

Введение.

В настоящее время численные методы являются наиболее мощным математическим средством решения научно-технических задач.

Стремительное развитие компьютерной техники и программного обеспечения наряду с постоянно совершенствующимися численными методами открывают новые возможности в решении сложных практических задач.

Численные методы в совокупности с возможностью их автоматизации при использовании персональных компьютеров позволяют решать сложные задачи научного, технического и экономического характера. Постоянное развитие и совершенствование алгоритмов и программных средств их реализации обосновывает актуальность обучения навыкам использования численных методов для решения прикладных и научно-исследовательских задач.

Существуют многочисленные стандартные программы и объектно-ориентированные пакеты прикладных программ, при использовании которых существенно сокращается время и ресурсы по решению прикладных задач. Однако необходимо знать основные свойства и понимать сущность численных методов и алгоритмов, поскольку как применение пакетов программ, так и интерпретация результатов расчетов бывает нетривиальной и требует знания особенностей используемых методов.

Целью учебного пособия является ознакомление студентов с математическими основами численных методов решения задач Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, обучение построению алгоритмов и составлению программ для решения конкретных заданий. Представленные в пособии варианты программ на Delphi (с подробными комментариями, специально для студентов не очень хорошо владеющих Delphi) решения задач Коши и краевых задач, не являются единственно возможным способом получения и вывода результатов. Решение данных задач представляется возможным с использованием многомерных массивов для хранения результатов вычислений. Однако для простоты понимания был выбран первый вариант представления результатов непосредственно в полях объекта "stringGrid".

В процессе написания пособия использовалась литература, список которой приведен в конце книги. Также дана дополнительная

литература и интернет-ресурсы, которые могут оказаться полезными читателю.

Авторы выражают искреннюю признательность редактору – профессору А.В. Лапину, который внимательно прочел рукопись книги и оказал существенную помощь в ее улучшении и рецензентам – профессору Н.Д. Якимову и канд. физ.-мат. наук Т.Н. Панкратьевой за их труд по оценке работы и полезные замечания. Авторы благодарны студентам 4 курса Голубеву М.С., Платонову А.А. и Тухватуллиной Г.Р. за помощь в оформлении отдельных частей пособия.

Методы решения ОДУ. Основные понятия.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции. Их можно записать в виде

$$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где x – независимая переменная.

В ряде случаев из общей записи ОДУ удастся выразить старшую производную в явном виде. Например,

$$y' = f(x, y), \quad y'' = f(x, y, y').$$

Линейным ОДУ называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных. Например, $y' + xy = \ln x$ – линейное уравнение первого порядка.

Решением ОДУ называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая после подстановки ее в уравнение превращает его в тождество. При решении ОДУ без каких-либо условий получается множество решений. **Общее решение** ОДУ n -го порядка содержит n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , т.е. общее решение уравнения $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Частное решение ОДУ получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для получения единственного решения задают столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т.е. каков порядок уравнения.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения ОДУ существуют различные типы задач.

Если дополнительные условия задаются в одной точке $x = x_0$ (т.е. заданы значения функции и её производных до $(n-1)$ -го порядка в начальный момент времени), то условия называются *начальными*, а полученная задача называется *задачей Коши*.

Если дополнительные условия задаются более чем в одной точке, то их называют *граничными* или *краевыми*, а саму задачу – *краевой*. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами области решения дифференциального уравнения.

Приведем примеры постановки задач для ОДУ.

Задача Коши: $y' = y^2 \cos x$, $x \geq 0$, $y(0) = 1$.

Краевая задача: $y'' + 2y' - y = \sin x$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Методы решения задач для ОДУ можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные.

Графические методы используют геометрические построения. В частности, одним из них является **метод изоклин** для решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Аналитическими называют методы, с помощью которых решение дифференциальных уравнений можно выразить через известные функции. Для ряда уравнений первого порядка удается получить решение в виде формул путем аналитических преобразований. Точные методы решений известны только для некоторых классов ОДУ (линейные ОДУ, уравнения с разделяющимися переменными и др.).

Приближенные методы используют упрощение самих уравнений путем обоснованного отбрасывания некоторых содержащихся в них членов, а также специальным выбором классов искомых функций.

Численные методы решения используют алгоритм вычисления значений искомого решения на некотором дискретном множестве значений аргумента и дают приближенное решение в виде таблицы.

Замечание. Для некоторых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений требуется определить значения искомых функций в нескольких точках. Эти значения могут быть подсчитаны с помощью степенных рядов. Таким образом, приближенно-аналитический метод разложения решений в степенные ряды может быть использован как элемент более эффективных численных методов.

Если уравнение содержит особенность, например неопределенность типа $\{0/0\}$, то численное решение невозможно. Тогда использование степенных рядов дает возможность “отодвинуться” от особенности.

При решении дифференциальной задачи численными методами используются **разностные формулы для обыкновенных производных**.

Пусть дифференциальная задача решается на отрезке $[a, b]$, на котором заданы узлы $x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = (b - a)/n$ и значения функции в этих узлах $y_i = y(x_i)$. Предположим, что функция $y(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_i :

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \dots$$

Полагая $x = x_i + h$ или $x = x_i - h$, получим

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots,$$

$$y_{i-1} = y(x_i - h) = y_i - \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

Учитывая эти разложения, имеем

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}h + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^2 + \dots = y'(x_i) + O(h)$$

– правую разностную производную в точке x_i ,

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = y'(x_i) - \frac{y''(x_i)}{2!}h + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^2 + \dots = y'(x_i) + O(h)$$

– левую разностную производную в точке x_i .

приводится к виду (1.3) с помощью замены

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)},$$

что дает следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{d y}{d x} = y_1, \\ \frac{d y_1}{d x} = y_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d y_{n-2}}{d x} = y_{n-1}, \\ \frac{d y_{n-1}}{d x} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Рассмотрим приближенные методы решения задачи Коши:

1. аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения:

– интегрирование ОДУ с помощью степенных рядов: метод последовательного дифференцирования, метод неопределенных коэффициентов;

– метод последовательных приближений.

2. численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

В дальнейшем считаем, что для рассматриваемых уравнений выполнены условия существования и единственности решения.

Приближенные методы.

1). Метод последовательного дифференцирования

Предположим, что искомое решение $y = y(x)$ задачи Коши (1.1), (1.2) может быть разложено в ряд Тейлора по степеням разности $x - x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (1.5)$$

Начальные условия (1.2) дают значения $y^{(k)}(x_0)$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Значение $y^{(n)}(x_0)$ найдем из уравнения (1.1), подставляя $x = x_0$ и используя (2.2):

$$y^{(n)}(x_0) = f\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right). \quad (1.6)$$

Значения $y^{(n+1)}(x_0), y^{(n+2)}(x_0), \dots$ последовательно определяются дифференцированием уравнения (1.1) и подстановкой $x = x_0$, $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (начальные условия).

Доказано [4, 9], что если правая часть уравнения (1.1) в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right)$, есть аналитическая функция своих аргументов, то при значениях x , достаточно близких к x_0 , существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2), которое разлагается в ряд Тейлора (1.5). Тогда частичная сумма этого ряда будет приближенным решением поставленной задачи.

Аналогично применяется метод последовательного дифференцирования и для решения задачи Коши для системы ОДУ.

Пример 1.1. Найти первые семь членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ уравнения $y' + 0,1y^2 + (1 - y)$ с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение: Решение ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}(x-0) + \frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2 \text{ – задано (начальные условия).}$$

Для определения $y''(0)$ разрешим исходное уравнение относительно y'' :

$$y'' = -0,1(y')^2 - (1 + 0,1x)y. \quad (1.7)$$

Используя начальные условия, получим

$$y''(0) = -0,1 \cdot 2^2 - (1 + 0,1 \cdot 0) \cdot 1 = -1,4.$$

Дифференцируем последовательно по x левую и правую части уравнения (1.7)

$$y''' = -0,2 y' y'' - 0,1(xy' + y) - y',$$

$$y^{(4)} = -0,2(y' y''' + y''^2) - 0,1(xy'' + 2y') - y'',$$

$$y^{(5)} = -0,2(y' y^{(4)} + 3y'' y''') - 0,1(xy''' + 3y'') - y''',$$

$$y^{(6)} = -0,2(y' y^{(5)} + 4y'' y^{(4)} + 3y'''^2) - 0,1(xy^{(4)} + 4y''') - y^{(4)}.$$

Подставляя начальные условия и значение $y''(0)$, находим $y'''(0) = -1,54$, $y^{(4)}(0) = 1,224$, $y^{(5)}(0) = 0,1768$, $y^{(6)}(0) = -0,7308$.

Таким образом, искомое приближенное решение запишется в виде $y(x) \approx 1 + 2x - 0,7x^2 - 0,2567x^3 + 0,051x^4 + 0,00147x^5 - 0,00101x^6$.

Пример 1.2. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$, $z = z(x)$ системы

$$\begin{cases} y'(x) = y \cos x - z \sin x, \\ z'(x) = y \sin x + z \cos x, \end{cases} \quad (1.8)$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Решение: Функции $y(x)$, $z(x)$ ищем в виде степенных рядов

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.9)$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.10)$$

$y(0) = 1$, $z(0) = 0$ – задано.

Положим $x = 0$ в системе (1.8) и, учитывая начальные условия, получим

$$y'(0) = 1, \quad z'(0) = 0.$$

Продифференцируем систему (1.8) по x :

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z') \sin x - (z - y') \cos x, \\ z''(x) = -(z - y') \sin x + (y + z') \cos x. \end{cases} \quad (1.11)$$

Отсюда находим $y''(0) = 1$, $z''(0) = 1$.

Продифференцируем систему (1.11):

$$\begin{cases} y'''(x) = (z - 2y' - z'') \sin x - (y + 2z' - y'') \cos x, \\ z'''(x) = -(y + 2z' - y'') \sin x - (z - 2y' - z'') \cos x. \end{cases}$$

Получаем $y'''(0) = 0$, $z'''(0) = 3$. Подставляя найденные значения производных в ряды (1.9), (1.10), получим

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad z(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Упражнения. Применяя метод последовательного дифференцирования, найти решения уравнений и систем,

удовлетворяющие данным начальным условиям, в виде частичной суммы ряда (4-6 членов).

1.1. $y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1/2.$

Ответ: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2!} + 2 \frac{3}{8} \frac{x^3}{3!} + \frac{11}{4} \frac{x^4}{4!} + \dots$

1.2. $y'' = y^2 + x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Ответ: $y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \dots$

1.3. $y' = x^2 y + y^3, \quad y(0) = 0.$

Ответ: $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17x^3}{3!} + \dots$

1.4. $y'' + y \cos x = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0$

Ответ: $y = a \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^4}{4!} - \frac{9x^6}{6!} + \frac{55x^8}{8!} + \dots \right)$

1.5.

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y - z. \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

Ответ: $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad z = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{7}{24}x^4 + \dots$

2). Метод неопределенных коэффициентов.

Этот метод применяется при решении линейных ОДУ (с переменными коэффициентами). Суть метода – на примере уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1.12}$$

с начальными условиями $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$. Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения (1.12) можно разложить в ряд по степеням x :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде ряда

Замечание. Если начальные условия заданы при $x = x_0$, то рекомендуется сделать замену $x - x_0 = t$, после чего задача сводится к рассмотренной выше.

Пример 1.3. Найти решение уравнения

$$y'' - xy' + y = 1 - \cos x, \quad (1.16)$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Разложим коэффициенты данного уравнения в степенные ряды

$$p(x) = -x, \quad q(x) = 1, \quad r(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots$$

Решение уравнения (1.16) ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots$$

Подставив полученные ряды в уравнение (1.16) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему для определения коэффициентов c_i :

$$\begin{array}{l|l} x^0 & c_0 + 2c_2 = 0, \\ x^1 & 6c_3 - c_1 + c_1 = 0, \\ x^2 & -c_2 + 12c_4 = 1/2, \\ x^3 & -2c_3 + 20c_5 = 0, \\ x^4 & -3c_4 + 30c_6 = -1/24, \\ x^5 & -4c_5 + 42c_7 = 0, \\ x^6 & -5c_6 + 56c_8 = 1/720. \end{array}$$

Из начальных условий находим $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

Легко заметить, что $c_{2n+1} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Далее,

$$c_2 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{24}, \quad c_6 = \frac{1}{360}, \quad c_8 = \frac{11}{40320}.$$

Таким образом, получаем приближенное решение задачи в виде

$$y(x) \approx x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \frac{11x^8}{40320}.$$

Упражнения. Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти решение задачи

1.6. $y'' + xy' + 2y = 12, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2.$

Ответ: $y(x) \approx 5 + 2x + x^2 - x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^5.$

1.7. $4xy'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -0,5.$

Ответ: $y(x) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} + \dots = \cos \sqrt{x}.$

1.8. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Ответ: $y(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots = \frac{\sin x}{x}.$

3). Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу Коши для ДУ первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1.17}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.18}$$

Метод последовательных приближений состоит в том, что решение $y(x)$ получают как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находятся по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx. \tag{1.19}$$

В курсе математического анализа доказано, что если правая часть $f(x, y)$ в некотором замкнутом прямоугольнике $R\{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$ удовлетворяет условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|, \quad N = \text{const}, \tag{1.20}$$

то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся на некотором отрезке $[x_0, x_0 + h]$ к решению задачи (1.17), (1.18).

Если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R , то оценка погрешности приближенного решения $y_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ дается неравенством

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leq M N^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (1.21)$$

где $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$, а число h определяется из условия

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \quad (1.22)$$

В качестве начального приближения $y_0(x)$ можно взять любую функцию, достаточно близкую к точному решению, например, приближенное решение уравнения (1.17), полученное в виде частичной суммы степенного ряда.

Замечание. Метод последовательных приближений применим и для системы ОДУ, а также для решения ОДУ n -го порядка, если его записать в виде системы. Для разложения решения ОДУ в степенной ряд требуется аналитичность правой части уравнения, в данном методе это не обязательно. Поэтому область применения здесь более широкая (метод применим и в тех случаях, когда разложение в степенной ряд невозможно). Недостаток метода – необходимость вычисления все более громоздких интегралов.

Пример 1.4. Найти три последовательных приближения решения уравнения $y' = x^2 + y^2$ с начальным условием $y(0) = 0$.

Решение. Учитывая начальное условие, заменим исходное уравнение интегральным

$$y(x) = \int_0^x (x^2 + y^2) dx.$$

В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) \equiv 0$. Первое приближение находим по формуле (1.19)

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2(x)) dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Аналогично получаем второе и третье приближения:

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + y_1^2(x)) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (x^2 + y_2^2(x)) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2}{189}x^{10} + \frac{x^{14}}{3969} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Оценим погрешность последнего приближения по формуле (1.21). Т.к. функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ определена и непрерывна во всей плоскости, то в качестве a и b можно взять любые числа. Возьмем для определенности $a = 1$, $b = 0,5$. Тогда

$$M = \max |f(x, y)| = \max |x^2 + y^2| = 1,25,$$

$$N = \max |f_y'(x, y)| = \max |2y| = 1.$$

Согласно условию (1.22) выбираем $h = 0,4$. Таким образом, на отрезке $[0; 0,4]$ получаем $|y(x) - y_3(x)| \leq 1,25 \cdot 1^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{5}{96}x^4$, и,

следовательно, $\max_{[0; 0,4]} |y(x) - y_3(x)| \leq \frac{5 \cdot (0,4)^4}{96} \approx 0,00133$.

Замечание. Оценка погрешности по формуле (1.21) часто оказывается завышенной. Практически, применяя метод последовательных приближений, останавливаются на таком n , для которого значения y_{n-1} , y_n совпадают в пределах допустимой точности (см. пример 1.5.).

Пример 1.5. Для уравнения $y' = x + 0,1y^2$ с начальным условием $y(0) = 1$ найти приближенное решение на отрезке $[0; 0,2]$, удовлетворяющее условию $\max_{[0; 0,2]} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| < 10^{-5}$, $k = 1, 2, \dots$

Решение. Выберем начальное приближение $y_0(x)$ в виде

$$y_0(x) = y_0 + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2.$$

Для этого из исходного уравнения и начального условия определяем

$$y_0 = 1,$$

$$y'(0) = 0,1y_0^2 = 0,1,$$

$$y''(0) = 1 + 0,2y_0y_0' = 1,02.$$

Таким образом, $y_0(x) = 1 + 0,1x + 0,51x^2$.

Находим,

$$f(x, y_0) = x + 0,1y_0^2 = 0,1 + 1,02x + 0,103x^2 + 0,0102x^3 + 0,0260x^4$$

и вычисляем первое приближение

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x + 0,1y_0^2) dx = 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3 + 0,0025x^4 + 0,0052x^5.$$

Рассмотрим разность $y_1(x) - y_0(x) = 0,034x^3 + 0,0025x^4 + 0,0052x^5$.

При $x = 0,2$ она имеет максимальное значение

$$\max_{[0; 0,2]} |y_1(x) - y_0(x)| = 0,00028 > 10^{-5},$$

следовательно, заданная точность еще не достигнута. Заметим, что в выражении для y_1 два последних слагаемых не превышают в сумме 10^{-5} , поэтому можем принять

$$y_1(x) = 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3.$$

Находим

$$f(x, y_1) = x + 0,1y_1^2 =$$

$$= 0,1 + 1,02x + 0,103x^2 + 0,0170x^3 + 0,0267x^4 + 0,0017x^5 + 0,0001x^6$$

и вычисляем второе приближение

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_0^x (x + 0,1y_1^2) dx = \\ &= 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3 + 0,0042x^4 + 0,0053x^5. \end{aligned}$$

Оценим разность $y_2(x) - y_1(x)$ на отрезке $[0; 0,2]$:

$$\max_{[0; 0,2]} |y_2(x) - y_1(x)| = 0,0042x^4 + 0,0053x^5 < 0,000008 < 10^{-5}.$$

Таким образом, получаем

$$y(x) \approx 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3 + 0,0042x^4 + 0,0053x^5.$$

Упражнения. Найти три последовательных приближения решения задачи Коши

1.9. $y' = x^2 - y^2, y(0) = 0.$

Ответ: $y_1 = \frac{x^3}{3}, y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}, y_3 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{189 \cdot 11} - \frac{x^{15}}{63^2 \cdot 15}$

1.10. $y' = x + y^2, y(0) = 0.$

Ответ: $y_1 = \frac{x^2}{2}, y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}.$

1.11. $y' = x + y, y(0) = 1.$

Ответ: $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}, y_2 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}.$

2. Численные методы решения задачи Коши.

Наиболее распространенным численным методом решения дифференциальных уравнений является **метод конечных разностей**. Суть метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых **узлами**. Эти узлы составляют **разностную сетку**. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется **сеточной**. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением. При этом для входящих в исходное уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его **аппроксимацией** на сетке (или **разностной аппроксимацией**). Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия, называется **разностной схемой**. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции.

Решение разностной задачи, в результате которого находятся значения сеточной функции, приближенно заменяет решение исходной дифференциальной задачи в соответствующих узлах сетки. Однако не всякая разностная схема дает удовлетворительное решение, т.е. получаемые значения сеточной функции не всегда с достаточной

точностью аппроксимируют значения искомой функции в узлах сетки. Здесь важную роль играют такие понятия, как *устойчивость*, *аппроксимация* и *сходимость* разностной схемы.

Под *устойчивостью* понимается непрерывная зависимость ее решения от входных данных (коэффициентов уравнений, правых частей, начальных граничных условий), т.е. малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения. В противном случае схема называется *неустойчивой*.

Разностная схема называется корректной, если она устойчива и ее решение существует и единственно при любых входных данных. В теории разностных схем доказывалось, что если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, то она сходится.

Рассматриваются две группы численных методов решения задачи Коши.

Одношаговые методы, в которых для нахождения решения в некоторой точке отрезка используется информация лишь в одной предыдущей точке (например, методы Эйлера, Рунге–Кутты).

Многошаговые методы, в которых для отыскания решения в некоторой точке используется информация о решении в нескольких предыдущих точках (например, метод Адамса)

Рассмотрим, для примера, задачу Коши для ОДУ 1-го порядка.

$$y'(x) = f(x, y), \quad (2.1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.2)$$

Требуется найти функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет уравнению (2.1) и начальному условию (2.2) в точке x_0 .

Приведем без доказательства теорему существования и единственности задачи Коши [4]:

Теорема 1. Пусть в области $R\{(x, y), |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ функция $f(x, y)$ непрерывна. Тогда на некотором отрезке $|x - x_0| \leq d$ существует решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию (2.2). Если в области R функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$, $k = \text{const} > 0$, то указанное решение единственно.

Для решения задачи Коши (2.1), (2.2) будем использовать разностные методы. Введем последовательность точек x_0, x_1, \dots и шаги $h_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 1, 2, \dots$). В каждой точке x_i , называемой узлом, будем находить числа y_i , аппроксимирующие точные значения решения $y(x_i)$. Функция y , заданная в виде таблицы $\{x_i, y_i\}$ ($i = 0, 1, \dots$) является **сеточной функцией**.

Заменяя значение производной в уравнении (2.1) отношением конечных разностей, осуществим переход от дифференциальной задачи (2.1) относительно функции y к разностной задаче относительно сеточной функции:

$$y_{i+1} = f(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, \dots, y_{i-k+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

где y_0 – задано. Здесь разностное уравнение (2.3) записано в общем виде, а конкретное выражение его правой части зависит от способа аппроксимации производной. Если в правой части (2.3) отсутствует y_{i+1} , т.е. значение y_{i+1} явно вычисляется по k предыдущим значениям $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$, то разностная схема называется **явной**. При этом получается k -шаговый метод: $k = 1$ – одношаговый, $k = 2$ – двухшаговый и т.д., т.е. в одношаговых методах для вычисления y_{i+1} используется лишь одно ранее найденное значение на предыдущем шаге y_i , в многошаговых – в нескольких предыдущих точках.

Если в правую часть уравнения (2.3) входит искомое значение y_{i+1} , то решение этого уравнения усложняется. В таких методах, называемых **неявными**, приходится решать уравнение (2.3) относительно y_{i+1} с помощью итерационных методов.

При исследовании численных методов решения задачи Коши будем предполагать, что ее решение существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Метод Эйлера.

Метод Эйлера является простейшим методом решения задачи Коши и имеет невысокую точность, поэтому на практике его используют достаточно редко. Однако в дальнейшем он послужит основой для более эффективных методов.

В задаче Коши (2.1), (2.2)

$$y'(x) = f(x, y), \quad (2.1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.2)$$

запишем уравнение (2.1) в узлах x_i , $i = \overline{0, n-1}$, для простоты считаем узлы равноотстоящими, т.е. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$.

Заменяем производную следующим конечно-разностным отношением

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}. \quad (2.4)$$

Тогда, учитывая (2.1) получим

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \approx f(x_i, y_i).$$

Откуда следует рекуррентная формула метода Эйлера для приближенных значений $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (2.5)$$

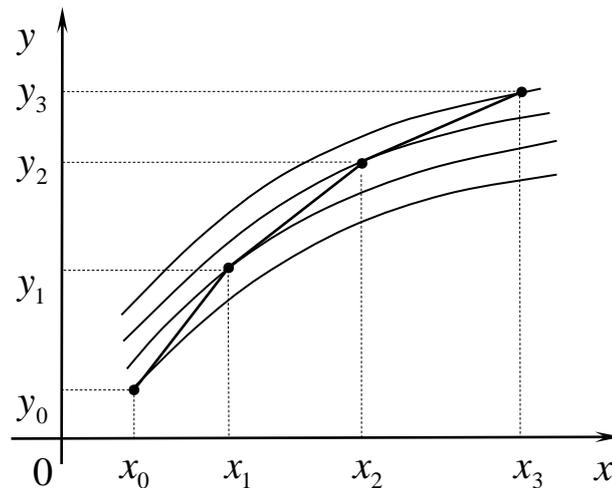


Рис. 2.1. Геометрическая иллюстрация метода Эйлера

На рис. 2.1. дана геометрическая иллюстрация метода Эйлера (2.5). Уравнение касательной к графику решения $y(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad (2.6)$$

так как $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ – угловой коэффициент касательной.

Интегральная кривая $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ заменяется отрезком касательной (2.6), соединяющей точку (x_0, y_0) с точкой (x_1, y_1) , где $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ (рис. 2.1). Точка (x_1, y_1) уже не лежит на

интегральной кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей начальному условию (2.2).

При $i = 1$ формула (2.5) дает точку (x_2, y_2) , которая определяется с помощью касательной $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$, проведенной в точке (x_1, y_1) к интегральной кривой $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (2.1) и начальному условию $y(x_1) = y_1$.

Таким образом, с каждым шагом i метод Эйлера (2.5) дает точки (x_i, y_i) , которые, вообще говоря, удаляются от интегральной кривой, соответствующей точному решению задачи Коши (2.1), (2.2). Вместо интегральной кривой метод Эйлера дает ломаную, изображенную на рисунке 2.1, поэтому этот метод часто называют *методом ломаных*.

Формулу (2.5) можно получить и другим способом. Рассмотрим разложение искомого решения $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Ограничившись двумя слагаемыми и учитывая, что $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, при $x = x_1$ получим (2.5).

Погрешность вычисления значения y_1 есть величина порядка $O(h^2)$, а погрешность значения y_n – величина порядка $O(h)$.

Недостатки метода Эйлера: малая точность, систематическое накопление ошибок [7].

Пример 2.1. Методом Эйлера решить ОДУ $y' = y$, $x \in [0, 1]$ с начальными условиями $y(0) = 1$.

Решение. Уравнение $\frac{dy}{dx} = y$ заменяем разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y_i, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad y_0 = 1.$$

$$h = \frac{1}{n} \text{ – шаг сетки (сетка равномерная).}$$

$$\text{Формула расчета: } y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i$$

$$\text{Пусть } n = 5, \quad h = 0,2$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + 0,2 \cdot y_0 = 1 + 0,2 = 1,2 \\
y_2 &= y_1 + 0,2 \cdot y_1 = 1,2 + 0,24 = 1,44 \\
y_3 &= y_2 + 0,2 \cdot y_2 = 1,44 + 0,288 = 1,728 \\
y_4 &= y_3 + 0,2 \cdot y_3 = 2,0736 \\
y_5 &= 1,2y_4 = 2,48832.
\end{aligned}$$

Проверка:

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + \ln c \Rightarrow |y| = ce^x,$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = e^x \quad \text{и } \forall x \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}
x_0 = 0 & \quad y(0) = e^0 = 1 \\
x_1 = 0,2 & \quad y(0,2) = e^{0,2} \approx 1,2214 \quad y_1 = 1,2 \\
x_2 = 0,4 & \quad y(0,4) = e^{0,4} \approx 1,4918 \quad y_2 = 1,44 \\
x_3 = 0,6 & \quad y(0,6) = e^{0,6} \approx 1,8221 \quad y_3 = 1,728 \\
x_4 = 0,8 & \quad y(0,8) = e^{0,8} \approx 2,2255 \quad y_4 = 2,0736 \\
x_5 = 1 & \quad y(1) = e^1 \approx 2,7182 \quad y_5 = 2,4883.
\end{aligned}$$

Схема Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. Метод Эйлера в рассмотренном примере дает хорошее приближение при достаточно малом h и только для нескольких первых точек.

