КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Киясов С. Н., Шурыгин В. В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ОСНОВЫ ТЕОРИИ,
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Часть 1

Казань — 2017

УДК 517.9

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Протокол № 1 от 28 сентября 2017 г.

заседания кафедры теории функций и приближений Протокол № 1 от 31 августа 2017 г.

Научный редактор:
доктор физ.-мат. наук, проф. И.А. Бикчантаев

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ Н.Б. Плещинский
канд. физ.-мат. наук, проф. КВТККУ Л.К. Астафьева

Киясов Сергей Николаевич, Шурыгин Вадим Вадимович.

Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач. Часть 1 (дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков, линейные дифференциальные уравнения): Учебное пособие / С.Н. Киясов, В.В. Шурыгин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2017. – 80 с.

Учебное пособие предназначено для студентов II курса Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ.

Глава 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{0.1}$$

в котором x — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция. *Дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*, называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{0.2}$$

Правую часть уравнения (0.2) будем считать определенной на некотором открытом множестве D плоскости (x, y). Иногда уравнение (0.2) записывают в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{0.3}$$

и называют *уравнением первого порядка, записанным в дифференциалах.*

Решением уравнения (0.2) (или (0.3)) на интервале I оси x называется любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на I. *Общим решением* уравнения (0.2) называется множество всех его решений. Общее решение зависит от одной произвольной постоянной C и дается формулой

$$y = \varphi(x, C). \tag{0.4}$$

Выражение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{0.5}$$

из которого y определяется неявно как функция от x называется *общим интегралом* уравнения (0.2).

Решить уравнение (0.2) означает найти его общее решение или общий интеграл. При этом предпочтение, как правило, отдается более компактной записи ответа.

Формы записи уравнения в виде (0.2) или (0.3) равносильны и из одной записи можно получить другую. Однако, в некоторых случаях, форма записи (0.3) оказывается предпочтительнее, так как в нее переменные x и y входят симметрично. Поэтому, если независимую переменную и искомую функцию поменять местами (разрешить уравнение относительно $\frac{dx}{dy}$), то полученное уравнение может оказаться более простым. Тогда его общее решение $x = \psi(y, C)$ определит общий интеграл уравнения (0.2).

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (0.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{где} \quad (x_0, y_0) \in D. \tag{0.6}$$

Условие (0.6) называется *начальным условием*, а сама поставленная задача — *задачей Коши.* Любое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (0.2) определяет на множестве D некоторую кривую, которую называют *интегральной кривой* уравнения. Поэтому, геометрический смысл задачи Коши состоит в том, чтобы найти интегральную кривую уравнения, проходящую через точку $(x_0, y_0) \in D$. Чтобы решить задачу Коши, нужно подставить начальное условие (0.6) в (0.4) или (0.5) и определить оттуда значение $C = C_0$, при котором точка (x_0, y_0) лежит на искомой интегральной кривой. Тогда решение задачи Коши запишется в виде $y = \varphi(x, C_0)$ или $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

§1. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными — это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \tag{1.1}$$

или же в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{1.2}$$

Чтобы решить такое уравнение, необходимо *разделить переменные*, то есть, привести уравнение к такой форме, чтобы при дифференциале dx стояла функция, зависящая лишь от x, а при дифференциале dy — функция, зависящая от y. Для этого уравнение вида (1.1) следует переписать в форме

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx,$$

а уравнение вида (1.2) в форме

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0.$$

Таким образом, уравнение с разделяющимися переменными сводится к уравнению

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0. \tag{1.3}$$

Пусть $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ и $G(y)=\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy$, $(x_0,y_0)\in D$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(y)$ соответственно. Тогда их дифференциалы равны

$$dF(x)=f(x)\,dx \quad \text{и} \quad dG(y)=g(y)\,dy.$$

Следовательно, уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$dF(x)+dG(y)=d(F(x)+G(y))=0.$$

Но дифференциал функции равен нулю тогда и только тогда, когда эта функция — константа. Поэтому общим решением уравнения (1.3) будет

$$F(x)+G(y)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+\int_{y_0}^{y} g(x)\,dy=C=\mathrm{const}.$$

Заметим, что при разделении переменных могут теряться решения вида $x=x_0$, $y=y_0$ в случае уравнения (1.1) за счет обращения в нуль функции $\psi(y)$ и функций $P(x)$ и $N(y)$ для уравнения (1.2). Поэтому, если потерянное решение не может быть получено из общего решения при каком-нибудь $C=C_0$, его необходимо также включить в ответ.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (задачу Коши)

$$(x+1)y\,dx+(y+2)\,dy=0,\quad y(1)=1. \tag{1.4}$$

Решение. Разделяя переменные, получим

$$(x+1)\,dx+\frac{y+2}{y}\,dy=0.$$

Интегрируем полученные выражения и учитывая, что неопределенный интеграл означает множество всех первообразных, отличающихся на постоянную, получим

$$\int(x+1)\,dx+\int\frac{y+2}{y}\,dy=\frac{1}{2}(x+1)^2+(y+2\ln|y|)+C=0.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1.4) (если произвольную постоянную C взять в виде $-C$) есть

$$\frac{1}{2}(x+1)^2+(y+2\ln|y|)=C.$$

В процессе преобразования уравнения мы делили на y. Подставив $y=0$ в уравнение (1.4), убеждаемся, что $y=0$ тоже является решением и не получается из общего интеграла ни при каком значении C, так как не входит в область его определения.

Подставив $x = 1$, $y = 1$ в общий интеграл, найдем решение задачи Коши: $\frac{1}{2}(x+1)^2 + (y + 2\ln|y|) = 3$.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^2(y+1)\,dx + (x^3-1)(y-1)\,dy = 0. \tag{1.5}$$

Решение. Разделяем переменные:

$$\frac{x^2}{x^3-1}\,dx + \frac{y-1}{y+1}\,dy = 0.$$

При этом мы делим на $x^3 - 1$ и $y + 1$, поэтому необходимо отдельно рассмотреть случаи $x^3 - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$. Подставив в уравнение (1.5) сначала $x = 1$, а потом $y = -1$, убеждаемся, что обе эти функции являются решениями.

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx + \int \frac{y-1}{y+1}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{x^3-1} + \int \left(1 - \frac{2}{y+1}\,dy\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + y - 2\ln|y+1| + C = 0.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1.5) можно записать так:

$$\frac{1}{3}\ln|x^3-1| + y - 2\ln|y+1| = C, \quad x = 1, \quad y = -1.$$

Если постоянную C взять в виде $\ln|C|$, то общий интеграл запишется следующим образом:

$$\frac{(x^3-1)^{1/3}e^y}{(y+1)^2} = C.$$

В этой форме записи решение $x = 1$ содержится при $C = 0$. Поэтому к общему интегралу такого вида следует добавить лишь решение $y = -1$.

Если же постоянную взять в виде $-\ln|C|$ и переписать общий интеграл в виде $(y+1)^2 = Ce^y(x^3-1)^{1/3}$, то, наоборот, решение $y = -1$ получится при $C = 0$.

Пример 3. Решим уравнение

$$y'(y+1)\sin x + 2y = y^2.$$

Решение. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx}(y+1)\sin x = y^2 - 2y.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{(y+1)dy}{y(y-2)} = \frac{dx}{\sin x}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{2}\frac{dy}{y} + \frac{3}{2}\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Проинтегрируем:

$$-\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{3}{2}\ln|y-2| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Заменяя $2C$ на $\ln|C|$ и потенцируя, получаем окончательно

$$\frac{(y-2)^3}{y} = C\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Кроме того, мы должны исследовать случаи $y(y-2)=0$ и $\sin x = 0$. Первый случай дает функции $y=0$ и $y=2$, являющиеся решениями исходного уравнения, а второй — функции $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, которые уравнению не удовлетворяют. Так как $y=2$ содержится в общем интеграле при $C=0$, то к нему следует добавить лишь решение $y=0$.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $x(1+y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0.$
2. $2x^2y\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 2.$
3. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy.$
4. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 1 = \cos 2y.$
5. $(1+e^y)\,dx - e^{2y}\sin^3 x\,dy = 0.$
6. $e^{-x}\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) = 1.$
7. $y' - xy^2 = 2xy.$

Найти решение задачи Коши:

8. $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0;\ y(0)=1.$
9. $xy' + y = y^2;\ y(1) = \dfrac{1}{2}.$
10. $y\dfrac{dy}{dx} + x = 1;\ y(1)=1.$
11. $(x-1)\dfrac{dy}{dx} + y = 0;\ y(0) = -1.$

12. $e^x\,dx - (1+e^x)y\,dy = 0;\; y(0) = 1.$

Ответы.

1. $(1+x^2)(1+y^2) = C.$
2. $y^2 - 2 = Ce^{1/x}.$
3. $y = Ce^{x^2}(y+2);\; y = -2.$
4. $\operatorname{tg} y = C - \dfrac{2}{x};\; y = \dfrac{\pi(2k+1)}{2},\; k \in \mathbb{Z}.$
5. $e^y - \ln(1+e^y) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| - \dfrac{\cos\, x}{2\sin^2\, x} + C;\; x = \pi k,\; k \in \mathbb{Z}.$
6. $e^{-y} = 1 + Ce^x.$
7. $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2;\; y = 0.$
8. $y(\ln(1-x^2)+1) = 1.$
9. $y(1+x) = 1.$
10. $y^2 + x^2 - 2x = 0.$
11. $y = \dfrac{1}{x-1}.$
12. $y^2 = 1 + 2\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right).$

1.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

К таким уравнениям относятся уравнения вида

$$y' = f(ax+by+c).$$

Сделав в таком уравнении замену $z = ax+by+c$, получим уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dz}{dx} = bf(z) + a$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y' = (2x+3y+1)^2. \tag{1.6}$$

Решение. Сделаем замену $z = z(x) = 2x+3y+1$, тогда $y = \dfrac{1}{3}(-2x+z-1)$. Поэтому $y' = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}z'$. Подставим это в исходное уравнение: $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}z' = z^2$, откуда

$$\frac{dz}{dx} = 3(z^2+2) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{z^2+2} = 3\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение и делая обратную замену, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} = 3x + C, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3y+1}{\sqrt{2}} = 3x + C.$$

Поскольку выражение z^2+2 не обращается в нуль в ни при одном значении z, потери решений не произошло.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(y-x).$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4x+2y-1}.$
3. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx} = 1.$
4. $\dfrac{dy}{dx} + y = 2x+1.$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x-y).$

Ответы.

1. $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x+C.$
2. $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x+C.$
3. $x+y = \operatorname{tg}(y-C).$
4. $y = 2x-1+Ce^{-x}.$
5. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = x+C.$

§2. Задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными

При составлении дифференциальных уравнений в физических задачах важно правильно выбрать независимую переменную и искомую функцию, описывающую происходящий процесс. За независимую переменную, как правило, берется время t от начала процесса. Рассматривая приращение искомой функции за произвольный малый промежуток времени и выражая это приращение через данные, указанные в задаче, в пределе, при стремлении этого промежутка времени к нулю, получают дифференциальное уравнение. Часто дифференциальное уравнение можно составить исходя из физического смысла производной. Так производная неизвестной функции $x(t)$ означает скорость ее изменения: $x(t)$ — путь, $x'(t)$ — скорость; $x(t)$ — скорость, $x'(t)$ — ускорение и т.д. При составлении дифференциальных уравнений в геометрических задачах используется геометрический смысл производной.

Пример 1. Через 12 часов после начала опыта численность некоторой популяции бактерий возросла в 3 раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток? Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству.

Решение. Пусть $x(t)$ — количество бактерий в момент времени t. Скорость их размножения (изменение их количества в момент времени t) есть производная $x'(t)$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = kx$, где k — некоторый коэффициент, пока неизвестный. Решая это уравнение, получаем $x = Ce^{kt}$. Примем, что начальное количество бактерий равно N (в принципе, ничто не мешает считать это количество равным единице). Подставляя $t = 0$, получаем $C = x(0) = N$. После этого подставим $t = 12$. Получим $Ne^{12k} = 3N$, откуда $e^{12k} = 3$. Следовательно, $x(72) = Ne^{72k} = N(e^{12k})^6 = 3^6 \cdot N = 729N$.

Ответ: количество бактерий возрастет в 729 раз.

Пример 2. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 0{,}2$ м и вылетает из нее со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Считая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время T движения пули в стене.

Решение. Второй закон Ньютона гласит, что сумма сил, действующих на тело, векторно равна ускорению тела, помноженному на его массу. Ускорение тела есть $w = \frac{dv}{dt}$. В данном случае на пулю действует сила сопротивления $F_c = -kv^2$ (знак «$-$» соответствует направлению силы сопротивления). Кроме того, на нее действует сила тяжести mg, которой в данном случае можно пренебречь. Следовательно, уравнение движения пули имеет вид $m\frac{dv}{dt} = -kv^2$. Массу пули можно считать единичной (а можно считать коэффициент сопротивления равным k/m). Поэтому мы запишем это уравнение в виде

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Решая его, получаем $\frac{1}{v} = kt + C$, откуда $v = \frac{1}{kt + C}$. Подставив $t = 0$, получим $1/C = v_0$. После этого, подставив $t = T$, получим $\frac{1}{kT + 1/v_0} = v_1$, откуда $kT = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}$. Осталось определить величину k. Путь, пройденный пулей в стене, равен $\int_0^T v(t)\,dt$. Вычислим этот интеграл:

$$\int_0^T \frac{dt}{kt+C} = \frac{1}{k}\ln(kT+C)\Big|_0^T = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kT+C}{C}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kT}{C}+1\right) =$$
$$= \frac{1}{k}\ln\left(v_0\Big(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_0}\Big)+1\right) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right).$$

Подставив сюда численные данные, указанные в условии, получим $0{,}2 = \frac{1}{k}\ln 4$, откуда $k = 5\ln 4$. Наконец, $T = \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_0}\Big) = \frac{3}{2000\ln 4}$.

Пример 3. На дне цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью, образовалось отверстие. В течение первых суток вытекло 10% содержимого. Определить, когда из сосуда вытечет половина жидкости. Скорость истечения жидкости через малое отверстие, находящееся на расстоянии h ниже уровня жидкости, равна $\mu\sqrt{2gh}$ (закон Торричелли), где μ — некоторый коэффициент. Можно считать $\mu = 0{,}6$.

Решение. Обозначим $h(t)$ уровень жидкости в резервуаре. Пусть S — площадь основания резервуара, а s_0 — площадь отверстия. Рассмотрим промежуток времени от t до $t+\Delta t$. За этот промежуток количество жидкости в резервуаре изменится на величину $Sh(t+\Delta t)-Sh(t)$. С другой стороны, в течение этого промежутка уровень жидкости равен $h(t)+\alpha(t)$, где $\alpha(t) = o(\Delta t)$ — величина бóльшего порядка малости, чем Δt. Следовательно, количество жидкости, вытекшей за это время, будет равно $\mu\sqrt{2g(h(t)+\alpha(t))}\cdot s_0\cdot\Delta t$. Отсюда

$$S(h(t+\Delta t)-h(t)) = -\mu\sqrt{2g(h(t)+\alpha(t))}\cdot s_0\cdot\Delta t.$$

Поделим обе части уравнения на $S\cdot\Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. Получим $h'(t) = -\frac{\mu s_0\sqrt{2g}}{S}\sqrt{h}$. Обозначив $k = -\frac{\mu s_0\sqrt{2g}}{S}$, получим для функции h уравнение

$$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Его решение имеет вид $2\sqrt{h} = kt+C$. Поскольку нам нужно найти время, а не высоту, не будем выражать h из этого соотношения.

Будем считать высоту резервуара равной 1. Тогда из условий задачи вытекает, что $h(0) = 1$ и $h(24) = 0{,}9$. Первое из этих равенств дает $C = 2$, тогда из второго следует, что $12k+1 = \sqrt{0{,}9}$. Нам требуется решить уравнение $h(T) = 0{,}5$. Тогда T удовлетворяет уравнению $2\sqrt{0{,}5} = kT+2$, из которого $T = \frac{2\sqrt{0{,}5}-2}{k} = 12\cdot\frac{\sqrt{0{,}5}-1}{\sqrt{0{,}9}-1} \approx 68{,}5$.

Ответ: примерно через 68 ч 30 мин.

Пример 4. Найти кривую, проходящую через точку $(2, 3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок произвольной ее касательной, концы которого лежат на осях координат, делится точкой касания пополам.

Решение. Изобразим на рисунке эскиз графика функции $y(x)$ и проведем в какой-либо его точке (x_0, y_0) касательную прямую. Отметим точки A и B ее пересечения с осями координат. Условие задачи означает, что точка касания делит отрезок AB пополам. Очевидно, это равносильно тому, что абсцисса x_A точки A по абсолютной величине вдвое больше абсолютной величины абсциссы x_0. Чтобы составить дифференциальное уравнение кривой, нам необходимо определить x_A. Запишем уравнение касательной

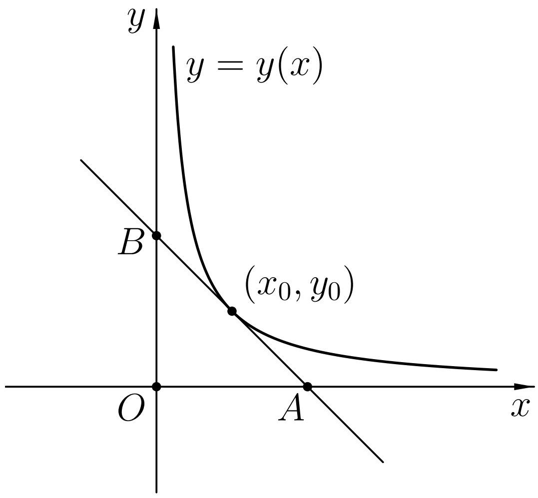

Рис. 1.

