

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа

Л.А. Аксентьев, *А.Н. Ахметова*, *А.Н. Калимуллина*

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ПЛОСКИХ ПОЛЕЙ

Методическое пособие к курсу

Комплексный анализ

Часть II

КАЗАНЬ – 2022

УДК 517.54

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского федерального университета
Протокол № от г.

Рецензент
доцент Д.Ф. Абзалилов

Аксентьев Л.А., **Ахметова А.Н.**, **Калимуллина А.Н.**

Примеры расчетов плоских полей. Учебное пособие к курсу
«Комплексный анализ», часть II. – Казань: КФУ, 2022 г., 59 с.

Переработанное учебно-методическое пособие, первая версия которого опубликовано в 2010 году. Пособие предназначено для студентов-механиков II-III курсов механико-математического факультета. Может быть рекомендовано преподавателям для чтения спецкурсов, а также студентам как материал для самостоятельной научно-исследовательской работы и для выполнения курсовых работ.

©Казанский федеральный
университет, 2022

Введение

Вторая часть пособия состоит из трех параграфов и дополняет первую часть пособия [5] с двумя параграфами, которые случайно были тоже названы частями. Поэтому попутно отметим, что начальный заголовок на странице 4 пособия [5] лучше назвать параграфом 1.1, а начальный заголовок на странице 24 — параграфом 1.2.

Три параграфа второй части содержат 40 задач следующего содержания. В § 2.1 приведены расчеты гидромеханических полей с границами в форме дуг окружностей. При этом для сравнения использовались результаты курсовых работ студентов И.М. Камалутдинова и А.А. Козловского.

В § 2.2 формулируются и решаются задачи на аналогии между плоскими полями разной физической природы.

В § 2.3 изучаются плоские поля, порожденные годографом градиента конформного радиуса. Такие поля имеют приложения к обратным краевым задачам [12].

Авторский коллектив второй части пособия дополнен Альбиной Наилевой Ахметовой, основным вкладом которой являются задачи § 2.3. В обсуждении и составлении остальных задач принимали участие все три автора.

§ 2.1. Гидромеханические поля с границами в форме дуг окружностей

1. Дополним решение задачи 6 нашего пособия ([5], с. 29-31).

▷ Чтобы обеспечить сходимость бесконечного произведения, в формулах для комплексного потенциала под знаком произведения нужно добавить множители c_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. За c_k можно принять разные величины, например,

$$\tilde{c}_k = \frac{1 - q^{2k}/\bar{p}_1}{1 - q^{2k}p_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Менее громоздкое выражение получается, если принять

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(c_k \frac{\zeta - q^{2k}p_1}{\zeta - q^{2k}/\bar{p}_1} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta - q^{2k}p_1}{\zeta - q^{2k}/\bar{p}_1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|p_1|^2} \frac{\zeta - q^{-2k}p_1}{\zeta - q^{-2k}/\bar{p}_1} \right),$$

$$\text{т. е. } c_k = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 1/|p_1|^2, & k < 0. \end{cases}$$

Эти изменения нужны для того, чтобы общий член каждого из двух произведений стремился к 1 при стремлении k к ∞ .

В книге ([7], с. 233) аналогичное бесконечное произведение записано более экономно и однотипно. В обозначениях задачи 6 получим следующую форму Н.И. Ахиезера для бесконечного произведения

$$F(\zeta, p_1) = \frac{(1 - \zeta/p_1) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}\zeta/p_1)(1 - q^{2k}p_1/\zeta)}{(1 - \bar{p}_1\zeta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}\bar{p}_1\zeta)(1 - q^{2k}/(\bar{p}_1\zeta))}$$

и для комплексного потенциала

$$w = \ln F(\zeta, p_1).$$

После логарифмирования слагаемые вида $\ln(1 - q^{2k}\psi(\zeta, p_1))$, $k \geq 2$, оцениваются величинами cq^{2k} , что обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость бесконечного произведения в замкнутом кольце $q \leq |\zeta| \leq 1$.