Пример 2.2. Методом Эйлера решить задачу Коши

$$(x^2 + 1)y'' = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

на интервале $[0,1]$ с шагом $h = 0,2$. Численное решение сравнить с аналитическим решением $y(x) = x^3 + 3x + 1$.

Решение.

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{2xz}{x^2 + 1}, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3.$$

Формулы расчета:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i); \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$$

Получим

$$y_1 = y_0 + h \cdot f_1(x_0, y_0, z_0) = 1 + 0,2 \cdot z_0 = 1 + 0,2 \cdot 3 = 1,6;$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot f_2(x_0, y_0, z_0) = 3 + 0,2 \cdot \frac{2x_0 z_0}{x_0^2 + 1} = 3 + 0,2 \cdot \frac{2 \cdot 0 \cdot 3}{0^2 + 1} = 3$$

и т.д. заполним следующую таблицу, где $y(x_i) = x_i^3 + 3x_i + 1$ – точное решение, $|y(x_i) - y_i|$ – погрешность полученного численного решения.

Таблица.

i	x_i	y_i	z_i	$f_1 = z_i$	$f_2 = \frac{2x_i z_i}{x_i^2 + 1}$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
0	0	1	3	3	0	1,0	0
1	0,2	1,6	3	3	1,1538	1,6080	0,008
2	0,4	2,2	3,2308	3,2308	2,2281	2,2640	0,0640
3	0,6	2,8462	3,6764	3,6764	3,2439	3,0160	0,1698
4	0,8	3,5814	4,3252	4,3252	4,2197	3,9120	0,3306
5	1,0	4,4465				5,000	0,5535

Упражнения.

2.1. Решить методом Эйлера задачу Коши $y' = x^2 - y$ при $y(0) = 1$ с шагом $h = 0,1$ на интервале $[0,1]$. Сравнить результаты с точным решением $y(x) = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$. Заполнить таблицу:

i	x	Метод Эйлера	Точное решение	Ошибка
	x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $

2.2. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[0,1]$ таблицу значений численного и точного решения задачи Коши, выбрав шаг $h = 0,2$:

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Точное решение $y(x) = \sqrt{2x+1}$. Вывести погрешность численного решения.

2.3. Методом Эйлера решить задачу Коши на интервале $[0,1]$ с шагом $h = 0,2$.

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Численное решение сравнить с аналитическим решением
 $y(x) = x - x^2 + 1$.
 Заполнить таблицу:

i	x_i	y_i	z_i	f_1	f_2	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
...

О модификациях метода Эйлера.

Для повышения точности метода Эйлера применяют следующие приемы.

Первый улучшенный метод (метод серединных точек) для решения задачи (2.1), (2.2) состоит в том, что сначала вычисляют промежуточную (серединную) точку с координатами

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f_i, \quad (2.7)$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$. Затем находят число

$$f_{i+1/2} = f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right), \quad (2.8)$$

определяющее уточненное направление, и берут

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+1/2}. \quad (2.9)$$

Вычисление y_{i+1} по формулам (2.7)–(2.9) отражено на рисунке 2.

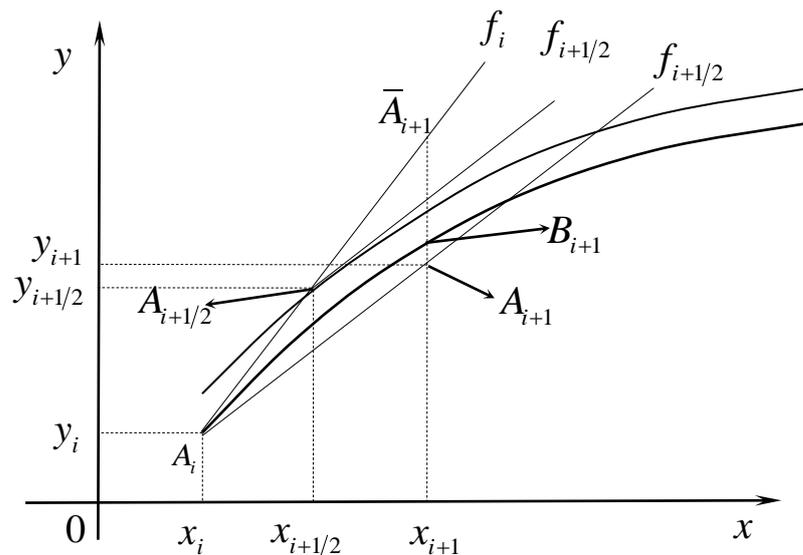


Рис. 2.2. Геометрическая иллюстрация метода серединных точек

Серединной точкой здесь является $A_{i+1/2}$. Угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку равен $f_{i+1/2}$. Формула (2.9) дает ординату точки A_{i+1} , лежащей на параллельной этой касательной прямой, исходящей из A_i . По методу Эйлера в качестве y_{i+1} получили бы ординату точки \bar{A}_{i+1} . Точному решению соответствует ордината точки B_{i+1} .

Пример 2.3. Первым улучшенным методом Эйлера решить на отрезке $[0, 1]$ задачу Коши с шагом $h = 0,2$.

$$y'(x) = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Метод серединных точек.

Используем формулы (2.7)–(2.9).

$$i = 0 \quad x_{0+1/2} = x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0,2}{2} = 0,1;$$

$$y_{0+1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f_0 = y_0 + \frac{h}{2} \left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0} \right) = 1 + \frac{0,2}{2} \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1} \right) = 1,1;$$

$$f_{0+1/2} = f \left(x_{0+1/2}, y_{0+1/2} \right) = y_{1/2} - \frac{2x_{1/2}}{y_{1/2}} = 1,1 - \frac{2 \cdot 0,1}{1,1} = 0,91818;$$

$$y_{0+1} = y_0 + h f_{0+1/2} = 1 + 0,2 \cdot 0,91818 = 1,18364,$$

т.е. $y_1 = 1,18364$, далее продолжаем вычисления по формулам (2.7)–(2.9) при $i = \overline{1, 5}$.

В таблице дается решение в программе *Excel* и сравнение с точным решением. В первой строке записываются $x_0 = 0$ (второй столбец), $y_0 = 1$ (седьмой столбец), затем вычисляется $f_0 = y_0 - \frac{2x_0}{y_0}$.

Начиная со второй строки, вычисления производятся по формулам, записанным в первой строке. В седьмом столбце расчет ведется по формуле (2.9), но значение индекса i берется из предыдущей строки (первый столбец). На первом шаге стрелками указаны какие значения участвуют в вычислениях соответствующих величин.

i	x_i	$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$	$f_i = y_i - \frac{2x_i}{y_i}$	$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i$	$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$	$y_{i+1} = y_i + h f_{i+\frac{1}{2}}$	$y(x_i) = \sqrt{2x_i+1}$	ошибка
0	0						1	0
1	0,2	0,1	0,845695	1,100000	0,91818	1,18364	1,18322	0,00042
2	0,4	0,3	0,746822	1,268206	0,79510	1,34266	1,34164	0,00101
3	0,6	0,5	0,67694	1,417338	0,71179	1,48501	1,48324	0,00177
4	0,8	0,7	0,624651	1,552708	0,65106	1,61522	1,61245	0,00277
5	1	0,9		1,677690	0,60479	1,73618	1,73205	0,00413

Второй улучшенный метод (метод Эйлера-Коши).

Сначала находят приближенное значение решения по методу Эйлера:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f_i, \quad (2.10)$$

исходя из которого определяют направление поля интегральных кривых

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}),$$

а затем уточняют его по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (2.11)$$

Этот метод называется *методом Эйлера-Коши*.

Геометрическая иллюстрация метода показана на рис. 2.3. Очередное приближение метода Эйлера-Коши соответствует точке пересечения диагоналей A_{i+1} параллелограмма, построенного на двух звеньях ломаной метода Эйлера.

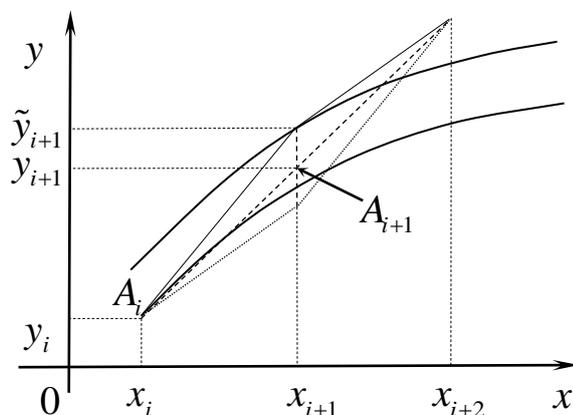


Рис. 2.3. Геометрическая иллюстрация метода Эйлера-Коши

Пример 2.4. Вторым улучшенным методом Эйлера решить на отрезке $[0, 1]$ задачу Коши с шагом $h = 0,2$.

$$y'(x) = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Метод Эйлера-Коши.

Используем формулы (2.10)–(2.11)

$$i=0 \quad \tilde{y}_{0+1} = y_0 + h f_0 = y_0 + h \left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0} \right) = 1 + 0,2 \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1} \right) = 1,2,$$

$$\tilde{f}_{0+1} = f(x_{0+1}, \tilde{y}_{0+1}) = f(0,2; 1,2) = 1,2 - \frac{2 \cdot 0,2}{1,2} = 0,86667,$$

$$f_0 = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1,$$

$$y_{0+1} = y_0 + h \cdot \frac{f_0 + \tilde{f}_1}{2} = 1 + 0,2 \frac{1 + 0,86667}{2} = 1,18667,$$

т.е. $y_1 = 1,18667$, далее продолжаем вычисления по формулам (2.10)–(2.11) при $i = \overline{1,5}$. В таблице дается решение в программе *Excel* и сравнение с точным решением. В первой строке записываются $x_0 = 0$ (второй столбец), $y_0 = 1$ (третий столбец), затем вычисляется $f_0 = y_0 - 2x_0/y_0$ (четвертый столбец) и т.д. Начиная со второй строки, вычисления для y_i , $i = \overline{1,5}$ производятся по формуле (11). Стрелками указаны значения используемые для вычисления y_1 .

i	x_i	y_i (11)	$f_i = y_i - \frac{2x_i}{y_i}$	\tilde{y}_{i+1} (10)	$\tilde{f}_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - \frac{2x_{i+1}}{\tilde{y}_{i+1}}$	$y(x_i) = \sqrt{2x_i + 1}$	ошибка
0	0	1	1	1,2	0,866667	1	0
1	0,2	1,18667	0,84958801	1,35658	0,766868	1,183215957	0,003451
2	0,4	1,34831	0,75497789	1,49931	0,698939	1,341640786	0,006671
3	0,6	1,4937	0,69033182	1,63177	0,651240	1,483239697	0,010464
4	0,8	1,62786	0,64497623	1,75686	0,618459	1,61245155	0,01541
5	1	1,75420				1,732050808	0,022154

О точности метода Эйлера и его модификаций.

При построении численного решения задачи Коши возникают погрешности, вызванные различными источниками. По этой причине строгие оценки погрешностей чисел y_i вида $|y(x_i) - y_i| \leq \Delta_{y_i}$ оказываются сложными и малоприменимыми. На практике ими не пользуются, а ограничиваются ориентировочной характеристикой точности методов.

Обозначим через φ точное решение поставленной задачи Коши (чтобы в дальнейшем не было путаницы, до этого точное решение в точке x_i обозначалось через $y(x_i)$).

В методе Эйлера имеют место следующие основные переходы к приближенным значениям:

$$\varphi(x_{i+1}) \stackrel{(1)}{\approx} \varphi_i(x_{i+1}) \stackrel{(2)}{\approx} \varphi_i(x_i) + \varphi'_i(x_i)h = y_i + f(x_i, y_i)h = y_{i+1}.$$

Погрешность приближенного равенства (1) вызвана заменой точного решения φ на некоторое другое решение φ_i . Значение этой погрешности зависит от дифференциального уравнения. В одних случаях это значение может быть существенным, в других – пренебрежительно малым.

Приближенное равенство (2) обусловлено отбрасыванием остаточного члена формулы Тейлора; возникающая при этом погрешность усечения является основной характеристикой точности метода. Метод Эйлера при каждом переходе от y_i к y_{i+1} порождает погрешность пропорциональную h^2 (при линейном усечении формулы Тейлора остаточный член пропорционален h^2). Т.е. локальная погрешность метода имеет порядок h^2 или равна $O(h^2)$. Ясно, что от y_n , $n \geq 1$ следует ожидать меньшей точности, чем от y_1 . Происходит накопление погрешностей, поэтому их следует суммировать. Учитывая, что длина отрезка $[x_0, x_n]$ равна $L = nh$ вычислим порядок погрешности числа y_n , найденного после n шагов:

$$nO(h^2) = \frac{L}{h}O(h^2) = O(h).$$

Таким образом, глобальная погрешность метода Эйлера равна $O(h)$. Аналогичным образом, получим, что локальная погрешность методов срединных точек и Эйлера-Коши порядка $O(h^3)$, а глобальная погрешность – $O(h^2)$.

Упражнения.

2.4. Тело с начальной массой 200 кг движется под действием постоянной силы в 2000 н, при этом масса тела уменьшается на 1 кг за секунду. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2000}{200-t}.$$

Приняв, что в момент времени $t=0$ тело находилось в покое, найти его скорость V через 50 сек.

Решение найти первым и вторым улучшенными методами Эйлера с шагами $h_1=10$, $h_2=5$, $h_3=2$. Сравнить результаты расчета со значением точного решения $V = 2000 \ln \frac{200}{200-t}$: при $t=50$ $V = 575,36$ м/с.

2.5. Если предположить, что тело, описанное в упражнении 1, испытывает сопротивление воздуха, численно равное удвоенному значению скорости V , то соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2000-2V}{200-t}.$$

Найти скорость при $t=50$ с, если при $t=0$ тело находилось в покое.

Решение найти первым и вторым улучшенными методами Эйлера с шагами $h_1=10$, $h_2=5$. Точное решение уравнения имеет вид $V = 10t - t^2/40$, так что $V(50) = 437,5$ м/с.

2.6. Решить методом Эйлера и первым и вторым улучшенными методами Эйлера на отрезке $[0, 1]$ задачу Коши с шагом $h=0,1$

$$y' = -y + e^x, \quad y(0) = 1,5.$$

Сравнить полученные решения с точным решением данной задачи $y = e^x/2 + e^{-x}$.

Программа решения методами Эйлера, серединных точек и Эйлера-Коши упражнения 2.6. (с комментариями курсивом).

Шаг в программе вычисляется по формуле $h = (b - a)/n$, где n – количество разбиений отрезка $[a, b]$. В программе автоматически задается $n = 10$, шаг получается $h = (b - a)/n = (2 - 1)/20 = 0,1$. Если предложенное значение n не устраивает, то количество разбиений можно сразу поменять, например, на 20, соответственно шаг автоматически изменится $h = 0,05$. После чего нажимаем кнопку “Заполнить”, в таблице заполняются столбец со значениями $x(i)$ и столбец с точным решением. Далее при нажатии кнопок “Эйлера”, “1 модиф.” и “2 модиф.” заполняются поочередно столбцы с решениями y_i методом Эйлера и погрешность метода по сравнению с точным решением и методами серединных точек и Эйлера-Коши с соответствующими погрешностями. Изменять можно также и отрезок $[a, b]$, тогда необходимо поменять начальное условие $y_0 = y(a)$ (т.к. решается конкретная задача, имеющая точное решение).

Количество разбиений

Уравнение	x0	y0	[a	b]	Точное решение	h
dy/dx=-y+exp(x)	0	1,5	0	1	y=exp(x)/2+exp(-x)	0,05

	Эйлера	1 модиф.	2 модиф.	Точ. реш.	Погрешности		
xi	yi1	yi2	yi3	y(xi)	yi1-y(xi)	yi2-y(xi)	yi3-y(xi)
0,000	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000	0,00000	0,00000	0,00000
0,050	1,47500	1,47700	1,47800	1,47700	0,00200	0,00011	0,00112
0,100	1,45400	1,45700	1,46000	1,45700	0,00319	0,00047	0,00294
0,150	1,43600	1,44200	1,44500	1,44200	0,00562	0,00030	0,00341
0,200	1,42300	1,43000	1,43400	1,42900	0,00635	0,00052	0,00549
0,250	1,41300	1,42100	1,42700	1,42100	0,00841	0,00008	0,00615
0,300	1,40600	1,41600	1,42300	1,41600	0,00984	0,00012	0,00739
0,350	1,40300	1,41400	1,42300	1,41400	0,01065	0,00037	0,00918
0,400	1,40400	1,41600	1,42700	1,41600	0,01187	0,00039	0,01052
0,450	1,40900	1,42200	1,43300	1,42200	0,01348	0,00004	0,01143
0,500	1,41700	1,43100	1,44400	1,43100	0,01449	0,00008	0,01293
0,550	1,42800	1,44400	1,45800	1,44400	0,01588	0,00023	0,01403
0,600	1,44300	1,46000	1,47600	1,46000	0,01662	0,00008	0,01578
0,650	1,46200	1,48000	1,49700	1,48000	0,01769	0,00004	0,01722
0,700	1,48500	1,50400	1,52200	1,50300	0,01803	0,00069	0,01940
0,750	1,51100	1,53100	1,55100	1,53100	0,01959	0,00011	0,02039
0,800	1,54200	1,56200	1,58400	1,56200	0,02031	0,00035	0,02225
0,850	1,57600	1,59700	1,62100	1,59700	0,02112	0,00050	0,02408
0,900	1,61400	1,63700	1,66200	1,63600	0,02193	0,00064	0,02596
0,950	1,65600	1,68000	1,70700	1,68000	0,02365	0,00013	0,02699
1,000	1,70300	1,72700	1,75600	1,72700	0,02418	0,00030	0,02929

```

unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, Grids, StdCtrls, Buttons;
type
  TForm1 = class(TForm)
    StringGrid1: TStringGrid;
    StringGrid2: TStringGrid;
    BitBtn1: TBitBtn;
    Button1: TButton;
    Button2: TButton;
    Button3: TButton;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure BitBtn1Click(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;
var
  Form1: TForm1;
implementation
var n,i:integer;
    a,b,h,k,yk,xk,yt,osh,xkp,ykp:real; // определение типов переменных
  {$R *.dfm}
  procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
with Form1 do begin
StringGrid1.Cells[0,0]:='Уравнение';           //
StringGrid1.Cells[0,1]:='dy/dx=-y+exp(x)';     //
StringGrid1.Cells[1,0]:='x0';                  //
StringGrid1.Cells[1,1]:='0';                   //
StringGrid1.Cells[2,0]:='y0';                  //
StringGrid1.Cells[2,1]:='1,5';                 //
StringGrid1.Cells[3,0]:='[a';                  //

```

```

StringGrid1.Cells[3,1]:='0'; //
StringGrid1.Cells[4,0]:='b'; //
StringGrid1.Cells[4,1]:='1'; //
StringGrid1.Cells[5,0]:='Точное решение'; // Заполнение
StringGrid1.Cells[5,1]:='y=exp(x)/2+exp(-x)'; // заголовков
StringGrid1.Cells[6,0]:='h'; // исходных
StringGrid1.Cells[6,1]:=''; // таблиц
StringGrid2.Cells[0,0]:='xi'; //
StringGrid2.Cells[1,0]:='yi1'; //
StringGrid2.Cells[2,0]:='yi2'; //
StringGrid2.Cells[3,0]:='yi3'; //
StringGrid2.Cells[4,0]:='y(xi)'; //
StringGrid2.Cells[5,0]:='|yi1-y(xi)|'; //
StringGrid2.Cells[6,0]:='|yi2-y(xi)|'; //
StringGrid2.Cells[7,0]:='|yi3-y(xi)|'; //
end;
end;
procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject); // нажатие кнопки «Заполнить»
begin
n:=StrToInt(Edit1.Text); // введение кол-ва разбиений
a:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[3,1]); // введение [a,b], если не устраивают
b:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[4,1]); // предложенные значения
for i:=1 to 1000 do
StringGrid2.rows[i].Clear; // обнуление таблице результатов (TP)
h:=abs(b-a)/n; // вычисление шага h
StringGrid1.Cells[6,1]:=FloatToStr(h);
StringGrid2.RowCount:=n+2;
for i:= 0 to n do begin
StringGrid2.Cells[0,i+1]:=FloatToStrF(a+h*i,ffixed, 4, 3); // заполнение столбца  $x_i$ 
// в TP
xk:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[0,i+1]); // присвоение переменной xk
// значений x из TP
yt:=exp(xk)/2+exp(-xk); // вычисление точного решения
StringGrid2.Cells[4,i+1]:=FloatToStrF(yt,ffixed, 4, 5); // заполнение столбца в
// TP точным решением
end; end;
function f(x,y:real):real; // определение типа функции
begin
f:=-y+exp(x); // вид функции
end;

```

```

procedure TForm1.BitBtn1Click(Sender: TObject); // нажатие кнопки "Эйлера"
begin
    // Решение задачи методом Эйлера
    yk:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[2,1]); // присвоение переменной yk
    // начального условия  $y_0$  из таблицы исходных данных (ТИД)
    yt:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[4,1]); // присвоение переменной yt значений точ.
    // реш-я  $y(x_0)$  из TP
    osh:=abs(yk-yt); // вычисление погрешности начального условия
    StringGrid2.Cells[1,1]:=FloatToStrF(yk,ffixed, 4, 5); // запись нач. усл-я  $y_0$  в TP
    StringGrid2.Cells[5,1]:=FloatToStrF(osh,ffixed, 4, 5); // запись погрешности нач.
    // приближения в TP
    for i:=1 to n do begin
        xk:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[0,i]); // присвоение переменной xk значений x
        // из TP
        yk:=h*(-yk+exp(xk))+yk; // вычисление  $y_i$ 
        yt:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[4,i+1]); // присвоение переменной yt значений
        // точ. реш-я  $y(x_i)$  из TP
        osh:=abs(yk-yt); //вычисление погрешности
        StringGrid2.Cells[1,i+1]:=FloatToStrF(yk,ffixed, 4, 5); //запись  $y_i$  в TP
        StringGrid2.Cells[5,i+1]:=FloatToStrF(osh,ffixed, 4, 5); //запись погрешности в TP
    end; end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); // нажатие кнопки "1 модиф"
begin
    // Решение задачи методом серединных точек
    yk:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[2,1]); // начальное условие  $y_0$  из ТИД
    yt:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[4,1]); // присвоение переменной yt значений точ.
    // реш-я  $y(x_0)$  из TP
    osh:=abs(yk-yt); // вычисление погрешности начального условия
    StringGrid2.Cells[2,1]:=FloatToStrF(yk,ffixed, 4, 5); // запись нач. усл-я  $y_0$  в TP
    StringGrid2.Cells[6,1]:=FloatToStrF(osh,ffixed, 4, 5); // запись погрешности нач.
    // приближения в TP
    for i:=1 to n do begin
        xk:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[0,i]); // присвоение переменной xk
        // значений x из TP
        xkp:=xk+h/2; // вычисление промежуточной
        ykp:=yk+h/2*f(xk,yk); // точки
        yk:=yk+h*f(xkp,ykp); // вычисление  $y_i$  методом серединных точек
        yt:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[4,i+1]); // присвоение переменной yt значений
        // точ. реш-я  $y(x_i)$  из TP
        osh:=abs(yk-yt); // вычисление погрешности
    end; end;

```

```

StringGrid2.Cells[2,i+1]:=FloatToStrF(yk,ffixed, 4, 5); // запись  $y_i$  в TP
StringGrid2.Cells[6,i+1]:=FloatToStrF(osh,ffixed, 4, 5); //запись погрешности в TP
end; end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject); // нажатие кнопки “2 модиф”
begin
    // Решение задачи методом Эйлера-Коши
yk:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[2,1]); // начальное условие  $y_0$  из ТИД
yt:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[4,1]); // присвоение переменной yt значений точ.
    // реш-я  $y(x_0)$  из TP
osh:=abs(yk-yt); // вычисление погрешности начального условия
StringGrid2.Cells[3,1]:=FloatToStrF(yk,ffixed, 4, 5); // запись  $y_0$  в TP
StringGrid2.Cells[7,1]:=FloatToStrF(osh,ffixed, 4, 5); //запись погрешности в TP
for i:=1 to n do begin
xk:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[0,i+1]);
ykp:=yk+h*f(xk,yk);
yk:=yk+h*1/2*(f(xk,yk)+f(xk,ykp)); // вычисление  $y_i$  методом Эйлера-Коши
yt:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[4,i+1]); // присвоение переменной yt
    // значений точ. реш-я  $y(x_i)$  из TP
osh:=abs(yk-yt); // вычисление погрешности
StringGrid2.Cells[3,i+1]:=FloatToStrF(yk,ffixed, 4, 5); //запись  $y_i$  в TP
StringGrid2.Cells[7,i+1]:=FloatToStrF(osh,ffixed, 4, 5); //запись погрешности в TP
end; end; end.

```

3. Методы Рунге-Кутты (Р-К).

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ 1-го порядка.

$$y'(x) = f(x, y), \quad (3.1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.2)$$

Требуется найти функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет уравнению (3.1) на интервале (x_0, X) и начальному условию (3.2) в точке x_0 .

Метод Р-К – наиболее популярный метод решения задачи Коши. Этот метод позволяет строить формулы расчета приближенного решения практически любого порядка точности.

Выведем формулы метода Р-К второго порядка точности. Для этого решение представим куском ряда Тейлора, отбрасывая члены с порядком выше второго. Тогда приближенное значение искомой функции в точке x_1 можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)^2 = \\
&= y_0 + f(x_0, y_0)h + \frac{y''(x_0)}{2}h^2.
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Вторую производную $y''(x_0)$ можно выразить через производную функции $f(x, y)$, однако в методе Р-К вместо производной используют разность

$$y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)}{\Delta x},$$

подбирая должным образом значения параметров $\tilde{x}, \tilde{y}, \Delta x$. Тогда (3.3) можно заменить выражением

$$y_1 = y_0 + h[\beta f(x_0, y_0) + \alpha f(x_0 + \gamma h, y_0 + \delta h)], \tag{3.4}$$

где α, β, γ и δ – некоторые параметры.