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

к кривой в точке (x_0, y_0). Подставив $y = 0$, получим $x_A = x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)}$. Учитывая геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной к кривой с положительным направлением оси абсцисс), находим, что в соответствующих квадрантах значения x_0, y_0, $y'(x_0)$ имеют следующие знаки: в первом квадранте $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $y'(x_0) < 0$; во втором квадранте $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, $y'(x_0) > 0$; в третьем квадранте $x_0 < 0$, $y_0 < 0$, $y'(x_0) < 0$; в четвертом квадранте $x_0 > 0$, $y_0 < 0$, $y'(x_0) > 0$. Следовательно, для искомой кривой должно выполняться равенство $x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)} = 2x_0$ или $y'(x_0) = -x_0 y_0$. Учитывая, что точка (x_0, y_0) — произвольная, дифференциальное уравнение этой кривой имеет вид

$$y' = -xy \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Решением этого уравнения служат функции $y = \dfrac{C}{x}$.

В частности, чтобы найти ту кривую, которая проходит через точку $(2, 3)$, подставим эти числа в уравнение кривой и найдем $C = 6$.

Ответ: $y = 6/x$.

Пример 5. Тело охладилось за 10 минут от 100°C до 60°C. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°C. Когда тело остынет до 25°С? Принять, что скорость остывания или нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Решение. Пусть $x(t)$ — температура тела в момент времени t. Скорость остывания есть производная $x'(t)$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = k(x-20)$, где k — некоторый коэффициент, пока неизвестный. Решая это уравнение, получаем $\ln(x-20) = kt + C$ (по смыслу $x > 20$) или $x = 20 + Ce^{kt}$. Подставив заданные условия, получим $x(0) = 100$, $x(10) = 60$. Из первого уравнения имеем $C = 80$, тогда из второго следует, что $e^{10k} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $x(t) = 20 + 80 \cdot (\frac{1}{2})^{t/10} = 20 - 80 \cdot 2^{t/10}$. Решая уравнение $x(t) = 25$, найдем $t = 40$.

Ответ: Через 40 минут.

Задачи.

1. Из эксперимента известно, что скорость размножения бактерий при достаточном запасе пищи пропорциональна их количеству. За какое время количество бактерий увеличится в m раз по сравнению с их начальным количеством?

2. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которое пропорционально скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость корабля через 5 секунд станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

3. В сосуд, содержащий 20 литров воды, непрерывно со скоростью 5 литров в минуту поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,2 кг. соли. В сосуде раствор перемешивается, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 4 минуты?

4. Кривая проходит через начало координат и лежит в верхней полуплоскости. Каждый прямоугольник, ограниченный осями координат и перпендикулярами к ним, проведенными из любой точки кривой, эта кривая делит на две части, причем площадь части прямоугольника, находящейся под кривой, в два раза меньше площади части прямоугольника, находящейся над кривой. Найти уравнение кривой.

5. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсции, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

6. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

7. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром

1,8 м и высотой 2,45 м через отверстие в дне диаметром 6 см? Ось цилиндра вертикальна.

8. Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту (где k задано). Найти температуру металла через час.

Ответы.

1. $\dfrac{dx}{dt} = kx,\ T = \dfrac{\ln m}{k}$ ($x(t)$ — количество бактерий в момент времени t, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности).

2. $m\dfrac{dv}{dt} = -kv,\ T = \dfrac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ секунды ($v(t)$ — скорость корабля, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности).

3. $\dfrac{dm}{dt} = 1 - 0{,}25m,\ m(4) = 4(1 - e^{-\frac{t}{4}}) \approx 2{,}4$ кг. ($m(t)$ — количество соли в сосуде в килограммах через t минут после начала процесса).

4. $x\dfrac{dy}{dx} = 2y,\ y = Cx^2.$

5. $a\ln(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C.$

6. $y = Cx^2.$

7. Приблизительно 1050 с.

8. $b - \dfrac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k}).$

§3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

3.1. Однородные уравнения

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется *однородной* степени m (еще говорят, с показателем однородности m), если для всех t (или хотя бы для $t > 0$) справедливо соотношение

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \tag{3.1}$$

Так, функции $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = x^3y - 7y^4 + 2x^2y^2$, $h(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ являются однородными функциями степеней 1, 4 и 3/2, соответственно (проверьте это!). Функция $\varphi(x, y) = x^2y^3 - y^6$ не является однородной.

Дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

называется *однородным*, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени m. Можно показать, что однородное уравнение может также быть записано в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.3}$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции y по формуле

$$y(x) = x \cdot t(x). \tag{3.4}$$

Тогда производная y' или дифференциал dy заменяются по формулам

$$y' = t'x + t, \qquad dy = t\,dx + x\,dt.$$

После решения полученного уравнения нужно сделать обратную подстановку

$$t = \frac{y}{x}.$$

Пример 1. Решим уравнение

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad y(0) = -1. \tag{3.5}$$

Решение. Уравнение имеет вид (3.3). Делаем замену $y = tx$. Тогда уравнение (3.5) запишется в виде $t'x + t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, откуда $x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{t - t^3}{1+t^2}$. Разделив переменные, получим

$$\frac{(1+t^2)dt}{t(1-t^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Преобразовывая дробь в левой части последнего уравнения, запишем

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right)dt = \frac{dx}{x}.$$

Тогда

$$\int\left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right)dt = \int\frac{dx}{x} \quad \text{или} \quad \ln|t| - \ln|1-t^2| = \ln|x| + C.$$

Взяв постоянную C в виде $\ln|C|$, получим

$$\frac{t}{1-t^2} = Cx.$$

Подставив $t = y/x$, получим окончательно

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} = Cx \quad \text{или} \quad Cy = (x^2 - y^2).$$

Кроме того, в процессе решения мы делили на x, t и $1-t^2$. Нетрудно видеть, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения, а $t = 0$ и $t = \pm 1$ являются решениями уравнения $t'x + t = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Следовательно, исходное уравнение (3.5) имеет еще решения $y = 0$ и $y = \pm x$. Заметим, что решения $y = \pm x$ входят в серию решений $Cy = (x^2 - y^2)$ (они получаются при $C = 0$), а решение $y = 0$ не содержится в этой серии (но получается при $C = 0$ из первой формы записи общего решения).

Подставив $x = 0$, $y = -1$, получим решение задачи Коши: $y = x^2 - y^2$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x(y - x)dy = y^2 dx. \tag{3.6}$$

Решение. При дифференциалах dx и dy стоят однородные функции степени 2. Подставим $y = tx$, $dy = t\,dx + x\,dt$. Получим $(t\,dx + x\,dt)x^2(t-1) = t^2x^2dx$. Сокращая на x^2 (проверьте, что $x = 0$ является решением!) и раскрывая скобки, получаем $t^2dx - t\,dx + tx\,dt - x\,dt = t^2dx$, откуда $(t-1)x\,dt = t\,dx$ или

$$\frac{t-1}{t}\,dt = \frac{dx}{x}.$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$t - \ln|t| = \ln|x| + C.$$

Если постоянную C взять в виде $\ln|C|$, то

$$t = \ln|Cxt| \quad \text{или} \quad e^t = Cxt.$$

Возвращаясь к переменным x, y, имеем окончательно

$$e^{y/x} = Cy.$$

В процессе решения мы производили деление на t. Равенство $t = 0$ эквивалентно тому, что $y = 0$. Легко видеть, что эта функция также является решением исходного уравнения, поэтому ее следует добавить к полученному общему интегралу. Если же общее решение записать в виде $y = Ce^{y/x}$, то решение $y = 0$ получится при $C = 0$.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}$.
3. $xdy = y \cos \ln \dfrac{y}{x}\, dx$.
4. $x(\ln y - \ln x) dy = ydx$.
5. $\sqrt{x} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$.

Ответы.

1. $\arcsin \dfrac{y}{x} = \operatorname{sign} x \ln |x| + C$.
2. $e^{x/y} + \ln |x| = C$.
3. $\ln Cx = \operatorname{ctg} \left(\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{y}{x} \right)$; $y = xe^{2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $y(\ln y - \ln x - 1) = C$.
5. $\sqrt{y - x} - \sqrt{x} = C$; $y = x$.

3.2. Уравнения, приводящиеся к однородным

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1} \right) \tag{3.7}$$

приводится к однородному уравнению заменой $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, где (x_0, y_0) — точка пересечения прямых $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1 x + b_1 y = k(ax + by)$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$ и уравнение (3.7) имеет вид $y' = f_1(ax + by)$. Решение таких уравнений было рассмотрено в п. 1.2.

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0. \tag{3.8}$$

Решение. Решая систему

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - y + 4 = 0, \end{cases}$$

находим $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Сделаем замену $u = x + 1$, $v = y - 3$; тогда $x = u - 1$, $y = v + 3$, $dy/dx = dv/du$. Уравнение (3.8) принимает вид

$$(u + v)\, du + (u - v)\, dv = 0.$$

Решив его с помощью подстановки $v = tu$, получим

$$u^2 + 2uv - v^2 = C.$$

Возвращаясь к исходным переменным (x, y), найдем

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

Задачи.

Решить уравнения:

1. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}.$
3. $y\dfrac{dy}{dx} = 4x + 3y - 2.$
4. $x - y - 1 + (y - x + 2)\dfrac{dy}{dx} = 0.$
5. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$

Ответы.

1. $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2;\ \ y = x + 1.$
2. $\sin\dfrac{y-2x}{x+1} = C(x+1).$
3. $(y - 4x + 2)^4(2y + 2x - 1) = C.$
4. $(y - x + 2)^2 + 2x = C.$
5. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}.$

3.3. Обобщенно-однородные уравнения

Уравнение называется *обобщенно-однородным*, если его можно привести к однородному заменой $y = z^m$, где m — некоторое действительное число.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$9yy' - 18xy + 4x^3 = 0. \tag{3.9}$$

Делая в нем замену $y = z^m$, получаем $9mz^{2m-1}z' - 18xz^m + 4x^3 = 0$. Для того, чтобы это уравнение было однородным относительно x и z, необходимо, чтобы степени всех одночленов были одинаковыми: $2m - 1 = 1 + m = 3$.

Эти два равенства образуют переопределенную систему двух уравнений относительно одного неизвестного m, которая в общем случае иметь решения не должна. Тем не менее, видно, что $m = 2$ является ее решением. Делаем замену $y = z^2$, придем к однородному уравнению

$$9z^3 z' - 9xz^2 + 2x^3 = 0.$$

Теперь подстановка $z = tx$ приводит к уравнению

$$9t^3(t'x + t) - 9t^2 + 2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{9t^3\,dt}{9t^4 - 9t^2 + 2} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Сделаем еще одну замену $t^2 = u$, тогда

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{9u\,du}{9u^2 - 9u + 2} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{6du}{3u-2} - \frac{3du}{3u-1} + \frac{2dx}{x} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$2\ln|3u-2| - \ln|3u-1| + 2\ln|x| = \ln|C|, \quad \text{откуда} \quad \frac{(3u-2)^2x^2}{3u-1} = C.$$

Сделав обратные замены $u = t^2 = \dfrac{z^2}{x^2} = \dfrac{y}{x^2}$, получим окончательно

$$\frac{(3y - 2x^2)^2}{3y - x^2} = C.$$

При этом мы производили деление на x, $3u-2$, $3u-1$. Видно, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения. Случаи $u = 2/3$ и $u = 1/3$ дают, соответственно, $t = 1/\sqrt{3}$ и $t = 2/\sqrt{3}$. Подставляя эти функции в уравнение $9t^3(t'x+t)-9t^2+2 = 0$, мы убеждаемся, что они являются его решениями. Они соответствуют решениям $y = x^2/3$ и $y = 2x^2/3$ исходного уравнения (3.9). Второе из этих решений содержится в серии $(3y - 2x^2)^2/(3y - x^2) = C$ при $C = 0$, а первое не содержится, поэтому его необходимо включить в окончательный ответ.

Замечание. Чтобы определить, будет ли уравнение обобщенно-однородным, удобно ввести понятие *измерения*. Так, переменной x ставят в соответствие измерение 1, искомой функции y — измерение m, а производной y' — измерение $m-1$. Если уравнение записано в дифференциалах, то dx ставят в соответствие измерение 0, а dy — измерение $m-1$. Число m пытаются подобрать так, чтобы измерения всех членов, входящих в уравнение, были одинаковыми. Действия с измерениями аналогичны действиям со степенями: если два члена уравнения перемножаются, то их измерения складываются, если какой-либо член уравнения возводится в степень, то его измерение умножается на показатель степени. Так, в рассмотренном примере, измерения членов $9yy'$, $-18xy$ и $4x^3$ равны, соответственно, $m+(m-1)$, $1+m$ и 3. Приравняв их все: $2m-1=1+m=3$, найдем $m=2$. Поэтому в уравнении (3.9) можно сразу сделать замену $y=z^2$.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $2x\dfrac{dy}{dx}(x-y^2)+y^3=0.$
2. $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0.$
3. $y(1+\sqrt{x^2y^4+1})dx+2xdy=0.$
4. $2xy\dfrac{dy}{dx}=3(\sqrt{x^6-y^4}+y^2).$
5. $2y+(x^2y+1)x\dfrac{dy}{dx}=0.$

Ответы.

1. $y^2=x\ln Cy^2.$
2. $1+x^2y^2=Cy;\ y=0.$
3. $\sqrt{x^2y^4+1}=Cx^2y^2-1.$
4. $\arcsin\dfrac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3;\ |x^3|=y^2.$
5. $x^2y\ln Cy=1;\ y=0.$

§4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним

4.1. Линейные уравнения первого порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и ее производной, то есть, уравнение вида

$$y'+a(x)y=b(x). \tag{4.1}$$

Функция $b(x)$ называется *свободным членом* уравнения (4.1). Уравнение

$$y'+a(x)y=0 \tag{4.2}$$

называется *линейным однородным* уравнением, соответствующим линейному уравнению (4.1). Разделив переменные в уравнении (4.2), получим $\dfrac{dy}{y} = -a(x)\,dx$, откуда $\ln|y| = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx + \ln|C|$, или

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.3}$$

Теперь для того, чтобы решить уравнение (4.1), нужно применить *метод вариации постоянной.* Его суть состоит в том, что решение уравнения (4.1) ищут в том же виде, что и решение соответствующего однородного уравнения (4.2), но C уже считают не постоянной, а неизвестной функцией от x. Таким образом, решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.4}$$

Тогда

$$y' = C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx} - C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}a(x).$$

Подставляя y и y' в уравнение (4.1), получим

$$C'(x) = b(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\,dx + C, \quad C = \mathrm{const}.$$

Подставив это выражение для $C(x)$ в (4.4), общее решение уравнения запишем в виде

$$y = \left(\int_{x_0}^{x} b(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\,dx + C\right)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.5}$$

При решении конкретных уравнений имеет смысл не применять формулу (4.5), а проводить вычисления по схеме самостоятельно.

Пример 1. Решим уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = 3x. \tag{4.6}$$

Решение. Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$. Потенцируя, находим $y = \dfrac{C}{x}$. Теперь ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим

$$\left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = 3x,$$

откуда $C'(x) = 3x^2$. Интегрируя, находим $C(x) = x^3 + C$. Поэтому общее решение уравнения (4.6) имеет вид

$$y = \frac{x^3 + C}{x} = x^2 + \frac{C}{x}.$$

Пример 2. Некоторые уравнения приводятся к линейным, если поменять местами независимую переменную x и зависимую переменную y. Например, рассмотрим уравнение

$$2y\,dx + (y^2 - 2x)\,dy = 0.$$

Решение. Оно не является линейным относительно y, так как содержит выражение y^2. Однако, это уравнение будет линейным относительно x. Перепишем его в виде

$$2y\frac{dx}{dy} + y^2 - 2x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2}.$$

Решив полученное уравнение, найдем

$$x = Cy - \frac{y^2}{2}.$$

4.2. Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1, \tag{4.7}$$

называется *уравнением Бернулли*. Разделим обе части уравнения на y^n. Получим уравнение

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x).$$

Поскольку $\left(\dfrac{1}{y^{n-1}}\right)' = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$, замена $z = y^{1-n}$ приводит это уравнение к линейному относительно z:

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x).$$

При $n > 0$ функция $y = 0$ является решением уравнения (4.7), а при $n < 0$ не является. Заметим, что в уравнении (4.7) n можно считать любым действительным числом.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(x - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0. \tag{4.8}$$

Решение. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{2xy},$$

откуда

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}. \tag{4.9}$$

Это уравнение Бернулли при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$, тогда $y = \sqrt{z}$, $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$. Подставив эти выражения в (4.9), получим

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{2x} = -\frac{x}{2\sqrt{x}} \quad \text{откуда} \quad z' - \frac{z}{x} = -x.$$

Решая полученное линейное уравнение, найдем

$$z = (-x + C)x = -x^2 + Cx.$$

Возвращаясь к переменным (x, y), получаем окончательно

$$y^2 = -x^2 + Cx.$$

К этому общему интегралу следует добавить решение $x = 0$, потерянное при приведении уравнения к виду (4.9).

