0 = \frac{9}{2}.$$

1) То же самое, но всюду отсутствует третье слагаемое.

15-3. 1) К каждой строке с номером $i \in \{1, \dots, n\}$ прибавим строку с номером $n+i$. 2) Из каждого столбца новой матрицы с номером $n+j$, $j \in \{1, \dots, n\}$ вычтем столбец с номером j:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся теоремой Лапласа.

2-е решение. Ту же самую процедуру можно осуществить следующим образом:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

15-4. Имеем

$$\int_0^{y'(x)} \frac{\exp(t)\,dt}{1+2\exp(t)} = \frac{1}{2}\ln(1+2\exp(t))\big|_0^{y'(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\exp(y'(x))}{3}\right).$$

Приравнивая это выражение правой части (1) и находя $y'(x)$ из получившегося равенства, заключаем

$$y'(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right), \quad y(x) = \frac{3x-1}{3}\left(\ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) - 1\right) + C$$

и $C = 0$, так как $y(1) = 2/3$.

15-5. Симметрия плоскости относительно точки M с радиус-вектором $\mathbf{m}$ отображает точку с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в точку с радиус-вектором $\mathbf{x} + 2(\mathbf{m} - \mathbf{x}) = 2\mathbf{m} - \mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ — радиус-векторы точек A, B, C, W соответственно. Вычислим композицию, указанную в задаче.

Для произвольной точки X с радиус-вектором $\mathbf{x}$ имеем:

$$\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{a}-\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{w}-(2\mathbf{a}-\mathbf{x}) = 2(\mathbf{w}-\mathbf{a})+\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{b}-(2(\mathbf{w}-\mathbf{a})+\mathbf{x}) = 2(\mathbf{b}-\mathbf{w}+\mathbf{a})-\mathbf{x} \mapsto$$
$$2\mathbf{w} - (2(\mathbf{b}-\mathbf{w}+\mathbf{a}) - \mathbf{x}) = 4\mathbf{w} - 2(\mathbf{b}+\mathbf{a}) + \mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{c} - (4\mathbf{w} - 2(\mathbf{b}+\mathbf{a}) + \mathbf{x}) =$$
$$-4\mathbf{w}+2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{w}-(-4\mathbf{w}+2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{x}) = 6\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{x}.$$

Отображение $\mathbf{x} \mapsto 6\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{x}$ является тождественным тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}.$$

15-6. Чтобы задать трехмерную грань, надо четырем координатам из семи придать значение 0 или 1. Поэтому число трехмерных граней равно $f_3 = 2^4 C_7^4$. Аналогично, число четырехмерных граней равно $f_4 = 2^3 C_7^3$. Ясно, что $f_3 = 2f_4$.

15-7. Если $f(x)$ и $g(x)$ лежат в S, то, по условию a), $\ln(f(x)+1)$ и $\ln(g(x)+1) \in S$. Но тогда, по условию b), функция

$$\ln(f(x)+1) + \ln(g(x)+1) = \ln(f(x)g(x) + f(x) + g(x) + 1) \in S$$

и, по условию a), функция

$$\exp(\ln(f(x)g(x) + f(x) + g(x) + 1)) - 1 = f(x)g(x) + f(x) + g(x) \in S.$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то $f(x)g(x) + f(x) + g(x) \geqslant f(x) + g(x)$ и, по условию c),

$$f(x)g(x) + f(x) + g(x) - (f(x) + g(x)) = f(x)g(x) \in S.$$

15-8. Будем рассматривать строки матрицы как точки A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, пространства $\mathbb{R}^8$. Вычеркивание столбца с номером k можно рассматривать как проекцию точек A_i на координатную плоскость $x^k = 0$ пространства $\mathbb{R}^8$ параллельно вектору $\mathbf{e}_k$ стандартного базиса $\mathbf{e}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, 8$ пространства $\mathbb{R}^8$. Размерность плоскости α, натянутой на точки A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, не больше чем 4. Пусть L_1 - линейная оболочка векторов $\overrightarrow{A_5A_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. $\dim L_1 \leqslant 4$. Следовательно существуют базисные векторы (пусть это будут $\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8$) такие, что $L_1 \bigcap \mathfrak{L}\{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8\} = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому проекции точек A_i на плоскость $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ попарно различны.

Если $\overrightarrow{A_5A_1} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{A_5A_2} = \mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{A_5A_3} = \mathbf{e}_3$, $\overrightarrow{A_5A_4} = \mathbf{e}_4$, то найти пять столбцов, удовлетворяющих условиям задачи нельзя.

15-9. Пусть вероятность выпадения 3-х орлов (ООО) после того, как уже выпали два орла (ОО) равна x; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения орла и решки (ОР) равна y; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения решки и орла (РО) равна z. Вероятности выпадения наборов ОО, ОР, РО равны 1/4.