Рассматривая правую часть (3.4) как функцию аргумента h , разложим ее по степеням h :

$$y_1 = y_0 + (\alpha + \beta)h f(x_0, y_0) + \alpha h^2 [\gamma f_x(x_0, y_0) + \delta f_y(x_0, y_0)]$$

и выберем параметры α, β, γ и δ так, чтобы это разложение было близко к (3.3). Отсюда следует, что

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\gamma = 0,5, \quad \alpha\delta = 0,5 f(x_0, y_0)$$

С помощью этих уравнений выразим β, γ, δ через параметр α , получим

$$y_1 = y_0 + h \left[(1 - \alpha) f(x_0, y_0) + \alpha f \left(x_0 + \frac{h}{2\alpha}, y_0 + \frac{h}{2\alpha} f(x_0, y_0) \right) \right], \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{3.5}$$

Теперь, если вместо (x_0, y_0) в (3.5) подставить (x_1, y_1) , получим формулу для вычисления y_2 – приближенного значения искомой функции в точке x_2 .

В общем случае метод Р-К применяется на произвольном разбиении отрезка $[x_0, X]$ на n частей, т.е. с переменным шагом

$$x_0, x_1, \dots, x_n; \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad x_n = X.$$

Параметр α выбирают равным 1 или 0,5. Запишем окончательно расчетные формулы метода Р-К второго порядка с переменным шагом для

$$\alpha = 1: \quad y_{i+1} = y_i + h_i f \left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i) \right), \quad i = \overline{0, n-1} \quad (3.6)$$

и $\alpha = 0,5$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} \left[f(x_i, y_i) + f \left(x_i + h_i, y_i + h_i f(x_i, y_i) \right) \right], \quad i = \overline{0, n-1} \quad (3.6')$$

Метод (3.6') совпадает с методом Эйлера-Коши.

Теорема. Если правая часть $f(x, y)$ уравнения (3.1) непрерывна и ограничена вместе со своими производными до второго порядка включительно, то решение, полученное по формулам (3.6) и (3.6'), равномерно сходится к решению задачи (3.1), (3.2) с погрешностью $O\left(\max_i h_i^2\right)$ [12].

Приведем наиболее употребительные формулы метода Р-К, формулы четвертого порядка точности. При выводе расчетных формул используется формула Симпсона численного интегрирования. Поскольку метод Симпсона является методом четвертого порядка, то и метод Р-К, использующий метод Симпсона, также является *методом четвертого порядка точности*. По методу Р-К вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right), \quad (3.7)$$

$$K_1^{(i)} = hf_i = hf(x_i, y_i), \quad K_2^{(i)} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2} \right), \quad (3.7')$$

$$K_3^{(i)} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2} \right), \quad K_4^{(i)} = hf \left(x_{i+1}, y_i + K_3^{(i)} \right).$$

Схема метода Рунге-Кутты.

Порядок заполнения таблицы.

- 1) Записываем в *первой строке* данные значения x_0, y_0 . Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_1^{(0)}$.

2) Записываем во второй строке таблицы $x_0 + h/2$, $y_0 + K_1^{(0)}/2$.
Вычисляем $f(x_0 + h/2, y_0 + K_1^{(0)}/2)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_2^{(0)}$.

3) Записываем в третьей строке таблицы $x_0 + h/2$, $y_0 + K_2^{(0)}/2$.
Вычисляем $f(x_0 + h/2, y_0 + K_2^{(0)}/2)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_3^{(0)}$.

4) Записываем в четвертой строке таблицы $x_0 + h$, $y_0 + K_3^{(0)}$.
Вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_4^{(0)}$.

5) В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}$, $2K_2^{(0)}$, $2K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$.

6) Суммируем числа, стоящие в столбце Δy , делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0

7) Вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$

Затем все вычисления продолжают в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1) .

Таблица

n	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + K_1^{(0)}/2$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + K_2^{(0)}/2$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				$\Delta y_0 = \frac{K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}}{6}$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$		

Шаг расчета можно менять при переходе от одной точке к другой.
Для контроля правильности выбора шага h рекомендуется вычислять дробь

одновременно. Тогда метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы второго порядка имеет вид

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + \Delta y_{1i}, \\ y_{2i+1} = y_{2i} + \Delta y_{2i}, \\ \Delta y_{1i} = \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right), \\ \Delta y_{2i} = \frac{1}{6} \left(L_1^{(i)} + 2L_2^{(i)} + 2L_3^{(i)} + L_4^{(i)} \right). \end{cases}$$

$$K_1^{(i)} = h f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \quad L_1^{(i)} = h f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}),$$

$$K_2^{(i)} = h f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{K_1^{(i)}}{2}, y_{2i} + \frac{L_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$L_2^{(i)} = h f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{K_1^{(i)}}{2}, y_{2i} + \frac{L_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_3^{(i)} = h f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{K_2^{(i)}}{2}, y_{2i} + \frac{L_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$L_3^{(i)} = h f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{K_2^{(i)}}{2}, y_{2i} + \frac{L_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_4^{(i)} = h f_1\left(x_{i+1}, y_{1i} + K_3^{(i)}, y_{2i} + L_3^{(i)}\right),$$

$$L_4^{(i)} = h f_2\left(x_{i+1}, y_{1i} + K_3^{(i)}, y_{2i} + L_3^{(i)}\right).$$

Алгоритм метода Р-К для систем второго порядка легко распространяется на системы 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Пример 3.1. Методом Рунге-Кутты найти решение ДУ $y' = 0,25y^2 + x^2$ с начальным условием $y(0) = -1$ на отрезке $[0; 0,3]$, приняв шаг $h = 0,1$.

Решение: Итак, $f(x, y) = 0,25y^2 + x^2$.

Заполним таблицу согласно схеме метода Р-К.

i	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy	$\theta = \left \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right $
0	0	-1	0,025	0,025	0,024
	0,05	-0,98750	0,024629	0,049258	
	0,05	-0,98769	0,024638	0,049276	
	0,1	-0,97536	0,024783	0,024783	
				0,02472	
1	0,1	-0,97528	0,024779	0,024779	0,025
	0,15	-0,96289	0,025429	0,050858	
	0,15	-0,96257	0,025413	0,050826	
	0,2	-0,94987	0,026557	0,026557	
				0,02550	
2	0,2	-0,94978	0,026553	0,026553	0,023
	0,25	-0,93650	0,028176	0,056352	
	0,25	-0,93569	0,028138	0,056276	
	0,3	-0,92164	0,030236	0,030236	
				0,02824	
3	0,3	-0,92154			

При $n = 0$:

- 1) В первой строке записываем $x_0 = 0$, $y_0 = -1$. Вычисляем $f(x_0, y_0) = 0,25$, тогда $K_1^{(0)} = 0,1 \cdot 0,25 = 0,025$.
- 2) Во второй строке $x_0 + h/2 = 0,05$; $y_0 + K_1^{(0)}/2 = -0,98750$. Вычисляем $f(x_0 + h/2, y_0 + K_1^{(0)}/2) = 0,24629$; тогда $K_2^{(0)} = 0,024629$.
- 3) В третьей строке $x_0 + h/2 = 0,05$, $y_0 + K_2^{(0)}/2 = -0,98769$. Вычисляем $f(x_0 + h/2, y_0 + K_2^{(0)}/2) = 0,25 \cdot (0,98769)^2 + (0,05)^2 = 0,24638$, тогда $K_3^{(0)} = 0,024638$.
- 4) Четвертая строка $x_0 + h = 0,1$; $y_0 + K_3^{(0)} = -0,97536$. Вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}) = 0,24783$; тогда $K_4^{(0)} = 0,024783$.
- 5) В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}$, $2K_2^{(0)}$, $2K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$.
- 6) Вычисляем $\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot 0,148317 = 0,02472$.

7) Получаем $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -0,97528$. Значения $x_1 = 0,1$, $y_1 = -0,97528$ заносим в строку $n = 1$, и снова проводим вычисления по формулам (3.7), (3.7').

В последнем столбце таблицы приведены значения величины θ , полученные по формуле (3.8).

Пример 3.2. Методом Рунге-Кутты с шагом $h = 0,1$ численно проинтегрировать следующую задачу Коши для нормальной системы второго порядка до значения $x = 0,2$ включительно (т.е. два шага):

$$\begin{cases} y_1' = x + 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 2x + y_1 + 2y_2, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Задача допускает аналитическое решение, которое имеет вид

$$y_1(x) = \frac{7}{6}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3},$$

$$y_2(x) = \frac{7}{6}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - x - \frac{2}{3},$$

$$y_1(0) = 1; \quad y_1(0,1) = 1,355583; \quad y_1(0,2) = 1,848438;$$

$$y_2(0) = 1; \quad y_2(0,1) = 1,36075; \quad y_2(0,2) = 1,86984;$$

Используем формулы

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + \Delta y_{1i}, \\ y_{2i+1} = y_{2i} + \Delta y_{2i}. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta y_{1i} = \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right), \\ \Delta y_{2i} = \frac{1}{6} \left(L_1^{(i)} + 2L_2^{(i)} + 2L_3^{(i)} + L_4^{(i)} \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1^{(i)} = h f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) = h \cdot [x_i + 2y_{1i} + y_{2i}], \\ L_1^{(i)} = h f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) = h \cdot [2x_i + y_{1i} + 2y_{2i}]. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
K_2^{(i)} = h f_1 \left(x_i + h/2, y_{1i} + K_1^{(i)} / 2, y_{2i} + L_1^{(i)} / 2 \right) = \\
\qquad = h \cdot \left[(x_i + h/2) + 2 \left(y_{1i} + K_1^{(i)} / 2 \right) + \left(y_{2i} + L_1^{(i)} / 2 \right) \right], \\
L_2^{(i)} = h f_2 \left(x_i + h/2, y_{1i} + K_1^{(i)} / 2, y_{2i} + L_1^{(i)} / 2 \right) = \\
\qquad = h \cdot \left[2(x_i + h/2) + \left(y_{1i} + K_1^{(i)} / 2 \right) + 2 \left(y_{2i} + L_1^{(i)} / 2 \right) \right]. \\
K_3^{(i)} = h f_1 \left(x_i + h/2, y_{1i} + K_2^{(i)} / 2, y_{2i} + L_2^{(i)} / 2 \right) = \\
\qquad = h \cdot \left[(x_i + h/2) + 2 \left(y_{1i} + K_2^{(i)} / 2 \right) + \left(y_{2i} + L_2^{(i)} / 2 \right) \right], \\
L_3^{(i)} = h f_2 \left(x_i + h/2, y_{1i} + K_2^{(i)} / 2, y_{2i} + \frac{L_2^{(i)}}{2} \right) = \\
\qquad = h \cdot \left[2(x_i + h/2) + \left(y_{1i} + K_2^{(i)} / 2 \right) + 2 \left(y_{2i} + L_2^{(i)} / 2 \right) \right]. \\
K_4^{(i)} = h f_1 \left(x_{i+1}, y_{1i} + K_3^{(i)}, y_{2i} + L_3^{(i)} \right) = h \cdot \left[(x_i + h) + 2 \cdot \left(y_{1i} + K_3^{(i)} \right) + \left(y_{2i} + L_3^{(i)} \right) \right], \\
L_4^{(i)} = h f_2 \left(x_{i+1}, y_{1i} + K_3^{(i)}, y_{2i} + L_3^{(i)} \right) = h \cdot \left[2(x_i + h) + \left(y_{1i} + K_3^{(i)} \right) + 2 \left(y_{2i} + L_3^{(i)} \right) \right].
\end{array} \right.$$

$$i = 0; \quad x_0 = 0; \quad x_{0+1/2} = 0,05; \quad x_1 = 0,1; \quad y_{10} = 1; \quad y_{20} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
K_1^{(0)} = h \cdot [x_0 + 2y_{10} + y_{20}] = 0,1 \cdot [0 + 2 \cdot 1 + 1] = 0,3 \\
L_1^{(0)} = h \cdot [2x_0 + y_{10} + 2y_{20}] = 0,1 \cdot [2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1] = 0,3
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
K_2^{(0)} = h \cdot \left[(x_0 + h/2) + 2 \left(y_{10} + K_1^{(0)} / 2 \right) + \left(y_{20} + L_1^{(0)} / 2 \right) \right] = \\
\qquad = 0,1 \left[0,05 + 2(1 + 0,3/2) + (1 + 0,3/2) \right] = 0,35 \\
L_2^{(0)} = h \cdot \left[2(x_0 + h/2) + \left(y_{10} + K_1^{(0)} / 2 \right) + 2 \left(y_{20} + L_1^{(0)} / 2 \right) \right] = \\
\qquad = 0,1 \left[2 \cdot 0,05 + (1 + 0,3/2) + 2(1 + 0,3/2) \right] = 0,355
\end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
K_3^{(0)} = h \cdot \left[(x_0 + h/2) + 2 \left(y_{10} + K_2^{(0)} / 2 \right) + \left(y_{20} + L_2^{(0)} / 2 \right) \right] = \\
= 0,1 \left[0,05 + 2(1 + 0,35/2) + (1 + 0,355/2) \right] = 0,3578 \\
L_3^{(0)} = h \cdot \left[2(x_0 + h/2) + \left(y_{10} + K_2^{(0)} / 2 \right) + 2 \left(y_{20} + L_2^{(0)} / 2 \right) \right] = \\
= 0,1 \left[2 \cdot 0,05 + (1 + 0,35/2) + 2(1 + 0,355/2) \right] = 0,363 \\
K_4^{(0)} = h \cdot \left[(x_0 + h) + 2 \cdot \left(y_{10} + K_3^{(0)} \right) + \left(y_{20} + L_3^{(0)} \right) \right] = \\
= 0,1 \left[0,1 + 2(1 + 0,3578) + (1 + 0,363) \right] = 0,4179 \\
L_4^{(0)} = h \cdot \left[2 \cdot (x_0 + h) + \left(y_{10} + K_3^{(0)} \right) + 2 \cdot \left(y_{20} + L_3^{(0)} \right) \right] = \\
= 0,1 \left[2 \cdot 0,1 + (1 + 0,3578) + 2(1 + 0,363) \right] = 0,4284 \\
\Delta y_{10} = \left(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)} \right) / 6 = \\
= (0,3 + 2 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,3578 + 0,4179) / 6 = 0,35558 \\
\Delta y_{20} = \left(L_1^{(0)} + 2L_2^{(0)} + 2L_3^{(0)} + L_4^{(0)} \right) / 6 = \\
= (0,3 + 2 \cdot 0,355 + 2 \cdot 0,363 + 0,4284) / 6 = 0,36073 \\
y_{11} = y_{10} + \Delta y_{10} = 1 + 0,35558 = 1,35558 \\
y_{21} = y_{20} + \Delta y_{20} = 1 + 0,36073 = 1,36073
\end{cases}$$

$$i = 1; \quad x_1 = 0,1; \quad x_{1+1/2} = 0,15; \quad x_2 = 0,2; \quad y_{11} = 1,35558; \quad y_{21} = 1,36073$$

$$\begin{cases}
K_1^{(1)} = h \cdot [x_1 + 2y_{11} + y_{21}] = 0,1 \cdot [0,1 + 2 \cdot 1,35558 + 1,36073] = 0,41719 \\
L_1^{(1)} = h \cdot [2x_1 + y_{11} + 2y_{21}] = 0,1 \cdot [2 \cdot 0,1 + 1,35558 + 2 \cdot 1,36073] = 0,4277
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
K_2^{(1)} = h \cdot \left[(x_1 + h/2) + 2 \left(y_{11} + K_1^{(1)} / 2 \right) + \left(y_{21} + L_1^{(1)} / 2 \right) \right] = \\
= 0,1 \left[0,15 + 2(1,35558 + 0,41719/2) + (1,36073 + 0,4277/2) \right] = 0,4853 \\
L_2^{(1)} = h \cdot \left[2(x_1 + h/2) + \left(y_{11} + K_1^{(1)} / 2 \right) + 2 \left(y_{21} + L_1^{(1)} / 2 \right) \right] = \\
= 0,1 \left[2 \cdot 0,15 + (1,35558 + 0,41719/2) + 2(1,36073 + 0,4277/2) \right] = 0,5013
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
K_3^{(1)} = h \cdot \left[(x_1 + h/2) + 2 \left(y_{11} + K_2^{(1)} / 2 \right) + \left(y_{21} + L_2^{(1)} / 2 \right) \right] = \\
= 0,1 \left[0,15 + 2(1,35558 + 0,4853/2) + (1,36073 + 0,5013/2) \right] = 0,4958 \\
L_3^{(1)} = h \cdot \left[2(x_1 + h/2) + \left(y_{11} + K_2^{(1)} / 2 \right) + 2 \left(y_{21} + L_2^{(1)} / 2 \right) \right] = \\
= 0,1 \left[2 \cdot 0,15 + (1,35558 + 0,4853/2) + 2(1,36073 + 0,5013/2) \right] = 0,5121 \\
K_4^{(1)} = h \cdot \left[(x_1 + h) + 2 \cdot \left(y_{11} + K_3^{(1)} \right) + \left(y_{21} + L_3^{(1)} \right) \right] = \\
= 0,1 \left[0,2 + 2(1,35558 + 0,4958) + (1,36073 + 0,5121) \right] = 0,57756 \\
L_4^{(1)} = h \cdot \left[2(x_1 + h) + \left(y_{11} + K_3^{(1)} \right) + 2 \left(y_{21} + L_3^{(1)} \right) \right] = \\
= 0,1 \left[2 \cdot 0,2 + (1,35558 + 0,4958) + 2(1,36073 + 0,5121) \right] = 0,5997 \\
\Delta y_{11} = \frac{1}{6} \left(K_1^{(1)} + 2K_2^{(1)} + 2K_3^{(1)} + K_4^{(1)} \right) = \\
= \frac{1}{6} (0,41719 + 2 \cdot 0,4853 + 2 \cdot 0,4958 + 0,57756) = 0,49283 \\
\Delta y_{21} = \frac{1}{6} \left(L_1^{(1)} + 2L_2^{(1)} + 2L_3^{(1)} + L_4^{(1)} \right) = \\
= \frac{1}{6} (0,4277 + 2 \cdot 0,5013 + 2 \cdot 0,5121 + 0,5997) = 0,5090 \\
y_{12} = y_{11} + \Delta y_{11} = 1,35558 + 0,49283 = 1,8484 \\
y_{22} = y_{21} + \Delta y_{21} = 1,36073 + 0,5090 = 1,8698
\end{cases}$$

Таким образом, метод Р-К выдерживает теоретическую точность, сохраняя верными 4 знака после запятой.

Программа решения методом Рунге-Кутты задачи Коши для нормальной системы из примера 3.2. Шаг h определяется количеством разбиений предполагаемого отрезка (интервала), в программе интервал берется от 0 до 0,6, количество разбиений задаем 6, получаем $h = 0,1$.

Рунге-Кутты

$y_1' = 1 \cdot X + 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2$ Интервал : от до
 $y_2' = 2 \cdot X + 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2$
 $Y_1 = 1$ $Y_2 = 1$ Количество разбиений
 Шаг h =

Решить

i	X	K	L	Y1	Y2	Dy1	Dy2
0	0,00000	0,3000000000	0,3000000000	1,0000000000	1,0000000000	-	-
		0,3500000000	0,3550000000				
		0,357800	0,363000				
		0,417850000	0,428375000			0,355558000	0,360729000
1	0,10000	0,417185000	0,427702000	1,355560000	1,360730000		
			0,485288000	0,501331000			
			0,512099000				
		0,577550000	0,599699000			0,492812000	0,509044000
2	0,20000	0,576651000	0,598792000	1,848370000	1,869770000		
			0,669256000	0,697503000			
			0,712005000				
		0,794542000	0,829538000			0,679435000	0,707891000
3	0,30000	0,793327000	0,828313000	2,527810000	2,577660000		
			0,919076000	0,960811000			
			0,980348000				
		1,089020000	1,138210000			0,932841000	0,974807000
4	0,40000	1,087380000	1,136560000	3,460650000	3,552470000		
			1,257940000	1,314580000			
			1,340910000				
		1,488250000	1,553130000			1,276550000	1,333450000
5	0,50000	1,486030000	1,550900000	4,737200000	4,885920000		
			1,717180000	1,790300000			
			1,825790000				
		2,029060000	2,111290000			1,742330000	1,815730000
6	0,60000			6,479530000	6,701650000		

```

unit Unit1;
interface
uses
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
Dialogs, StdCtrls, Grids;
type
TForm1 = class(TForm)
Edit1: TEdit;
Label1: TLabel;
Label2: TLabel;
Edit2: TEdit;
Label4: TLabel;
Edit3: TEdit;
Edit4: TEdit;
Edit5: TEdit;

```

```

Label5: TLabel;
Label6: TLabel;
Button1: TButton;
Label3: TLabel;
Edit6: TEdit;
Label7: TLabel;
Edit7: TEdit;
Label8: TLabel;
Edit8: TEdit;
Label9: TLabel;
Label10: TLabel;
Edit9: TEdit;
Label11: TLabel;
Edit10: TEdit;
Label12: TLabel;
Edit11: TEdit;
Label13: TLabel;
StringGrid1: TStringGrid;
Edit12: TEdit;
Label14: TLabel;
procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
private
{ Private declarations }
public
{ Public declarations }
end;
var
Form1: TForm1;
x,y1,y2,Dy1,Dy2: array[0..50000] of real;
i,ke:integer;
it: string;
h:real;
K,L:array[1..4,0..50000]of real;
kof:array[1..2,1..3]of real;
n: integer;
implementation
{$R *.dfm}
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
for i:=1 to 10000 do begin          //

```

```

StringGrid1.Rows[i].clear;          // Очистка таблицы результатов
//===== Запись переменных =====
kof[1,1]:=strtofloat(edit6.Text);
kof[1,2]:=strtofloat(edit7.Text);
kof[1,3]:=strtofloat(edit8.Text);
kof[2,1]:=strtofloat(edit9.Text);
kof[2,2]:=strtofloat(edit10.Text);
kof[2,3]:=strtofloat(edit11.Text);
Y1[0]:=strtofloat(Edit4.text);
Y2[0]:=strtofloat(Edit5.text);
X[0]:=strtofloat(edit2.text);
n:=StrToInt(Edit12.Text);
h:=(strtofloat(Edit1.text)-strtofloat(Edit2.text))/n;
Edit3.Text:=FloatToStr(h);
//===== 1-я итерация =====
K[1,0]:=h*(kof[1,1]*x[0]+kof[1,2]*Y1[0]+kof[1,3]*Y2[0]);
L[1,0]:=h*(kof[2,1]*x[0]+kof[2,2]*Y1[0]+kof[2,3]*Y2[0]);
StringGrid1.Cells[0,1]:='0';
StringGrid1.Cells[1,1]:=FloatToStrF(X[0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[2,1]:=FloatToStrF(K[1,0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[3,1]:=FloatToStrF(L[1,0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[4,1]:=FloatToStrF(Y1[0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[5,1]:=FloatToStrF(Y2[0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[6,1]:='-';
StringGrid1.Cells[7,1]:='-';
K[2,0]:=h*(kof[1,1]*(X[0]+h/2)+kof[1,2]*(Y1[0]+K[1,0]/2)+kof[1,3]*(y2[0]+L[1,0]/2)
);
L[2,0]:=h*(kof[2,1]*(X[0]+h/2)+kof[2,2]*(Y1[0]+K[1,0]/2)+kof[2,3]*(y2[0]+L[1,0]/2)
);
StringGrid1.Cells[2,2]:=FloatToStrF(K[2,0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[3,2]:=FloatToStrF(L[2,0],ffFixed,6,9);
K[3,0]:=h*(kof[1,1]*(X[0]+h/2)+kof[1,2]*(Y1[0]+K[2,0]/2)+kof[1,3]*(y2[0]+L[2,0]/2)
);
L[3,0]:=h*(kof[2,1]*(X[0]+h/2)+kof[2,2]*(Y1[0]+K[2,0]/2)+kof[2,3]*(y2[0]+L[2,0]/2)
);
StringGrid1.Cells[2,3]:=FloatToStrF(K[3,0],ffFixed,4,6);
StringGrid1.Cells[3,3]:=FloatToStrF(L[3,0],ffFixed,4,6);
K[4,0]:=h*(kof[1,1]*(X[0]+h)+kof[1,2]*(Y1[0]+K[3,0])+kof[1,3]*(y2[0]+L[3,0]));
L[4,0]:=h*(kof[2,1]*(X[0]+h)+kof[2,2]*(Y1[0]+K[3,0])+kof[2,3]*(y2[0]+L[3,0]));
DY1[1]:=1/6*(K[1,0]+2*K[2,0]+2*K[3,0]+K[4,0]);
DY2[1]:=1/6*(L[1,0]+2*L[2,0]+2*L[3,0]+L[4,0]);

```

```

StringGrid1.Cells[2,4]:=FloatToStrF(K[4,0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[3,4]:=FloatToStrF(L[4,0],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[6,4]:=FloatToStrF(DY1[1],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[7,4]:=FloatToStrF(DY2[1],ffFixed,6,9);
Y1[1]:=DY1[1]+Y1[0];
Y2[1]:=DY2[1]+Y2[0];

//=====Конец итерации, найдены  $y_1^1, y_2^1$  =====
//===== Цикл нахождения последующих значений  $y_1, y_2$  =====
for i:=1 to n-1 do begin
x[i]:=x[0]+h*i;
K[1,i]:=h*(kof[1,1]*x[i]+kof[1,2]*Y1[i]+kof[1,3]*Y2[i]);
L[1,i]:=h*(kof[2,1]*x[i]+kof[2,2]*Y1[i]+kof[2,3]*Y2[i]);
StringGrid1.Cells[0,i*4+1]:=inttostr(i);
StringGrid1.Cells[1,i*4+1]:=FloatToStrF(X[i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[2,i*4+1]:=FloatToStrF(K[1,i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[3,i*4+1]:=FloatToStrF(L[1,i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[4,i*4+1]:=FloatToStrF(Y1[i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[5,i*4+1]:=FloatToStrF(Y2[i],ffFixed,6,9);
K[2,i]:=h*(kof[1,1]*(X[i]+h/2)+kof[1,2]*(Y1[i]+K[1,i]/2)+kof[1,3]*(y2[i]+L[1,i]/2));
L[2,i]:=h*(kof[2,1]*(X[i]+h/2)+kof[2,2]*(Y1[i]+K[1,i]/2)+kof[2,3]*(y2[i]+L[1,i]/2));
StringGrid1.Cells[3,i*4+2]:=FloatToStrF(K[2,i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[4,i*4+2]:=FloatToStrF(L[2,i],ffFixed,6,9);
K[3,i]:=h*(kof[1,1]*(X[i]+h/2)+kof[1,2]*(Y1[i]+K[2,i]/2)+kof[1,3]*(y2[i]+L[2,i]/2));
L[3,i]:=h*(kof[2,1]*(X[i]+h/2)+kof[2,2]*(Y1[i]+K[2,i]/2)+kof[2,3]*(y2[i]+L[2,i]/2));
StringGrid1.Cells[3,i*4+3]:=FloatToStrF(K[3,i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[3,i*4+3]:=FloatToStrF(L[3,i],ffFixed,6,9);
K[4,i]:=h*(kof[1,1]*(X[i]+h)+kof[1,2]*(Y1[i]+K[3,i])+kof[1,3]*(y2[i]+L[3,i]));
L[4,i]:=h*(kof[2,1]*(X[i]+h)+kof[2,2]*(Y1[i]+K[3,i])+kof[2,3]*(y2[i]+L[3,i]));
DY1[i+1]:=1/6*(K[1,i]+2*K[2,i]+2*K[3,i]+K[4,i]);
DY2[i+1]:=1/6*(L[1,i]+2*L[2,i]+2*L[3,i]+L[4,i]);
StringGrid1.Cells[2,i*4+4]:=FloatToStrF(K[4,i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[3,i*4+4]:=FloatToStrF(L[4,i],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[6,i*4+4]:=FloatToStrF(DY1[i+1],ffFixed,6,9) ;
StringGrid1.Cells[7,i*4+4]:=FloatToStrF(DY2[i+1],ffFixed,6,9);
Y1[i+1]:=DY1[i+1]+Y1[i];
Y2[i+1]:=DY2[i+1]+Y2[i];
StringGrid1.RowCount:=i*4+6;
end;

//===== Последняя итерация =====
StringGrid1.Cells[0,n*4+1]:=inttostr(n); // вывод последнего номера шага
Y1[n]:=DY1[n]+Y1[n-1];

```

```

Y2[n]:=DY2[n]+Y2[n-1];
x[n]:=x[0]+h*n;
StringGrid1.RowCount:=n*4+6;
StringGrid1.Cells[1,n*4+1]:=FloatToStrF(X[n],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[4,n*4+1]:=FloatToStrF(Y1[n],ffFixed,6,9);
StringGrid1.Cells[5,n*4+1]:=FloatToStrF(Y2[n],ffFixed,6,9);
end;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
i:=0;
StringGrid1.Cells[0,0]:=' i';
StringGrid1.Cells[1,0]:=' X';
StringGrid1.Cells[2,0]:=' K';
StringGrid1.Cells[3,0]:=' L';
StringGrid1.Cells[4,0]:=' Y1';
StringGrid1.Cells[5,0]:=' Y2';
StringGrid1.Cells[6,0]:=' Dy1';
StringGrid1.Cells[7,0]:=' Dy2';
end; end.