4.3. Обобщенные уравнения Бернулли

Обобщенным уравнением Бернулли называется уравнение

$$\varphi'(y)y' + a(x)\varphi(y) = b(x),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая дифференцируемая функция. Делая замену $z = \varphi(y)$ (тогда $z' = \varphi'(y)y'$), придем к линейному уравнению $z' + a(x)z = b(x)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y'}{y} + \frac{\ln y}{x} = 1.$$

Решение. Роль функции $\varphi(y)$ в этом уравнении играет функция $\ln y$. Полагая $z(x) = \ln y(x)$, $z' = \dfrac{y'}{y}$, придем к уравнению $z' + \dfrac{z}{x} = 1$. Решая это уравнение, найдем $z = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x}{2}$. Делая обратную замену, получим

$$\ln y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}.$$

4.4. Уравнения Риккати

Уравнение вида
$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{4.10}$$
называется *уравнением Риккати*. В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Риккати не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли. Однако, проще сразу сделать замену
$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - y_1},$$
которая сводит уравнение Риккати к линейному. Решая это уравнение и осуществляя обратную замену, получим общее решение уравнения Риккати, в котором решение $y = y_1(x)$ не содержится ни при каком значении произвольной постоянной C. Поэтому это решение нужно также включить в ответ.

Пример 5. Рассмотрим уравнение
$$xy' + y^2 - 2y = 4x^2 - 2x. \tag{4.11}$$

Решение. Прежде всего нужно найти частное решение. Заметим, что правая часть уравнения является многочленом второй степени от x и y. Это наводит на мысль искать частное решение в виде $y = ax + b$. Подставив это выражение в уравнение, придем к необходимости выполнения тождества:
$$ax + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax - 2b \equiv 4x^2 - 2x.$$
Приравняем коэффициенты при x^2, x и свободные члены. Получим переопределенную систему уравнений
$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ a + 2ab - 2a = -2 \\ b^2 - 2b = 0. \end{cases}$$
Однако, легко видеть, что пара чисел $a = 2$, $b = 0$ является ее решением. Значит, $y_1 = 2x$ есть частное решение уравнения (4.11).

Делаем замену неизвестной функции $y = 2x + \dfrac{1}{z}$. Тогда $y' = 2 - \dfrac{z'}{z^2}$. Подставляя это в уравнение (4.11) и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение
$$-\frac{2z'x}{z^2} = -\frac{4x}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} \quad \text{или} \quad z' + \Big(\frac{1}{x} - 2\Big)z = \frac{1}{2x}.$$

Его решение имеет вид
$$z = -\frac{1}{4x} + \frac{C}{x}e^{2x}.$$
Сделав обратную подстановку $z = \dfrac{1}{y-2x}$, найдем общий интеграл уравнения (4.11):
$$\frac{1}{y-2x} = \frac{4Ce^{2x}-1}{4x}.$$
Записав выражение $4C$ как новую произвольную постоянную C, выразим из полученного соотношения y:
$$y = 2x + \frac{4x}{Ce^{2x}-1},\ y = 2x.$$

Задачи.

Найти общее решение (общий интеграл) или, если указаны начальные условия, решение задачи Коши для уравнений:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}.$
2. $x^2 + x\dfrac{dy}{dx} = y,\ y(1) = 0.$
3. $(2x - y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y.$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}.$
5. $x\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\cos x - 2y.$
6. $(2x^2y\ln y - x)\dfrac{dy}{dx} = y.$
7. $(x+1)(y\dfrac{dy}{dx} - 1) = y^2.$
8. $(x^2-1)\sin y\dfrac{dy}{dx} + 2x\cos y = 2x - 2x^3.$
9. $x\left(e^y - \dfrac{dy}{dx}\right) = 2.$
10. $\dfrac{dy}{dx} - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$
11. $\dfrac{dy}{dx} + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$

Ответы.

1. $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$.
2. $y = x - x^2$.
3. $x = Cy - \dfrac{y^2}{2}$.
4. $x = \dfrac{C}{y} + y \ln y$.
5. $x\sqrt{y} = \sin x + C;\ y = 0$.
6. $xy(C - \ln^2 y) = 1$.
7. $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$.
8. $\cos y = (x^2 - 1) \ln C(x^2 - 1)$.
9. $e^{-y} = Cx^2 + x$.
10. $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1};\ y = x + 2$.
11. $y = e^x - \dfrac{1}{x + C};\ y = e^x$.

§5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

5.1. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение первого порядка, записанное в дифференциалах. Это уравнение

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{5.1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Тогда это уравнение можно переписать в виде $dF(x, y) = 0$, так что его решение будет иметь вид

$$F(x, y) = C. \tag{5.2}$$

Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные по x и по y, то уравнение (5.1) будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{5.3}$$

Если условие (5.3) выполнено, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M\,dx + N\,dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования, поэтому функцию $F(x,y)$ можно восстановить по любой из формул

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy \tag{5.4}$$

или

$$F(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx. \tag{5.5}$$

При этом нижние пределы x_0 и y_0 можно выбирать произвольно, лишь бы точка (x_0,y_0) принадлежала области D (области определения функций M и N). За счет правильного выбора чисел x_0 и y_0 иногда удается упростить вычисления интегралов (5.4), (5.5). Например, если функции M и N являются многочленами от x и y, целесообразно выбирать $x_0 = y_0 = 0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(4x^3 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 10y^4)\,dy = 0. \tag{5.6}$$

Здесь $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12xy$, так что условие (5.3) выполнено.

Общий интеграл найдем по формуле (5.4), взяв $x_0 = y_0 = 0$:

$$F(x,y) = \int\limits_{0}^{x} (4x^3 + 6xy^2)\,dx + \int\limits_{0}^{y} 10y^4\,dy = x^4 + 3x^2y^2 + 2y^5.$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.6) имеет вид $x^4+3x^2y^2+2y^5 = C$.

Это уравнение можно решать и другим способом. Его левая часть представляет собой дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, поэтому

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{5.7}$$

Будем временно считать в первом уравнении (5.7) переменную y не зависящей от x. Тогда на это уравнение можно смотреть как на обыкновенное дифференциальное уравнение, в котором x — независимая переменная, F — искомая функция, а y — параметр. Интегрируя, получаем

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{5.8}$$

так как первообразные $M(x,y)$ отличаются на функцию, зависящую от y. Возьмем от этого равенства частную производную по y, учитывая второе из равенств (5.7):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Отсюда $\varphi'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx$. Интегрируя, получаем

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Подставив любое значение этой первообразной в (5.8), найдем общий интеграл исходного уравнения по формуле (5.2).

Пример 2. Решим этим способом уравнение (5.6) из предыдущего примера. Проинтегрировав функцию $M(x,y) = 4x^3 + 6xy^2$ по переменной x, получим

$$F(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Приравнивая $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $N(x,y)$, получаем

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 10y^4,$$

откуда $\varphi'(y) = 10y^4$ и $\varphi(y) = 2y^5 + \mathrm{const}$. Полагая $\varphi(y) = 2y^5$, общий интеграл уравнения запишем в виде $x^4 + 3x^2y^2 + 2y^5 = C$.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0.$
2. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

3. $(3x^2y + y^3)\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = 0.$
4. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$
5. $2y\cos^2 x\dfrac{dy}{dx} - (1 + y^2 \sin 2x) = 0.$

Ответы.

1. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C.$
2. $x \sin y - y \cos x + \ln |xy| = C.$
3. $xy(x^2 + y^2) = C.$
4. $\dfrac{\sin^2 x}{y} + \dfrac{x^2 + y^2}{2} = C.$
5. $x - y^2 \cos^2 x = C.$

5.2. Метод интегрируемых комбинаций

В некоторых случаях уравнение удается решить или упростить, выделив в нем группу членов, представляющих собой полный дифференциал или выражение, легко приводящееся к полному дифференциалу умножением или делением на какую-нибудь функцию. При этом можно использовать соотношения

$$y\,dx + x\,dy = d(xy), \qquad y\,dy = \frac{1}{2}d(y^2), \qquad x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2),$$
$$y\,dx - x\,dy = y^2\,d\left(\frac{x}{y}\right) = -x^2 d\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \quad \text{и т. п.}$$

Пример 3. Решим уравнение

$$xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy. \tag{5.9}$$

Решение. Перепишем его в виде

$$x(y\,dx - x\,dy) = (y^3 + x^2y)\,dy$$

и, выделив интегрируемую комбинацию, сделаем замену $t = y/x$:

$$x \cdot (-x^2) d\left(\frac{y}{x}\right) = (y^3 + x^2y)\,dy, \quad -d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)\right)\,dy.$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$-dt = (t^3 + t)\,dy,$$

интегрируя которое, найдем

$$\frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \ln|t| = y + C.$$

Отсюда находим

$$\ln\Big|1+\frac{x^2}{y^2}\Big| = 2y + C.$$

В процессе решения мы делили на x и на $t = y/x$. Ясно, что $y = 0$ является решением уравнения (5.9), а $x = 0$ не является.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\Big(\frac{y}{x}+3x^2\Big)\,dx + \Big(1+\frac{x^3}{y}\Big)\,dy = 0. \qquad (5.10)$$

Домножим его на x и выделим комбинацию $y\,dx + x\,dy$:

$$y\,dx + x\,dy + 3x^3\,dx + \frac{x^4}{y}\,dy = 0$$

или

$$d(xy) + 3x^3\,dx + \frac{x^4}{y}\,dy = 0.$$

Сделаем замену $t = xy$, тогда $y = t/x$, $dy = \dfrac{dt}{x} - \dfrac{t\,dx}{x^2}$:

$$dt + 3x^3\,dx + \frac{x^5}{t}\Big(\frac{dt}{x} - \frac{t\,dx}{x^2}\Big) = 0 \quad \text{или} \quad dt + 2x^3\,dx + \frac{x^4}{t}\,dt = 0.$$

Умножим уравнение на t и сделаем еще одну замену $u = x^2$:

$$t\,dt + t\cdot 2x\cdot x^2\,dx + (x^2)^2\,dt = 0, \qquad t\,dt + tu\,du + u^2\,dt = 0.$$

Выделим в последнем уравнении интегрируемую комбинацию $t\,du + u\,dt = d(ut)$ и домножим его на t еще раз:

$$t^2\,dt + ut\,d(ut) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}(ut)^2 = C.$$

Произведем обратную замену и получим общий интеграл уравнения (5.10) в виде

$$\frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C.$$

Задачи.

Решить уравнения:

1. $(x^2+y^2+x)+y\dfrac{dy}{dx}=0.$
2. $(x^2+y^2+y)-x\dfrac{dy}{dx}=0.$
3. $(x^2y^3+y)\,dx+(x^3y^2-x)\,dy=0.$
4. $(2x^3y^2-y)\,dx+(2x^2y^3-x)\,dy=0.$
5. $y^2(y\,dx-2x\,dy)=x^3(x\,dy-2y\,dx).$

Ответы.

1. $2x+\ln(x^2+y^2)=C.$
2. $x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=C.$
3. $\dfrac{y^2}{x^2}\,e^{-x^2y^2}=C;\ x=0.$
4. $xy(C-x^2-y^2)+1=0;\ x=0;\ y=0.$
5. $x^3-4y^2=Cx^{1/3}y^{4/3};\ x=0;\ y=0.$

5.3. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* для уравнения

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0, \tag{5.11}$$

если после умножения на нее это уравнение становится уравнением в полных дифференциалах. Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{5.12}$$

Поделив обе части последнего уравнения на μ, перепишем его в виде

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.13}$$

Таким образом, интегрирующий множитель μ удовлетворяет уравнениям в частных производных (5.12) или (5.13). Несмотря на то, что эти уравнения, как правило, имеют бесконечно много решений, задача их нахождения в общем случае ничуть не легче решения исходного уравнения (5.11).

Предположим, что уравнение (5.11) имеет интегрирующий множитель, зависящий от некоторой комбинации $\omega(x, y)$: $\mu = \mu(\omega(x, y))$. Тогда условия (5.12) перепишутся в виде

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

или

$$\frac{d\ln\mu}{d\omega} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Нетрудно увидеть, что такой множитель существует, если правая часть есть функция $\omega(x, y)$ или является постоянной.

На практике целесообразно пытаться отыскивать интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y.

Пусть

1) $\mu = \mu(x)$. Тогда

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N},$$

и такой множитель существует, если правая часть зависит только от x или является постоянной.

2) $\mu = \mu(y)$. Тогда

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M},$$

и правая часть должна зависеть только от y или быть постоянной.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$(1 - x^2y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0. \tag{5.14}$$

Решение. В этом уравнении $M = 1 - x^2y$, $N = x^2y - x^3$ и

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -x^2 - (2xy - 3x^2) = 2x(x - y) \neq 0,$$

поэтому это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x(x - y)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}.$$

В правой части стоит функция от x, значит, такой множитель существует и находится следующим образом:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{2}{x} \quad \text{или} \quad d\ln\mu = -\frac{2\,dx}{x}, \quad \text{откуда} \quad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Умножив уравнение (5.14) на эту функцию, получим

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)\,dy = 0, \qquad \frac{dx}{x^2} + y\,dy - (y\,dx + x\,dy) = 0.$$

Следовательно,

$$d\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}d(y^2) - d(xy) = 0, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y^2 - xy = C.$$

Еще мы должны проверить, не обращается ли функция $\mu(x)$ в нуль и при всех ли x она существует. Проверка показывает, что $x = 0$ также является решением исходного уравнения (5.14).

Задачи.

Проинтегрировать уравнения, отыскав предварительно интегрирующий множитель, зависящий от одной из переменных:

1. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0.$
2. $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0.$
3. $(1 - x^2y)\,dx + x^2(y-x)\,dy = 0.$
4. $2xy - y\,dx - (x^2 + y)\,dy = 0.$
5. $(x + \sin x + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0.$

Ответы.

1. $2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$
2. $x^2 - \dfrac{7}{y} - 3xy = C;\ y = 0.$
3. $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx;\ x = 0.$
4. $x^2 - y\ln|y| = Cy;\ y = 0.$
5. $2\sin y + 2(x-1) + \sin x - \cos x = Ce^{-x}.$

§6. Уравнения, не разрешенные относительно производной

В этом параграфе мы будем рассматривать общие уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6.1}$$

6.1. Особые решения

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (6.1) называется *особым*, если в каждой своей точке оно касается какого-либо другого решения этого уравнения (но не совпадает с ним в никакой окрестности этой точки). Это означает, что в точках особого решения нарушается теорема о единственности решения задачи Коши. Интегральная кривая, соответствующая особому решению, называется *особой интегральной кривой.*

Если функция $F(x, y, y')$ непрерывна и имеет частную производную по y', то особое решение можно искать следующим образом. Нужно исключить y' из системы уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{6.2}$$

Полученное соотношение между x и y будет задавать кривую, называемую *дискриминантной кривой.* После этого для каждой ветви дискриминантной кривой (если их несколько) нужно проверить, является ли она решением уравнения (6.1) и в том случае, если является, проверить, будет ли это решение особым.

Если семейство решений $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения (6.1) имеет *огибающую*, то эта огибающая будет особым решением. Чтобы найти огибающую, нужно исключить C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0 \tag{6.3}$$

и проверить, будет ли полученная кривая в каждой своей точке касаться какой-то из кривых этого семейства.

Пример 1. Решить уравнение

$$3y^2 y'^2 - 2xyy' + 4y^2 - x^2 = 0, \tag{6.4}$$

найти особые решения, дать чертеж.

Решение. Данное уравнение — квадратное относительно y'. Дискриминант равен $D = 4x^2y^2 - 12y^2(4y^2 - x^2) = 16y^2(x^2 - 3y^2)$. Следовательно,

$$y' = \frac{2xy \pm 4y\sqrt{x^2 - 3y^2}}{6y^2} = \frac{x}{3y} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3}.$$

Это однородные уравнения. Поэтому сделаем замену (3.4): $y = tx$. Получим $t'x + t = \dfrac{1}{3t} \pm \sqrt{\dfrac{1}{t^2} - 3}$, откуда

$$3t'x = \frac{1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}}{t} \qquad \text{или} \qquad \frac{3t\,dt}{1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Чтобы вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{3t\,dt}{1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}}$, нужно сделать сначала замену $1 - 3t^2 = u$, а потом $v = \sqrt{u}$ (проделайте это сами!). Интегрируя, получаем

$$-\ln\left|\sqrt{1 - 3t^2} \pm 2\right| = \ln|Cx|$$

(мы записали постоянную интегрирования в виде $\ln|C|$ и считаем, что эта постоянная подобрана так, чтобы произведение Cx было положительным), откуда $x\left(\sqrt{1 - 3t^2} \pm 2\right) = C$. Сделав обратную замену $t = y/x$, получим $\sqrt{1 - \dfrac{3y^2}{x^2}} = \dfrac{C}{x} \pm 2$. При возведении в квадрат знак «$\pm$» можно убрать, так как постоянная C может быть любого знака. Поэтому $\dfrac{C^2}{x^2} - \dfrac{4C}{x} + 4 = 1 - \dfrac{3y^2}{x^2}$, или $C^2 - 4Cx + 3x^2 + 3y^2 = 0$. Это уравнение задает кривую второго порядка на плоскости (x, y), а именно, окружность, так коэффициенты при x^2 и y^2 равны. Чтобы записать ее уравнение в наиболее простом виде, заменим постоянную C на $3C$ и получим окончательно $3x^2 + 3y^2 - 12Cx + 12C^2 - 3C^2 = 0$ или

$$(x - 2C)^2 + y^2 = C^2. \tag{6.5}$$

Итак, решением уравнения (6.4) служит семейство окружностей с центрами в точках $(2C, 0)$ и радиусами $|C|$.

В процессе решения мы делили на t и на выражение $1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}$. Случай $t = 0$ дает функцию $y = 0$, которая не является решением исходного уравнения. Если $1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2} = 0$, то $1 - 3t^2 = 0$ или $1 - 3t^2 = 4$. Первое уравнение дает $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Второе уравнение не имеет решений. Легко видеть, что функции $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ тоже являются решениями уравнения (6.4).

Изобразим решения уравнения на рисунке. По чертежу видно, что прямые $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ касаются семейства окружностей. Следовательно, они должны задавать особые решения. Убедимся, что это действительно так.