Нетрудно показать, что функция $\Omega = F(\zeta, p_1)$, будет отображать кольцо $q < |\zeta| < 1$ на круг (с центром в $\Omega = 0$) с концентрическим разрезом. Картина линий тока в плоскости ζ получится переносом линий тока из плоскости Ω , являющихся окружностями с центром в 0. Концевым точкам концентрического разреза в плоскости Ω будут соответствовать критические точки комплексного потенциала в плоскости ζ — точки разветвления и схода потока. В них скорость обратится в 0.

Аналогичное построение (как в [7], с. 233) можно применить и в случае, когда одна из граничных окружностей становится прямой линией. Тогда, несколько изменив формулу на с. 30 из [5], получим такой комплексный потенциал

$$w = P \sum_{k=1}^{\infty} [\ln(1 - z/p_{4k-3}) + \ln(1 - z/p_{4k})] + \\ + \bar{P} \sum_{k=1}^{\infty} [\ln(1 - z/p_{4k-2}) + \ln(1 - z/p_{4k-1})].$$

Схематичное построение линий тока в этом случае предлагается проделывать самостоятельно. ◁

2. В физической плоскости $z = x + iy$ рассмотрим непроницаемый крыловой профиль AB в форме круговой луночки (рис. 1), обтекаемый установившимся плоскопараллельным потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Скорость на бесконечности $v_{\infty} = v_0 e^{i\beta}$

фиксирована. Известны геометрические характеристики профиля: хорда, кривизна верхней k_1 и нижней k_2 дужек окружностей.

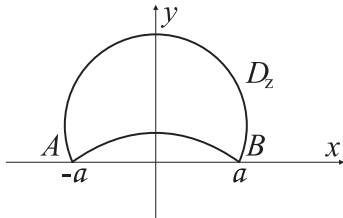


Рис. 1

углы, которые образуют касательные к двум дужкам окружностей в точке a с положительным направлением действительной оси. Тогда $\sin \delta_m = a/R_m = ak_m$ и поэтому $\delta_m = \arcsin(ak_m)$. Внутренний угол профиля в его концевых точках будет $\delta = \delta_1 - \delta_2$.

Для построения комплексного потенциала нужно найти функцию $\zeta = f(z)$, которая отображает область D_z (внешность профиля в плоскости z) на область $|\zeta| > R_0$ с нормировкой $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ (при этом величина R_0 определится единственным образом).

Построение отображающей функции проведем поэтапно.

Этап 1. Функция $z_1 = \frac{z+a}{z-a}$ переведет круговую луночку на область, изображенную на рис. 2, при этом $z = \infty \rightarrow 1$, $z = -a \rightarrow 0$, $z = a \rightarrow \infty$.

Этап 2. Функцией $z_2 = z_1 e^{i(\pi-\delta_1)}$ повернем область из плоскости z_1 , как показано на рисунке 3. При этом точка $z_1 = 1$ сместится в $z_2 = e^{i(\pi-\delta_1)}$.

Этап 3. Функцией $z_3 = z_2^{\frac{\pi}{2\pi-\delta}}$ переведем область из плоскости z_2 на верхнюю полуплоскость (при этом $z_2 = e^{i(\pi-\delta_1)}$ перейдет в $z_3 = e^{\frac{i\pi(\pi-\delta_1)}{2\pi-\delta}}$).

Требуется найти комплексный потенциал $w(z)$, циркуляцию Γ и подъемную силу.

▷ Обозначим через δ_m , $m = 1, 2$,

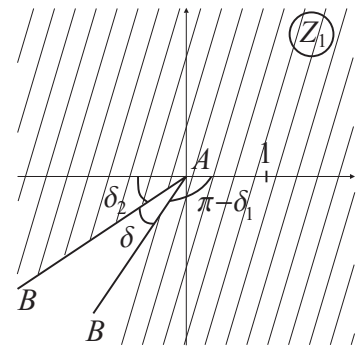


Рис. 2

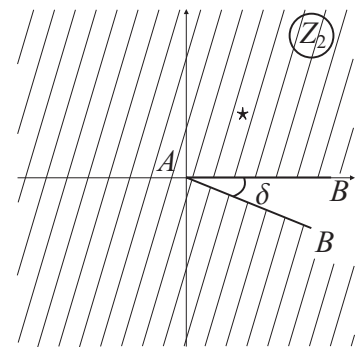


Рис. 3

Этап 4. Верхнюю полуплоскость переведем во внешность единичной окружности так, чтобы точка $z_3 = e^{\frac{i\pi(\pi-\delta_1)}{2\pi-\delta}}$ перешла в бесконечность, а точка, симметричная с ней относительно вещественной оси, перешла в нуль. Получим дробно-линейную функцию