```

Упражнения. Методом Рунге-Кутты проинтегрировать уравнение

3.1. $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0; 0,5]$; шаг $h = 0,1$ (точное решение $y = 2e^x - x - 1$).

3.2. $x^2 y' - xy = 1$ при начальном условии $y(1) = 0$ в промежутке $[1, 2]$; шаг $h = 0,2$ (точное решение $y = (x^2 - 1)/(2x)$).

3.3. $y' = x^2 + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0, 1]$; шаг $h = 0,2$.

3.4. $y' = 2y - 3$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0; 0,5]$; шаг $h = 0,1$.

Методом Рунге-Кутты с шагом $h = 0,2$ найти решение данных уравнений и систем на указанном отрезке $[a, b]$.

3.5. $y' = y - x$, $y(0) = 1,5$, $[0, 1]$.

3.6. $y' = \frac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $[1, 2]$.

3.7. $\begin{cases} y' = z + 1 \\ z' = y - x \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $[0, 1]$.

3.8. Методом Рунге-Кутты проинтегрировать уравнение колебаний маятника в сопротивляющейся среде

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2\frac{d\theta}{dt} + 10\sin\theta = 0,$$

где θ – угол отклонения, t – время. Предполагается, что сопротивление среды пропорционально скорости. Задается начальное отклонение $\theta(0) = 0,3$ и начальная угловая скорость $\theta'(0) = 0$. Шаг по времени $h = \Delta t = 0,1$. Определить угол отклонения θ до момента времени $t = 0,3$ включительно.

Подсказка: Полагая $\theta' = w$, записать исходное уравнение в виде системы ДУ.

$$\begin{cases} \theta' = w, \\ w' = -0,2w - 10\sin\theta. \end{cases}$$

4. Многошаговые методы. Метод Адамса.

Для решения задачи Коши (2.1), (2.2) введем сетку $\omega_h = \{x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots\}$ с постоянным шагом $h > 0$ (построим систему равноотстоящих точек). Обозначим через $y_i = y(x_i)$ $f_i = f(x_i, y_i)$ функции, определенные на сетке ω_h . Линейным m -шаговым разностным методом называется система разностных уравнений

$$\frac{a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + \dots + a_m y_{i-m}}{h} = b_0 f_i + b_1 f_{i-1} + \dots + b_m f_{i-m}, \quad i = m, m+1, \dots, \quad (*)$$

где a_k, b_k – числовые коэффициенты, не зависящие от $i, k = 0, 1, \dots, m$, причем $a_0 \neq 0$.

Уравнение (*) следует рассматривать как рекуррентное соотношение, выражающее новое значение $y_i = y(x_i)$ через найденные ранее значения $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}$. Расчет начинается с $i = m$, т.е. с уравнения

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_m y_0}{h} = b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + \dots + b_m f_0.$$

Для начала расчета необходимо задать m начальных значений y_0, y_1, \dots, y_{m-1} . Значение y_0 определяется исходной задачей (2.1):

$y_0 = y(x_0)$, величины y_1, y_2, \dots, y_{m-1} можно вычислить, например, методом Рунге-Кутты. В дальнейшем будем предполагать, что начальные значения y_0, y_1, \dots, y_{m-1} заданы.

Метод (*) называется **явным**, если $b_0 = 0$, и, следовательно, искомое значение y_i выражается явным образом через предыдущие значения $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}$. В противном случае ($b_0 \neq 0$) метод называется **неявным**. Тогда для нахождения y_n приходится решать нелинейное уравнение

$$\frac{a_0}{h} y_i - b_0 f(x_i, y_i) = F[y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}],$$

где
$$F[y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}] = \sum_{k=1}^m \left(b_k f_{i-k} - \frac{a_k}{h} y_{i-k} \right).$$

Обычно это уравнение решают методом Ньютона, выбирая начальное приближение $y_i^{(0)}$ равным y_{i-1} .

Коэффициенты уравнения (*) определены с точностью до множителя. Чтобы устранить этот произвол, будем считать, что

выполнено условие $\sum_{k=0}^m b_k = 1$, означающее, что правая часть

разностного уравнения (*) аппроксимирует правую часть дифференциального уравнения (2.1).

В практике наибольшее распространение получили методы Адамса, которые представляют собой частный случай многошаговых методов. Получим формулу расчета для случая, когда известны четыре начальных значения искомой функции.

Изложим метод Адамса применительно к уравнению первого порядка

$$y'(x) = f(x, y) \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Пусть $x_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ – система равноотстоящих значений с шагом h и $y_i = y(x_i)$. Очевидно, имеем

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx. \quad (4.1)$$

В силу второй интерполяционной формулы Ньютона с точностью до разностей четвертого порядка получаем

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3}, \quad (4.2)$$

где $q = \frac{x - x_i}{h}$, или

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3}, \quad (4.2')$$

Подставляя выражение (4.2') в формулу (4.1) и учитывая, что $dx = h dq$,

будем иметь

$$\Delta y_i = h \int_0^1 \left(y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3} \right) dq.$$

Отсюда получаем **экстраполяционную формулу Адамса**

$$\Delta y_i = hy'_i + \frac{1}{2} \Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3(hy'_{i-3}). \quad (4.3)$$

Она применяется для «предсказания» значения $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Учитывая, что

$$\Delta(hy'_{i-1}) = hy'_i - hy'_{i-1},$$

$$\Delta^2(hy'_{i-2}) = \Delta(hy'_{i-1}) - \Delta(hy'_{i-2}),$$

$$\Delta^3(hy'_{i-3}) = \Delta^2(hy'_{i-2}) - \Delta^2(hy'_{i-3}),$$

после приведения подобных членов имеем

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}), \quad (4.3')$$

причем $x_{i+1} = x_i + h$.

Для начала процесса нужны четыре начальных значения: y_0, y_1, y_2, y_3 , так называемый начальный отрезок, который определяется, исходя из начального условия (2.2), каким-нибудь

численным методом, например, методом Рунге-Кутты или разложением в ряд Тейлора

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + y'_0(ih) + \frac{y''_0}{2}(ih)^2 + \dots,$$

где $i = 1, 2, 3$ (или $i = -1, 1, 2$ с соответствующим изменением нумерации). Зная эти значения, из уравнения (2.1) можно найти значения производных

$$y'_0 = f_0, \quad y'_1 = f_1, \quad y'_2 = f_2, \quad y'_3 = f_3$$

и составить таблицу разностей:

$$\Delta(hy'_0), \Delta(hy'_1), \Delta(hy'_2), \Delta^2(hy'_0), \Delta^2(hy'_1), \Delta^3(hy'_0). \quad (4.4)$$

Дальнейшие значения y_i ($i = 4, 5, \dots$) искомого решения можно шаг за шагом вычислить по формуле Адамса, пополняя по мере необходимости таблицу разностей (4.4).

Для контроля рекомендуется, вычислив первое приближение для Δy_i по формуле (4.3), обозначить его через Δy_i^I , определить $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i^I$, подсчитать конечные разности

$$\Delta(hy'_i), \Delta^2(hy'_{i-1}), \Delta^3(hy'_{i-2}) \quad (4.5)$$

и затем найти второе, более точное, приближение по **интерполяционной формуле**

$$\Delta y_i^{II} = h y'_i + \frac{1}{2} \Delta(hy'_i) - \frac{1}{12} \Delta^2(hy'_{i-1}) - \frac{1}{24} \Delta^3(hy'_{i-2}) \quad (4.6)$$

или

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}) \quad (4.6')$$

Если Δy_i^I и Δy_i^{II} отличаются лишь на несколько единиц последнего сохраняемого десятичного разряда, то можно положить $\Delta y_i = \Delta y_i^{II}$, а затем найдя $\Delta y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ перевычислить конечные разности (4.5). Шаг h должен быть таким, чтобы вторичный пересчет по формуле (4.6) был излишним.

Замечание. На практике шаг h выбирают столь малым, чтобы можно было пренебречь последним членом в формуле (4.6)

$\left(\frac{1}{24}\Delta^3(hy'_{i-2})\right)$. Если расхождение величин Δy_i^I и Δy_i^{II} значительно, то следует уменьшить шаг h . Обычно шаг уменьшают в два раза.

Формулы (4.3), (4.6) имеют достаточно большую точность. Они дают погрешность порядка $O(h^4)$.

Метод Адамса легко распространяется и на системы ДУ, а также на ДУ n -го порядка.

Рассмотрим, для примера, систему 2-х уравнений

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Экстраполяционные формулы в этом случае записываются так:

$$\begin{cases} \Delta y_i = hy'_i + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{i-3}), \\ \Delta z_i = hz'_i + \frac{1}{2}\Delta(hz'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hz'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hz'_{i-3}), \end{cases} \quad (4.7)$$

где $hy'_i = hf_1(x_i, y_i, z_i)$, $hz'_i = hf_2(x_i, y_i, z_i)$.

Аналогично записываются интерполяционные формулы Адамса для системы.

$$\begin{cases} \Delta y_i^{II} = hy'_i + \frac{1}{2}\Delta(hy'_i) - \frac{1}{12}\Delta^2(hy'_{i-1}) - \frac{1}{24}\Delta^3(hy'_{i-2}), \\ \Delta z_i^{II} = hz'_i + \frac{1}{2}\Delta(hz'_i) - \frac{1}{12}\Delta^2(hz'_{i-1}) - \frac{1}{24}\Delta^3(hz'_{i-2}). \end{cases} \quad (4.8)$$

Схема метода Адамса (с использованием (4.3) (4.4)).

Напомним обозначения

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где Δy_i считается по (4.3) или (4.4),

$$y'_i = f_i, \quad \Delta(hy'_i) = hy'_{i+1} - hy'_i, \quad \Delta^2(hy'_i) = \Delta(hy'_{i+1}) - \Delta(hy'_i), \\ \Delta^3(hy'_i) = \Delta^2(hy'_{i+1}) - \Delta^2(hy'_i).$$

1. Записываем в таблицу числа x_i, y_i, y'_i, hy'_i ($i = 0, 1, 2, 3$) и вычисляем разности $\Delta(hy'_i)$ ($i = 0, 1, 2$), $\Delta^2(hy'_i)$ ($i = 0, 1$), $\Delta^3(hy'_0)$.

2. Используя числа $hy'_3, \Delta(hy'_2), \Delta^2(hy'_1), \Delta^3(hy'_0)$, помещенные в таблице по диагонали, определяем по формуле (4.3) при $i = 3$ Δy_3

$$\Delta y_3 = hy'_3 + \frac{1}{2} \Delta(hy'_2) + \frac{5}{12} \Delta^2(hy'_1) + \frac{3}{8} \Delta^3(hy'_0).$$

3. Вычисляем $x_4 = x_3 + h$, $y_4 = y_3 + \Delta y_3$.

4. Записываем значения в таблицу x_4, y_4 , находим $y'_4 = f_4$, hy'_4 и пополняем таблицу разностей значениями $\Delta(hy'_3)$, $\Delta^2(hy'_2)$, $\Delta^3(hy'_1)$.

5. Используя полученные значения разностей, уточняем величину Δy_3 по формуле (4.6) при $i = 3$

$$\Delta y_3^{II} = hy'_3 + \frac{1}{2} \Delta(hy'_3) - \frac{1}{12} \Delta^2(hy'_2) - \frac{1}{24} \Delta^3(hy'_1).$$

6. Если скорректированное значение Δy_3 отличается от предсказанного Δy_3 по формуле (4.3) на несколько единиц младшего сохраняемого разряда, то вносим соответствующие поправки в значения Δy_3 и y_4 , проверяем, что эти поправки не скажутся существенно на значениях hy'_4 , и продолжаем расчет. В противном случае выбираем меньший шаг. Вычисления для $i = 4, 5, \dots$ проводятся аналогично.

Таблица

i	x_i	y_i	Δy_i	y'_i	hy'_i	$\Delta(hy'_i)$	$\Delta^2(hy'_i)$	$\Delta^3(hy'_i)$
0	x_0	[1;2]	Δy_0 Δy_1 $y = x^2 + x + 1$ Δy_3 Δy_4 Δy_5	f_0	hy'_0	$\Delta(hy'_0)$ $\Delta(hy'_1)$ $\Delta(hy'_2)$ $\Delta(hy'_3)$ $\Delta(hy'_4)$	$\Delta^2(hy'_0)$ $\Delta^2(hy'_1)$ $\Delta^2(hy'_2)$ $\Delta^2(hy'_3)$	$\Delta^3(hy'_0)$ $\Delta^3(hy'_1)$ $\Delta^3(hy'_2)$
1	x_1	y_1		f_1	hy'_1			
2	x_2	y_2		f_2	hy'_2			
3	x_3	y_3		f_3	hy'_3			
4	x_4	y_4		f_4	hy'_4			
5	x_5	y_5		f_5	hy'_5			
6	x_6	y_6						

Пример 4.1. Методом Адамса найти на отрезке $[0;0,5]$ с точностью до 10^{-5} решение ОДУ $y' = 0,25y^2 + x^2$ с начальным условием $y(0) = -1$.

Решение. В примере 3.1. методами Рунге-Кутты с шагом $h=0,1$ были получены значения искомой функции при $x_1=0,1$, $x_2=0,2$, $x_3=0,3$. Дальнейшие вычисления ведем в программе *Excel* по формуле (4.3) с уточнением по формуле (4.6).

Для первых четырех значений $x_i, i=\overline{0,3}$ записываем во втором столбце таблицы значения $y_i, i=\overline{0,3}$ из примера 3.1, далее заполняем таблицу согласно схеме Адамса. Учитывая, что

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad y'_i = f_i, \quad \Delta(hy'_i) = hy'_{i+1} - hy'_i = h(f_{i+1} - f_i)$$

$$\Delta^2(hy'_i) = \Delta(hy'_{i+1}) - \Delta(hy'_i), \quad \Delta^3(hy'_i) = \Delta^2(hy'_{i+1}) - \Delta^2(hy'_i).$$

При вычислении Δy_3 по формуле (4.3) (в таблице используемые значения выделенные серым фоном с 6 по 9 столбец) получаем

$$\begin{aligned} \Delta y_3 &= hy'_3 + \frac{1}{2}\Delta(hy'_2) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_1) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_0) = \\ &= 0,03023 + \frac{1}{2} \cdot 0,00368 + \frac{5}{12} \cdot 0,00191 + \frac{3}{8}(-0,00009) = 0,03283, \end{aligned}$$

$$y(0,4) = y_4 = y_3 + \Delta y_3 = -0,92154 + 0,03283 = -0,88871.$$

i	x_i	y_i	Δy_i по (4.3)	y'_i	hy'_i	$\Delta(hy'_i)$	$\Delta^2(hy'_i)$	$\Delta^3(hy'_i)$
0	0	-1,00000		0,25000	0,02500	-0,00022	0,00199	-0,00009
1	0,1	-0,97528		0,24779	0,02478	0,00177	0,00191	-0,00007
2	0,2	-0,94978		0,26552	0,02655	0,00368	0,00184	
3	0,3	-0,92154	0,03283	0,30231	0,03023	0,00551		
4	0,4	-0,88871	0,03924	0,35745	0,03575			

Уточним полученное значение Δy_3 по формуле (4.6) (в таблице в столбцах с 7 по 9 темно-серым фоном выделены значения участвующие в вычислениях Δy_3^{II} , в 6 столбце используется прежнее светло-серое значение).

$$\begin{aligned} \Delta y_3^{II} &= hy'_3 + \frac{1}{2}\Delta(hy'_3) - \frac{1}{12}\Delta^2(hy'_2) - \frac{1}{24}\Delta^3(hy'_1) = \\ &= 0,03023 + \frac{1}{2} \cdot 0,00551 - \frac{1}{12} \cdot 0,001184 - \frac{1}{24} \cdot (-0,00007) = 0,03289. \end{aligned}$$

i	x_i	y_i	Δy_i	y'_i	hy'_i	$\Delta(hy'_i)$	$\Delta^2(hy'_i)$	$\Delta^3(hy'_i)$
0	0	-1,00000		0,25000	0,02500	-0,00022	0,00199	-0,00009
1	0,1	-0,97528		0,24779	0,02478	0,00177	0,00191	-0,00007
2	0,2	-0,94978		0,26552	0,02655	0,00368	0,00183	-0,00005
3	0,3	-0,92154	$\Delta y_3^{II} = 0,03289$	0,30231	0,03023	0,00551	0,00178	
4	0,4	-0,88865	$\Delta y_4 = 0,03923$	0,35742	0,03574	0,00730		
5	0,5	-0,84942		0,43038	0,04304			

$$y(0,4) = y_4 = y_3 + \Delta y_3^{II} = -0,92154 + 0,03289 = -0,88865$$

Скорректированное значение Δy_3^{II} отличается от предсказанного Δy_3 по формуле (4.3) на шесть единиц пятого сохраняемого разряда, вносим соответствующие поправки в значения Δy_3 и y_4 , полученное значение $hy'_4 = 0,03574$, отличается от полученного ранее на 1 единицу пятого разряда, что не существенно, т.е. можно продолжать расчет с прежним шагом.

Получим Δy_4 по формуле (4.3): $\Delta y_4 = 0,03923$. Уточним полученное значение Δy_4 по формуле (4.6)

$$\begin{aligned} \Delta y_4^{II} &= hy'_4 + \frac{1}{2} \Delta(hy'_4) - \frac{1}{12} \Delta^2(hy'_3) - \frac{1}{24} \Delta^3(hy'_2) = \\ &= 0,03574 + \frac{1}{2} \cdot 0,00730 - \frac{1}{12} \cdot 0,00178 - \frac{1}{24} \cdot (-0,00005) = 0,03924, \end{aligned}$$

$$y(0,5) = y_5 = y_4 + \Delta y_4^{II} = -0,88865 + 0,03924 = -0,84941.$$

Итак, ответ: $y(0,4) = -0,88865$; $y(0,5) = -0,84941$.

Пример 4.2. Уравнение колебаний маятника имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0,$$

где θ – угол отклонения, t – время. Задаются начальное отклонение $\theta(0) = 0,3$ и начальная угловая скорость $\theta'(0) = 0$. Шаг по времени $h = \Delta t = 0,1$.

Методом Адамса найти решение на отрезке времени от $t = 0,4$ до момента времени, соответствующему первому прохождению положения равновесия $\theta = 0$. Решение проводилось в программе *Excel*. Следует отметить, что поскольку метод Адамса имеет четвертый

порядок точности, то вычисления следует вести, сохраняя 5-6 знаков после запятой (первые четыре цифры верные, оставшиеся – сомнительные берутся “с запасом”), но в целях экономии места, в таблице представлены значения только с тремя знаками.

Решение. Полагая $\theta' = w$, запишем исходное уравнение в виде системы ДУ.

$$\begin{cases} \theta' = w \\ w' = -0,2w - 10\sin\theta \end{cases}$$

Из начальных условий и решения, полученного методом Рунге-Кутты имеем первые четыре начальных значения

$$\begin{aligned} t_0 = 0; \quad \theta_0 = 0,300; \quad w_0 = 0; \\ t_1 = 0,1; \quad \theta_1 = 0,300; \quad w_1 = -0,289; \\ t_2 = 0,2; \quad \theta_2 = 0,243; \quad w_2 = -0,544; \\ t_3 = 0,3; \quad \theta_3 = 0,179; \quad w_3 = -0,742. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления ведем в программе *Excel* по формуле (4.7) с уточнением по формуле (4.8).

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + \Delta\theta_i, \quad \theta'_i = \omega_i, \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \Delta\omega_i, \quad \omega'_i = -0,2\omega_i - 10\sin\theta_i, \\ \Delta(h\theta'_i) &= h\theta'_{i+1} - h\theta'_i = h(\omega_{i+1} - \omega_i), \\ \Delta(h\omega'_i) &= h\omega'_{i+1} - h\omega'_i = h(-0,2(\omega_{i+1} - \omega_i) - 10(\sin\theta_{i+1} - \sin\theta_i)), \end{aligned}$$

$$\Delta^2(h\theta'_i) = \Delta(h\theta'_{i+1}) - \Delta(h\theta'_i), \quad \Delta^3(h\theta'_i) = \Delta^2(h\theta'_{i+1}) - \Delta^2(h\theta'_i),$$

$$\Delta^2(h\omega'_i) = \Delta(h\omega'_{i+1}) - \Delta(h\omega'_i), \quad \Delta^3(h\omega'_i) = \Delta^2(h\omega'_{i+1}) - \Delta^2(h\omega'_i).$$

Здесь в таблице более темным цветом отмечены значения, участвующие в вычислениях угла отклонения θ , более светлым цветом – значения, участвующие в вычислениях угловой скорости ω по формулам (4.7).

$$\begin{cases} \Delta\theta_3 = h\theta'_3 + \frac{1}{2}\Delta(h\theta'_2) + \frac{5}{12}\Delta^2(h\theta'_1) + \frac{3}{8}\Delta^3(h\theta'_0), \\ \Delta\omega_3 = h\omega'_3 + \frac{1}{2}\Delta(h\omega'_2) + \frac{5}{12}\Delta^2(h\omega'_1) + \frac{3}{8}\Delta^3(h\omega'_0). \end{cases}$$

i	t_i	θ_i	ω_i	$\Delta\theta_i$	$\Delta\omega_i$	$h\theta'_i$	$h\omega'_i$	$\Delta(h\theta'_i)$	$\Delta^2(h\theta'_i)$	$\Delta^3(h\theta'_i)$	$\Delta(h\omega'_i)$	$\Delta^2(h\omega'_i)$	$\Delta^3(h\omega'_i)$
0	0	0,300	0,000			0,000	-0,296	-0,029	0,003	0,002	0,020	0,025	-0,007
1	0,1	0,285	-0,289			-0,029	-0,275	-0,026	0,006	0,001	0,046	0,019	-0,001
2	0,2	0,243	-0,544			-0,054	-0,230	-0,020	0,007		0,065	0,018	
3	0,3	0,181	-0,742	-0,081	-0,127	-0,074	-0,165	-0,013			0,083		
4	0,4	0,100	-0,869			-0,087	-0,083						

По формуле (4.8) получим

$$\begin{aligned} \Delta\theta_3^{II} &= h\theta'_3 + \frac{1}{2}\Delta(h\theta'_3) - \frac{1}{12}\Delta^2(h\theta'_2) - \frac{1}{24}\Delta^3(h\theta'_1) = \\ &= -0,074 - \frac{1}{2} \cdot 0,013 - \frac{1}{12} \cdot 0,007 - \frac{1}{24} \cdot 0,001 = -0,082. \end{aligned}$$

Скорректированное значение на 0,001 отличается от предсказанного, пересчитываем

$$\theta_4 = \theta_3 + \Delta\theta_3^{II} = 0,181 - 0,082 = 0,099$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega_3^{II} &= h\omega'_3 + \frac{1}{2}\Delta(h\omega'_3) - \frac{1}{12}\Delta^2(h\omega'_2) - \frac{1}{24}\Delta^3(h\omega'_1) = \\ &= -0,165 + \frac{1}{2} \cdot 0,083 - \frac{1}{12} \cdot 0,018 + \frac{1}{24} \cdot 0,001 = -0,125 \end{aligned}$$

$$\omega_4 = \omega_3 + \Delta\omega_3^{II} = -0,742 - 0,125 = -0,867$$

Записываем скорректированные значения в таблицу (таблица в Excel слегка изменилась) и продолжаем вычисления $\Delta\theta_4$, $\Delta\omega_4$ по формулам (4.7) с прежним шагом, т.к. расхождения между предсказанными и скорректированными значениями на 1-2 единицы в последнем сохраняемом разряде незначительны.