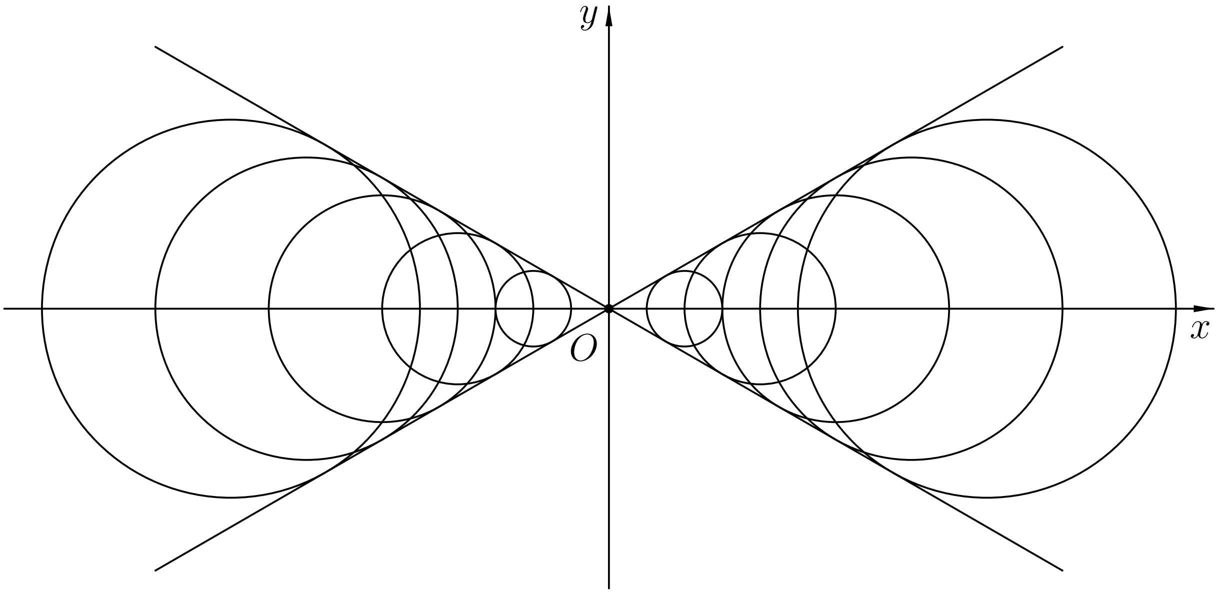

Рис. 2.

Запишем систему уравнений (6.2):

$$3y^2y'^2 - 2xyy' + 4y^2 - x^2 = 0, \qquad 6y^2y' - 2xy = 0.$$

Выразим из второго уравнения $y' = \dfrac{x}{3y}$ и подставим в первое уравнение. После очевидных преобразований получим $y^2 = \dfrac{x}{3}$. Таким образом, дискриминантная кривая состоит из двух ветвей — прямых $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Выясним, будут ли эти решения особыми. Пусть $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Выразим y из формулы общего решения (6.5):

$$y = \pm\sqrt{C^2 - (x - 2C)^2} = \pm\sqrt{-x^2 + 4Cx - 3C^2}.$$

В силу симметрии картины относительно оси Oy можно ограничиться рассмотрением случая $x, y \geqslant 0$. В каждой точке $x_0 > 0$ должны выполняться условия касания графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = \sqrt{-x^2 + 4Cx - 3C^2}$:

$$y(x_0) = \varphi(x_0), \qquad y'(x_0) = \varphi'(x_0). \tag{6.6}$$

Запишем эти условия:

$$\sqrt{-x_0^2 + 4Cx_0 - 3C^2} = \frac{x_0}{\sqrt{3}}, \qquad \left.\frac{2C - x}{\sqrt{-x^2 + 4Cx - 3C^2}}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из первого уравнения, возводя в квадрат, имеем $-x_0^2 + 4Cx_0 - 3C^2 = \dfrac{x_0}{3}$, откуда $(3C - 2x_0)^2 = 0$, следовательно, $C = \dfrac{2}{3}x_0$. Подставим это значение C

во второе уравнение. Легко видеть, что мы получим тождество $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, решения $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y = \sqrt{-x^2 + 4Cx - 3C^2}$ действительно касаются в точке с абсциссой x_0 при $C = \frac{2}{3}x_0$. Поэтому $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ является особым решением уравнения (6.4). Проверка того, что $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ также является особым решением, осуществляется аналогично. Впрочем, ее можно не делать, если заметить, что графики всех решений симметричны относительно оси Ox.

В рассматриваемом примере легко можно выразить y из формулы общего решения, заданного неявно соотношением (6.5). При решении других задач это может оказаться невозможным. Поэтому покажем, как проверять, является ли решение $y = \varphi(x)$ особым, не разрешая соотношения $\Phi(x, y, C) = 0$, задающего общее решение, относительно y.

Итак, общее решение $y(x)$ удовлетворяет неявному соотношению (6.5): $x^2 - 4Cx + 3C^2 + y^2 = 0$. Продифференцируем это равенство по x. Получим $2x - 4C + 2yy' = 0$, т.е., $yy' = 2C - x$. Запишем первое из условий (6.6) (условие наличия общей точки у графиков при $x = x_0$) как систему уравнений

$$y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{3}}, \qquad x_0^2 - 4Cx_0 + 3C^2 + y_0^2 = 0.$$

Подставим y_0 из первого равенства во второе. Получим то же самое равенство $(3C - 2x_0)^2 = 0$, что и выше. Теперь проверим, что выполняется условие касания $y'(x_0) = \varphi'(x_0)$. Оно означает, что при $x = x_0$ производные функций $y(x)$ и $\varphi(x)$ одинаковы. Имеем $\varphi'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Производная $y'(x)$ удовлетворяет соотношению $yy' = 2C - x$. Подставим в это равенство $x = x_0$, $y = \frac{x_0}{\sqrt{3}}$, $C = \frac{2}{3}x_0$. Получим $\frac{x_0}{\sqrt{3}}y'(x_0) = \frac{x_0}{3}$, откуда $y'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \varphi'(x_0)$.

Кроме того, особое решение можно найти как огибающую семейства общих решений. Сделаем это в рассматриваемом примере. Запишем условия (6.3):

$$x^2 - 4Cx + 3C^2 + y^2 = 0, \qquad -4x + 6C = 0.$$

Выразим из второго уравнения $C = \frac{2}{3}x$ и подставим во второе уравнение. Получим $y^2 - \frac{x^2}{3} = 0$, откуда $y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}$. Теперь проверку того, что это особые решения, можно осуществить любым из вышеописанных способов.

6.2. Случай, когда уравнение удается разрешить относительно производной

Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Их нужно решать обычными методами.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $yy'^2 + (x - y)y' - x = 0$. Это уравнение — квадратное относительно y'. Решив его, получим $y' = 1$ или $y' = -\dfrac{x}{y}$. Решением первого уравнения служат функции $y = x + C$. Во втором уравнении разделяются переменные: $y\,dy = -x\,dx$. Интегрируя, получим $y^2 + x^2 = C$. В процессе решения мы производили деление на y. Легко видеть, что $y = 0$ не является решением исходного уравнения. Таким образом, оно имеет два семейства решений.

Задачи.

Решить уравнения; выделить особые решения (если они есть):

1. $(y' + 1)^3 - 27(x + y)^2 = 0$.
2. $y^2(y'^2 + 1) = 1$.
3. $y'^2 = 4y^3(1 - y)$.
4. $8(y' - 1)^3 = 27(y - x)$.
5. $4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2$.
6. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.
7. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.
8. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.
9. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.
10. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.
11. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.

v 12. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

Ответы.

1. $y + x = (x + C)^3$; $y = -x$.
2. $(x + C)^2 + y^2 = 1$; $y = \pm 1$.
3. $y[1 + (x + C)^2] = 1$; $y = 0$; $y = 1$.
4. $(y - x)^2 = (x + C)^3$; $y = x$.
5. $y^2(1 - y) = (x + C)^2$; $y = 1$.
6. $4y = (x + C)^2$; $y = Ce^x$.
7. $y = Ce^x$; $y = Ce^{-x} + x - 1$.

8. $y = 2x^2 + C$; $y = -x^2 + C$.

9. $\ln Cy = x \pm \sin x$; $y = 0$.

10. $y^2 = C^2 x - C$; $4xy^2 = -1$.

11. $x^2 + (Cy + 1)^2 = 1$; $y = 0$.

12. $(Cx + 1)^2 = 1 - y^2$; $y = \pm 1$.

6.3. Метод введения параметра

Этот метод можно применять, когда уравнение (6.1) удается разрешить относительно x или y. Рассмотрим оба этих случая подробнее.

1) Уравнение (6.1) можно разрешить относительно y, то есть, переписать в виде

$$y = f(x, y'). \tag{6.7}$$

Обозначим $y' = p$. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства $y = f(x, p)$. Получим $dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp$. Подставив в него $dy = p\,dx$, получим уравнение, содержащее только переменные x и p:

$$p\,dx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp.$$

Если взять p за независимую переменную (разрешить уравнение относительно $\dfrac{dx}{dp}$) и найти общее решение $x = \varphi(p, C)$ полученного уравнения, то общее решение уравнения (6.7) можно записать в параметрическом виде

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f(\varphi(p, C), p).$$

Отметим, что при этом может быть потеряно решение за счет обращения в нуль выражения $p - \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial x}$.

Если же за независимую переменную взять x (разрешить уравнение относительно $\dfrac{dp}{dx}$) и записать решение этого уравнения в виде $p = \varphi(x, C)$, то подставляя найденное значение p в исходное уравнение (6.7), найдем его общее решение в виде $y = f(x, \varphi(x, C))$. При этом также может быть потеряно решение за счет обращения в нуль выражения $\dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p}$.

2) Уравнение (6.1) можно разрешить относительно x, то есть, переписать в виде

$$x = g(y, y'). \tag{6.8}$$

Снова введем параметр $p = y'$. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства $x = g(y, p)$. Получим $dx = \dfrac{\partial g}{\partial y}dy + \dfrac{\partial g}{\partial p}dp$. Подставив в него $dx = dy/p$, получим уравнение, содержащее только переменные y и p:

$$\frac{dx}{p} = \frac{\partial g(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial g(y,p)}{\partial p}dp.$$

Если взять p за независимую переменную и найти его общее решение $y = \psi(p,C)$, то общее решение уравнения (6.8) можно записать в параметрическом виде

$$y = \psi(p,C), \quad x = g(\psi(p,C),p).$$

Если же за независимую переменную взять y, и записать решение этого уравнения в виде $p = \psi(y,C)$, то подставляя его в исходное уравнение (6.8), запишем его общий интеграл $x = g(y,\psi(y,C))$. Здесь также как в случае 1) следует избегать потери решений.

Пример 3. Решить уравнение,

$$x - y = \frac{3}{2}y'^2 - y'^3, \tag{6.9}$$

найти особые решения, дать чертеж.

Решение. Поскольку данное уравнение является кубическим относительно y', мы не будем пытаться разрешить его относительно производной, а применим метод введения параметра. Имеем $x - y = \frac{3}{2}p^2 - p^3$, поэтому $dx - dy = 3(p - p^2)\,dp$. Заменив $dy = p\,dx$, получим

$$(1-p)\,dx = 3p(1-p)\,dp. \tag{6.10}$$

Отсюда $dx = 3p\,dp$, следовательно $x = \frac{3}{2}p^2 + C$ и $y = x - \frac{3}{2}p^2 + p^3 = p^3 + C$. Из полученных параметрических уравнений общего решения можно исключить параметр p следующим образом: запишем $x - C = \frac{3}{2}p^2$, $y - C = p^3$. Возведем первое равенство в куб, а второе — в квадрат. После исключения p^6 останется

$$27(y-C)^2 = 8(x-C)^3. \tag{6.11}$$

Кроме того, $p = 1$ также является решением уравнения (6.10). Подставляя это значение p в исходное уравнение, получим $x - y = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что $y = x - \frac{1}{2}$ также является решением уравнения (6.9).

Чтобы найти дискриминантную кривую, запишем систему уравнений (6.2):

$$x - y = \frac{3}{2}p^2 - p^3, \qquad 0 = 3p - 3p^2.$$

Из второго уравнения сразу получим $p = 0$ или $p = 1$. Следовательно, дискриминатная кривая состоит из двух прямых линий

$$y = x, \qquad y = x - \frac{1}{2}.$$

Ветвь $y = x$ дискриминантной кривой вообще не является решением уравнения (как видно из чертежа, она состоит из точек возврата кривых общего решения).

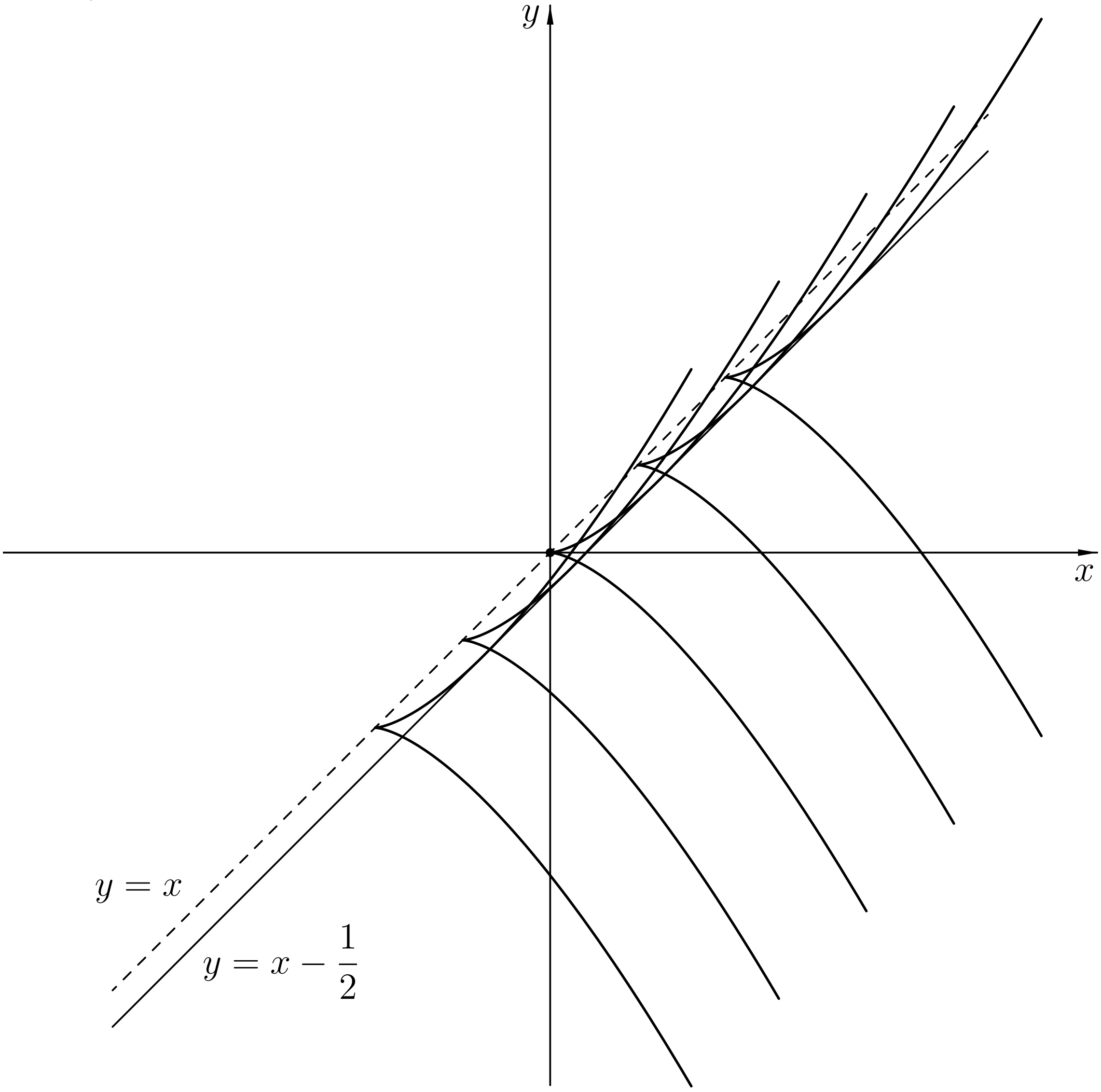

Рис. 3.

Проверим, что прямая $y = x - \dfrac{1}{2}$ является особым решением. Запишем условие касания кривых $27(y - C)^2 = 8(x - C)^3$ и $y = x - \dfrac{1}{2}$ в точке (x_0, y_0). Взяв производную от первого равенства, получим $9y'(y - C) = 4(x - C)^2$.

Отсюда $y' = \dfrac{4(x-C)^2}{9(y-C)}$. Поэтому условия (6.6) запишутся в виде

$$27(y_0 - C)^2 = 8(x_0 - C)^2, \qquad y_0 = x_0 - \frac{1}{2}, \qquad \frac{4(x_0 - C)^2}{9(y_0 - C)} = 1.$$

Проверим, что эта система совместна. Из первого и третьего равенств получаем $2(x_0 - C)^4 = 3(x_0 - C)^3$. Если $x_0 - C = 0$, то из первого равенства $y_0 - C = 0$, что противоречит условию $y_0 = x_0 - \dfrac{1}{2}$. Поэтому, сократив на $(x_0 - C)^3$, получим $C = x_0 - \dfrac{3}{2}$. Тогда $y_0 - C = \dfrac{4}{9}(x_0 - C)^2 = 1$. Несложно убедиться, что при подстановке x_0 и y_0 во второе уравнение получится тождество.