$$z_4 = \frac{z_3 - e^{-i\pi\frac{\pi-\delta_1}{2\pi-\delta}}}{z_3 - e^{i\pi\frac{\pi-\delta_1}{2\pi-\delta}}},$$

после умножения числителя и знаменателя которой на $e^{-i\pi\frac{\pi-\delta_1}{2\pi-\delta}}$ придем к отображению

$$z_4 = \frac{\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\delta}} - e^{-i\theta}}{\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\delta}} - 1},$$

где $\theta = \frac{2\pi(\pi-\delta_1)}{2\pi-\delta}$ обозначает полярный угол точки разветвления потока, как изображено на рисунке 4 (проверить можно переходом $z_3 = 0$ в $z_4 = e^{-i\theta}$).

Этап 5. Для выполнения условия $f'(\infty) = 1$ отобразим внешность единичной окружности из плоскости z_4 функцией $\zeta = Cz_4$ с постоянной комплексной величиной C . Для определения C считаем предел

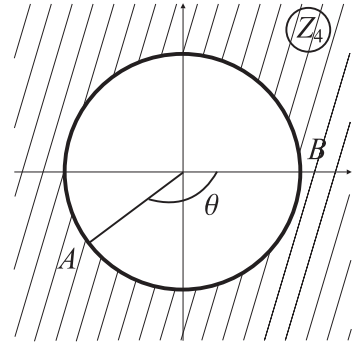


Рис. 4

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_4(z)}{z} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\tau z_4 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right] =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tau}{\left[\frac{(1+a\tau)}{(1-a\tau)} \right]^{\pi/(2\pi-\delta)} - 1} \left[\left[\frac{(1+a\tau)}{(1-a\tau)} \right]^{\pi/(2\pi-\delta)} - e^{-i\theta} \right] \right\} =$$

$$= \left(\text{после применения правила Лопиталья к дроби } \frac{\tau}{\left[\frac{(1+a\tau)}{(1-a\tau)} \right]^{\pi/(2\pi-\delta)} - 1} \right) =$$

$$= \frac{2\pi - \delta}{\pi a} i e^{-i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Теперь видно, что $C \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{z_4(z)}{z} = 1$, если $1/C = \frac{2\pi-\delta}{\pi a} e^{i\frac{\pi-\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$, и

$$R_0 = |C| = \frac{\pi a}{(2\pi - \delta) \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (1)$$

Таким образом, функция

$$\zeta = f(z) = \frac{a\pi e^{-i\frac{\pi-\theta}{2}}}{(2\pi-\delta)\sin(\theta/2)} \frac{\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\delta}} - e^{-2\pi i\frac{\pi-\delta_1}{2\pi-\delta}}}{\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\delta}} - 1} \quad (2)$$

отображает область D_z (рис. 1) на внешность круга с радиусом R_0 (см. формулу (1)), причем осуществляется поворот на угол $\theta/2 - \pi/2$. Поэтому образами угловых точек будут

$$R_0 e^{-i\theta} e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} = -R_0 i e^{-i\frac{\theta}{2}} = A, \quad R_0 e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} = -R_0 i e^{i\frac{\theta}{2}} = B.$$

Комплексный потенциал обтекания круга потенциальным плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости в плоскости ζ со скоростью на бесконечности $v_0 e^{i\beta}$ известен:

$$w(\zeta) = v_0 \left(\zeta e^{-i\beta} + \frac{R_0^2}{\zeta} e^{i\beta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + \tilde{c}. \quad (3)$$

Величину Γ определяем из условия, что B является точкой схода потока в плоскости ζ . Для этого составим уравнение $w'(-R_0 i e^{i\frac{\theta}{2}}) = 0$, которому с учетом (3) придадим вид

$$v_0 (e^{-i\beta} + e^{-i\theta} e^{i\beta}) + \frac{\Gamma e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\pi R_0} = 0,$$

отсюда

$$\Gamma = -4\pi v_0 R_0 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \beta\right). \quad (4)$$

Комплексный потенциал потока запишется в форме

$$w = v_0 (e^{-i\beta} f(z) + R_0^2 e^{i\beta} / f(z)) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln f(z), \quad (5)$$

причем $f(z)$ и Γ определяются по формулам (2) и (4) соответственно.