i	t_i	θ_i	ω_i	$\Delta\theta_i$	$\Delta\omega_i$	$h\theta'_i$	$h\omega'_i$	$\Delta(h\theta'_i)$	$\Delta^2(h\theta'_i)$	$\Delta^3(h\theta'_i)$	$\Delta(h\omega'_i)$	$\Delta^2(h\omega'_i)$	$\Delta^3(h\omega'_i)$
0	0	0,300	0,000			0,000	-0,296	-0,029	0,003	0,002	0,020	0,025	-0,007
1	0,1	0,285	-0,289			-0,029	-0,275	-0,026	0,006	0,002	0,046	0,019	0,000
2	0,2	0,243	-0,544			-0,054	-0,230	-0,020	0,007	0,002	0,065	0,019	-0,013
3	0,3	0,181	-0,742	-0,082	-0,125	-0,074	-0,165	-0,013	0,009		0,084	0,006	
4	0,4	0,099	-0,867	-0,089	-0,032	-0,087	-0,081	-0,003			0,090		
5	0,5	0,010	-0,899			-0,090	0,008						

Если подсчитать скорректированные значения по формулам (4.8) на 4 шаге, получим

$$\begin{aligned}\Delta\theta_4^{II} &= h\theta_4' + \frac{1}{2}\Delta(h\theta_4') - \frac{1}{12}\Delta^2(h\theta_3') - \frac{1}{24}\Delta^3(h\theta_2') = \\ &= -0,087 - \frac{1}{2} \cdot 0,003 - \frac{1}{12} \cdot 0,009 - \frac{1}{24} \cdot 0,002 = -0,089.\end{aligned}$$

Т.е. $\Delta\theta_4 = \Delta\theta_4^{II}$ оставляем в таблице без изменений.

$$\begin{aligned}\Delta\omega_4^{II} &= h\omega_4' + \frac{1}{2}\Delta(h\omega_4') - \frac{1}{12}\Delta^2(h\omega_3') - \frac{1}{24}\Delta^3(h\omega_2') = \\ &= -0,081 + \frac{1}{2} \cdot 0,090 - \frac{1}{12} \cdot 0,006 + \frac{1}{24} \cdot 0,013 = -0,037.\end{aligned}$$

$$\omega_5 = \omega_4 + \omega_4^{II} = -0,867 - 0,037 = -0,904.$$

Т.к. $\Delta\omega_3 = -0,032$, а $\Delta\omega_4^{II} = -0,037$, подставляем в таблицу $\Delta\omega_4^{II} = -0,037$, $\omega_5 = -0,904$. Продолжаем заполнять таблицу, рассчитывая $\Delta\theta_5$, $\Delta\omega_5$ по формулам (4.7)

i	t_i	θ_i	ω_i	$\Delta\theta_i$	$\Delta\omega_i$	$h\theta_i'$	$h\omega_i'$	$\Delta(h\theta_i')$	$\Delta^2(h\theta_i')$	$\Delta^3(h\theta_i')$	$\Delta(h\omega_i')$	$\Delta^2(h\omega_i')$	$\Delta^3(h\omega_i')$
0	0	0,300	0,000			0,000	-0,296	-0,029	0,003	0,002	0,020	0,025	-0,007
1	0,1	0,285	-0,289			-0,029	-0,275	-0,026	0,006	0,002	0,046	0,019	0,000
2	0,2	0,243	-0,544			-0,054	-0,230	-0,020	0,007	0,001	0,065	0,019	-0,013
3	0,3	0,181	-0,742	-0,082	-0,125	-0,074	-0,165	-0,013	0,009	0,000	0,084	0,006	-0,009
4	0,4	0,099	-0,867	-0,089	-0,037	-0,087	-0,081	-0,004	0,009		0,090	-0,003	
5	0,5	0,010	-0,904	-0,088	0,051	-0,090	0,008	0,005			0,087		
6	0,6	-0,078	-0,853			-0,085	0,095						

Пересчитаем по формулам (4.8)

$$\begin{aligned}\Delta\theta_5^{II} &= h\theta_5' + \frac{1}{2}\Delta(h\theta_5') - \frac{1}{12}\Delta^2(h\theta_4') - \frac{1}{24}\Delta^3(h\theta_3') = \\ &= -0,090 + \frac{1}{2} \cdot 0,005 - \frac{1}{12} \cdot 0,009 - \frac{1}{24} \cdot 0,000 = -0,089.\end{aligned}$$

Т.е. $\Delta\theta_5 = \Delta\theta_5^{II}$ и полученное значение $\theta_6 = \theta_5 + \Delta\theta_5$ оставляем в таблице без изменений.

$$\begin{aligned} \Delta\omega_5^{II} &= h\omega_5' + \frac{1}{2}\Delta(h\omega_5') - \frac{1}{12}\Delta^2(h\omega_5') - \frac{1}{24}\Delta^3(h\omega_5') = \\ &= -0,008 + \frac{1}{2} \cdot 0,087 + \frac{1}{12} \cdot 0,003 + \frac{1}{24} \cdot 0,009 = 0,053. \end{aligned}$$

Тогда $\omega_6 = \omega_5 + \Delta\omega_5 = -0,904 + 0,053 = -0,851$, именно это значение угловой скорости и считается решением в момент времени $t = 0,6$ и заносилось бы в таблицу, если бы вычисления продолжались. Но из таблицы видно, что положение равновесия $\theta = 0$ маятник проходит в момент времени, удовлетворяющий неравенству $0,5 < t < 0,6$. Т.е. решение задачи получено.

Упражнения. Методом Адамса решить задачу Коши с точностью до 10^{-2} , необходимые начальные значения получить методом Рунге-Кутты

4.1. $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0; 0,5]$; шаг $h = 0,1$ (см. упражнение 3.1.). Сравнить результат с точным решением $y = 2e^x - x - 1$.

4.2. $x^2y' - xy = 1$ при начальном условии $y(1) = 0$ в промежутке $[1, 2]$; шаг $h = 0,2$ (см. упражнение 3.2.). Сравнить результат с точным решением $y = (x^2 - 1)/(2x)$.

4.3. $y' = x^2 + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ найти в промежутке $[0, 1]$; шаг $h = 0,2$ (см. упражнение 3.3.).

4.4. $y' = 2y - 3$ при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке $[0; 0,5]$; шаг $h = 0,1$ (см. упражнение 3.4.).

Методом Адамса с шагом $h = 0,2$ найти решение данных уравнений и систем на указанном отрезке $[a, b]$ с точностью 10^{-3} , необходимые начальные значения получить методом Рунге-Кутты

4.5. $y' = y - x$, $y(0) = 1,5$, $[0, 1]$ (см. упражнение 3.5.).

4.6. $y' = \frac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $[1, 2]$ (см. упражнение 3.6.).

4.7. $\begin{cases} y' = z + 1 \\ z' = y - x \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $[0, 1]$ (см. упражнение 3.7.).

4.8. Составить программу решения методом Адамса следующей задачи $y' = x^2 + y^2$ при начальном условии $y(0) = -1$ найти в промежутке $[0, 1]$; шаг $h = 0,1$.

Решение. Найдем первые 4 члена разложения данного уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} y'''(0) \cdot x^3 + \dots$$

$$y' = x^2 + y^2; \quad y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1; \quad y'' = 2x + 2y y'; \quad y''(0) = 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2;$$

Получили $y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3}x^3$. Тогда первые четыре значения:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = y(0) = -1; \quad x_1 = 0,1; \quad y_1 = y(0,1) = -0,909;$$

$$x_2 = 0,2; \quad y_2 = y(0,2) = -0,829; \quad x_3 = 0,3; \quad y_3 = y(0,3) = -0,754.$$

Программа решения четырехшаговым методом Адамса упражнения 4.8 (с комментариями курсивом)

(Шаг $h = 0,1$ согласно замечанию выбран таким, чтобы его не потребовалось уменьшать в ходе решения данной задачи, поэтому, чтобы не загромождать программу, процесс уменьшения шага пропущен).

The screenshot shows a software interface for solving a differential equation using the Adams method. The title bar reads "Метод Адамса".

Input fields include:

- Задача Коши: $y' = x^2 + y^2$
- Проверка условия: $|\text{del } y| - \text{del } y| \leq 0,001$
- Начальное условие: $y|_0 = -1$
- Первые 4 члена разложения данного уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 : $y(x) = -1 + x - x^2 + 4/3 \cdot x^3$
- Отрезок: $[0, 1]$
- Количество разбиений: 10
- Шаг: 0,1

A "Заполнить" button is next to the Taylor series input, and a "Решить" button is at the bottom right.

x_i	y_i	$\text{del } y_i$	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\text{tet}^* y'_i$	$\text{del}(\text{tet}^* y'_i)$	$\text{del}^2(\text{tet}^* y'_i)$	$\text{del}^3(\text{tet}^* y'_i)$
0	-1		1	0,1	-0,0164325	0,0056444	-0,0017841
0,1	-0,908667		0,835675	0,0835675	-0,0107881	0,0038603	0,0007789
0,2	-0,829333		0,727794	0,0727794	-0,0069278	0,0046392	-0,0018492
0,3	-0,754	0,0643407	0,658516	0,0658516	-0,0022886	0,00279	3,01E-5
0,4	-0,689659	0,0646438	0,63563	0,063563	0,0005014	0,0028201	-0,0005177
0,5	-0,625015	0,0647841	0,640644	0,0640644	0,0033215	0,0023024	0,0001548
0,6	-0,560231	0,070233	0,673859	0,0673859	0,0056239	0,0024572	7,66E-5
0,7	-0,489998	0,0765869	0,730098	0,0730098	0,0080811	0,0025338	0,0003945
0,8	-0,413411	0,0862133	0,810909	0,0810909	0,0106149	0,0029283	
0,9	-0,327198	0,0980977	0,917058	0,0917058	0,0135432		
1	-0,2291		1,05249	0,105249			

```
unit Unit1;
interface
uses
```

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,

```

Dialogs, StdCtrls, Grids;
type
  TForm1 = class(TForm)
    StringGrid1: TStringGrid;
    Button1: TButton;
    Edit1: TEdit; //
    Label1: TLabel; //
    Edit2: TEdit; //
    Label2: TLabel; //
    Edit3: TEdit; //
    Label3: TLabel; //
    Label4: TLabel; //
    Label5: TLabel; //
    Edit4: TEdit; //
    Label6: TLabel; // определение
    Edit5: TEdit; // типов
    Label7: TLabel; //
    Edit6: TEdit; //
    Edit7: TEdit; //
    Label8: TLabel; //
    Label9: TLabel; //
    Label10: TLabel; //
    Label11: TLabel; //
    Edit8: TEdit; //
    Button2: TButton; //
    procedure Button2Click(Sender: TObject); //
    procedure FormCreate(Sender: TObject); //
    procedure Button1Click(Sender: TObject); //
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;
var
  Form1: TForm1;
implementation
{$R *.dfm}
var x0,y0,x,y,dy,a,b,E,tet,k:real; // определение
    n,i:integer; // переменных
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject); // процедура создания формы
begin
  Edit1.Text:='y'=x^2+y^2'; // исходное диф.уравнение
  Edit3.Text:='y(x)=-1+x-x^2+4/3*x^3'; // ряд Тейлора для исходного уравнения
  StringGrid1.Cells[0,0]:='xi'; //
  StringGrid1.Cells[1,0]:='yi'; //

```

```

StringGrid1.Cells[2,0]:='del yi';           // названия
StringGrid1.Cells[3,0]:='y'+i=f(xi,yi);    // заголовков
StringGrid1.Cells[4,0]:='tet*y'+i';       // таблицы
StringGrid1.Cells[5,0]:='del(tet*y'+i)';   // результатов
StringGrid1.Cells[6,0]:='del^2(tet*y'+i)'; //
StringGrid1.Cells[7,0]:='del^3(tet*y'+i)'; //
end;
function v(m,n:integer):real;             // определение функции
begin
v:=StrToFloat(Form1.StringGrid1.Cells[m,n]);
end;
procedure w(m,n:integer; c:real);        // процедура записи в таблицу
begin
Form1.StringGrid1.Cells[m,n] :=FloatToStrF(c,FFixed,4,5); // запись найденного
                                                                    // значения в таблицу
end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject); // процедура нажатия
                                                                    // кнопки «Заполнить»
begin
n:=strtoint(Edit9.text);                 // начальные
a:=strtofloat(Edit6.text);                // данные
b:=strtofloat(Edit7.text);                // задачи
E:=strtofloat(Edit4.text);                //
x0:=strtofloat(Edit2.text);                //
y0:=strtofloat(Edit8.text);                //
tet:=abs(b-a)/n;                           // подсчет шага по количеству разбиений n
Edit5.Text:=FloatToStr(tet);
StringGrid1.RowCount:=n+2; // последняя строка в таблице результатов
for i:= 0 to n do begin
x:=a+tet*i;                               // расчет всех  $x_i$ 
w(0,i+1,x);                               // запись в таблицу результатов всех  $x_i$ 
if (i<=3) then begin
y:=-1+x-x*x+4/3*x*x*x;                    // ряд Тейлора для исходного уравнения
w(1,i+1,y);                               // запись в таблицу всех  $y_i$ ,  $i = 0,3$ 
y:=x*x+y*y;                               // исходное уравнение
w(3,i+1,y);                               // запись в таблицу всех  $y'_i = f(x_i, y_i)$ ,  $i = 0,3$ 
k:=tet*y;                                 // расчет  $\tau y'_i$ ,  $i = 0,3$ 
w(4,i+1,k);                               // запись в таблицу  $\tau y'_i$ 
end; end;
for i:=1 to 3 do begin
k:=v(4,i+1)-v(4,i);                       // расчет всех  $\Delta(\tau y'_i) = \tau y'_{i+1} - \tau y'_i$ ,  $i = 0,2$ 
w(5,i,k);                                 // запись в таблицу  $\Delta(\tau y'_i)$ 
end;
end;

```

```

for i:=1 to 2 do begin
k:=v(5,i+1)-v(5,i);    // расчет всех  $\Delta^2(\tau y'_i) = \Delta(\tau y'_{i+1}) - \Delta(\tau y'_i)$ ,  $i = 0,1$ 
w(6,i,k);              // запись в таблицу  $\Delta^2(\tau y'_i)$ 
end;
k:=v(6,2)-v(6,1);    // расчет  $\Delta^3(\tau y'_i) = \Delta^2(\tau y'_{i+1}) - \Delta^2(\tau y'_i)$ ,  $i = 0$ 
w(7,1,k);            // запись в таблицу  $x_i, y_i, y'_i, \tau y'_i, \Delta(\tau y'_i), \Delta^2(\tau y'_i), \Delta^3(\tau y'_i)$ 
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); // процедура нажатия кнопки
// «Решить»

begin
for i:= 4 to n-1 do begin // Цикл решения
dy:=v(4,i)+1/2*v(5,i-1)+5/12*v(6,i-2)+3/8*v(7,i-3); // расчет  $\Delta y_i$ 
w(2,i,dy);          // запись в таблицу  $\Delta y_i$ 
y:=v(1,i)+dy;      // расчет  $y_i$ 
w(1,i+1,y);        // запись в таблицу  $y_i$ 
y:=sqr(v(0,i+1))+y*y; // расчет  $y'_i = f(x_i, y_i)$ 
w(3,i+1,y);        // запись в таблицу  $y'_i$ 
k:=tet*y;          // расчет  $\tau y'_i$ 
w(4,i+1,k);        // запись в таблицу  $\tau y'_i$ 
k:=v(4,i+1)-v(4,i); // расчет  $\Delta(\tau y'_i)$ 
w(5,i,k);          // запись в таблицу  $\Delta(\tau y'_i)$ 
k:=v(5,i)-v(5,i-1); // расчет  $\Delta^2(\tau y'_i)$ 
w(6,i-1,k);        // запись в таблицу  $\Delta^2(\tau y'_i)$ 
k:=v(6,i-1)-v(6,i-2); // расчет  $\Delta^3(\tau y'_i)$ 
w(7,i-2,k);        // запись в таблицу  $\Delta^3(\tau y'_i)$ 
dy:=v(4,i)+1/2*v(5,i)-1/12*v(6,i-1)-1/24*v(7,i-2); // расчет  $\Delta y_i''$ 
if (abs(dy-v(2,i))>=E) then begin // проверка условия  $|\Delta y_i' - \Delta y_i''| \leq \varepsilon$ 
w(2,i,dy);          // запись в таблицу  $\Delta y_i$ 
y:=v(1,i)+dy;      // расчет  $y_i$ 
w(1,i+1,y);        // запись в таблицу  $y_i$ 
y:=sqr(v(0,i+1))+y*y; // расчет всех  $y'_i = f(x_i, y_i)$ 
w(3,i+1,y);        // запись в таблицу всех  $y'_i = f(x_i, y_i)$ 
k:=tet*y;          // расчет всех  $\tau y'_i$ 
w(4,i+1,k);        // запись в таблицу всех  $\tau y'_i$ 
k:=v(4,i+1)-v(4,i); // расчет всех  $\Delta(\tau y'_i)$ 
w(5,i,k);          // запись в таблицу  $\Delta(\tau y'_i)$ 
k:=v(5,i)-v(5,i-1); // расчет всех  $\Delta^2(\tau y'_i)$ 
w(6,i-1,k);        // запись в таблицу  $\Delta^2(\tau y'_i)$ 
k:=v(6,i-1)-v(6,i-2); // расчет  $\Delta^3(\tau y'_i)$ 

```

w(7,i-2,k);
end; end; end; end.

// запись в таблицу $\Delta^3(\tau y'_i)$

5. Краевые задачи для ОДУ.

Принципиальным отличием краевой задачи от задачи Коши для ОДУ является задание дополнительных (краевых или граничных) условий более чем в одной точке независимой переменной (в задаче Коши дополнительные условия задаются в одной точке, называемой начальной)

Общая постановка краевой задачи.

Рассмотрим ОДУ n -го порядка ($n \geq 2$)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (5.1)$$

Краевая задача (5.1) заключается в следующем: найти решение $y = y(x)$ уравнения (5.1), для которого значения его производных

$$y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i) \quad (s = 0, 1, \dots, \sigma_i)$$

в заданной системе точек $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k; k \geq 2$) удовлетворяют n независимым между собой *краевым (граничным) условиям (ГУ)*, в общем случае *нелинейным*:

$$V_\nu \left(y_1, y_1', \dots, y_1^{(\sigma_{1\nu})}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(\sigma_{k\nu})} \right) = 0 \quad (5.2)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n), \text{ где } \sigma_i = \max_{\nu} \sigma_{i\nu}$$

Т.к. в силу уравнения (5.1) производные $y^{(s)}$ порядка n и выше могут быть в общем случае выражены через искомую функцию y и ее младшие производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то можно считать, что

$$\sigma_{i\nu} \leq n - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k; \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (5.3)$$

Частный случай: двухточечная краевая задача.

Найти функцию $y = y(x)$, которая внутри отрезка $[a, b]$ удовлетворяет уравнению (5.4)

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (5.4)$$

а на концах отрезка – краевым условиям

$$\begin{aligned}\varphi_1[y(a), y'(a)] &= 0 \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] &= 0\end{aligned}\tag{5.5}$$

Пример 5.1. Простейшая двухточечная краевая задача

$$y'' = f(x, y, y').\tag{5.6}$$

$$\text{ГУ: } y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$ ДУ (5.6), проходящую через данные точки $M(a, A)$, $N(b, B)$ (рис.5.1.).

Пример 5.2.

$$y'' = f(x, y, y').\tag{5.6}$$

$$\text{ГУ: } y'(a) = A_1, \quad y'(b) = B_1.$$

Геометрически это сводится к отысканию интегральной кривой $y = y(x)$ ДУ (5.6), пересекающей прямые $x = a$, $x = b$ под заданными соответственно углами α , β таким, что $\text{tg } \alpha = A_1$, $\text{tg } \beta = B_1$ (рис. 5.2).

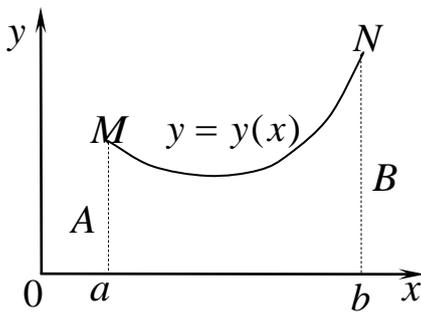


Рис. 5.1. Геометрическая иллюстрация примера 5.1

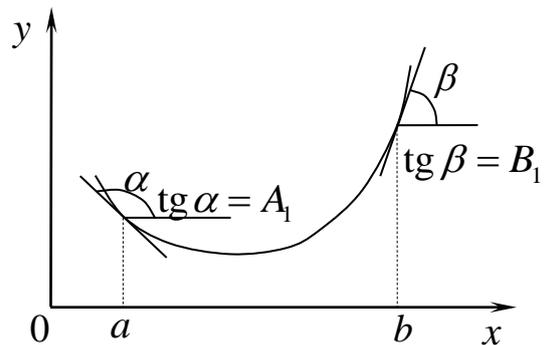


Рис. 5.2. Геометрическая иллюстрация примера 5.2

Замечание: *Общая краевая задача (5.1), (5.2) может не иметь решений, иметь единственное решение, иметь несколько или бесконечно много решений.*

Например, краевая задача

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

имеет бесконечно много решений вида $y = c \sin x$, где c – произвольная постоянная.

Краевая задача

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 1$$

при $0 < b < \pi$ имеет единственное решение вида $y = \frac{\sin x}{\sin b}$, а при $b = \pi$ совсем не имеет решений.

В дальнейшем будем предполагать, что решение существует и оно единственно. Цель – отыскать это решение.

Линейная краевая задача.

Рассмотрим случай, когда уравнение (5.1) и граничные условия (5.2) линейны. Такая краевая задача называется *линейной*. Линейное ДУ n -го порядка ($n \geq 2$) имеет вид:

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (5.7)$$

где $p_i(x)$ ($i=0,1,\dots,n$), $f(x)$ – известные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Для простоты будем предполагать, что в краевые условия входят две абсциссы $x_1 = a$ и $x_2 = b$ ($a < b$) – концы отрезка $[a,b]$. Такие краевые условия называются *двухточечными*. Краевые условия называются линейными, если они линейно независимы и имеют вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\alpha_k^{(\nu)} y^{(k)}(a) + \beta_k^{(\nu)} y^{(k)}(b) \right] = \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (5.8)$$

где $\alpha_k^{(\nu)}$, $\beta_k^{(\nu)}$, γ_ν – заданные постоянные, причем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left| \alpha_k^{(\nu)} \right| + \left| \beta_k^{(\nu)} \right| \right] \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Линейная краевая задача называется *однородной*, если $f(x) \equiv 0$, $a \leq x \leq b$, $\gamma_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), т.е. ДУ однородно и имеют место однородные ГУ. В противном случае краевая задача называется *неоднородной*.

Пример 5.3.

Рассмотрим задачу об изгибе горизонтальной балки длиной l , лежащей на двух опорах $x=0$ и $x=l$, под действием распределенной поперечной нагрузки с линейной плотностью $q = q(x)$ (рис. 5.3).

Из курса сопротивления материалов известно, что вертикальный прогиб однородной балки приближенно удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$(EI(x)y'')'' = q(x), \quad (10)$$

где E – модуль продольной упругости, $I(x)$ (или I_x) – момент инерции сечения относительно оси x , $EI(x)$ – жесткость сечения балки при изгибе, причем изгибающий момент M и поперечная сила Q определяются из соотношений

$$M = EI(x)y'' \quad \text{и} \quad Q = M' = (EI(x)y'')$$

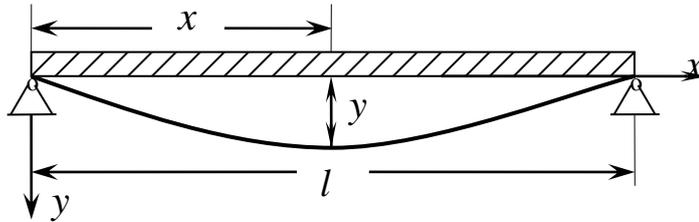


Рис. 5.3. Геометрическая иллюстрация примера 5.3

Краевые условия зависят от способа заделки концов балки. Приведем основные случаи.

1. Конец свободен. Нулю равны изгибающий момент M и поперечная сила Q . Поэтому *краевые условия для свободного конца* балки есть $y'' = 0$ и $y''' = 0$.

2. Конец шарнирно закреплен (оперт). Нулю равны прогиб y и изгибающий момент M . Поэтому *краевые условия для шарнирно закрепленного конца* есть $y = 0$ и $y'' = 0$.

3. Конец жестко закреплен (заделан). Нулю равны прогиб y и угол поворота $\varphi = \arctg y'$. Поэтому *краевые условия для жестко закрепленного конца* есть $y = 0$ и $y' = 0$.

Возможны также другие, более сложные, случаи краевых условий.

Постановка линейных краевых задач для ОДУ 2-го порядка.

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, поведение которой описывается линейным неоднородным уравнением 2-го порядка.

Если на границах $x = a$ и $x = b$ заданы значения искомой функции $y(a)$, $y(b)$, то такие условия называются *граничными условиями первого рода*, а задача

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & a < x < b; \\ y(a) = A, & x = a; \\ y(b) = B, & x = b \end{cases}$$

называется **первой краевой задачей** для ОДУ

Пример 5.4. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[a, b]$ уравнению $y''(x) = -f(x)$, а на концах отрезка условиям $y(a) = y(b) = 0$.

Данная задача имеет следующее физическое содержание. Между точками $x = a$ и $x = b$ натянута упругая струна, находящаяся под действием внешней изгибающей нагрузки $f(x)$. Величина $y(x)$ характеризует прогиб струны. •

Если на границах заданы значения производных искомой функции, то такие условия называются **граничными условиями второго рода**: $y'(a) = A$, $y'(b) = B$, а соответствующая задача – **второй краевой задачей**.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее первой производной:

$$\begin{aligned} y'(a) + \alpha y(a) &= A, \\ y'(b) + \beta y(b) &= B, \end{aligned}$$

то такие условия называются **граничными условиями третьего рода**, а соответствующая задача – **третьей краевой задачей**.

Чаще всего на разных границах задаются граничные условия различных родов. Такие задачи называют **краевыми задачами со смешанными краевыми условиями**.

6. Редукция к задаче Коши двухточечной краевой задачи для линейного уравнения 2-го порядка.

Рассмотрим задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Решение будем искать в виде линейной комбинации

$$y = cu + v, \quad (6.3)$$

где $u = u(x)$ – ненулевое решение соответствующего однородного уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad (6.4)$$

а $v = v(x)$ – некоторое решение данного неоднородного уравнения (6.1)

$$v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x). \quad (6.5)$$

Очевидно, функция y , определяемая формулой (6.3), где c – произвольно, есть решение уравнения (6.1).