После ОО с равной вероятностью (1/2) можно получить либо ООО, либо ООР. После ООР вероятность выпадения ООО равна y. По формуле полной вероятности $x = 1/2 + y/2$. Аналогично, после ОР получаем две возможности ОРР и ОРО, поэтому $y = 0 + z/2$; после РО можем получить РОО и РОР, откуда $z = x/2 + y/2$.

Решение системы уравнений: $x = 0.6$, $y = 0.2$, $z = 0.4$. Искомая вероятность есть $\frac{1}{4}(x + y + z) = 0.3$

15-10. Покажем, что последовательности a_n и b_n совпадают. Действительно,

1. $b_n = a_n + 1 - c_n \leqslant a_n$.

2. Предположим теперь, противное совпадению a_n и b_n, то есть что $b_k < a_k = m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Из сюръективности a следует, что найдутся числа $n_1, \ldots, n_{m-1}$ такие, что $a_{n_i} = i$, $i = 1, \ldots, m-1$. Тогда $b_{n_i} \leqslant a_{n_i} = i \leqslant m - 1$ и, следовательно, одно из значений (принцип Дирихле) b_{n_i} совпадет с b_k. Это противоречит инъективности b_n, поскольку по определению $n_i \neq k$.

Вместо заключения

Вместо заключения мы хотим предложить ещё пару красивых задач с решениями. Задачи были предложены друзьями олимпиады, не входящими в состав жюри (В.В. Бочкаревым и А.В. Савватеевым). Если у вас есть оригинальные задачи, которые вы хотите предложить на студенческую олимпиаду имени Н.И. Лобачевского, присылайте их по адресу igrigori_@mail.ru или eduard.lerner@gmail.com.

1. Задача о задумчивом математике. Математик каждую секунду с вероятностью $1/2$ делает шаг вперед, а с вероятностью $1/2$ стоит и *обдумыает мысль*. По истечении каждой секунды (независимо от продолжительности предыдущего обдумывания) с вероятностью $1/3$ математику может прийти в голову *гениальная идея*. Какова вероятность того, что перед тем, как *гениальная идея* придет математику в голову он сделает ровно 2 шага?

Ответ: $3/16$.

Решение: Мы должны перебрать всевозможные случаи количества секунд перед приходом *гениальной идеи* из условии задачи. Число секунд t может меняться от 2 до бесконечности. При этом для $t = 2$ имеется лишь один вариант — математик ни разу не останавливался, чтобы обдумать мысль, *гениальная идея* пришла ему на ходу по истечении второй секунды, вероятность такой комбинации событий $((1/2)(2/3))((1/2)(1/3)) = (1/3)(1/6)$. Для произвольного $t \geqslant 2$ аналогичное произведение $(1/3)^{t-1}(1/6)$ необходимо умножить на количество способов выбора номеров двух секунд из t для совершения шагов — число таких вариантов есть $C_t^2 = t(t-1)/2$. Итак, ответ представляет собой сумму ряда

$$(1/3)(1/6)\sum_{t=2}^{\infty}\frac{t(t-1)}{2}(1/3)^{t-2} = \frac{\sum_{t=2}^{\infty} t(t-1)(1/3)^{t-2}}{36}.$$

Получившуюся сумму в числителе проще вычислить заменив $(1/3)$ на произвольное q, $|q| < 1$. Имеем

$$\sum_{t=2}^{\infty} t(t-1)q^{t-2} = \frac{d^2}{d\,q^2}\left(\sum_{t=0}^{\infty} q^t\right) = \frac{d^2}{d\,q^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{2}{(1-q)^3},$$

что при $q = 1/3$ дает $27/4$.

2. Задача о финансовой пирамиде. Финансист по имени Ммма Вроде основал финансовую пирамиду. Каждый, кто принесёт ему 1000 рублей, через 30 дней вечером в конце дня заберёт 1300 рублей. Считая, что Ммма Вроде не использует банковской системы (держит все деньги в жестяной банке), найти последний день, когда эта пирамида сработает, в предположении, что ежедневно приходит на M человек больше, чем вчера. В первый день, 1 января невисокосного года, не пришёл никто.

Ответ: 1-е сентября.

Решение: Надо найти x, при котором пересекутся две параболы на участках их возрастания. Первая парабола описывает количество денег, принесенных к концу x-го дня года для хранения в жестянной банке $\frac{x(x-1)}{2}1000M$. Вторая задаёт количество денег, оттуда же забранных $\frac{(x-30)(x-31)}{2}1300M$. Искомое значение x есть наибольший корень уравнения $x^2 - 261x + 4030 = 0$, от M это знасение не зависит.

Получается, что $x = (261 + \sqrt{52001})/2 = 244.519\ldots$ — всё рухнет после 244-го дня года, т.е. после 1-го сентября — Дня Знаний.