При $\beta \neq 0$ точка разветвления потока будет отличаться от A . Совпадение точки разветвления потока с A получится только при $\beta = 0$.

Вектор подъемной силы запишем по общей формуле $\vec{P} = -i\Gamma\vec{v}_\infty$ из ([11], с. 245) при $\rho = 1$. Будем иметь

$$\vec{P} = i4\pi v_0^2 R_0 e^{i\beta} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \beta\right). \triangleleft$$

3. Частным случаем задачи **2** при $\delta = 0$ является задача о комплексном потенциале при обтекании дуги Жуковского (которая является предельным положением профиля Жуковского). Полученные при решении задачи **2** формулы можно переписать следующим образом.

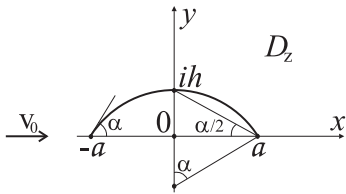


Рис. 5

\triangleright Вид (5) комплексного потенциала сохранится. Изменяются формулы для R_0 , Γ и $f(z)$ после предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$. При $\beta = 0$ будем иметь

$$\vec{v}(\infty) = v_0, \quad \delta_1 = \delta_2 = \alpha, \quad \theta = \pi - \alpha,$$

$$\Gamma = -4\pi v_0 R_0 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad R_0 = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2}.$$

Используем еще два соотношения, которые определяют два параметра: точку $ih = ia \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, в которой пересекается дуга и мнимая ось, и длину дуги $l = \frac{2\alpha a}{\sin \alpha}$. Эти параметры легко связать, выразив a из второго соотношения и подставив в первое

$$h = \frac{l \sin \alpha}{2\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{l \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\alpha}. \quad (6)$$

Представим переход отображающей функции $f(z)$ из положения области D_z на рисунке 1 в положение этой области на рисунке 5. Подставив в формулу (2) выражения $\pi - \theta = \alpha$ и $\pi/(2\pi - \delta) = 1/2$, получим

$$\zeta = f(z) = \frac{a\pi e^{-i\alpha/2}}{2\pi \cos(\alpha/2)} \frac{\sqrt{z+a} + e^{i\alpha} \sqrt{z-a}}{\sqrt{z+a} - \sqrt{z-a}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ae^{-i\alpha/2}}{2 \cos(\alpha/2)} \frac{1}{2a} \left[\left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) (1 + e^{i\alpha}) + a (1 - e^{i\alpha}) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) + a (1 - e^{i\alpha}) / (1 + e^{i\alpha}).
\end{aligned}$$

Поэтому с учетом представления для $h = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ окончательно запишем

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) - ih/2. \quad (7)$$

Следовательно, комплексный потенциал для дуги Жуковского на рисунке 5 будет иметь вид (5) с $\beta = 0$, причем $f(z)$ определяется выражением (7). Подъемная сила для этой дуги запишется по формуле

$$\vec{P} = iv_0^2 4\pi \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} = i2\pi v_0^2 h,$$

которую с учетом (6) представим в виде

$$\vec{P} = i2\pi v_0^2 l \frac{(\sin \frac{\alpha}{2})^2}{\alpha}. \quad (8)$$

Отметим, что функцию (7) можно получить непосредственным построением отображения области D_z (рис. 5) на внешность круга с нормировкой $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ ([11], с. 148). ◁

4. Максимизация модуля вектора \vec{P} в виде (8) приводит к определению максимума функции

$$F(\alpha) = \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 / \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

▷ Производная этой функции $F' = \alpha^{-2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 (\alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1)$ имеет один нуль α_0 , расположенный в интервале $(\pi/2, \pi)$. Убедимся в этом с помощью графика функции $\varphi(\alpha) = \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Учтем, что $\varphi(0) = 2$, $\varphi(\pi/2) = \pi/2$, $\varphi(\pi) = 0$ и $\varphi'(\alpha) = [2 \sin^2(\alpha/2)]^{-1} (\sin \alpha - \alpha) < 0$, $0 < \alpha < \pi$.