Потребуем, чтобы первое краевое условие (6.2) выполнялось для функции y при любом c . Используя это краевое условие, будем иметь

$$c\alpha_0 u(a) + \alpha_0 v(a) + c\alpha_1 u'(a) + \alpha_1 v'(a) = A$$

или

$$c[\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a)] + \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A. \quad (6.6)$$

Для того чтобы равенство (6.6) было справедливо при любом c , необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при c обращался в нуль, т.е. должны быть выполнены равенства

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \quad (6.7)$$

$$\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A. \quad (6.8)$$

Для обеспечения равенств (6.7), (6.8) достаточно, например, положить

$$u(a) = \alpha_1 k, \quad u'(a) = -\alpha_0 k, \quad (6.9)$$

где постоянная k отлична от нуля,

$$v(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \quad v'(a) = 0, \quad (6.10)$$

если $\alpha_0 \neq 0$.

$$v(a) = 0, \quad v'(a) = \frac{A}{\alpha_1}, \quad (6.11)$$

если $\alpha_1 \neq 0$.

Отсюда видно, что u есть решение задачи Коши для однородного уравнения (6.4), удовлетворяющее начальным условиям (6.9), а v есть решение задачи Коши для неоднородного уравнения (6.5), удовлетворяющее начальным условиям (6.10) или (6.11). При этом для любого c функция $y = cu + v$ удовлетворяет краевому условию на конце $x = a$.

Подберем постоянную c так, чтобы функция y удовлетворяла краевому условию (6.2) на конце $x = b$. Это дает

$$c[\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)] + [\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)] = B,$$

$$c = \frac{B - [\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)]}{[\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)]}.$$

При этом предполагается, что знаменатель

$$[\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)] \neq 0, \quad (6.12)$$

Таким образом, краевая задача (6.1), (6.2) сведена к двум задачам Коши для функций $u(x)$ и $v(x)$.

Если обеспечено условие (6.12), то краевая задача (6.1), (6.2) имеет единственное решение. В противном случае она или совсем не имеет решений или имеет их бесчисленное множество.

Замечание: Если исходное уравнение (6.1) однородное, т.е. $f(x) \equiv 0$ и, кроме того, $A = 0$, то в силу условий (6.10) или (6.11) имеем $v(a) = 0$, $v'(a) = 0$ и, следовательно, $v \equiv 0$. Поэтому $y = cu(x)$, где $u(x)$ есть решение уравнения (6.4), удовлетворяющее начальным условиям (6.9). В этом случае

$$c = \frac{B}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}$$

Полученная задача Коши решается любым из рассмотренных ранее методов.

Пример 6.1. Найти решение однородного уравнения

$$y' + y \operatorname{ch} x = 0, \quad (6.13)$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 1. \quad (6.14)$$

Решение. Сравнивая условие (6.14) с общими краевыми условиями (6.2), видим, что

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, A = 0, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0, B = 1.$$

В силу приведенного выше замечания решение ищем в виде

$$y = cu(x),$$

где $u(x)$ – решение однородного уравнения

$$u'' + u \operatorname{ch} x = 0, \quad (6.15)$$

удовлетворяющее начальным условиям (6.9), где принято $k = -1$, т.е.

$$u(0) = 0; \quad u'(0) = 1. \quad (6.16)$$

Из второго краевого условия (6.14) получаем

$$cu(1) = 1, \text{ откуда } c = \frac{1}{u(1)}.$$

Решая любым численным методом задачу Коши (6.15)–(6.16), находим $u(x)$, а, следовательно, и постоянную c , после чего определяем y .

Упражнение.

6.1 Применить к краевой задаче метод редукции

$$y'' - y = x, \quad x \in [0, 1], \quad 2y(0) - y'(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

7. Конечно-разностный метод с использованием метода прогонки решения краевых задач для ОДУ.

Рассмотрим *первую краевую задачу*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (7.1)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (7.2)$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, A, B – заданные постоянные.

Одним из наиболее простых методов решения этой краевой задачи является *сведение ее к системе конечно-разностных уравнений*. Для

этого разобьем основной отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины h (шаг), где $h = \frac{b-a}{n}$ (рис. 7.1).

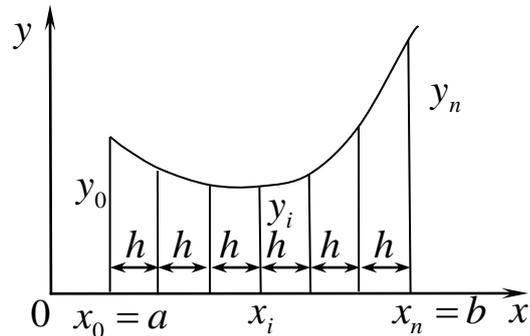


Рис. 7.1. Область непрерывного изменения аргумента $[a, b]$ заменяется дискретном множеством точек, называемых **узлами** $x_i, i = \overline{0, n}$

Точки разбиения имеют абсциссы:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Значения в точках деления x_i искомой функции $y = y(x)$ и ее производных $y' = y'(x), y'' = y''(x)$ обозначим через $y_i = y(x_i), y'_i = y'(x_i), y''_i = y''(x_i)$.

Введем также обозначения

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i)$$

Заменяя производные симметричными конечно-разностными отношениями, для внутренних точек x_i отрезка $[a, b]$ приближенно будем иметь

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (7.3)$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.3), (7.4) в исходное уравнение (7.1) при $x = x_i$ ($i = \overline{1, n-1}$), получаем систему разностных уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (7.5)$$

Которую можно представить в виде следующей СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (7.6)$$

Выберем шаг $h=0,1$, получим три внутренних узла:
 $x_i = 0,1 \cdot i + 1$ ($i=1,2,3$)

Написав уравнение (*) для каждого из этих узлов, получим систему

$$\begin{cases} 2,31y_0 - 4,84y_1 + 2,53y_2 = 0,02 \\ 2,76y_1 - 5,76y_2 + 3,00y_3 = 0,02 \\ 3,25y_2 - 6,76y_3 + 3,51y_4 = 0,02 \end{cases}$$

В граничных узлах имеем $y_0=0$, $y_4=0,0566$, перенесем соответствующие слагаемые в 1-м и 3-м уравнении в правую часть

$$\begin{cases} -4,84y_1 + 2,53y_2 = 0,02 - 2,31y_0 \\ 2,76y_1 - 5,76y_2 + 3,00y_3 = 0,02 \\ 3,25y_2 - 6,76y_3 = 0,02 - 3,51y_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4,84y_1 + 2,53y_2 = 0,02 \\ (b_1 = -4,84, \quad c_1 = 2,53, \quad d_1 = 0,02); \\ 2,76y_1 - 5,76y_2 + 3,00y_3 = 0,02 \\ (a_2 = 2,76, \quad b_2 = -5,76, \quad c_2 = 3,00, \quad d_2 = 0,02); \\ 3,25y_2 - 6,76y_3 = -0,1787666 \\ (a_3 = 3,25, \quad b_3 = -6,76, \quad c_3 = 0, \quad d_3 = -0,1787666). \end{cases}$$

Получили систему вида (7.9). Так как в полученной трехдиагональной системе выполнено условие преобладания диагональных элементов и можно использовать метод прогонки

Прямой ход

$$\xi_1 = -c_1/b_1 = -2,53/(-4,84) = 0,52273$$

$$\eta_1 = d_1/b_1 = 0,02/(-4,84) = -0,00413$$

$$\xi_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2\xi_1} = \frac{-3}{-5,76 + 2,76 \cdot 0,52273} = 0,69488,$$

$$\eta_2 = \frac{d_2 - a_2\eta_1}{b_2 + a_2\xi_1} = \frac{0,02 - 2,76 \cdot (-0,00413)}{-5,76 + 2,76 \cdot 0,52273} = -0,00727,$$

$$\xi_3 = \frac{-c_3}{b_3 + a_3\xi_2} = 0,$$

$$\eta_3 = \frac{d_3 - a_3\eta_2}{b_3 + a_3\xi_2} = \frac{-0,17877 - 3,25 \cdot (-0,00727)}{-6,76 + 3,25 \cdot 0,69488} = 0,03446$$

Обратный ход

$$y_i = \xi_i y_{i+1} + \eta_i:$$

$$\begin{cases} i=3: & y_3 = \xi_3 y_4 + \eta_3 = 0,03446, \\ i=2: & y_2 = \xi_2 y_3 + \eta_2 = 0,69488 \cdot 0,03446 - 0,00727 = 0,01668, \\ i=1: & y_1 = \xi_1 y_2 + \eta_1 = 0,52273 \cdot 0,01668 - 0,00413 = 0,00459. \end{cases}$$

Ответ: Округлим решение до 4-х знаков после запятой $y_1 = 0,0046$, $y_2 = 0,0167$, $y_3 = 0,0345$. Для сравнения: точное решение исходного уравнения $y = 0,5 \cdot \ln^2 x$ в соответствующих точках: $y(x_1) = 0,0047$, $y(x_2) = 0,0166$, $y(x_3) = 0,0344$.

Программа решения примера 7.1 конечно-разностным методом с использованием метода прогонки (шаг определяется по количеству разбиений $n = 10$, $h = (b - a) / n = (1,4 - 1) / 10 = 0,04$)

Конечно-разностный метод с исп. метода прогонки решения краевых задач

Краевая задача $x^2 y'' + x y' + 0 y = 1$

Отрезок [1 ; 1,4] Точное решение $y = 1/2 \cdot \ln^2(x)$

$y(a) = 0$ $y(b) = 0,0566$

Кол-во разбиений $n = 10$

Шаг 0,04

	Числ. реш.	Точ. реш.	Погрешность
i	x_i	y_i	$ \tilde{y}_i - y_i $
0	1	0	0
1	1,04	0,000771247	0,000769132
2	1,08	0,00296477	0,0029615
3	1,12	0,00642533	0,0064217
4	1,16	0,0110176	0,0110142
5	1,2	0,0166231	0,0166206
6	1,24	0,0231377	0,0231365
7	1,28	0,0304696	0,0304699
8	1,32	0,0385374	0,0385397
9	1,36	0,047269	0,0472734
10	1,4	0,0566	0,0566068

unit Unit1;

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
Dialogs, StdCtrls, Grids;

type

TForm1 = class(TForm)

```

Edit1: TEdit;
Label1: TLabel;
StringGrid1: TStringGrid;
Button1: TButton;
Edit2: TEdit;
Label2: TLabel;
Label3: TLabel;
Edit3: TEdit;
Label4: TLabel;
Edit4: TEdit;
Label5: TLabel;
Edit5: TEdit;
Label6: TLabel;
Edit6: TEdit;
Label7: TLabel;
Edit7: TEdit;
Label8: TLabel;
Label9: TLabel;
Edit8: TEdit;
Label10: TLabel;
Edit9: TEdit;
Label11: TLabel;
Edit10: TEdit;
Button2: TButton;
Label12: TLabel;
Label13: TLabel;
Label14: TLabel;
Label15: TLabel;
Edit11: TEdit;
procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
procedure Button2Click(Sender: TObject);
private
{ Private declarations }
public
{ Public declarations }
end;
var
Form1: TForm1;
implementation
{$R *.dfm}

```

```

var //объявление глобальных переменных
a,b,c,d,ksi,eta: array of real; // динамический массив
aa,bb,h,x0,xn,x,k:real;
n,i :integer;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin // имена столбцов
StringGrid1.Cells[0,0]:='i';
StringGrid1.Cells[1,0]:='xi';
StringGrid1.Cells[2,0]:='yi';
StringGrid1.Cells[3,0]:='y~i';
StringGrid1.Cells[4,0]:='|y~i-yi|';
end;
function v(m,n:integer):real; ; // функция
begin
v:=StrToFloat(Form1.StringGrid1.Cells[m,n]);
end;
procedure w(m,n:integer; c:real);
begin
Form1.StringGrid1.Cells[m,n]:=FloatToStrF(c,ffGeneral,6,9);
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); // кнопка “заполнить”
begin
aa:=strtofloat(Edit2.text); //начало отрезка
bb:=strtofloat(Edit3.text); //конец отрезка
x0:=strtofloat(Edit5.text); //значение функции в начале отрезка
xn:=strtofloat(Edit6.text); //значение функции в конце отрезка
n:= strtoint(Edit11.text);
h:=abs(bb-aa)/n;
Edit4.text:=floattostr(h);
StringGrid1.RowCount:=n+2; //расширение табл. в зав. от количества узлов
for i:= 0 to n do begin //цикл
x:=aa+h*i; //узел
w(0,i+1,i); //запись в таблицу номера узла
w(1,i+1,x); //запись узла
end;
w(2,1,x0); //запись значения функции в начале отрезка
w(2,n+1,xn); //запись значения функции в конце отрезка
w(3,1,x0); //запись точного значения функции в начале отрезка
w(3,n+1,xn); //запись точного значения функции в конце отрезка

```

```

end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject); //кнопка "решить"
begin //размерность коэф. матрицы и прогоночных коэф.
  SetLength(a,n+1);
  SetLength(b,n+1);
  SetLength(c,n+1);
  SetLength(d,n+1);
  SetLength(ksi,n+1);
  SetLength(eta,n+1);
  for i:=1 to n-1 do begin
    a[i]:=sqr(v(1,i+1))/sqr(h)-v(1,i+1)/(2*h); // определение коэф. a[i]
    b[i]:=-2*sqr(v(1,i+1))/sqr(h); // определение коэф. b[i]
    c[i]:=sqr(v(1,i+1))/sqr(h)+v(1,i+1)/(2*h); // определения коэф. c[i]
    d[i]:=1;
  end;
  d[1]:=d[1]-a[1]*x0; //коэф. d[1] для граничных узлов
  d[n-1]:=d[n-1]-c[n-1]*xn; //коэф. d[n-1] для граничных узлов
  a[1]:=0; //коэф. a[1] для граничных узлов
  c[n-1]:=0; //коэф. c[n-1] для граничных узлов
  // Прямой ход
  ksi[1]:=-c[1]/b[1]; //определение начальных прогоночных коэф.
  eta[1]:=d[1]/b[1];
  for i:=2 to n-1 do begin // определение последующих прогон. коэф.
    ksi[i]:=-c[i]/(b[i]+a[i]*ksi[i-1]);
    eta[i]:=(d[i]-a[i]*eta[i-1])/b[i];
  end;
  // Обратный ход
  for i:=n-1 downto 1 do begin //цикл
    x:=ksi[i]*v(2,i+2)+eta[i]; //расчет значений y
    w(2,i+1,x); //запись значений y в таблицу
  end;
  for i:=0 to n do begin
    x:=0.5*sqr(ln(v(1,i+1))); //вычисление точного значения y
    w(3,i+1,x); // запись точного значения y в таблицу
    x:=abs(x-v(2,i+1)); // вычисление погрешности
    Form1.StringGrid1.Cells[4,i+1]:=FloatToStrF(x,ffGeneral,6,9); // запись и
    // форматирование ошибки
  end; end; end.

```

Упражнения. Методом конечных разностей с использованием метода прогонки найти решения краевых задач с шагом $h = 0,2$

7.1. $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$

Ответ: точное решение $y(x) = x^2 + 1.$

7.2. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 1,5.$

Ответ: точное решение $y(x) = \frac{1}{x} + 1.$

7.3. $(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0, \quad y(2) = -6, \quad y(3) = 0.$

Ответ: точное решение $y(x) = 6x - 18.$

7.4. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 4.$

Ответ: точное решение $y(x) = x^2 + x + 2.$

8. Конечно-разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные.

В случае решения краевой задачи с граничными условиями 2-го или 3-го родов на границах $x = a$ и $x = b$ значения искомой функции $y(a)$ и $y(b)$ неизвестны и для их нахождения должны быть составлены алгебраические уравнения в граничных узлах. Рассмотрим задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b) \tag{8.1}$$

с граничными условиями 2-го рода

$$y'(a) = A, \tag{8.2_1}$$

$$y'(b) = B, \tag{8.2_2}$$

либо с граничными условиями 3-го рода

$$y'(a) + \alpha y(a) = A, \tag{8.3_1}$$

$$y'(b) + \beta y(b) = B, \tag{8.3_2}$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, α, β, A, B – заданные постоянные. Аппроксимация производных, входящих в краевые условия, с помощью правосторонних и левосторонних конечных разностей

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

можно осуществить только с первым порядком аппроксимации, в то время как во внутренних узлах дифференциальное уравнение аппроксимируется с помощью симметричных конечно-разностных отношений

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

со вторым порядком. Следовательно, вся 2-я (или 3-я) краевая задача будет аппроксимирована только с первым порядком. Некоторые краевые задачи так и аппроксимируют, так как повышение порядка аппроксимации производных на концах отрезка может привести к нарушению условия преобладания диагональных элементов в матрице полученной СЛАУ, что не позволит в дальнейшем применить метод прогонки для ее решения.

Для повышения на единицу порядка аппроксимации производных, входящих в краевые условия, предположим, что искомая функция $y(x)$ дважды дифференцируема не только во внутренних точках расчетной области, но и на границах, т.е. $y(x) \in C^2[a, b]$. Тогда для решения этой проблемы можно использовать аппарат разложения в ряды Тейлора приграничных значений сеточной функции на точном решении в окрестности граничных узлов.

С этой целью разложим функцию *на точном решении* в ряд Тейлора до 3-й производной включительно в окрестности узла $x = a$ для левой границы и в окрестности узла $x = b$ для правой границы и определим по этим разложениям y_1 и y_{n-1} .

Затем значения производных 2-го порядка для граничных узлов в этих разложениях заменяются значениями второй производной, определенными из ОДУ, после чего из полученных выражений определяются значения первой производной в граничных узлах со вторым порядком, которые затем подставляются вместо производных первого порядка в краевые условия.

Рассмотрим эту процедуру для левой границы $x_0 = a$:

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + y'_0 h + y''_0 \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (8.4)$$

Из (8.1) находим y''_0 :

$$y_0'' = f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0. \quad (8.5)$$

Подставив (8.5) в (8.4) и разделив на h , получим

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}(f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0) + O(h^2),$$

откуда

$$y_0' \left(1 - \frac{p_0 h}{2}\right) = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}(f_0 - q_0 y_0) + O(h^2),$$

или

$$y_0' = \frac{2}{2 - p_0 h} \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2 - p_0 h}(f_0 - q_0 y_0) + O(h^2). \quad (8.6)$$

Подставляя (8.6) в (8.3₁) (или в (8.2₁)), получим

$$\frac{2}{2 - p_0 h} \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2 - p_0 h}(f_0 - q_0 y_0) + \alpha y_0 = A + O(h^2). \quad (8.7)$$

Из (8.7) видно, что полученное решение для узла $x_0 = a$ содержит только два неизвестных y_0 и y_1 , а аппроксимация имеет второй порядок. Следовательно, (8.7) можно представить в виде

$$b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0, \quad (8.8)$$

где

$$a_0 = 0; \quad b_0 = -\frac{2}{h(2 - p_0 h)} + \frac{q_0 h}{2 - p_0 h} + \alpha; \quad c_0 = \frac{2}{h(2 - p_0 h)}; \quad d_0 = A + \frac{h f_0}{2 - p_0 h}.$$

Аналогично для правой границы $x_n = b$:

$$\begin{cases} y_{n-1} = y(x_n - h) = y_n - y_n' h + y_n'' \frac{h^2}{2} + O(h^3), \\ y_n'' = f_n - p_n y_n' - q_n y_n, \end{cases}$$

$$y_n' = \frac{2}{2 + p_n h} \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{h}{2 + p_n h}(f_n - q_n y_n) + O(h^2).$$

Подставляя это выражение в (8.3₂) (или в (8.2₂)), получим

$$\frac{2}{2 + p_n h} \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2 + p_n h}(f_n - q_n y_n) + \beta y_n = B + O(h^2),$$

которое можно представить в виде

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n = d_n, \quad (8.9)$$

где

$$a_n = -\frac{2}{h(2+p_n h)}; \quad b_n = \frac{2}{h(2+p_n h)} - \frac{q_n h}{2+p_n h} + \beta; \quad c_n = 0; \quad d_n = B - \frac{h f_n}{2+p_n h}.$$

Таким образом, результирующая СЛАУ с трехдиагональной матрицей теперь будет содержать $n+1$ уравнение, каждое из которых может быть получено со вторым порядком точности, а именно: уравнение (8.8) при $i=0$, уравнения (7.6) для $i=\overline{1, n-1}$ и уравнение (8.9) при $i=n$. Для ее решения используется метод прогонки, *если выполняется условие диагонального преобладания* в полученной матрице СЛАУ и $a_0 = c_n = 0$.

Пример 8.1. Методом конечных разностей с использованием метода прогонки решить следующую краевую задачу, приняв шаг $h=0,25$.

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x^2, \quad (8.10)$$

$$y'(1) + y(1) = 1, \quad (8.11)$$

$$y(2) = 1. \quad (8.12)$$

Сравнить полученное решение с точным $y(x) = x^4/8 + 11x^2/8 + 9/2$.

Решение. Определим узлы сетки $x_0=1$; $x_1=1,25$; $x_2=1,5$; $x_3=1,75$; $x_4=2$.

Производные, входящие в дифференциальное уравнение, в узлах x_i , аппроксимируются со вторым порядком:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение для узлов x_i , $i=\overline{1,3}$, получим

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{x_i} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = x_i^2 + O(h^2), \quad i=\overline{1,3}. \quad (8.13)$$

Поскольку на правой границе ($i=4$, $x_4=2$) задано граничное условие первого рода, т.е. значение искомой функции в этом узле известно и равно $y_4=1$, то уравнение для этого узла не выписывается (но значение y_4 будет использовано в конечно-разностной аппроксимации (8.13) при $i=3$). Будем аппроксимировать со вторым

порядком левое краевое условие (8.11) в узле $i=0$, $x_0=1$. Разлагая на точном решении y_1 в ряд Тейлора в окрестности граничной точки $x_0=1$ до третьей производной включительно, получим

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + y_0' h + y_0'' \frac{h^2}{2} + O(h^3).$$

Подставим сюда вместо y_0'' значение второй производной из уравнения (8.10) при $x_0=1$:

$$y_0'' = \frac{1}{x_0} y_0' + x_0^2.$$

Затем разделим все выражение на h и выразим из полученного равенства значение y_0' , получим

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h \left(1 + \frac{h}{2x_0}\right)} - \frac{hx_0^2}{2 \left(1 + \frac{h}{2x_0}\right)} + O(h^2).$$

Подставим это выражение в левое краевое условие (8.11) вместо производной первого порядка, получим ($y(1) \equiv y_0$)

$$\frac{y_1 - y_0}{h \left(1 + \frac{h}{2x_0}\right)} - \frac{hx_0^2}{2 \left(1 + \frac{h}{2x_0}\right)} + y_0 = 1 + O(h^2),$$

откуда при $x_0=1$ и $h=0,25$ получаем алгебраическое уравнение в узле $x_0=1$ со вторым порядком:

$$-2,556y_0 + 3,556y_1 = 1,111 + O(0,0625). \quad (8.14)$$

Приписывая к этому уравнению алгебраические уравнения, полученные из аппроксимации (8.13) для $i = \overline{1,3}$ ($x_1=1,25$; $x_2=1,5$; $x_3=1,75$; $h=0,25$), получим следующую СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2,556y_0 + 3,556y_1 = 1,111 \\ (a_0 = 0; \quad b_0 = -2,556; \quad c_0 = 3,556; \quad d_0 = 1,111); \\ 1,1y_0 - 2y_1 + 0,9y_2 = 0,0977 \\ (a_1 = 1,1; \quad b_1 = -2; \quad c_1 = 0,9; \quad d_1 = 0,0977); \\ 1,0831y_1 - 2y_2 + 0,9167y_3 = 0,141 \\ (a_2 = 1,0831; \quad b_2 = -2; \quad c_2 = 0,9167; \quad d_2 = 0,141); \\ 1,071y_2 - 2y_3 = -0,737 \\ (a_3 = 1,071; \quad b_3 = -2; \quad c_3 = 0; \quad d_3 = -0,737), \end{array} \right.$$

которая решается методом прогонки

Прямой ход:

$$\xi_0 = -c_0/b_0 = -3,556/(-2,556) = 1,3912;$$

$$\eta_0 = d_0/b_0 = 1,111/(-2,556) = -0,4347;$$

$$\xi_1 = \frac{-c_1}{b_1 + a_1\xi_0} = \frac{-0,9}{-2 + 1,1 \cdot 1,3912} = 1,9162;$$

$$\eta_1 = \frac{d_1 - a_1\eta_0}{b_1 + a_1\xi_0} = \frac{0,0977 - 1,1 \cdot (-0,4347)}{-2 + 1,1 \cdot 1,3912} = -1,226;$$

$$\xi_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2\xi_1} = \frac{-0,9167}{-2 + 1,0831 \cdot 1,9162} = -12,091;$$

$$\eta_2 = \frac{d_2 - a_2\eta_1}{b_2 + a_2\xi_1} = \frac{0,141 - 1,0831 \cdot (-1,226)}{-2 + 1,0831 \cdot 1,9162} = 19,3765;$$

$$\xi_3 = 0;$$

$$\eta_3 = \frac{d_3 - a_3\eta_2}{b_3 + a_3\xi_2} = \frac{-0,737 - 1,071 \cdot 19,3765}{-2 + 1,071 \cdot (-12,091)} = 1,4375;$$

Обратный ход:

$$y_i = \xi_i y_{i+1} + \eta_i:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 3: \quad y_3 = \xi_3 y_4 + \eta_3 = \eta_3 = 1,4375; \\ i = 2: \quad y_2 = \xi_2 y_3 + \eta_2 = -12,091 \cdot 1,4375 + 19,3765 = 2,00; \\ i = 1: \quad y_1 = \xi_1 y_2 + \eta_1 = 1,9162 \cdot 2,00 + (-1,226) = 2,60; \\ i = 0: \quad y_0 = \xi_0 y_1 + \eta_0 = 1,3912 \cdot 2,60 + (-0,4347) = 3,18. \end{array} \right.$$

Занесем точные $y(x_i)$ и приближенные y_i решения в таблицу и вычислим погрешность $|y(x_i) - y_i|$:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
$y(x_i)$	3,25	2,6568	2,039	1,462	1
y_i	3,18	2,60	2,00	1,44	1
$ y(x_i) - y_i $	0,07	0,0568	0,039	0,022	0

Сравнение с точным решением показывает, что действительно конечно-разностная аппроксимация (8.13) и (8.14) имеет второй порядок относительно шага ($h^2 = 0,0625$). Для более точного расчета необходимо уменьшить шаг.