Пример 4. $y = 2xy' + y'^2 + x^2/2$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y = 2px + p^2 + x^2/2$, возьмем дифференциал от обеих частей и заменим $dy = p\,dx$. Получим уравнение $p\,dx = 2x\,dp + 2p\,dx + 2p\,dp + x\,dx$ или

$$2x\,dp + p\,dx + 2p\,dp + x\,dx = 0, \quad \text{откуда} \quad (x+p)(2\,dp + dx) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $x + p = 0$, либо $2\,dp + dx = 0$. Решением последнего уравнения является функция $x = C - 2p$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $y = 2p(C-2p) + p^2 + (C-2p)^2/2 = -p^2 + Cp + \frac{1}{2}C^2$. Отсюда можно записать решение исходного уравнения в параметрическом виде

$$x = C - 2p, \qquad y = -p^2 + Cp + \frac{1}{2}C^2.$$

Поскольку p легко исключается: $p = \frac{1}{2}(C - x)$, решение можно записать в явном виде: $y = (C-x)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(C-x)^2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}Cx + \frac{1}{4}C^2$.

Случай $x + p = 0$ дает еще одно решение уравнения: $p = -x$, отсюда $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Пример 5. $x = \dfrac{y}{2y'} + e^{yy'}$.

Решение. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства $x = \dfrac{y}{2p} + e^{yp}$. Получим $dx = \dfrac{p\,dy - y\,dp}{2p^2} + e^{py}\,d(py)$. Заменим dx на dy/p, и после преобразований получим уравнение

$$\left(\frac{1}{2p^2} - e^{py}\right) d(py) = 0.$$

Из него получаем $py = C$, откуда $p = C/y$. Подставив это в исходное уравнение, получим

$$x = \frac{y^2}{2C} - e^C.$$

Кроме того, равенство $e^{py} = 1/(2p^2)$ приводит к решению в параметрическом виде

$$y = -\frac{2}{p}\ln(\sqrt{2}|p|), \quad x = -\frac{1}{p^2}\ln(\sqrt{2}|p|) - \frac{1}{2p^2}.$$

6.4. Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнением Лагранжа называется уравнение, линейное относительно x и y, то есть, уравнение вида

$$A(y')y + B(y')x = C(y'), \tag{6.12}$$

где A, B и C — дифференцируемые функции от y'. Если $A(p) \not\equiv 0$, то это уравнение можно разрешить относительно y, то есть, переписать в виде

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \tag{6.13}$$

Заменим $p = y'(x)$, возьмем от этого уравнения дифференциал, и, подставив $dy = p\,dx$, перепишем его в виде

$$p = \varphi(p) + \big(\varphi'(p)x + \psi'(p)\big)\frac{dp}{dx}. \tag{6.14}$$

Будем рассматривать x как функцию от переменной p. Тогда уравнение будет линейным:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{6.15}$$

и интегрируется в квадратурах (см. п. 4.1). Его решение имеет вид $x = Cf(p) + g(p)$. Следовательно, общее решение уравнения (6.13) можно записать в параметрическом виде

$$y = \varphi(p)(Cf(p) + g(p)) + \psi(p), \quad x = Cf(p) + g(p).$$

Если параметр p удается исключить, то получим общий интеграл уравнения.

Кроме того, к общему решению следует добавить все решения вида

$$y = C_0x + \psi(C_0),$$

где C_0 — корень уравнения $\varphi(p) - p = 0$.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y = x(1 + y') + y'^2$.

Решение. Это уравнение Лагранжа $y = x(1 + p) + p^2$, где $\varphi(p) = 1 + p$, $\psi(p) = p^2$. Перепишем его в виде (6.15):

$$\frac{dx}{dp} + x = -2p.$$

Его решением служит функция $x = Ce^{-p} + 2(1 - p)$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $y = (Ce^{-p} + 2(1 - p))(1 + p) + p^2$ или, окончательно, $y = Ce^{-p}(1 + p) + 2 - p^2$.

При решении уравнения Лагранжа мы предполагали, что $\varphi(p) \not\equiv p$, иначе в формуле (6.15) получается деление на нуль. Рассмотрим случай $\varphi(p) \equiv p$ отдельно.

Уравнение вида

$$y = px + \psi(p). \tag{6.16}$$

называется *уравнением Клеро*. Для него уравнение (6.14) принимает вид

$$p = p + \big(x + \psi'(p)\big)\frac{dp}{dx}; \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dx}\big(x + \psi'(p)\big) = 0.$$

Первый множитель приводит к дифференциальному уравнению $\dfrac{dp}{dx} = 0$, из которого $p = C$. Тогда общее решение уравнения (6.16) можно записать в виде

$$y = Cx + \psi(C). \tag{6.17}$$

Геометрически это решение представляет собой семейство прямых.

Приравняв к нулю второй множитель, получим $x = -\psi'(p)$. Если это равенство удается разрешить относительно p, т.е., выразить $p = \omega(x)$, то, подставив его в исходное уравнение (6.16), получим

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{6.18}$$

Если этого сделать не удается, то мы можем записать ту же кривую в параметрическом виде

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p). \tag{6.19}$$

Несложно проверить, что соотношения (6.19) задают еще одно решение уравнения (6.16). Если $\psi(p)$ имеет отличную от нуля вторую производную, то решение в самом деле можно записать в виде (6.18) и эта кривая оказывается огибающей семейства решений (6.17), а, значит, особым решением уравнения.

Пример 7. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

Решение. Общее решение этого уравнения запишем по формуле (6.17):

$$y = Cx + \sqrt{1 - C^2}.$$

Поскольку $\psi(p) = \sqrt{1 - p^2}$, уравнение $x = -\psi'(p)$ имеет вид

$$x = \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Разрешив его относительно p, найдем $p = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Тогда

$$\psi(p) = \sqrt{1 - p^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Поэтому уравнение огибающей (особой интегральной кривой) будет

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \text{или} \quad y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Задачи.

Найти все решения уравнений:

1. $8y'^3 - 12y'^2 = 27(y - x)$.
2. $y' + y = xy'^2$.
3. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
4. $y = xy' - 2 - y'$.
5. $x^2y'^2 = xyy' + 1$.
6. $2y'^2(y - xy') = 1$.
7. $2xy' - y = y' \ln yy'$.
8. $2xy' - y = \ln y'$.
9. $y'^3 + y^2 = xyy'$.
10. $y + 2y'^3 = xy'^2$.
11. $y = xy' - x^2y'^3$.
12. $y = 2xy' + y^2y'^3$.
13. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

Ответы.

1. $(y+C)^2=(x+C)^3;\ y=x-\dfrac{4}{27}.$
2. $x=\dfrac{p-\ln p+C}{(p-1)^2},\ y=xp^2-p;\ y=0,\ y=x-1.$
3. $y=-\dfrac{(x-C)^2}{2}+\dfrac{C^2}{4};\ y=\dfrac{x^2}{2}.$
4. $y=Cx-C-2.$
5. $xp\sqrt{2\ln Cp}=\pm 1,\ y=\mp\left(\sqrt{2\ln Cp}-\dfrac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right).$
6. $2C^2(y-Cx)=1,\ 8y^3=27x^2.$
7. $y^2=2Cx-C\ln C;\ 2x=1+2\ln|y|.$
8. $xp^2=p+C,\ y=2+\dfrac{2C}{p}-\ln p.$
9. $pxy=y^2+p^3,\ y^2(2p+C)=p^4;\ y=0.$
10. $x=\dfrac{C}{(p-1)^2}+2p+1,\ y=\dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}+p^2;\ y=0,\ y=x-2.$
11. $xp^2=C\sqrt{|p|}-1,\ y=xp-x^2p^3;\ y=0.$
12. $2xp^2=C-C^2p^2,\ y=\dfrac{C}{p};\ y=0,\ 32x^3=-27y^4.$
13. $y^2=2C^3x+C^2;\ 27x^2y^2=1.$

Глава 2

Дифференциальные уравнения высших порядков

§7. Уравнения, разрешаемые в квадратурах. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.1}$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, а функция F определена и непрерывна на некотором открытом множестве G $(n+2)$-мерного пространства своих аргументов.

Решение уравнения (7.1) на некотором интервале I действительной оси x определяется как n раз непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ такая, что для всех $x \in I$ точка $(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in G$ и при подстановке которой в (7.1) это уравнение превращается в тождество. *Общим решением* уравнения (7.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \tag{7.2}$$

где C_1, $\dots$, C_n — произвольные постоянные, которая при любом фиксированном наборе этих постоянных определяет решение уравнения. Если общее решение задано неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0, \tag{7.3}$$

то (7.3) называется *общим интегралом* уравнения (7.1).

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \tag{7.4}$$

где функция f также определена и непрерывна на некотором открытом множестве G_1 $(n+1)$-мерного пространства своих аргументов.

Чтобы поставить для уравнения (7.4) *задачу Коши*, позволяющую выделить конкретное решение из всей бесконечной совокупности решений, определенных формулой (7.2) или (7.3), нужно, в отличие от уравнения первого порядка, задать не одно условие $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, а добавить к этому условию еще значения производных искомой функции в точке x_0 до порядка $n-1$ включительно. Поэтому, задача Коши для уравнения (7.1) ставится следующим образом: найти решение $y(x)$ уравнения (7.1), удовлетворяющее следующим (начальным) условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \tag{7.5}$$

в которых $x_0 \in I$, а y_0, $y_{0,1}$, $\ldots$, $y_{0,n-1}$ – заданные числа такие, что точка $(x_0, y_0, y_{0,1}, \ldots, y_{0,n-1}) \in G_1$.

Для решения задачи Коши нужно подставить условия (7.2) (или (7.3)) в (7.5) и определить постоянные C_1, $\ldots$, C_n, удовлетворяющие уравнениям, полученным в результате такой подстановки. Условия существования и единственности задачи Коши формулируются, как правило, для уравнения (7.4), разрешенного относительно старшей производной искомой функции. Само же уравнение (7.1), как будет видно из приведенных ниже примеров, иногда имеет несколько серий решений. Поэтому на вопросе существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (7.1) мы не останавливаемся.

7.1. Уравнения, разрешаемые в квадратурах

I. Пусть уравнение (7.1) имеет вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{7.6}$$

и допускает параметризацию

$$x = \varphi(t), \ y^{(n)} = \psi(t).$$

В этом случае удается найти общий интеграл в параметрической форме

$$x = \Phi(t, C_1, \ldots, C_n), \ y^{(n)} = \Psi(t, C_1, \ldots, C_n). \tag{7.7}$$

Имеем $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Аналогично, из равенств $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx$, $\ldots$, $dy = y'\,dx$, найдем

$$y = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n), \quad x = \varphi(t).$$

Частным случаем уравнения (7.6) является уравнение

$$y^{(n)} = f(x), \tag{7.8}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция на I.

Принимая $x \in I$ за параметр, общее решение уравнения получим в форме

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\, \underbrace{dx \ldots dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

II. Уравнение (7.1) имеет вид

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{7.9}$$

1) Если уравнение (7.9) разрешимо относительно $y^{(n)}$, т.е.

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \tag{7.10}$$

то, введем новую искомую функцию $z(x) = y^{(n-1)}(x)$ и приведем уравнение (7.10) к виду

$$z' = f(z).$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$x + C_1 = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} \qquad (f(z) \neq 0).$$

Предположим, что полученное равенство удается разрешить относительно переменной z:

$$z = \psi(x, C_1).$$

В этом случае получим уравнение $y^{(n-1)} = \psi(x, C_1)$. Это — уравнение вида (7.8), общее решение запишется в виде

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n-1} \psi(x, C_1)\, \underbrace{dx \ldots dx}_{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Если же относительно z разрешить уравнение не удается, то считая переменную z параметром, запишем равенства

$$dx = \frac{dz}{f(z)}, \quad y^{(n-1)} = z, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = z\frac{dz}{f(z)}, \quad \ldots, \quad dy = y'\, dx,$$

из которых определим y как функцию параметра z :

$$y^{(n-2)} = \int_{z_0}^{z} z\frac{dz}{f(z)} + C_2 = \psi_1(z, C_2), \ \ldots,$$

$$y = \int_{z_0}^{z} y'(z)\frac{dz}{f(z)} = \psi_{n-1}(z, C_2, \ldots, C_n).$$

2) Пусть уравнение (7.9) не разрешимо относительно $y^{(n)}$, но разрешимо относительно $y^{(n-1)}$, т.е., имеет вид

$$y^{(n-1)} = f(y^{(n)}).$$

Полагая

$$y^{(n)} = t, \quad y^{(n-1)} = f(t),$$

согласно равенствам

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{f'(t)}{t}\,dt, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx, \quad \ldots, \quad dy = y'\,dx,$$

последовательно найдем

$$\begin{aligned}
&x = \int_{t_0}^{t} \frac{f'(t)}{t}\,dt + C_1,\\
&y^{(n-2)} = \int_{t_0}^{t} \frac{f(t)f'(t)}{t}\,dt + C_2,\\
&\ldots\\
&y = \int_{t_0}^{t} y'(t)\frac{f'(t)}{t}\,dt = \omega(t, C_2, \ldots, C_n).
\end{aligned}$$

3) Наконец, если уравнение (7.9) допускает параметрическое представление

$$y^{(n)} = \varphi(t),\ y^{(n-1)} = \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — дифференцируемая функция, то, аналогично предыдущему, получим

$$x = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_2, \ldots,$$

$$y = \int_{t_0}^{t} y'(t)\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \omega(t, C_2, \ldots, C_n).$$

III. Уравнение (7.1) имеет вид

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \tag{7.11}$$

С помощью замены $y^{(n-2)} = u$ уравнение (7.11) приводится к уравнению второго порядка

$$F(u, u'') = 0.$$

1) Предположим, что полученное уравнение разрешимо относительно u'':

$$u'' = f(u).$$

Умножая обе части этого уравнения на $2u'\,dx$ и пользуясь очевидными равенствами $u''2u'\,dx = 2u'\,d(u') = d(u'^2)$, $u'\,dx = du$, перепишем уравнение в виде

$$d(u'^2) = 2f(u)\,du.$$

Отсюда

$$u'^2 = 2\int_{u_0}^{u} f(u)\,du + C_1, \quad du = \pm\sqrt{2\int_{u_0}^{u} f(u)\,du + C_1}\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение первого порядка, получим

$$x = \pm\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{2\int_{u_0}^{u} f(u)du + C_1}} + C_2 = \xi(u, C_1, C_2), \quad y^{(n-2)} = u.$$

Тогда цепочка равенств

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\,dx = \pm\frac{udu}{\sqrt{2\int_{u_0}^{u} f(u)du + C_1}}, \quad \ldots, \quad dy = y'\,dx$$

позволяет окончательно получить

$$\begin{aligned}
&x = \xi(u, C_1, C_2),\\
&y^{(n-3)} = \pm\int_{u_0}^{u}\frac{udu}{\sqrt{2\int_{u_0}^{u} f(u)du + C_1}} + C_3 = \xi_1(u, C_1, C_3),\\
&\ldots\\
&y = \xi_{n-2}(u, C_1, C_3, \ldots, C_n).
\end{aligned}$$

2) Если уравнение (7.11) допускает параметрическое представление

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-2)} = \psi(t),$$

то из соотношений $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx$ получим уравнение

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = \varphi(t)\psi'(t)\,dt,$$

из которого найдем

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int_{t_0}^{t}\varphi(t)\psi'(t)dt + C_1} = \zeta(t, C_1).$$

Таким образом, мы получили параметрическое представление вида $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \zeta(t, C_1)$, и теперь задача сводится к интегрированию уравнения типа (7.9).

Рассмотрим теперь следующие частные случаи уравнения (7.1), которые при помощи замены неизвестной функции можно привести к уравнению более низкого порядка.

7.2. В уравнение (7.1) не входит неизвестная функция $y(x)$ и первые $k-1$ ее последовательные производные

В таком случае уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n. \tag{7.12}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$z(x) = y^{(k)}(x). \tag{7.13}$$

Тогда получаем $z'(x) = y^{(k+1)}(x)$, $\ldots$, $z^{(n)}(x) = y^{(n-k)}(x)$ и от уравнения (7.12) придем к уравнению

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0, \tag{7.14}$$

порядок которого ниже на k единиц.

Если для уравнения (7.14) удается найти общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

то, подставляя его в (7.13) и последовательно интегрируя k раз, получим

$$\begin{aligned} &y^{(k-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})\, dx + C_{n-k+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{k} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})\, \underbrace{dx \ldots dx}_{k} + \\ &\qquad\qquad + C_{n-k+1}x^{k-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Если для уравнения (7.14) можно получить лишь общий интеграл

$$\Phi(x, z, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0,$$

который удается разрешить относительно x, то решение уравнения (7.12) записывают в параметрическом виде, приняв за параметр z. В этом случае независимая переменная, как функция параметра, определится из найденного общего интеграла, а равенство (7.13) определит значение k-й производной искомого решения как функции параметра. Таким образом, мы имеем следующие равенства:

$$x = \psi(z, C_1, \ldots, C_{n-k}), \quad y^{(k)}(x) = z. \tag{7.16}$$

Поэтому, чтобы записать решение искомого уравнения в параметрическом виде, нам осталось определить y как функцию параметра. Для этого запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx = z\,d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}),\\
&\dots\\
&dy' = y''\,dx = y''\,d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}),\\
&dy = y'\,dx = y'\,d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}).
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Определяя отсюда последовательно $y^{(k-1)}$, $\dots$, y'', y' как функции параметра z, найдем значение искомой функции как функции параметра и n произвольных постоянных интегрирования, первые $n-k$ из которых вошли в параметрическое представление x, а остальные k появляются в процессе интегрирования равенств (7.17). Значит общее решение уравнения (7.12) в параметрической форме в этом случае можно записать так:

$$x = \psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}), \quad y = \omega(z, C_1, \dots, C_n). \tag{7.18}$$

Если общий интеграл уравнения (7.14) не разрешается относительно x, но его удается параметризовать:

$$x = \psi_1(t, C_1, \dots, C_{n-k}), \quad z = \omega_1(t, C_1, \dots, C_{n-k}), \tag{7.19}$$

где t — параметр, то, учитывая (7.13) и (7.19), запишем цепочку равенств (7.17):

$$\begin{aligned}
&dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx = z\,d\psi_1(t, C_1, \dots, C_{n-k}) =\\
&\qquad\qquad\qquad = \omega_1(t, C_1, \dots, C_{n-k})\,d\psi_1(t, C_1, \dots, C_{n-k}),\\
&\dots\\
&dy' = y''\,dx = y''\,d\psi_1(t, C_1, \dots, C_{n-k}),\\
&dy = y'\,dx = y'\,d\psi_1(t, C_1, \dots, C_{n-k}).
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Из этих равенств (определяя последовательно $y^{(k-1)}$, $\dots$, y'', y' как функции параметра t) получим параметрическое решение уравнения (7.12) вида (7.18).