Пересечением графиков функций $y = \varphi(\alpha)$ и $y = 1$ отыщется точка α_0 , которая даст

$$P_{max} = 2\pi v_0^2 l \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 / \alpha_0.$$

При $\alpha = \pi$ (когда дуга на рисунке 5 замыкается в полную окружность, течение внутри которой остановится) получим две совпадающие формулы для величины подъемной силы: $P_1 = 2v_0^2 l$ из (8) и $P_2 = v_0 \Gamma = \left\{ \Gamma = 4\pi v_0 \frac{l}{2\pi} = 2v_0 l \right.$ обеспечивает существование одной критической точки на окружности радиуса $l/(2\pi) \left. \right\} = 2v_0^2 l$. Предельный переход при $\alpha \rightarrow \pi$ будет плавным и не даст скачка, когда дуга Жуковского замкнется. \triangleleft

5. Определим скорости в ih^\pm , т. е. в точках, расположенных сверху и снизу дуги на рисунке 5 в точке ih .

\triangleright Сопряженная скорость $\overline{v}(z) = w'(z)$ в любой точке $z \in D_z$ на рисунке 5 выражается через отображающую функцию $f(z)$ в форме (7) и ее производную $f'(z)$. Действительно,

$$\begin{aligned} w' &= \left[v_0 \left(1 - \frac{R_0^2}{f^2(z)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{f(z)} \right] f'(z) = \\ &= \left[v_0 \left(1 - 4R_0^2 (z + \sqrt{z^2 - a^2} - ih)^{-2} \right) + \frac{\Gamma}{\pi i} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} - ih \right)^{-1} \right] \times \\ &\quad \times \left(1 + z/\sqrt{z^2 - a^2} \right) / 2. \end{aligned}$$

Выбор значения $\sqrt{z^2 - a^2}$ в точках ih^\pm связан с той ветвью $\sqrt{z^2 - a^2}$, которая на полуоси (a, ∞) около ∞ ведет себя как z , т. е. на этой полуоси $\arg(z + a) = \arg(z - a) = 0$.

Тогда при движении точки z по дугам γ^+ и γ^- из положения на полуоси (a, ∞) в точки ih^+ и ih^- получим (рис. 6)

$$\arg(z^2 - a^2) \Big|_{z=ih^+} = \arg(ih^+ + a) + \arg(ih^+ - a) = \frac{\alpha}{2} + \pi - \frac{\alpha}{2} = \pi,$$

$$\arg(z^2 - a^2)|_{z=ih^-} = \arg(ih^- + a) + \arg(ih^- - a) = \frac{\alpha}{2} - \pi - \frac{\alpha}{2} = -\pi.$$

Поэтому $\sqrt{z^2 - a^2}|_{z=ih^+} = \sqrt{a^2 + h^2}e^{i\pi/2} = i\sqrt{a^2 + h^2}$ и

$$\sqrt{z^2 - a^2}|_{z=ih^-} = \sqrt{a^2 + h^2}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{a^2 + h^2}.$$

Теперь выражение для сопряженной скорости в точках ih^+ и ih^- примет вид

$$w'(ih^\pm) = \left[v_0 \left(1 + a^2 \cos^{-2} \frac{\alpha}{2} (a^2 + h^2)^{-1} \right) + \frac{\Gamma}{\pi i} (\pm i \sqrt{a^2 + h^2})^{-1} \right] \times \\ \times \left(1 \pm \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) / 2 = \left(v_0 \mp \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \left(1 \pm \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right).$$