Программа решения примера 8.1 конечно-разностным методом с использованием метода прогонки (шаг определяется по количеству разбиений $n = 20$, $h = (b - a)/n = (2 - 1)/20 = 0,05$).

Конечно-разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащая

Краевая задача $1 \cdot y'' + -1/x \cdot y' + 0 \cdot y = x^2$

Отрезок $[1 ; 2]$ Точное решение $y = (x^4 - 11 \cdot x^2)/8 + 9/2$

Количество разбиений Граничные условия

Шаг

$y'(a) +$ $y(a) =$

$y'(b) +$ $y(b) =$

i	x_i	Числ. реш. v_i	Точ. реш. \tilde{v}_i	Погрешность $ v_i - \tilde{v}_i $
0	1	3,24715	3,25	0,00285
1	1,05	3,13323	3,136	0,00277078
2	1,1	3,01658	3,01926	0,0026825
3	1,15	2,8976	2,90019	0,00258828
4	1,2	2,77671	2,7792	0,00249
5	1,25	2,65435	2,65674	0,00238828
6	1,3	2,53099	2,53326	0,0022725
7	1,35	2,4071	2,40925	0,00215078
8	1,4	2,28317	2,2852	0,00203
9	1,45	2,15973	2,16163	0,00189578
10	1,5	2,0373	2,03906	0,0017625
11	1,55	1,91644	1,91806	0,00162328
12	1,6	1,79773	1,7992	0,00147
13	1,65	1,68175	1,68306	0,00131328
14	1,7	1,56911	1,57026	0,0011525
15	1,75	1,46044	1,46143	0,000985781
16	1,8	1,3564	1,3572	0,0008
17	1,85	1,25764	1,25825	0,000610781
18	1,9	1,16485	1,16526	0,0004125
19	1,95	1,07873	1,07894	0,000208281
20	2	1	1	

```

unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, Grids;
type
  TForm1 = class(TForm)
    Edit1: TEdit;
    Label1: TLabel;
    StringGrid1: TStringGrid;
    Button1: TButton;
    Edit2: TEdit;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Edit3: TEdit;
    Label4: TLabel;
    Edit4: TEdit;
    Label5: TLabel;
    Edit5: TEdit;
    Label6: TLabel;
    Edit6: TEdit;
    Label7: TLabel;
    Edit7: TEdit;
    Label8: TLabel;
    Label9: TLabel;
    Edit8: TEdit;
    Label10: TLabel;
    Edit9: TEdit;
    Label11: TLabel;
    Edit10: TEdit;
    Button2: TButton;
    Edit11: TEdit;
    Label12: TLabel;
    Edit12: TEdit;
    Label13: TLabel;
    Edit13: TEdit;
    Edit14: TEdit;
    Label14: TLabel;
    Label15: TLabel;
    Label16: TLabel;
    Label17: TLabel;
  end;

```

// определение

// формы

```

Edit15: TEdit;
Label18: TLabel;
procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
procedure Button2Click(Sender: TObject);
private
  { Private declarations }
public
  { Public declarations }
end;
var
  Form1: TForm1;
implementation
{$R *.dfm}
var a,b,c,d,ksi,eta: array of real;           // определение
    aa,bb,h,x0,xn,x,k,alfa,betta,g1,g2:real; // переменных
    n,i :integer;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject); // процедура создания формы
begin
StringGrid1.Cells[0,0]:= 'i';                //
StringGrid1.Cells[1,0]:= 'xi';              // заголовки
StringGrid1.Cells[2,0]:= 'yi';              // таблицы
StringGrid1.Cells[3,0]:= 'y~i';             // результатов
StringGrid1.Cells[4,0]:= '|y~i-yi|';        //
end;
function v(m,n:integer):real;                // определение функции
begin
v:=StrToFloat(Form1.StringGrid1.Cells[m,n]);
end;
procedure w(m,n:integer; c:real);            // процедура записи в таблицу
begin
Form1.StringGrid1.Cells[m,n]:= FloatToStrF(c,ffgeneral,6,9); //запись
                                                                    //найденного значения в таблицу
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); // процедура нажатия
                                                                    // кнопки «Заполнить»
begin
n:= strtoint(Edit15.text);                  //
aa:=strtofloat(Edit2.text);                 //
bb:=strtofloat(Edit3.text);                 //
h:=strtofloat(Edit4.text);                  //

```

```

x0:=strtofloat(Edit5.text);           // данные
xn:=strtofloat(Edit6.text);          // исходной
alfa:=strtofloat(Edit11.text);       // задачи
betta:=strtofloat(Edit12.text);      //
g1:=strtofloat(Edit14.text);         //
g2:=strtofloat(Edit13.text);        //
h:=abs(bb-aa)/n;
Edit4.Text:=FloatToStr(h);
if (g1<>0) then begin
x0:=x0/g1;
alfa:=alfa/g1;
end;
if (g2<>0) then begin
xn:=xn/g2;
betta:=betta/g2;
end;
StringGrid1.RowCount:=n+2;          // количество строк в таблице
for i:= 0 to n do begin
x:=aa+h*i;
w(0,i+1,i);                          // запись в таблицу количества шагов
w(1,i+1,x);                           // запись в таблицу x
end;
w(2,1,x0);                            // запись в таблицу  $y_0$ 
w(2,n+1,xn);                          // запись в таблицу  $y_n$ 
w(3,1,x0);                            // запись в таблицу  $\tilde{y}_0$  - точное реш-е в точке  $x_0$ 
w(3,n+1,xn);                          // запись в таблицу  $\tilde{y}_n$  - точное реш-е в точке  $x_n$ 
end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject); // процедура нажатия
//кнопки «Решить»

begin
SetLength(a,n+1);                      //
SetLength(b,n+1);                      // размерность
SetLength(c,n+1);                      // для
SetLength(d,n+1);                      // каждого
SetLength(ksi,n+1);                   // параметра
SetLength(eta,n+1);                   //
a[0]:=0;                               // расчеты
b[0]:=-2/(h*(2+h/v(1,1)))+alfa;       // коэффициентов
c[0]:=2/(h*(2+h/v(1,1)));              //  $a_0, b_0, c_0, d_0$ 
d[0]:=x0+h*sqr(v(1,1))/(2+h/v(1,1));  //

```

```

for i:=1 to n-1 do begin
a[i]:=1/sqr(h)+1/(2*h*v(1,i+1));           // расчеты
b[i]:=-2/sqr(h);                           // коэффициентов
c[i]:=1/sqr(h)-1/(2*h*v(1,i+1));           //  $a_i, b_i, c_i, d_i, \quad i = \overline{1, n-1}$ 
d[i]:=sqr(v(1,i+1));                         //
end;
// Прямой ход метода прогонки – вычисление прогоночных коэффициентов
ksi[0]:=-c[0]/b[0];
eta[0]:=d[0]/b[0];
for i:=1 to n-1 do begin
ksi[i]:=-c[i]/(b[i]+a[i]*ksi[i-1]);
eta[i]:=(d[i]-a[i]*eta[i-1])/(b[i]+a[i]*ksi[i-1]);
end;
// Обратный ход метода прогонки – вычисление значений  $y_i$ 
for i:=n-1 downto 0 do begin
x:=ksi[i]*v(2,i+2)+eta[i];                   // расчет  $y_i$ 
w(2,i+1,x);                                  // запись в таблицу  $y_i$ 
end;
for i:=0 to n do begin
x:=(sqr(sqr(v(1,i+1)))-11*sqr(v(1,i+1)))/8+9/2; // расчет  $\tilde{y}_i$ -точных зн-й
w(3,i+1,x);                                  // запись в таблицу  $\tilde{y}_i$ 
x:=abs(x-v(2,i+1));                           // вычисление погрешности решения
Form1.StringGrid1.Cells[4,i+1]:=FloatToStrF(x,ffGeneral,6,9); // запись в
//таблицу погрешности
end; end; end.

```

Упражнения. Методом конечных разностей с использованием метода прогонки решить следующие краевые задачи с заданным шагом h (аппроксимацию производных в краевых условиях выполнить с $O(h^2)$).

8.1. $y'' + xy' = 1, \quad y'(0) - 2y(0) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad h = 0,25.$

8.2. $y'' + xy = 1, \quad y'(0) + y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad h = 0,2.$

8.3. $y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e = 3,718,$
 $h = 0,1.$

8.4. $y'' + xy' - 0,5y/x = 1, \quad y(2) + 2y'(2) = 1, \quad y(2,3) = 2,15, \quad h = 0,05.$

$$8.5. \quad y'' + y = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad h = \pi/10.$$

Сравнить полученное решение с точным $\tilde{y} = 1 + \cos x$

8.6. Получить расчетные формулы метода прогонки для частного случая краевой задачи $y''(x) - p(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$
 $y(a) = A, \quad y(b) = B.$

Методом прогонки найти приближенное решение для частного случая краевой задачи

$$8.7. \quad y'' - 2x^2 y = x, \quad y(0) = 2, \quad y(2) = 1, \quad \text{с шагом } h = 0,2.$$

$$8.8. \quad y'' - 2x^2 y = x^2, \quad y(1) = 3, \quad y(3) = 2, \quad \text{с шагом } h = 0,2.$$

9. Метод стрельбы (пристрелки).

Метод стрельбы [12, 13] сводит решение краевой задачи для ОДУ к решению итерационной последовательности задач Коши. Рассмотрим этот метод на примере решения следующей первой краевой задачи

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \quad (9.1)$$

$$y(a) = A, \quad (9.2)$$

$$y(b) = B. \quad (9.3)$$

Вместо краевой задачи (9.1)–(9.3) рассматривается следующая задача Коши:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \quad (9.1)$$

$$y(a) = A, \quad (9.2)$$

$$y'(a) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha: \quad y(b, \alpha) = B, \quad (9.4)$$

в которой интегральная кривая $y(x, \alpha)$ зависит не только от переменной x , но и от параметра α , который называется углом пристрелки. Он выбирается из условия равенства значения интегральной кривой на правой границе $y(b, \alpha)$ значению B с наперед заданной точностью ε (рис. 9.1):

$$|y(b, \alpha) - B| \leq \varepsilon. \quad (9.5)$$

Угол пристрелки, удовлетворяющий неравенству (9.5), обозначим через α^* . Интегральная кривая, полученная из решения задачи Коши (9.1), (9.2), (9.4) с углом близким к этому значению, в соответствии с

неравенством (9.5) и будет решением исходной задачи (9.1)–(9.3) с точностью ε .

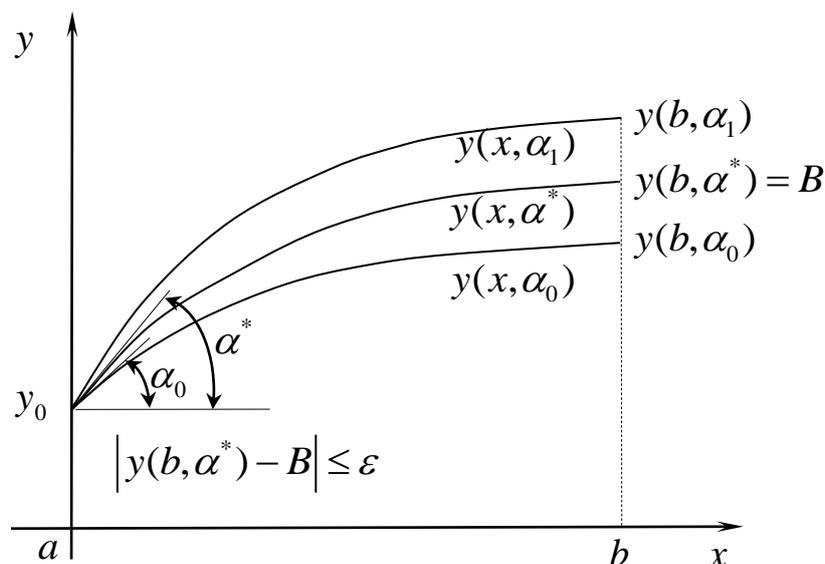


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация метода пристрелки
Таким образом, **алгоритм метода пристрелки** следующий.

1. Выбирается α_0 , например, из условия

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{B - A}{b - a}.$$

2. С этим значением α_0 одним из методов решается задача Коши (9.1), (9.2), (9.4) с получением $y(x, \alpha_0)$ и $y(b, \alpha_0)$; если при этом выполняется условие (9.5), то краевая задача (9.1)–(9.3) решена с точностью ε .

3. В противном случае могут быть следующие два варианта:

а) $y(b, \alpha_0) > B$, тогда угол пристрелки каким-либо способом уменьшается и решается задача Коши (9.1), (9.2), (9.4) тем же методом до тех пор, пока не выполнится $y(b, \alpha_1) < B$;

б) $y(b, \alpha_0) < B$, тогда угол пристрелки каким-либо способом увеличивается и решается задача Коши до тех пор, пока не выполнится условие $y(b, \alpha_1) > B$.

4. Таким образом, угол пристрелки находится внутри интервала $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, после чего истинное значение α^* угла пристрелки определяется методом половинного деления с реализацией следующей цепочки:

а) $\alpha_{k+1} = (\alpha_{k-1} + \alpha_k)/2$;

б) $y(x, \alpha_{k+1})$;

с) $y(b, \alpha_{k+1})$;

г) анализируется неравенство $|y(b, \alpha_{k+1}) - B| \leq \varepsilon$, если оно выполнено, то $\alpha^* \approx (\alpha_k + \alpha_{k+1})/2$ и $y(x, \alpha^*)$ – истинная интегральная кривая; если неравенство не выполнено, то итерационный процесс повторяется, начиная с п. 4а.

Метод половинного деления очень медленно сходится и приходится решать значительное число задач Коши для различных углов пристрелки α_k . Для ускорения сходимости итерационного процесса используем *итерационную процедуру Ньютона*. Будем полагать, что $B = y(b, \alpha_0 + \Delta\alpha)$, где $\Delta\alpha$ подлежит определению.

Для определения $\Delta\alpha$ разложим $y(b, \alpha_0 + \Delta\alpha)$ в окрестности α_0 в ряд Тейлора до второй производной включительно, получим

$$y(b, \alpha_0 + \Delta\alpha_0) = y(b, \alpha_0) + \frac{\partial y(b, \alpha_0)}{\partial \alpha_0} \Delta\alpha_0 + O(\Delta\alpha^2) = B,$$

$$\Delta\alpha_0 = \frac{B - y(b, \alpha_0)}{\frac{\partial y(b, \alpha_0)}{\partial \alpha_0}}. \quad (9.6)$$

Для определения $\frac{\partial y(b, \alpha_0)}{\partial \alpha_0}$ выбирается малое приращение δ угла пристрелки и со значением $\alpha_0 + \delta$ решается задача Коши с получением $y(b, \alpha_0 + \delta)$. Тогда для определения производной, входящей в выражение (9.6), используем отношение конечных разностей:

$$\frac{\partial y(b, \alpha_0)}{\partial \alpha_0} \approx \frac{y(b, \alpha_0 + \delta) - y(b, \alpha_0)}{\delta}. \quad (9.7)$$

Подставляя (9.7) в (9.6), получаем

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_0 = \alpha_0 + \frac{B - y(b, \alpha_0)}{y(b, \alpha_0 + \delta) - y(b, \alpha_0)} \delta.$$

Итерационный процесс продолжается до выполнения условия (9.5) с помощью процедуры

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{B - y(b, \alpha_k)}{y(b, \alpha_k) - y(b, \alpha_{k-1})} (\alpha_k - \alpha_{k-1}),$$

Сходящейся значительно быстрее метода половинного деления.

Указание: В случае задания граничного условия 2-го рода на правой границе итерационный процесс следует осуществлять до выполнения условия

$$\left| \frac{y(1) - y(1-h)}{h} - y'(1) \right| \leq \varepsilon,$$

причем в качестве начального угла пристрелки можно принять $\alpha_0 = \arctg y'(1)$.

Пример 9.1. Методом пристрелки с использованием алгоритма Эйлера с шагом $h=0,25$ и методом половинного деления и Ньютона уточнения корней нелинейных уравнений решить следующую первую краевую задачу для ОДУ 2-го порядка (точность $\varepsilon = 0,05$):

$$y'' = \frac{1}{x} y' + x^2,$$
$$y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Сравнить полученное решение с точным $y(x) = x^4/8 - 7x^2/24 + 1/6$.

Решение. Сведем данную краевую задачу к задаче Коши

$$y'' = \frac{1}{x} y' + x^2,$$
$$y(1) = 0,$$
$$y'(1) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha = \alpha^* : y(2, \alpha^*) = 1.$$

Уравнение (9.4) для этой задачи, а именно уравнение $f(\alpha) = y(2, \alpha) - 1 = 0$, как нелинейное уравнение относительно угла пристрелки α можно решить одним из рассмотренных ранее итерационных методов с параллельным решением задачи Коши на каждой итерации.

Рассмотрим вначале *метод половинного деления*.

1-я итерация. Пусть угол пристрелки α_0 определен из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{B-A}{b-a} = \frac{1-0}{2-1} = 1; \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

Тогда задача Коши для ОДУ 2-го порядка и соответствующая задача Коши для нормальной системы ОДУ 2-го порядка будут иметь вид

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{x} y' + x^2, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = \operatorname{tg} \alpha_0 = 1. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{1}{x} z + x^2, \\ y(1) = 0, \\ z(1) = 1. \end{cases}$$

Метод Эйлера с шагом $h = 0,25$ для этой системы имеет вид

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot z_i \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot (z_i/x_i + x_i^2), \quad i = \overline{0,4}. \end{cases} \quad (9.8)$$

Решая эту систему получаем

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
y_i	0	0,25	0,625	1,173	1,952
z_i	1	1,50	2,191	3,118	4,329

$$y(2; 45^\circ) = y_4 = 1,952.$$

$$\text{Итак, } f^1(45^\circ) = y(2; 45^\circ) - 1 = 0,952 > 0.$$

Следовательно, необходимо уменьшить угол пристрелки α причем так, чтобы $f(\alpha)$ на следующей итерации было меньше нуля. Примем $\alpha_1 = 0$, тогда задача Коши будет иметь вид:

2-я итерация ($\alpha_1 = 0^\circ$).

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{x} y' + x^2, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = \operatorname{tg} \alpha_1 = 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{1}{x} z + x^2, \\ y(1) = 0, \\ z(1) = 0. \end{cases}$$

Используем методом Эйлера (9.8) с шагом $h = 0,25$, получаем

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
y_i	0	0	0,0625	0,235	0,577
z_i	0	0,25	0,69	1,368	2,33

$$y(2; 0^\circ) = y_4 = 0,577, \quad f^2(0^\circ) = y(2; 0^\circ) - 1 = 0,577 - 1 < 0.$$

Следовательно, угол α^* находится внутри интервала

$$\alpha_1 = 0^\circ < \alpha^* < \alpha_0 = 45^\circ.$$

После этого для уточнения угла пристрелки используем метод половинного деления.

$$3\text{-я итерация} \left(\alpha_2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} = \frac{45^\circ + 0^\circ}{2} = 22,5^\circ \right); \quad \operatorname{tg} 22,5^\circ = 0,414.$$

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{x} y' + x^2, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = \operatorname{tg} \alpha_2 = 0,414. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = z/x + x^2, \\ y(1) = 0, \\ z(1) = 0,414. \end{cases}$$

Решая эту задачу Коши методом Эйлера (9.8) с шагом $h=0,25$, получаем

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
y_i	0	0,104	0,296	0,624	1,147
z_i	0,414	0,768	1,312	2,093	3,153

$$y(2; 22,5^\circ) = y_4 = 1,147, \quad f^3(22,5^\circ) = y(2; 22,5^\circ) - 1 = 1,147 - 1 = 0,147 > 0, \\ \left| f^3(22,5^\circ) \right| = 0,147 > \varepsilon = 0,05.$$

Сравнение значения функции $f(\alpha)$ на 2-й итерации ($f^2(0^\circ) < 0$) и на третьей итерации ($f^3(22,5^\circ) > 0$) означает, что $0^\circ < \alpha^* < 22,5^\circ$.

Продолжая по аналогии решение поставленной задачи на 5 итерации

$$\left(\alpha_4 = \frac{11,5^\circ + 22,5^\circ}{2} = 16,875^\circ; \quad \operatorname{tg} 16,875^\circ = 0,3 \right) \quad \text{решение задачи Коши}$$

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = z/x + x^2, \\ y(1) = 0, \\ z(1) = 0,3 \end{cases}$$

методом Эйлера с шагом $h=0,25$ сведено в таблицу

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
y_i	0	0,075	0,23	0,515	0,99
z_i	0,3	0,625	1,14	1,89	2,93

$$y(2; 16,875^\circ) = y_4 = 0,99,$$

$$f^5(16,875^\circ) = y(2; 16,875^\circ) - 1 = 0,99 - 1 = -0,01 > 0,$$

$$\left| f^5(16,875^\circ) \right| = 0,01 < \varepsilon = 0,05.$$

Таким образом, угол пристрелки принимается равным $\alpha^* = 16,875^\circ$. На этом угле интегральная кривая имеет значения y_i из последней таблицы.

Метод Ньютона.

Как видно из проведенного расчета, метод половинного деления при уточнении нуля α^* функции $f(\alpha)$ очень медленно сходится. Для ускорения итерационного процесса применим метод Ньютона, для чего на первой итерации примем $\alpha_0 = 45^\circ$. Результаты расчетов по методу Эйлера с использованием метода половинного деления приведены в таблице первой итерации, из которой следует, что $y(2; 45^\circ) = y_4 = 1,952214 \approx 1,952$. Для проведения второй итерации вычислим α_1 так:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_0 = \alpha_0 + \frac{y(2) - y(2; 45^\circ)}{y(2; 45^\circ + \delta) - y(2; 45^\circ)} \delta,$$

где δ примем равным -10° (угол α нужно уменьшать, поскольку $f^1(45^\circ) = 0,952 > 0$, а $f(\alpha^*) = 0$).

С углом $\alpha = \alpha_0 + \delta = 45^\circ - 10^\circ = 35^\circ$ решается задача Коши методом Эйлера с шагом $h = 0,25$, $z(1) = \operatorname{tg} 35^\circ = 0,700208 \approx 0,7$. В результате чего получаем таблицу

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
y_i	0	0,175	0,456	0,891	1,540
z_i	0,7	1,125	1,741	2,593	3,730

$y(2; 35^\circ) = y_4 = 1,539714$ (в таблице округляем до 3-х знаков после запятой).

На 2-й итерации

$$\alpha_1 = 45^\circ + \frac{y(2) - y(2; 45^\circ)}{y(2; 35^\circ) - y(2; 45^\circ)} \cdot (-10^\circ) = 21,91605^\circ \approx 21,92;$$

$$\operatorname{tg} 21,91605^\circ = 0,402323.$$

С этим α_1 на второй итерации решается задача Коши, результаты решения которой приведены в таблице на 3-й итерации метода половинного деления, откуда $y(2; 21,92^\circ) = y_4 = 1,130408$, а $|f^2(21,92^\circ)| = 0,130 > \varepsilon = 0,05$.

На 3-й итерации

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \frac{y(2) - y(2; 21,92^\circ)}{y(2; 45^\circ) - y(2; 21,92^\circ)} (45^\circ - 21,92^\circ) = \\ &= 21,92^\circ + \frac{1 - 1,130}{1,953 - 1,130} (45^\circ - 21,92^\circ) \approx 18,25^\circ; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 18,25^\circ \approx 0,3298$$

Решая задачу Коши с этим углом $\alpha_2 = 18,25^\circ$, получаем

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,25	1,5	1,75	2,04
y_i	0	0,083	0,248	0,545	1,031
z_i	0,33	0,663	1,186	1,946	2,990

$$y(2; 18,25^\circ) = y_4 = 1,031;$$

$$|f^3(18,25^\circ)| = |y(2; 18,25^\circ) - 1| = |1,031 - 1| = 0,031 < \varepsilon = 0,5.$$

Таким образом, точность выполнена. Видно, что метод Ньютона сходится быстрее метода половинного деления. Ответом являются значения y_i из последней таблицы.