Пример 1. Решим уравнение $y''' + y'' - x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции и ее первой производной. Поэтому, сделав замену (7.13) при $k = 2$, мы придем к линейному уравнению $z' + z = x$, общее решение которого имеет вид $z = C_1e^{-x} + x - 1$. Значит, $y'' = C_1e^{-x} + x - 1$ и, следуя (7.15), $y = C_1e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3$. Удовлетворяя начальным условиям, придем к системе $C_1 + C_3 = 1$, $-C_1 + C_2 = -1$,

$C_1-1=0$. Из этой системы получим $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=0$, следовательно, $y=e^{-x}+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2$.

Пример 2. $(y'+1)y''=y'/x$.

Решение. Положив $y'=z(x)$, придем к уравнению с разделяющимися переменными $(z+1)z'=z/x$, общий интеграл которого запишем в виде $z+\ln C_1z=\ln|x|$ (здесь постоянную интегрирования мы взяли в виде $-\ln|C_1|$ и считаем, что произведение C_1z положительно). Следует также учесть, что при разделении переменных мы могли потерять значение $z=0$, которому соответствует $y=C$. Нетрудно проверить, что это значение y удовлетворяет уравнению. Так как общий интеграл не удается разрешить относительно z, то, разрешив его относительно x, получим $x=C_1ze^z$. Будем искать решение в параметрическом виде, приняв z за параметр. Записав, следуя (7.17), равенство $dy=y'\,dx=y'\,d(C_1ze^z)=C_1z(1+z)e^z\,dz$, найдем $y=C_1(z^2-z+1)e^z+C_2$, что, вместе с уже полученным выражением для x, дает решение уравнения в параметрической форме. Решение $y=C$ содержится в этой серии при $C_1=0$.

Пример 3. $y'y''+x=0$.

Решение. Сделав в уравнении замену $y'=z(x)$, придем к уравнению $zz'+x=0$, общий интеграл которого есть $z^2+x^2=C_1^2$ (постоянная интегрирования взята в таком виде для удобства). Этот общий интеграл легко параметризуется: $x=C_1\sin t$, $z=C_1\cos t$. Записав равенство (7.19), получим $dy=y'\,dx=C_1^2\cos t\,d\sin t=C_1^2\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}C_1^2(1+\cos 2t)dt$. Отсюда $y=\frac{1}{4}C_1^2(2t+\sin 2t)+C_2$.

7.3. В уравнение (7.1) не входит независимая переменная x

В этом случае уравнение имеет вид

$$F(y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0. \tag{7.21}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y'=p(y). \tag{7.22}$$

Тогда

$$y''=\frac{dp(y)}{dy}y'=p'p,$$
$$y'''=\frac{d(p'p)}{dy}y'=(p''p+p'^2)p=p''p^2+p'^2p.$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков. Подставляя выражения этих производных в (7.21), получим уравнение, порядок которого

на единицу ниже:
$$F_1(y,p,p',\dots,p^{(n-1)})=0, \tag{7.23}$$
а роль независимой переменной в котором играет y. Если для уравнения (7.23) удается найти общее решение $p=\varphi(y,C_1,\dots,C_{n-1})$, то, подставив его в (7.22), придем к уравнению
$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1,\dots,C_{n-1}). \tag{7.24}$$
Интегрируя (7.24), получим общий интеграл (7.3) уравнения (7.21). Если для уравнения (7.23) можно получить лишь общий интеграл
$$\Phi(y,p,C_1,\dots,C_{n-1})=0,$$
который удается разрешить относительно y, то решение уравнения (7.21) записывают в параметрическом виде, приняв p за параметр. В этом случае искомая функция, как функция параметра, определится из найденного общего интеграла, а равенство (7.22) позволяет выразить dx через дифференциал параметра. Таким образом, мы имеем следующие равенства:
$$y=\psi(p,C_1,\dots,C_{n-1}),\quad dx=\frac{dy}{p}=\frac{d\psi(p,C_1,\dots,C_{n-1})}{p}. \tag{7.25}$$
Интегрируя последнее уравнение, найдем $x=\omega(p,C_1,\dots,C_n)$. В общем случае, параметризуя общий интеграл уравнения (7.23) (когда это удается сделать), получим $y=\psi_1(t,C_1,\dots,C_{n-1})$, $p=\omega_1(t,C_1,\dots,C_{n-1})$. Подставляя эту параметризацию в (7.25) и интегрируя полученное уравнение, определим x как функцию параметра t:
$$x=\psi_2(t,C_1,\dots,C_n).$$

Пример 4. Решим уравнение $y''-2yy'=0$.

Решение. Сделав замену (7.22), после сокращения на p придем к уравнению $p'=2y$. При этом теряется решение $y=C$, соответствующее $p=0$. Общее решение полученного уравнения имеет вид $p=y^2+C_1$. Подставив его в (7.22), придем к уравнению $dy/dx=y^2+C_1$. Здесь следует различать два случая в зависимости от знака C_1 и случай $C_1=0$. Поэтому, заменяя в последнем уравнении C_1 на $\pm C_1^2$, и интегрируя это уравнение, получим два семейства решений исходного уравнения:
$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1}=x+C_2,\quad \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|=x+C_2,$$
которые вместе с ранее найденным решением $y=C$ и решением $y=1/(C-x)$ (которое получается если положить $C_1=0$) дают все решения уравнения.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $2y'' = e^y$.

Решение. Согласно (7.22), соответствующее уравнение (7.23), а именно, $2pp' = e^y$ имеет общий интеграл $y = \ln|p^2 + C_1|$. Взяв p за параметр, из (7.25) найдем $dx = 2\,dp/(p^2 + C_1)$. Поэтому, как в примере 4, получаем три параметрических семейства решений уравнения, в которых параметрическое представление искомой функции определено выше, а представление независимой переменной дается формулами

$$x = \frac{2}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{p}{C_1} + C_2, \quad x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{p - c_1}{p + c_1}\right| + C_2, \quad x = C - \frac{2}{p}.$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение $2yy'' - 3y'^2 - y^2 = 0$.

Решение. После замены $y' = p(y)$ уравнение (7.23) примет вид $2ypp' - 3p^2 - y^2 = 0$. Общий интеграл этого уравнения Бернулли имеет вид $p^2 + y^2 - C_1y^3 = 0$. Так как в него входят однородные функции от p и y, степени которых отличаются на единицу, для его параметризации сделаем подстановку $p = ty$, $y \neq 0$. Получим $y = (t^2 + 1)/C_1$, $p = (t^3 + t)/C_1$. Отсюда имеем $dx = 2\,dt/(t^2 + 1)$, $x = 2\operatorname{arctg} t + C_2$. Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = 0$ также будет решением уравнения. Исключив параметр t, можно записать общее решение уравнения.

7.4. В уравнение (7.1) не входит независимая переменная x, а также неизвестная функция $y(x)$ и первые $k-1$ ее последовательные производные

В таком случае уравнение имеет вид

$$F(y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n. \tag{7.26}$$

На уравнение (7.26) можно смотреть как на частный случай уравнения (7.21), а также уравнения (7.12). Однако, если сразу сделать замену $y' = p(y)$, то порядок уравнения понизится лишь на единицу и оно окажется уравнением типа (7.21), причем достаточно сложного вида. Поэтому сначала осуществляют более простую замену $z = y^{(k)}$ и приходят к уравнению (7.21), порядок которого будет равен $n - k$, а роль неизвестной функции будет играть z. Теперь можно сделать замену $z' = p(z)$ и понизить порядок уравнения (7.26) еще на одну единицу. Если удастся найти общее решение полученного уравнения, то, определив $z(x)$ (если это возможно), общее решение уравнения (7.26) можно найти, интегрируя выражение $y^{(k)} = z$. В остальных случаях решение уравнения приходится искать в параметрическом виде.

Пример 7. Решим уравнение $y' + y''' - 1 = 0$.

Решение. Осуществляя последовательно замены $y' = z(x)$, а затем $z' = p(z)$, придем, соответственно, к уравнениям $z + z'' = 1$, $z + pp' = 1$. Общий интеграл последнего уравнения можно записать следующим образом: $p^2+(z-1)^2=C_1^2$. Введем его параметризацию, полагая $p=C_1\cos t$, $z=1+C_1\sin t$. Из равенства $z'=p$ находим $dx=dz/p=dt$, $x=t+C_2$. Следовательно, $dy=z\,dx=(1+C_1\sin t)\,dt$, откуда $y=t-C_1\cos t+C_3$. Выразив параметр t через x, можно записать общее решение уравнения.

7.5. Метод интегрируемых комбинаций

Этот метод применяется в том случае, если уравнение (7.1) удается умножить на некоторую функцию его аргументов, таким образом, что его можно будет представить в виде полной производную по x от некоторой комбинации этих аргументов. Это позволяет понизить порядок уравнения на единицу интегрированием.

Пример 8. Пусть дано уравнение $yy''=2y'^2$.

Решение. Несмотря на то, что это уравнение имеет вид (7.21), его проще решить, поделив обе его части на выражение yy'. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{y''}{y'}=2\cdot\frac{y'}{y}\quad\text{или}\quad\big(\ln y'\big)'=2\big(\ln y\big)'.$$

Проинтегрировав, получим $\ln y'=2\ln y+\ln C_1$, откуда $y'=C_1y^2$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, находим $-1/y=C_1x+C_2$ или $y=-1/(C_1x+C_2)$. Во время деления на y' было потеряно решение $y=C$, которое при $C\neq 0$ содержится в общем решении (при $C_1=0$), а при $C=0$ должно быть включено в ответ.

Пример 9. Рассмотрим уравнение $(yy''+y'^2)x+(1-y')xyy'-yy'=0$.

Решение. Поделив обе части уравнения на xyy', перепишем его в виде

$$\frac{(yy''+y'^2)}{yy'}+(1-y')-\frac{1}{x}=0\quad\text{или}\quad\frac{d}{dx}\big(\ln yy'+x-y-\ln x\big)=0.$$

Отсюда получаем $\ln yy'=y-x+\ln C_1x$, следовательно, $yy'=C_1xe^{y-x}$. Решив это уравнение с разделяющимися переменными, найдем общий интеграл исходного уравнения: $(y+1)e^{-y}=C_1(x+1)e^{-x}+C_2$. К нему еще нужно добавить решение $y=C$, потерянное при делении на xyy'.

Задачи.

Найти все решения уравнений:

1. $x^2y''=y'^2$.
2. $y''=e^y$.
3. $y'''=y''^2$.

4. $y''^3 + xy'' = 2y'$.
5. $y^4 - y^3y'' = 1$.
6. $yy'' + y = y'^2$.
7. $y'''y'^2 = y''^3$.
8. $y''(2y' + x) = 1$.
9. $y'y''' = 2y''^2$.
10. $yy'' + y'^2 = 1$.
11. $yy'' = y'(y' + 1)$.
12. $xy'' = 2yy' - y'$.
13. $xy'' - y' = x^2yy'$.

Ответы.

1. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2;\ 2y = x^2 + C;\ y = C$.
2. $e^y \sin^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2;\ e^y\mathrm{sh}^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2;\ e^y(x + C)^2 = 2$.
3. $y = C_3 - (x + C_1)\ln C_2(x + C_1);\ y = C_1x + C_2$.
4. $x = C_1p + 3p^2,\ y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1p^4 + C_1^2\dfrac{p^3}{6} + C_2;\ y = C$.
5. $\ln|y^2 + C_1 \pm \sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 1}\,| = 2x + C_2;\ y = \pm 1$.
6. $C_1^2y + 1 = \pm\mathrm{ch}(C_1x + C_2);\ C_1^2y - 1 = \sin(C_1x + C_2);\ 2y = (x + C)^2;\ y = 0$.
7. $x = \ln|p| + 2C_1p + C_2,\ y = p + C_1p^2 + C_3;\ y = C_1x + C_2$.
8. $x = C_1e^p - 2p - 2,\ y = C_1(p - 1)e^p - p^2 + C_2$.
9. $C_1y = \ln|C_1x + C_2| + C_3;\ y = C_1x + C_2$.
10. $y^2 = x^2 + C_1x + C_2$.
11. $C_1y - 1 = C_2e^{C_1x};\ y = C - x;\ y = 0$.
12. $y = C_1\mathrm{tg}(C_1 \ln C_2x);\ y - C_1 = C_2(y + C_1)|x|^{2C_1};\ y\ln Cx = -1$.
13. $2\ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = C_1x^2 + C_2;\ y = 4C_1\mathrm{tg}(C_1x^2 + C_2);\ y(C - x^2) = 4;\ y = C$.

§8. Понижение порядка в однородных уравнениях

8.1. Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{8.1}$$

называется *однородным* относительно искомой функции и ее производных, при замене y на ty, y' на ty', …, $y^{(n)}$ на $ty^{(n)}$ это уравнение меняется на эквивалентное ему. Другими словами, функция F является однородной относительно y, y', y'', …, $y^{(n)}$ степени m, то есть, $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$. В этом случае порядок уравнения можно понизить, сделав замену

$$y' = zy, \tag{8.2}$$

где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда производные y'', …, $y^{(n)}$ выражаются следующим образом;

$$\begin{aligned}
&y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y,\\
&y''' = (z'' + 2z'z)y + (z' + z^2)y' = (z'' + 3z'z + z^3)y,\\
&\dots\\
&y^{(n)} = f(z^{(n-1)}, \dots, z', z)y.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Подставляя (8.2) и (8.3) в (8.1) и пользуясь однородностью функции F, получим

$$\begin{aligned}
F(x, y, zy, (z' + z^2)y, \dots, f(z^{(n-1)}, \dots, z', z)y) =&\\
= y^m F(x, 1, z, (z' + z^2), \dots, f(z^{(n-1)}, \dots, z', z)) = 0.&
\end{aligned}$$

После сокращения на y^m (при этом, если $m > 0$, может быть потеряно решение $y = 0$), получаем уравнение

$$F_1(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0, \tag{8.4}$$

порядок которого на единицу ниже. Если найдено общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

уравнения (8.4), то, подставив его в (8.2) и проинтегрировав полученное уравнение, можно найти общее решение уравнения (8.1):

$$y = C_n e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx}, \tag{8.5}$$

из которого решение $y = 0$ получается при $C_n = 0$.

Если для уравнения (8.4) получен лишь общий интеграл

$$\Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

который удается разрешить относительно x, то, приняв за параметр z, получим $x = \psi(z, C_1, \dots, C_{n-1})$. Тогда искомую функцию y как функцию параметра z получим из (8.2):

$$y = C_n e^{\int_{z_0}^{z} z\, d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-1})}. \tag{8.6}$$

Если общий интеграл уравнения (8.4) не разрешается относительно x, но его удается параметризовать: $x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, $z = \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, то решение уравнения (8.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ &y = C_n e^{\int_{t_0}^{t} \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})\, d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение $(yy'' - y'^2)x - yy' = 0$.

Решение. Уравнение является однородным относительно y, y', y'' степени $m = 2$. Сделав замену $y' = yz$ (тогда $y'' = (z^2 + z')y$, согласно (8.3)), после сокращения на y^2 получим уравнение $xz' - z = 0$, решение которого имеет вид $z = C_1 x$. Поэтому из (8.5) имеем $y = C_2 e^{C_1 x^2}$. Решение $y = 0$ получается из общего решения при $C_2 = 0$.

Пример 2. Пусть дано уравнение $y'' - \dfrac{y^3}{yy'} e^{y'/y} - \dfrac{y'^2}{y} = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит независимой переменной и его порядок может быть понижен заменой (7.22). С другой стороны, уравнение является однородным (степени 1) относительно искомой функции и ее производных и заменой (8.2) приводится к уравнению $z' = e^z/z$. Решив это уравнение, находим

$$x = -(z+1)e^{-z} + C_1.$$

Приняв переменную z за параметр, можно найти параметрическое представление искомой функции из (8.6):

$$y = C_2 e^{-(z^2+2z+2)e^{-z}}.$$

Отметим, что $y = 0$ не является решением уравнения, так как не входит в его область определения.

Пример 3. Решим уравнение $\dfrac{2y''y'}{y^2} - \dfrac{2y'^3}{y^3} - x - \dfrac{y'^2}{xy^2} = 0$.

Решение. Уравнение является однородным относительно y, y', y'' степени $m = 0$. Понизив его порядок, придем к уравнению Бернулли $2zz'x - z^2 = x^2$, общий интеграл которого запишем в виде $z^2 - x^2 - 2C_1 x = 0$. Вводя параметризацию $z = C_1 \operatorname{sh} t$, $x + C_1 = C_1 \operatorname{ch} t$, решение уравнения получим по формуле (8.7):

$$x = C_1(\operatorname{ch} t - 1), \quad y = C_2 e^{C_1^2(\operatorname{sh} 2t - 2t)/4}.$$

8.2. Обобщенно-однородные уравнения

Дифференциальное уравнение (8.1) называется *обобщенно-однородным*, если при замене x на tx, y на $t^\alpha y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, $\ldots$, $y^{(n)}$ на $t^{\alpha-n}y^{(n)}$, где α —

некоторое действительное число, оно меняется на эквивалентное ему. Таким образом, функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ удовлетворяет следующему условию:

$$F(tx, t^{\alpha}y, t^{\alpha-1}y', \ldots, t^{\alpha-n}y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{8.8}$$

где m — некоторое действительное число.

В этом случае делается замена как независимой переменной, так и искомой функции:

$$x = e^t \ \ (x = -e^t \text{ при } x < 0), \quad y = z(t)e^{\alpha t}. \tag{8.9}$$

Производные при такой замене преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
&y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + \alpha z)e^{(\alpha-1)t} = g_1(z, z')e^{(\alpha-1)t},\\
&y''(x) = \frac{[y'(x)]'_t}{x'_t} = (z'' + (2\alpha - 1)z' + \alpha(\alpha - 1)z)e^{(\alpha-2)t} = g_2(z, z', z'')e^{(\alpha-2)t},\\
&\ldots\\
&y^{(n)}(x) = g_n(z, z', \ldots, z^n)e^{(\alpha-n)t}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Подставляя (8.9) и (8.10) в (8.1), получим

$$F(e^t, z(t)e^{\alpha t}, g_1(z, z')e^{(\alpha-1)t}, \ldots, g_n(z, z', \ldots, z^n)e^{(\alpha-n)t}) = 0.$$

Из условия (8.8) следует, что мы можем вынести выражение e^t из-под функции F и прийти к уравнению

$$F(1, z(t), g_1(z, z'), \ldots, g_n(z, z', \ldots, z^n)) = 0$$

вида (7.21), не содержащему независимой переменной. Порядок полученного уравнения понижается на единицу при помощи замены $z' = p(z)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $yy' + xyy'' - xy'^2 + y = 0$.

Решение. Чтобы проверить, является ли уравнение обобщенно-однородным, заменим в уравнении x на tx, y на $t^{\alpha}y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, y'' на $t^{\alpha-2}y''$ и попытаемся подобрать α так, чтобы множитель t входил во все члены уравнения в одинаковой степени. Получаем систему уравнений $\alpha + (\alpha - 1) = 1 + \alpha + (\alpha - 2) = 1 + 2(\alpha - 1) = \alpha$, которая эквивалентна равенству $2\alpha - 1 = \alpha$. Отсюда $\alpha = 1$. В большинстве случаев, чтобы не осуществлять указанные замены, удобно ввести понятие измерения (см. замечание к п. 3.3). Так, независимой переменной x надо поставить в соответствие измерение 1, а переменным y, y', y'', … — измерения α, $\alpha - 1$, $\alpha - 2$, …, соответственно. Число α должно быть таким, чтобы измерения всех членов уравнения были одинаковы. Действия с измерениями производятся так же, как действия со степенями: при перемножении измерения складываются, при возведении в степень —

умножаются на показатель степени. Тогда можно сразу записать полученную систему уравнений для определения α.

Сделаем замену (8.9) (при $\alpha = 1$) и вычислим производные по правилу (8.10). Получим

$$x = e^t, \quad y(x) = z(t)e^t, \quad y'(x) = z'(t) + z(t), \quad y''(x) = (z''(t) + z'(t))e^{-t}.$$

Подставив эти значения в уравнение и положив $z' = p(z)$, получим уравнению Бернулли $zpp' - p^2 + z = 0$ на функцию $p(z)$. Отсюда $dz/\sqrt{C_1 z^2 + 2z} = \pm\, dt$ (при разделении переменных мы делим на z, поэтому теряем решение $y = 0$). Дальнейшее решение зависит от знака постоянной C_1.

Если $C_1 = 0$, то $\sqrt{2z} = \pm t + C$, откуда $z = (t + C)^2/2$. Сделав обратную замену $t = \ln x$, $z = ye^{-t} = y/x$, получим $y = \dfrac{1}{2}x(\ln|x| + C)^2$.

При $C_1 > 0$ получим параметрическое задание решения (роль параметра играет z)

$$x = C_2(\sqrt{C_1(C_1 z^2 + 2z)} + C_1 z + 1)^{\pm 1/\sqrt{C_1}},$$
$$y = C_2 z(\sqrt{C_1(C_1 z^2 + 2z)} + C_1 z + 1)^{\pm 1/\sqrt{C_1}}.$$

Аналогично, при $C_1 < 0$ получаем

$$y = x(\pm \sin(\sqrt{-C_1}\ln|x| + C_2) - 1)/C_1.$$

Кроме того, в процессе решения было потеряно решение $y = 0$.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0$.
2. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.
3. $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$.
4. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.
5. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$.
6. $y(y' + xy'') = x(1 - x)y'^2$.
7. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.
8. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3 yy' + 1$.
9. $x^2(y'^2 - 2yy'') = 2xyy' - 1$.
10. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$.
11. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$.

Ответы.

1. $y = C_2 x e^{-C_1/x}$.
2. $y = C_2 e^{C_1 x^2}$.
3. $y = x\left(C_1 + \arcsin\dfrac{C_2}{x}\right)$; $y = Cx$ при $(C_1 = C,\ C_2 = 0)$.
4. $y^2 = C_1 x^3 + C_2$.
5. $4C_1 y^2 = 4x + x(C_1 \ln C_2 x)^2$.
6. $y = C_2 \left|\dfrac{x}{x + C_1}\right|^{1/C_1}$; $y = Ce^{-1/x}$; $y = C$.
7. $2C_1 C_2 y = C_2^2 |x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$.
8. $2C_2 x^2 y = (C_2 x - C_1)^2 - 1$; $xy = \pm 1$.
9. $4(C_1 y - 1) = C_1^2 \ln^2 C_2 x$.
10. $y = C_2 |x|^{C_1 - \ln|x|/2}$.
11. $\dfrac{y}{x} = C_2 - 3\ln\left|\dfrac{1}{x} - C_1\right|$; $y = Cx$.

§9. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

9.1. Линейные однородные уравнения

Линейное однородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (9.1)$$

где $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ — функции, непрерывные на некотором интервале I оси x.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ уравнения (9.1) называются *линейно зависимыми*, если найдутся постоянные C_1, C_2, $\ldots$, C_m, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация этих решений $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_m y_m(x) \equiv 0$ на I. В противном случае, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ называются *линейно независимыми.*

Необходимым и достаточным условием линейной независимости n решений

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x) \qquad (9.2)$$

уравнения (9.1) является условие $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in I$,

где
$$W(x) \equiv W[y_1,\, y_2, \ldots, y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$
есть определитель Вронского (вронскиан) системы решений (9.2). Линейно независимая система решений называется *фундаментальной системой решений* (ф.с.р.) уравнения (9.1) на интервале I. Если известна ф.с.р., то общее решение уравнения (9.1) дается формулой
$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{9.3}$$
где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ — произвольные постоянные.

Для определителя Вронского имеет место *формула Остроградского-Лиувилля*
$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)/a_0(t)\, dt}. \tag{9.4}$$

В общем случае метода построения ф.с.р. не существует. Конечно, на уравнение (9.1) можно смотреть как на уравнение п. 8.1 и понизить его порядок при помощи замены (8.2). Но в этом случае нарушится основное свойство уравнения — свойство линейности. Так, если для уравнения (9.1) при $n = 2$ осуществить подобную замену, то придем к уравнению Риккати (см. п. 4.4), которое в общем случае не интегрируется в квадратурах. Однако, если удается подобрать какое-либо решение $y_1(x)$ уравнения (9.1), то его порядок может быть понижен на единицу с сохранением линейности. Действительно, полагая $y = y_1 z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция и вычисляя производные, получим
$$y' = y_1' z + y_1 z', \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \ldots + y_1 z^{(n)}. \tag{9.5}$$
Так как производная $y^{(k)}(x)$, $k = 1, \ldots, n$, представляет собой линейную комбинацию $z,\ z', \ldots,\ z^{(k)}$ с коэффициентами от x, то, подставив (9.5) в (9.1), получим для $z(x)$ линейное однородное уравнение того же порядка, но не содержащее искомой функции (коэффициент при z равен $Ly_1 \equiv 0$):
$$b_0(x) z^{(n)} + b_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x) z' = 0, \qquad b_0(x) = a_0(x) y_1(x).$$
Следовательно, порядок полученного уравнения понижается на единицу заменой $z' = u(x)$ или $u = (y/y_1)'$, после чего снова получается линейное уравнение
$$L_1 u \equiv b_0(x) u^{(n-1)} + b_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x) u = 0. \tag{9.6}$$

Если удается подобрать второе решение $y_2(x)$ уравнения (9.1), линейно независимое с $y_1(x)$, то решением уравнения (9.6) будет функция $u_1 = (y_2/y_1)'$. Поэтому при помощи замены $v = (u/u_1)'$ можно понизить порядок уравнения (9.6) на единицу с сохранением линейности. Таким образом, если известно m линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ уравнения (9.1), то порядок уравнения может быть понижен с сохранением линейности на m единиц.

В случае $n = 2$ уравнение (9.1) принимает вид

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{9.7}$$

и при наличии одного его частного решения $y_1(x)$ указанным способом приводится линейному однородному уравнению первого порядка. Однако можно сразу записать общее решение уравнения, воспользовавшись формулой (9.4). Действительно, пусть $y(x)$ — любое другое решение уравнения, линейно независимое с $y_1(x)$. Обозначим $p(x) = a_1(x)/a_0(x)$. Тогда

$$W[y_1, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = y_1y' - yy_1' = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}.$$

Разделив обе части полученного равенства на y_1^2, получим

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2}\,e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \qquad y = y_1 \cdot \left(C\int\limits_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\,dx}{y_1^2} + C_1\right).$$

Последняя формула дает общее решение уравнения (9.7):

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2, \qquad y_2 = y_1\int\limits_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\,dx}{y_1^2}. \tag{9.8}$$

В некоторых случаях частное решение уравнения (9.7) (или (9.1)) удается найти в виде многочлена от x или показательной функции e^{ax}.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2 - x + 1)y'' - (2x^2 + 1)y' + (4x - 2)y = 0$.

Решение. Будем искать одно решение этого уравнения в виде многочлена. Можно считать, при необходимости домножив решение на постоянную, что коэффициент при старшей степени этого многочлена равен 1. Пусть $y_1 = x^n + \ldots$ — искомое решение (точками обозначены члены низшей степени). Подстановка этого многочлена в уравнение должна привести к тождественному равенству. В результате такой подстановки в левой части уравнения будет стоять многочлен

$$(x^2-x+1)(n(n-1)x^{n-2}+\ldots)-(2x^2+1)(nx^{n-1}+\ldots)+(4x-2)(x^n+\ldots) \equiv 0.$$

Старшая степень x, входящая в левую часть, есть $n+1$. Приравнивая к нулю коэффициент при ней, получим уравнение для определения степени многочлена: $-2n+4=0$, откуда $n=2$. Следовательно, искомое решение, согласно сделанному выше замечанию, нужно искать в виде $y_1 = x^2+ax+b$. Подставим это выражение в исходное дифференциальное уравнение и приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x полученного многочлена. Полученная система уравнений на a и b дает $a=0$, $b=1$, поэтому $y_1 = x^2+1$. Общее решение уравнения запишется по формуле (9.8).

Чтобы не вычислять полученный в (9.8) интеграл, попробуем найти еще одно решение уравнения. Будем искать его в виде $y_2 = e^{ax}$. Подставив y_2 в уравнение, после сокращения на $e^{ax} \neq 0$ получим уравнение

$$(a^2-2a)x^2-(a^2-4)x+(a^2-a-2)=0.$$

Приравняем все его коэффициенты к нулю. Получим систему уравнений

$$a^2-2a=0, \quad a^2-4=0, \quad a^2-a-2=0.$$

При $a=2$ эти равенства будут выполняться одновременно. Следовательно, $y_2 = e^{2x}$ является решением исходного уравнения. В силу линейной независимости функций y_1 и y_2, их линейная комбинация $y_0 = C_1(x^2+1)+C_2e^{2x}$ определит общее решение уравнения.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0.$
2. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0.$
3. $xy''-(2x+1)y'+2y=0.$
4. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0.$
5. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0.$
6. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0.$
7. $xy'''-y''-xy'+y=0.$

Ответы.

1. $y=C_1x+C_2e^{-2x}.$
2. $y=C_1e^x+C_2x^2e^x.$
3. $y=C_1(2x+1)+C_2e^{2x}.$
4. $y=C_1(x+1)+C_2\dfrac{1}{x}.$
5. $y=C_1(x+2)+C_2x^2.$

6. $y = C_1(x^2+2) + C_2x^3$.
7. $y = C_1x + C_2e^x + C_3e^{-x}$.

9.2. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{9.9}$$

в правой части которого стоит заданная непрерывная на интервале I функция $f(x)$. Для удобства мы будем считать коэффициент при старшей производной равным 1. Уравнение (9.9) называется *линейным неоднородным уравнением n-го порядка* (функция $f(x)$ называется свободным членом уравнения). Линейное однородное уравнение (9.1) иногда называют соответствующим однородным уравнением для уравнения (9.9). Если известно общее решение (9.3) соответствующего однородного уравнения y_0 и некоторое частное решение $\hat{y}$ уравнения (9.9), то общее решение неоднородного уравнения дается формулой $y = y_0 + \hat{y}$. Для отыскания частного решения уравнения (9.9) удобно пользоваться теоремой о *сложении решений,* которая состоит в следующем. Правую часть уравнения (9.9) разбивают на сумму функций более простого вида: $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ и находят частные решения $\hat{y}_k$ уравнений $Ly = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, соответственно. Тогда $\hat{y} = \hat{y}_1 + \ldots + \hat{y}_m$ будет решением уравнения (9.9) с правой частью $f(x)$.

Если решение уравнения (9.9) подобрать не удается, но известно общее решение (ф.с.р.) соответствующего однородного уравнения (9.1), то можно найти общее решение неоднородного уравнения *методом вариации произвольных постоянных* или методом *неопределенных множителей Лагранжа.* Суть этого метода заключается в том, что решение неоднородного уравнения (9.9) ищется в том же виде (9.3), что и общее решение соответствующего однородного уравнения (9.1), но коэффициенты C_i, $i = 1, \ldots, n$, считаются не постоянными, а пока неопределенными функциями $C_i = C_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти эти функции можно, решив алгебраическую систему уравнений относительно их производных $C_i'(x)$:

$$\begin{array}{lcccccccl}
C_1'y_1 & + & C_2'y_2 & + & \ldots & + & C_n'y_n & = & 0, \\
C_1'y_1' & + & C_2'y_2' & + & \ldots & + & C_n'y_n' & = & 0, \\
\ldots & & & & & & & & \\
C_1'y_1^{(n-2)} & + & C_2'y_2^{(n-2)} & + & \ldots & + & C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0, \\
C_1'y_1^{(n-1)} & + & C_2'y_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & C_n'y_n^{(n-1)} & = & f(x).
\end{array} \tag{9.10}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ фундаментальной системы решений, который не обращается в нуль на интервале I. Поэтому система (9.10) имеет единственное решение $C_i'(x) = \phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем $C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \phi_i(x)\,dx + C_i$, $i = 1, \ldots, n$, где C_i — произвольные постоянные интегрирования. Подставляя эти значения в (9.3), запишем общее решение уравнения (9.9) следующим образом:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_1 \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \phi_1(x)\,dx + y_2 \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \phi_2(x)\,dx + \ldots + y_n \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \phi_n(x)\,dx. \tag{9.11}$$

В формуле (9.11) первые n слагаемых представляют из себя общее решение уравнения (9.1), а сумма остальных определяет некоторое частное решение уравнения (9.9), которое получается из общего решения, если положить $C_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Однако, следует учитывать, что при обосновании метода вариации произвольных постоянных, коэффициент $a_0(x)$ при старшей производной уравнения (9.1) считается равным единице. Если это условие не выполняется, то в последнем уравнении системы (9.10) функцию $f(x)$ нужно заменить на $f(x)/a_0(x)$.

Если известно решение $y_1(x)$ уравнения (9.1), то порядок уравнения (9.9), как и для уравнения (9.1), понижается на единицу при помощи той же замены $u = (y/y_1)'$. В этом случае получается неоднородное уравнение $L_1u = f(x)$, левая часть которого определена в (9.6). Таким образом, если известно m линейно независимых решений y_1, y_2, $\ldots$, y_m уравнения (9.1), то порядок уравнения (9.9) может быть понижен на m единиц с сохранением линейности.

Пусть известно m решений $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\ldots$, $\hat{y}_m$ уравнения (9.9). Тогда разности $y_1 = \hat{y}_2 - \hat{y}_1$, $\ldots$, $y_{m-1} = \hat{y}_m - \hat{y}_{m-1}$ будут решениями соответствующего однородного уравнения (9.1). Поэтому, если эти разности окажутся линейно независимыми, то порядок уравнения (9.9) может быть понижен с сохранением линейности на $(m-1)$ единиц.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $xy'' + y' - \dfrac{4y}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде многочлена $y_1 = x^2$. Далее, его общее решение находится по формуле (9.8): $y_0 = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^2}$. Решение неоднородного уравнения будем искать в том же виде, но при этом считать, что $C_i = C_i(x)$, $i = 1, 2$. Учитывая, что старший коэффициент уравнения равен x, система (9.10) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} C_1'x^2 + \dfrac{C_2'}{x^2} = 0, \\ 2C_1'x - \dfrac{2C_2'}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $C_1' = \dfrac{1}{4x^3}$, $C_2' = -\dfrac{x}{4}$, откуда $C_1(x) = C_1 - \dfrac{1}{8x^2}$, $C_2(x) = C_2 - \dfrac{x^2}{8}$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид (9.11):

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{8x^2} \cdot x^2 - \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{x^2} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{4}.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение $x^2y'' + 4xy' + 2y = 6x$ с известными частными решениями $\hat{y}_1 = x$, $\hat{y}_2 = x + 1/x$.