Программа для решения примера 9.1. методом пристрелки с применением метода Ньютона (2 варианта для точности $\varepsilon = 0,05$ и $\varepsilon = 0,001$, шаг $h = (2 - 1) / n$):

Исходные Данные :

$$y'' = y'/x + x^2$$

Y(1) = 0

Y(2) = 1

E= 0,05

n= 4

Итерации	Угол	Y[n]
0	45	1,95221
1	21,90005	1,129962
2	18,24898	1,030593

Решение :

i	0	1	2	3	4
xi	1	1,25	1,5	1,75	2
yi	0	0,0824327	0,247974	0,544279	1,03059

Решить

Исходные Данные :

$$y'' = y'/x + x^2$$

Y(1) = 0

Y(2) = 1

E= 0,001

n= 5

Итерации	Угол	Y[n]
0	45	2,06649
1	19,5899	1,164725
2	14,94822	1,040259
3	13,44686	1,001223
4	13,39982	1,000008

Решение :

i	0	1	2	3	4	5
xi	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
yi	0	0,0476461	0,144821	0,315793	0,589588	1,000008

Решить

```

unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, Math, Grids ;
type
  TForm1 = class(TForm)
  Label1: TLabel;
  Label2: TLabel;
  Label3: TLabel;
  Label4: TLabel;

```

```

Label7: TLabel;
Button1: TButton;
Label8: TLabel;
Edit1: TEdit;
Edit2: TEdit;
Edit3: TEdit;
Edit4: TEdit;
Edit5: TEdit;
StringGrid1: TStringGrid;
StringGrid2: TStringGrid;
Label5: TLabel;
Edit6: TEdit;
Label6: TLabel;
procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
private
{ Private declarations }
public
{ Public declarations }
end;
var
Form1: TForm1;
i,j,kon,n : integer;
tg,tg_t,yn,yn_t,Y1,Y2: array[0..5000] of real;
tg1,prov:real;
A,B,am,bm,h,E : real;
implementation
{$R *.dfm}
//Метод Эйлера
function eler(x,y,z,h:real; n:integer;ST:TStringGrid):real;
var
zz,yy,xx : array[0..50] of real;
begin
xx[0]:=x;
yy[0]:=y;
zz[0]:=z;
ST.Cells[1,0]:='0';
ST.Cells[1,1]:=floatToStrf(xx[0],ffGeneral,6,5);
for i:=1 to n do begin
xx[i]:=xx[i-1]+h;
ST.Cells[i+1,0]:=inttostr(i);

```

```

ST.Cells[i+1,1]:=floatToStr(xx[i],ffGeneral,6,5);
end;
ST.Cells[1,2]:=floatToStr(yy[0], ffGeneral,6,5);
for i:=1 to n do begin
yy[i]:=yy[i-1]+h*zz[i-1];
zz[i]:=zz[i-1]+h*(zz[i-1]/xx[i-1]+sqr(xx[i-1]));
ST.Cells[i+1,2]:=floatToStr(yy[i], ffGeneral,6,5);
end;
Result:=yy[n];
end;
//вычисление угла
function ttg(ugol:real):real;
var ug:real;
begin
ug:=ArcTan(ugol)*180/PI;
result:=ug;
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var zz,yy,xx : array[0..5] of real;
x,y,z,h:real;
begin
E:=StrToFloat(edit5.text); //Запись исходных данных в переменные
A:=StrToFloat(edit2.Text);
B:=StrToFloat(edit4.Text);
am:=StrToFloat(edit1.Text);
bm:=StrToFloat(edit3.Text);
n:=strtoint(edit6.Text);
h:=(bm-am)/n;
StringGrid2.ColCount:=n+2;
tg1:=(B-A)/(bm-am);
tg[0]:=ttg(tg1);
tg_t[0]:=ttg(tg1);
yn[0]:=eler(am,a,tg1,h,n,StringGrid2);
yn_t[0]:=eler(am,a,tg1,h,n,StringGrid2);
StringGrid1.Cells[0,1]:='0';
StringGrid1.Cells[1,1]:=floatostr(tg[0]);
StringGrid1.Cells[2,1]:=floatostrf(yn[0], ffGeneral,6,5);
if (abs(yn[0]-B))>E then begin
if (yn[0]-B)>0 then kon:=-10; //проверка поправки угла
if (yn[0]-B)<0 then kon:=10; //проверка поправки угла
end;

```

```

// нахождение tg[1]
J:=1;
yn_t[j]:=eler(am,A,tan((tg_t[j-1]+kon)*pi/180),h,n,StringGrid2);
tg_t[j]:=tg[j-1]+((B-Yn[j-1])/(yn_t[j]- yn[j-1]))*kon ;
tg[j]:=tan(tg_t[j]*pi/180);
yn_t[j]:=eler(am,A,tg[j],h,n,StringGrid2);
StringGrid1.Cells[0,j+1]:=IntToStr(j);
StringGrid1.Cells[1,j+1]:=floatostrf(tg_t[j],ffGeneral,7,5);
StringGrid1.Cells[2,j+1]:=floatostrf(y4_t[j], ffGeneral,7,5);
//цикл поиска решения
repeat
StringGrid1.RowCount:=j+3;
j:=j+1;
tg_t[j]:=tg_t[j-1]+((B-Yn_t[j-1])/(Yn_t[j-1]-Yn_t[j-2]))*(tg_t[j-1]-tg_t[j-2]));
tg[j]:=tan(tg_t[j]*pi/180);
Yn_t[j]:=eler(am,A,tg[j],h,n,StringGrid2);
StringGrid1.Cells[0,j+1]:=IntToStr(j);
StringGrid1.Cells[1,j+1]:=floatostrf(tg_t[j],ffGeneral,7,5);
StringGrid1.Cells[2,j+1]:=floatostrf(y4_t[j], ffGeneral,7,5);
until abs(yn_t[j]-B)<=E; //проверка условия выхода
end;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
StringGrid1.Cells[0,0]:='Итерации';
StringGrid1.Cells[1,0]:='Угол';
StringGrid1.Cells[2,0]:='Y[n]';
StringGrid2.Cells[0,0]:='i';
StringGrid2.Cells[0,1]:='xi';
StringGrid2.Cells[0,2]:='yi';
end; end.

```

Упражнения. Решить краевую задачу методом пристрелки с точностью $\varepsilon = 0,05$ с шагом $h = 0,25$.

9.1. $(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0, \quad y(2) = -6, \quad y(3) = 0.$

Ответ: точное решение $y(x) = 6x - 18.$

9.2. $x(x + 4)y'' - (2x + 4)y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 4.$

Ответ: точное решение $y(x) = x^2 + x + 2.$

9.3. $y'' = e^x + \sin y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$

Образцы постановки лабораторных работ.

Лабораторная работа №1

Численное решение ОДУ методами Эйлера.

Задание. Используя методы Эйлера, серединных точек и Эйлера-Коши, найти численное решение ОДУ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0,1$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Уравнения по вариантам

В-т	Уравнение	x_0	y_0	$[a, b]$	Точное решение
1	$y'(x) = \frac{1+y^2}{2x}$	1	0	[1;2]	$y(x) = \operatorname{tg}(\ln \sqrt{x})$
2	$y' = -2xy + xe^{-x^2}$	0	0	[0;1]	$y = \left(e^{-x^2} \cdot x^2 \right) / 2$
3	$y' = -y^2 - 1/x^4$	1	1	[1;2]	$y = -\left(x - \operatorname{tg} \frac{-1+x}{x} \right) / x^2$
4	$y' = -y \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$	0	0	[0;1]	$y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$
5	$y' = -y \operatorname{tg} x + \sin 2x$	0	-1	[0;1]	$y = -2 \cos^2 x + \cos x$
6	$y' = (x-1)y/x^2$	1	e	[1;2]	$y = xe^{1/x}$
7	$y' = (x+y)^2$	0	0	[0;1]	$y = \operatorname{tg} x - x$
8	$y' = x^2(y^2 + 1)$	0	0	[0;1]	$y = \operatorname{tg}(x^3/3)$
9	$y' = x^2 - y/(2x)$	1	1	[1;2]	$y = 2x^3/7 + 5/(7\sqrt{x})$
10	$y' = -x^2 - y/x$	1	0.75	[1;2]	$y = (-0,25x^4 + 1) / x$

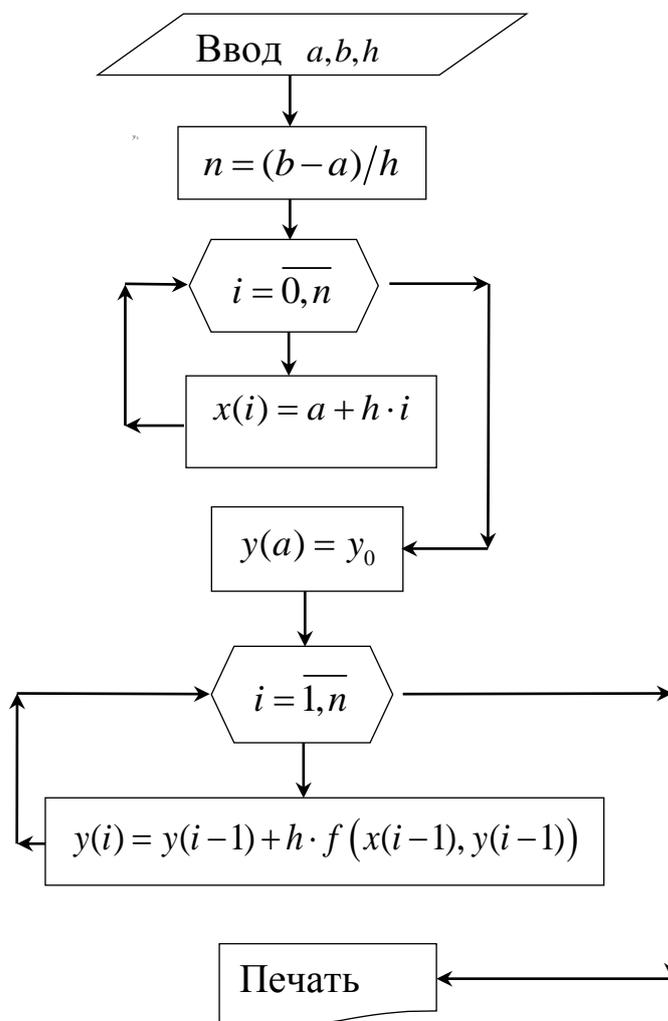
Порядок выполнения работы

1. Вычислить вручную y_1 всеми предложенными методами.
2. Составить блок-схемы методами серединных точек и Эйлера-Коши.
3. Составить программы решения поставленной задачи тремя заданными методами.
4. Вывести таблицу (выписать табличные значения с верными значащими цифрами)

x_i	y_i^1	y_i^2	y_i^3	$y(x_i)$	$ y_i^1 - y(x_i) $	$ y_i^2 - y(x_i) $	$ y_i^3 - y(x_i) $
...

где y_i^1 – приближение к значению точного решения в точке x_i , найденное вычислением по методу Эйлера, y_i^2 – приближение, найденное методом серединных точек, y_i^3 – методом Эйлера-Коши, $y(x_i)$ – точное решение, в последующие три столбца записать погрешности полученных численными методами решений. Построить ломаную Эйлера.

Блок-схема метода Эйлера решения задачи Коши $y'(x) = f(x, y)$ на $[a, b]$ с шагом h и $y(a) = y_0$.



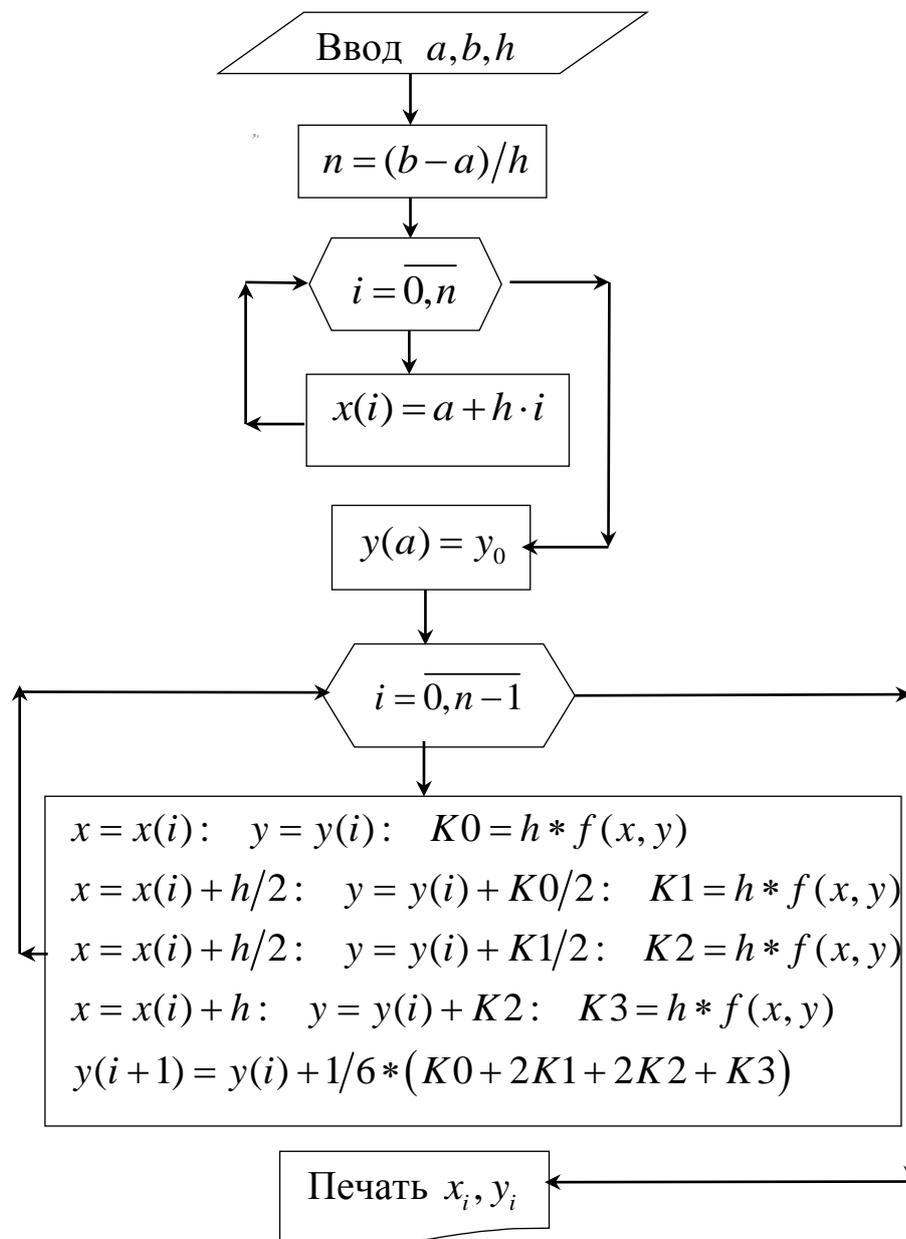
Лабораторная работа №2

Численное решение ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Задание 1.

Используя метод Р-К 4-го порядка найти численное решение ОДУ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0,1$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Вариант задачи взять из предыдущей лабораторной работы. Составить программу по представленной блок-схеме решения задачи Коши.

Блок-схема метода Рунге-Кутты решения задачи Коши $y'(x) = f(x, y)$ на $[a, b]$ с шагом h и $y(a) = y_0$.



Порядок выполнения работы

1. Вычислить вручную y_1 методом Рунге-Кутты.

2. Составить программу решения поставленной задачи методом Рунге-Кутты, использовать блок-схему.

3. Вывести таблицу (выписать табличные значения с верными значащими цифрами). Сравнить полученное решение с решением соответствующей задачи полученной методом Эйлера и точным решением.

x_i	y_i^1	y_i^2	Точное решение
...

где y_i^1 – приближение к значению точного решения в точке x_i , найденное вычислением по методу Эйлера, y_i^2 – приближение, найденное методом Р-К.

Задание 2.

Решить задачу Коши методом Р-К для ОДУ второго порядка на указанном отрезке с заданным шагом $h=0,1$. Полученное решение сравнить с точным. Определить погрешность решения.

Уравнения по вариантам

Вариант	Уравнение	$[a, b]$	Точное решение
1	$y'' + y - \sin 3x = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	$[0; 1]$	$y = \cos x + \frac{11}{8} \sin x - \frac{\sin 3x}{8}$
2	$y'' + y - 2 \cos x = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 0$	$[0; 1]$	$y = x \sin x + \cos x$
3	$xy'' + y' = 0,$ $y(1) = 1, y'(1) = 1$	$[1; 2]$	$y = 1 + \ln x $
4	$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0,$ $y(2) = 7, y'(2) = 5$	$[2; 3]$	$y = x^2 + x + 1$
5	$x^2 y'' - 12y = 0,$ $y(1) = 2, y'(1) = 1$	$[1; 2]$	$y = x^4 + x^{-3}$
6	$x^2 y'' + xy' - y - 3x^2 = 0,$ $y(1) = 3, y'(1) = 2$	$[1; 2]$	$y = x^2 + x + x^{-1}$
7	$x^2 y'' + (x+1)y' - y = 0,$ $y(1) = 2 + e, y'(1) = 1$	$[1; 2]$	$y = x + 1 + xe^{1/x}$

8	$(x-2)^2 y'' - (x-2)y' - 3y = 0,$ $y(3) = 2, y'(3) = 2$	[3;4]	$y = (x-2)^3 + (x-2)^{-1}$
9	$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	[0;1]	$y = (1+x)e^{x^2}$
10	$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$	[0;1]	$y = (1+x)e^{-x^2}$

Порядок выполнения работы

1. Ввести новые переменные и свести исходную задачу для ОДУ второго порядка к решению системы ОДУ первого порядка.
2. Составить блок-схему и программу решения поставленной задачи методом Рунге-Кутты.
3. Вывести таблицу (выписать табличные значения с верными значащими цифрами)

Сравнить полученное решение с точным решением, найти погрешность.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
...

где y_i – приближение к значению точного решения в точке x_i , найденное вычислением по методу Рунге-Кутты, $y(x_i)$ – точное решение.

Лабораторная работа №3

Численное решение ОДУ четырехшаговым методом Адамса.

Задание 1.

Используя метод Адамса найти численное решение ОДУ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0,1$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Вариант задачи взять из лабораторной работы №1, использовать подсчитанные значения y_1, y_2, y_3 методом Рунге-Кутты для соответствующей задачи (Лабораторная работа №2).

Порядок выполнения работы

1. Вычислить вручную y_4 методом Адамса.
2. Составить блок-схему и программу решения поставленной задачи методом Адамса.

3. Вычисления вести с точностью до 10^{-5} . Сравнить полученное решение с точным решением. Оценить погрешность.

i	x_i	y_i	Точное решение	Погрешность
...

где y_i – приближение к значению точного решения в точке x_i , начиная с $i = 4$ найденное вычислением по методу Адамса (значения y_i , $i = 0, 3$ берутся из начального условия и решений методом Рунге-Кутты).

Задание 2.

Решить задачу Коши методом Адамса для ОДУ второго порядка на указанном отрезке с заданным шагом $h = 0,1$, полученное решение сравнить с точным. Определить погрешность решения. Соответствующий вариант взять из Лабораторной работы №2. Необходимые начальные значения взять из решения данной задачи методом Рунге-Кутты.

Порядок выполнения работы

Ввести новые переменные и свести исходную задачу для ОДУ второго порядка к решению системы ОДУ первого порядка.

1. Составить блок-схему и программу решения поставленной задачи методом Адамса.

2. Вывести таблицу (выписать табличные значения с верными значащими цифрами)

3. Сравнить полученное решение с точным решением, найти погрешность.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
...

где y_i – приближение к значению точного решения в точке x_i , найденное вычислением по методу Адамса, начиная с $i = 4$, $y(x_i)$ – точное решение.

Лабораторная работа №4

Численное решение краевой задачи методом прогонки.

Задание.

Методом конечных разностей с использованием метода прогонки решить следующие краевые задачи с заданным шагом $h = (b - a)/10$. Сравнить полученное решение с точным.

Уравнения по вариантам

Вариант	Краевая задача	Точное решение
1	$xy'' + 2y' - xy = 0$ $y'(1) = e^{-1}, y(2) = 0,5e^{-2}$	$y(x) = \frac{e^x}{x}$
2	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0,$ $2y(-2) + y'(-2) = -9,$ $y'(0) = 1$	$y(x) = 3x + e^{-2x}$
3	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$ $y'(0) = 1, y'(1) - 2y(1) = 0$	$y(x) = e^x(x^2 + 1)$
4	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$ $y'(1) = 3e, y'(2) - 2y(2) = 0$	$y(x) = e^x x^2$
5	$x(x-1)y'' - xy' + y = 0,$ $y'(1) = 2, 2y'(2) - y(2) = 1$	$y(x) = 1 + x + x \ln x $
6	$x(x-1)y'' - xy' + y = 0,$ $y'(1) = 3, y(3) - 3y'(3) = -4$	$y(x) = 2 + x + 2x \ln x $
7	$(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0,$ $y'(0) = 3/4, y'(1) = \frac{e^2(e+2)}{(e+1)^2}$	$y(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$
8	$(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0,$ $y'(0) = 1, y'(1) - y(1) = 1$	$y(x) = e^x - 1$
9	$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0,$ $y'(0) = 1, 4y(2) - y'(2) = 23e^{-4}$	$y(x) = (1+x)e^{-x^2}$
10	$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0,$ $y'(0) = 4, y'(1) - 2y(1) = -4$	$y(x) = 2x + 1 + e^{2x}$

Порядок выполнения работы

Основная идея: свести решение краевой задачи для дифференциального уравнения к решению СЛАУ.

I. Работа с программой *Excel*. Заполнить таблицу. Выводить значения с тремя знаками после запятой.

1. Выписать узловые точки $x_i = a + hi, i = \overline{0,10}$.

2. Аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение с помощью симметричных конечно-разностных отношений

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

3. Аппроксимацию производных в краевых условиях выполнить с $O(h^2)$, таким образом заменить краевые условия соответствующими алгебраическими уравнениями (при $i=0$ и $i=n$).

4. Получить СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

выписать выражения для коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i . Заполнить соответствующие столбцы в таблице.

5. В зависимости от вида краевых условий дополнить СЛАУ соответствующими уравнениями (см. п.3), например (8.8) при $i=0$ в случае краевого условия вида (8.31) и (8.9) при $i=n$ в случае краевого условия вида (8.32).

6. *Прямой ход:* используя формулы для прогоночных коэффициентов

$$\xi_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \xi_{i-1}}, \quad \eta_i = \frac{d_i - a_i \eta_{i-1}}{b_i + a_i \xi_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (7.10)$$

и соответствующие формулы при $i=0$ и $i=n$ в зависимости от вида краевых условий (см. раздел 7 и 8) заполняем соответствующие столбцы в таблице (помним, что $a_0 = c_n = 0$).

7. *Обратный ход:* заполняем девятый столбец (снизу вверх) по формулам

$$y_i = \xi_i y_{i+1} + \eta_i, \quad i = \overline{n-1, 1},$$

и формулам для $i=0$ и $i=n$ в зависимости от вида краевых условий

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i	ξ_i	η_i	y_i	\tilde{y}_i	$ \tilde{y}_i - y_i $
...

8. Сравнить полученное решение с точным \tilde{y}_i .

II. 1. Составить блок схему решения краевой задачи по заданному варианту.

2. Составить программу и решить поставленную задачу с шагом $h = (b-a)/20$.

3. Вывести следующую таблицу. Результаты выводить с пятью знаками после запятой.

i	x_i	y_i	\tilde{y}_i	$ \tilde{y}_i - y_i $
...

Лабораторная работа №5

Численное решение краевой задачи методом пристрелки.

Задание.

Методом пристрелки с использованием метода половинного деления или Ньютона с точностью $\varepsilon = 0,01$ решить следующие краевые задачи для ОДУ 2-го порядка (применить один из методов: Эйлера, Эйлера-Коши или Рунге-Кутты) с шагом $h = 0,1$.

Задачи по вариантам

№	ОДУ	Краевые условия
1	$y'' = \cos x \cdot y' - x^2$	$y(0) = 1,$ $y(1) = 1,5$
2	$y'' = -x \cdot y' + e^x$	$y(0) = 0,$ $y(1) = 1$
3	$y'' = 3 \cos x \cdot y + \operatorname{tg} x$	$y(0) = 3,$ $y(1) = 2$
4	$y'' = e^x y' + e^{-x}$	$y(0) = 1,$ $y'(1) = 1$
5	$y'' = \sin x \cdot y' - \cos x$	$y(0) = 0,$ $y'(1) = 1$
6	$y'' = \cos x \cdot y + \sin x$	$y(1) = 3,$ $y(2) = 1$
7	$y'' = 2x^2 \cdot y + \cos x$	$y(1) = 1,$ $y(2) = 2$
8	$y'' = x^2 \cdot y - e^x$	$y(0) = 1,$ $y(1) = 0$
9	$y'' = e^{-x} y' + x$	$y(0) = 0,$ $y'(1) = 2$
10	$y'' = \ln x \cdot y + \sin x$	$y(1) = 1,$ $y(2) = 0$

Порядок выполнения работы

1. Свести данную краевую задачу к задаче Коши.
2. Для решения задачи Коши использовать методы Эйлера, Эйлера-Коши или Рунге-Кутта.
3. Определить интервал внутри которого находится угол пристрелки α^*
4. Уточнить угол пристрелки методом половинного деления или методом Ньютона и т.д. (см. алгоритм метода пристрелки для метода половинного деления или итерационный процесс Ньютона).
5. Окончание итерационного процесса осуществлять при выполнении условия $|y(b, \alpha) - B| \leq \varepsilon$ или в случае задания граничного условия 2-го рода на правой границе до выполнения условия $\left| \frac{y(b) - y(b-h)}{h} - y'(b) \right| \leq \varepsilon$.
6. Составить программу, произвести расчет полученной задачи Коши до достижения заданной точности, вывести таблицу.

№ итерации	i	x_i	y_i

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000.
2. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: ООО “Издательский дом Оникс 21 век”, 2005.
3. *Гидаспов В.Ю., Иванов И.Э., Ревизников Д.Л., Стрельцов В.Ю., Формалев В.Ф.* Численные методы. Сборник задач: учеб. пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2007.
4. *Гогейзель Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГТТИ, 1937, гл. II.
5. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: ООО “Издательство Оникс”: ООО “Издательство “Мир и образование”, 2006.
6. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова* Численные методы анализа. – М.: Издательство “ ФИЗМАТЛИТ ”, 1962.
7. *Исаков В. Н.* Элементы численных методов. – М.: Издательский центр “Академия”, 2003.
8. *Копченова Н. В., Марон И. А.* Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2008.
9. *Пиаджио Г.* Интегрирование дифференциальных уравнений, ГТТИ, 1933, гл. IX.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука. 1983.
11. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
12. *Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Пешихов И.М.* Практикум по вычислительной математике. – Ростов н/Д.: Издательство “Феникс”, 2008.
13. *Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л.* Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. – М.: Наука, 1975.

2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1960. Т.2.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1976. Т.2.
4. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование. –М.: ИД “Форум”, 2008.
5. Тыртыщников Е.Е. Методы численного анализа. – М.: Издательский центр “Академия”, 2007.
7. Axelsson O. Iterative solution methods. Cambridge University Press. 1994.
8. Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester University Press, NY. 1992.

Интернет ресурсы

http://www.uchites.ru/chislennye_metody/posobie (Учитесь.ру – собрание информации учебного характера: лекции, лабораторные и курсовые работы, дополнительные материалы)

<http://exponenta.ru/educat/class/courses/student/vvm/examples.asp> (exponenta.ru – образовательный математический сайт, выбран раздел “вычислительная математика”))

<http://afrodita.phys.msu.ru/download/priklonsky/lections> (курс лекций по численным методам)

http://any-book.org/category/Fayly-1/Matematika_i_prikladnaya_matematika-23/Vychislitel'naya_matematika-24/ (книги в формате doc, выбран раздел “вычислительная математика”)

<http://keldysh.ru/comma/> (электронный учебник по численным методам)

<http://www.intuit.ru> – Интернет университет информационных технологий

Содержание

Введение	3
Методы решения ОДУ. Основные понятия	4
1. Задачи с начальными условиями для ОДУ (задача Коши)	7
Приближенные методы.	
1). Метод последовательного дифференцирования	8
2). Метод неопределенных коэффициентов	11
3). Метод последовательных приближений	14
2. Численные методы решения задачи Коши	18
Метод Эйлера	20
О модификациях метода Эйлера	25
3. Методы Рунге-Кутты	35
4. Многошаговые методы. Метод Адамса	51
5. Краевые задачи для ОДУ	67
Общая постановка краевой задачи. Линейная краевая задача.	
Постановка линейных краевых задач для ОДУ 2-го порядка.	
6. Редукция к задаче Коши двухточечной краевой задачи для линейного уравнения 2-го порядка	71
7. Конечно-разностный метод с использованием метода прогонки решения краевых задач для ОДУ	74
8. Конечно-разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные	83
9. Метод стрельбы (пристрелки)	94
Образцы постановок лабораторных работ	106
Список литературы	116
Интернет-ресурсы	117