Решение. Поскольку известны два частных решения уравнения, их разность $\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = 1/x$ является решением соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения найдем по формуле (9.8): $y_0 = C_1/x + C_2/x^2$. Чтобы записать общее решение исходного неоднородного уравнения, нужно к этому решению прибавить любое частное решение, например, $\hat{y}_1 = x$:

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + x.$$

Задачи.

Решить уравнения:

1. $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$.
2. $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$.
3. $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$.
4. $(x^2+1)y'' + xy' - y = -1$.
5. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x$.
6. $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$.
7. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$.

Ответы.

1. $y = C_1(x+2) + C_2\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)\ln|x| + \dfrac{3}{2}$.
2. $y = C_1(2x-1) + C_2e^{-x} + \dfrac{x^2+1}{2}$.
3. $y = C_1(x^2+1) + \dfrac{C_2}{x} + 2x$.

4. $y = C_1 x + C_2\sqrt{1+x^2} + 1.$

5. $y = C_1 x + C_2 e^x + \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right) e^x.$

6. $y = C_1(2x-1) + C_2 x^2 + x^3.$

7. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x^3 + x^4.$

§10. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

10.1. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Это уравнение является частным случаем уравнения (9.1), в котором коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$, — действительные постоянные:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{10.1}$$

Для этого уравнения задача построения ф.с.р. сводится к определению корней многочлена

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0, \tag{10.2}$$

в котором символ p означает операцию дифференцирования по x (то есть, $p = d/dx$). Многочлен $L(p)$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (10.1). Правило построения характеристического многочлена состоит в том, что в уравнении (10.1) нужно каждую производную $y^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, заменить на p^k, ($y^{(0)} = y$ заменяется на $p^0 = 1$).

Пусть

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

есть совокупность всех корней $L(p)$ с учетом кратностей (в этой последовательности каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность). Рассмотрим следующие случаи.

1. Корни p_1, p_2, $\ldots$, p_n — вещественные и различные. Тогда ф.с.р. уравнения (10.1) составляют функции

$$y_1 = e^{p_1 x},\ y_2 = e^{p_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{p_n x}.$$

Общее решение уравнения (10.1) запишется по формуле (9.3):

$$y_0 = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x} + \ldots + C_n e^{p_n x}.$$

2. Все корни p_1, p_2, …, p_n различны, но среди них есть комплексные. Пусть $p = \alpha + i\beta$ — один из комплексных корней. Тогда сопряженное число $\alpha - i\beta$ также является корнем характеристического уравнения (10.2), ибо все коэффициенты этого уравнения вещественны. Этим двум корням соответствуют две функции

$$y = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

входящие в ф.с.р. уравнения (10.1). Поэтому в этом случае ф.с.р. строится так: каждому вещественному корню p характеристического уравнения ставится в соответствие одна функция $y = e^{px}$, а каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ ставятся в соответствие две функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Общее решение записывается по формуле (9.3).

3. Характеристическое уравнение имеет кратные корни (вещественные либо комплексные).

Пусть сначала p — вещественный корень кратности $k \geqslant 2$. Этому корню соответствуют k функций, входящих в ф.с.р.:

$$y_1 = e^{px},\ y_2 = xe^{px},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{px}.$$

Если же характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k, то этим корням соответствуют $2k$ функций, входящих в ф.с.р.:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,$$
$$y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Общее решение уравнения (9.1) записывается по формуле (9.3).

Отметим также, что все функции, входящие в ф.с.р., определены на всей оси x. Поэтому любое решение уравнения (9.1) также определено для всех x.

Пример 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристический многочлен уравнения имеет вид $L(p) = p^2 - 3p + 2$. Его корни $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ вещественны и различны. Ф.с.р. уравнения образуют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Пример 2. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 0$.

Решение. Характеристический многочлен $L(p) = p^4 - 2p^2 + 1$ уравнения имеет кратные корни $p_{1,2} = -1$, $p_{3,4} = 1$. Общее решение уравнения имеет вид $y_0 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3e^x + C_4xe^x$.

Пример 3. $y^{\mathrm{IV}} + 8y' = 0$.

Решение. Характеристический многочлен уравнения $L(p) = p^4 + 8p$ имеет два комплексно сопряженных корня $p_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ и два действительных корня $p_3 = -2$, $p_4 = 0$. Общее решение уравнения дается формулой $y_0 = C_1 e^x \cos\sqrt{3}x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}x + C_3 e^{-2x} + C_4$.

Пример 4. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Корни характеристического многочлена уравнения $L(p) = p^4 + 2p^2 + 1$ двукратные и комплексно сопряженные: $p_{1,2} = i$, $p_{3,4} = -i$. Общее решение уравнения имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
3. $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0$.
4. $y'' - 2y' + y = 0$.
5. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$.
6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
7. $y^{\mathrm{V}} - 6y^{\mathrm{IV}} + 9y''' = 0$.

Ответы.

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
2. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x}$.
3. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x)e^{-x}$.
4. $y = (C_1 + C_2 x)e^x$.
5. $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$.
6. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x$.
7. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)e^{3x}$.

10.2. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

При решении неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \tag{10.3}$$

с непрерывной правой частью $f(x)$ также применяют теорему о сложении решений и метод вариации произвольных постоянных (см. п. 9.2).

Пример 5. $y'' + y = x + 1/\sin x$.

Решение. Разобьем правую часть уравнения на две: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/\sin x$. Частное решение уравнения с правой частью $f_1(x)$ ищется в виде многочлена и легко подбирается: $\hat{y}_1 = x$. Решение уравнения с правой частью $f_2(x)$ будем искать методом вариации произвольных постоянных.

Общее решение соответствующего однородного уравнения легко записывается по корням характеристического многочлена $p_1 = i$, $p_2 = -i$ и имеет вид $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Считая здесь $C_i = C_i(x)$, $i = 1, 2$, пока не определенными функциями, запишем соответствующую систему (9.10):

$$\begin{aligned} &C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ &-C_1' \sin x + C_2' \cos x = 1/\sin x. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим $C_1' = -1$, $C_2' = \operatorname{ctg} x$, следовательно, $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|\sin x| + C_2$. Постоянные интегрирования проще всего взять равными нулю: $C_i = 0$, $i = 1, 2$. Тогда частное решение уравнения с правой частью $f_2(x)$ имеет вид $\hat{y}_2 = -x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$. По теореме о сложении решений, функция $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$ будет частным решением исходного уравнения. Прибавив это решение к общему решению однородного уравнения, получим его общее решение: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$.

Однако, в ряде случаев, если функция $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение уравнения (10.3) удобнее искать *методом неопределенных коэффициентов.*

1. Пусть $f(x) = P_m(x)$ — многочлен степени m от x.

1.1. Число $p = 0$ не является корнем характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (10.3) (в последовательности его корней $p_1, p_2, \ldots, p_n$ нет значения $p = 0$). Тогда существует частное решение уравнения вида

$$\hat{y} = \tilde{P}_m(x), \tag{10.4}$$

где $\tilde{P}_m(x)$ — многочлен степени m от x с неопределенными коэффициентами. Подставив его в (10.3), получим тождественное равенство двух многочленов. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, получим линейную алгебраическую систему для определения коэффициентов многочлена (10.4).

1.2. Число $p = 0$ является корнем кратности k для многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней значение $p = 0$ повторяется k раз). Тогда частное решение уравнения (10.3) можно искать в виде

$$\hat{y} = x^k \tilde{P}_m(x). \qquad (10.5)$$

Неопределенные коэффициенты многочлена $\tilde{P}_m(x)$ ищутся аналогично.

2. Пусть $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m от x, а α — некоторое действительное число.

2.1. Число $p = \alpha$ не является корнем многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней $p_1, p_2, \ldots, p_n$ нет значения $p = \alpha$). Тогда частное решение уравнения (10.3) ищется в виде

$$\hat{y} = \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}. \qquad (10.6)$$

Подставив (10.6) в (10.3), после сокращения на $e^{\alpha x}$, придем, как и в предыдущих случаях, к тождественному равенству многочленов степени m.

2.2. Число $p = \alpha$ является корнем кратности k для многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней значение $p = \alpha$ повторяется k раз). В этом случае частное решение уравнения (10.3) нужно искать в виде

$$\hat{y} = x^k \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}. \qquad (10.7)$$

3. Пусть $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x$, где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней m и l соответственно, а β — некоторое действительное число.

3.1. Числа $p = \pm i\beta$ не являются корнями многочлена $L(p)$. В этом случае частное решение уравнения (10.3) ищется в виде

$$\hat{y} = \tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x, \qquad (10.8)$$

где $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ — многочлены степени s, где $s = \max(m, l)$, с неопределенными коэффициентами. Подставим (10.8) в (10.3) и приравняем отдельно многочлены, стоящие в обеих частях полученного равенства при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ (это можно сделать в силу линейной независимости этих функций). Таким образом, мы снова придем к тождественному равенству многочленов и системе уравнений для определения коэффициентов $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_s(x)$.

3.2. Числа $p = \pm i\beta$ являются корнями кратности k многочлена $L(p)$. Тогда частное решение нужно искать в виде

$$\hat{y} = x^k(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \qquad (10.9)$$

4. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$, где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ многочлены от x степеней m и l соответственно, α, β — некоторые действительные числа.

4.1. Если числа $p = \alpha \pm i\beta$ не являются корнями многочлена $L(p)$, то частное решение уравнения (10.3) можно искать в виде

$$\hat{y} = e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.10}$$

После подстановки (10.10) в (10.3) и сокращения на $e^{\alpha x}$ необходимо приравнять многочлены, стоящие в обеих частях равенства при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Получится система алгебраических уравнений для определения их коэффициентов.

4.2. Если числа $p = \alpha \pm i\beta$ являются корнями кратности k многочлена $L(p)$, то частное решение уравнения ищется в виде

$$\hat{y} = x^k e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.11}$$

Отметим, что случай 4 обобщает все случаи 1–3. В самом деле, случай 3 получается при $\alpha = 0$, случай 2 — при $\beta = 0$, а случай 1 — при $\alpha = \beta = 0$. Тем не менее, на практике удобнее рассматривать их отдельно.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y''' + y' = x + 2e^x + \cos x + e^{-x}\sin x$.

Решение. Характеристический многочлен этого уравнения имеет вид $L(p) = p^3 + p$. Его корни равны $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $Ly \equiv y''' + y' = 0$ имеет вид

$$y_0 = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Разобьем правую часть уравнения на четыре слагаемых: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$, где

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2e^x, \quad f_3(x) = \cos x, \quad f_4(x) = e^{-x}\sin x.$$

Правая часть уравнения $Ly = f_1(x)$ имеет вид 1: здесь $m = 1$, $P_1(x) \equiv x$. Она подпадает под случай 1.2 при $k = 1$. Поэтому частное решение нужно искать в виде (10.5):

$$\hat{y}_1 = x(ax + b).$$

Подставив это выражение в уравнение, получим равенство $2ax + b \equiv x$, из которого $a = 1/2$, $b = 0$. Следовательно, $\hat{y}_1 = x^2/2$.

Правая часть уравнения $Ly = f_2(x)$ имеет вид 2 при $m = 0$, $P_0(x) \equiv 2$, $\alpha = 1$ и подпадает под случай 2.1. Следовательно, частное решение уравнения с такой правой частью ищется по формуле (10.6):

$$\hat{y}_2 = ae^x.$$

Подставим эту функцию в уравнение и сократим полученное равенство на e^x. Тогда постоянная a должна быть вещественным корнем уравнения $a^3 + a - 2 = 0$. Такой корень только один: $a = 1$, поэтому $\hat{y}_2 = e^x$.

Правая часть уравнения $Ly = f_3(x)$ имеет вид 3: $m = l = 0$, $P_0(x) \equiv 1$, $Q_0(x) \equiv 0$, $\beta = 1$ и подпадает под случай 3.2 при $k = 1$. Поэтому частное решение будем искать в виде (10.9):

$$\hat{y}_3 = x(a\cos x + b\sin x).$$

Подставим это выражение в уравнение и приравняем в левой и правой частях многочлены при $\cos x$ и $\sin x$ соответственно. Получим $a = -1/2$, $b = 0$, следовательно, $\hat{y}_3 = -(x\cos x)/2$.

Правая часть уравнения $Ly = f_4(x)$ имеет вид 4 при $\alpha = -1$, $m = l = 0$, $P_0(x) \equiv 0$, $Q_0(x) \equiv 1$, $\beta = 1$ и подпадает под случай 4.1. Поэтому, частное решение уравнения с такой правой частью нужно искать в виде (10.10):

$$\hat{y}_2 = e^{-x}(a\cos x + b\sin x).$$

Подставим это выражение в уравнение, сократим на e^{-x} и приравняем многочлены при $\cos x$ и $\sin x$ в обеих частях полученного тождества. Отсюда найдем $a = 3/8$, $b = -1/8$. Поэтому $\hat{y}_4 = e^{-x}(3\cos x - \sin x)/8$.

Таким образом, по теореме о сложении решений, функция $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3 + \hat{y}_4$ будет частным решением исходного уравнения, а его общее решение дается формулой

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{x^2}{2} + e^x - \frac{x}{2}\cos x + e^{-x}\Big(\frac{3}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x\Big).$$

Задачи.

Решить уравнения:

1. $y'' + y = 4x\,e^x$.
2. $y'' - y = 2e^x - x^2$.
3. $y'' + y = 4\sin x$.
4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.
6. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.
7. $y'' + y = 2\sec^3 x$.

Ответы.

1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)e^x$.
2. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$.
3. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$.

4. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + xe^x \ln|x|$.
5. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$.
6. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x\cos 2x + \sin 2x \ln|\cos x|$.
7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

10.3. Уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера называется уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \tag{10.12}$$

где a_i, $i = 1, \ldots, n$, — действительные постоянные. Формально, это уравнение является уравнением с переменными коэффициентами. Однако, при помощи замены независимой переменной

$$x = e^t, \quad t = \ln x \ \text{ при } \ x > 0 \qquad (x = -e^t \ \text{ при } \ x < 0), \tag{10.13}$$

оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно, вычисляя производные, получим

$$\begin{aligned}
&y'(x) = y'(t)\frac{dt}{dx} = y'(t)\frac{1}{x},\\
&y''(x) = \frac{d}{dx}\Big(y'(t)\frac{1}{x}\Big) = y''(t)\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - y'(t)\frac{1}{x^2} = \Big(y''(t) - y'(t)\Big)\frac{1}{x^2},\\
&y'''(x) = \Big(y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)\Big)\frac{1}{x^3},\\
&\ldots\\
&y^{(n)}(x) = \Big(y^{(n)}(t) + \ldots\Big)\frac{1}{x^n}
\end{aligned}$$

(в выражении для $y^{(n)}(x)$ многоточием обозначена линейная комбинация $y^{(k)}(t)$, $k = 1, \ldots, n-1$, с постоянными коэффициентами). Подставив эти производные в (10.12), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y = f(e^t).$$

Пример 7. $x^2 y'' - 2y = \ln x$.

Решение. Замена (10.13) приводит к уравнению

$$y'' - y' - 2y = t.$$

Корни характеристического многочлена $L(p) = p^2 - p - 2$ равны $p_1 = -1$, $p_2 = 2$. Частное решение полученного уравнения ищем в виде (10.4), а именно,

$\hat{y}(t) = at + b$. Приравняв коэффициенты при степенях t в равенстве $-a - 2(at + b) = t$, получим $a = -1/2$, $b = 1/4$. Следовательно, $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}$. Сделав обратную замену, получим

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}.$$

Если в уравнении (10.12) при $y^{(k)}(x)$ вместо множителя x^k стоит множитель $(ax + b)^k$, $k = 1, \ldots, n$, то такое уравнение называется *уравнением Лагранжа.* С помощью замены $ax + b = e^t$ оно также сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Задачи.

Решить уравнения:

1. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.
2. $x^3 y''' + xy' - y = 0$.
3. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$.
4. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.
5. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.
6. $(2x + 3)^3 y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0$.

Ответы.

1. $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$.
2. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|)$.
3. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$.
4. $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x$.
5. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} + x^3 \ln|x| - 2x^2$.
6. $y = C_1(2x + 3) + C_2|2x + 3|^{3/2} + C_3|2x + 3|^{1/2}$.

Литература

[1] Егоров А.И., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями.* – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.

[2] Карташев А.П., Рождественский Б.Л., *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: учеб. пособие для вузов.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 255 с.

[3] Ибрагимов Н.Х., *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Физматлит, 2012. – 322 с.

[4] Степанов В.В., *Курс дифференциальных уравнений.* – Изд. 8, стер. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 472 с.

[5] Матвеев Н.М., *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* – 6-е изд. – С-Пб.: «Лань», 2004. – 832 с.

[6] Матвеев Н.М., *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – 7-е изд., доп. – С-Пб.: «Лань», 2002. – 432 с.

[7] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.* – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

[8] Филиппов А.Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* – Ижевск: РХД, 2000. – 176 с.

Содержание