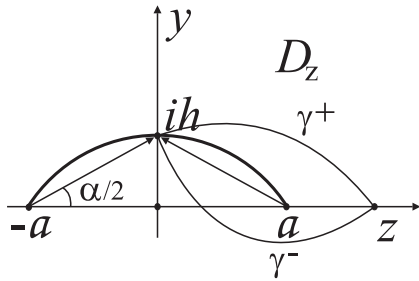


Рис. 6

С учетом того, что $\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \sin \frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} = -\frac{v_0 h}{\sqrt{a^2 + h^2}} = -v_0 \sin \frac{\alpha}{2}$, окончательно заключаем, что

$$v(ih^\pm) = v_0 \left(1 \pm \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2.$$

Скорости оказались вещественными и одинаковыми, когда $\alpha = 0$. При изменении α от 0 до π скорость $v(ih^+)$ растет от v_0 до $4v_0$, а $v(ih^-)$ убывает от v_0 до 0.

Самостоятельно предлагается провести анализ поведения $v(ih^\pm)$ в симметричных случаях, когда отрицательное α меняется от $-\pi$ до 0. <

6. Дугу Жуковского на рисунке 5 можно считать одним из решений внешней обратной краевой задачи (окз) в постановке М.Т. Нужина ([12], с. 33) и в постановке Ф.Д. Гахова ([9], с. 304). Придадим этому решению вид функции, отображающей круг $|\zeta| < 1$ на область D_z (рис. 5).

▷ Производная отображающей функции примет вид

$$F'(\zeta) = \tilde{f}'(\zeta)/\zeta^2,$$

причем $\tilde{f}'(\zeta)$ – производная отображающей функции для соответствующей внутренней обратной краевой задачи. По $\tilde{f}'(\zeta)$ строится уравнение

Гахова

$$\frac{\tilde{f}''(\zeta)}{\tilde{f}'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^2}, \quad (9)$$

одним из решений которого является $\zeta_0 = 0$. Проблема заключается в поиске других корней уравнения Гахова или в обосновании того, что других корней уравнения (9) не будет.

Составим уравнение Гахова. Так как функция (7) отображает область D_z (рис. 5) на внешность круга $|w| > R_0 = \sqrt{a^2 + h^2}/2$, то $F(\zeta) = z(w)$, причем $w = \sqrt{a^2 + h^2}/(2\zeta)$. Функцию $z(w)$ получим из уравнения

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) - ih/2 \Rightarrow$$

$$2w + ih - z = \sqrt{z^2 - a^2} \Rightarrow z = w + ih/2 + a^2(2w + ih)^{-1}/2,$$

поэтому

$$F(\zeta) = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2} \frac{1}{\zeta} + i\frac{h}{2} + \frac{a^2}{2} \frac{\zeta}{\sqrt{a^2 + h^2} + ih\zeta}.$$

После этого нужно перейти к

$$\tilde{f}'(\zeta) = \zeta^2 F'_\zeta = \frac{(a^2 + h^2)^{3/2}}{2} \frac{\zeta^2 - 2ih\zeta/\sqrt{a^2 + h^2} - 1}{(\sqrt{a^2 + h^2} + ih\zeta)^2}$$

и к логарифмической производной от $\tilde{f}'(\zeta)$. С помощью несложных выкладок получим уравнение Гахова в виде

$$\begin{aligned} \left[a^2\zeta/\sqrt{a^2 + h^2} \right] \left(\zeta^2 - 2ih\zeta/\sqrt{a^2 + h^2} - 1 \right)^{-1} \left(\sqrt{a^2 + h^2} + ih\zeta \right)^{-1} = \\ = \bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2). \triangleleft \end{aligned} \quad (10)$$

7. Докажем, что уравнение (10) имеет три корня ([8], с. 71, 72).

▷ Корень $\zeta_0 = 0$ виден сразу. Для двух других корней получим уравнение, которое возникнет из (10) после сокращения на $\rho = |\zeta| \neq 0$.

Будем использовать представление $\zeta = \rho e^{i\alpha}$. Величину h возьмем в форме $h = ac$. Тогда от уравнения (10) перейдем к выражению

$$e^{i\alpha}(1 - \rho^2) = e^{-i\alpha}(\sqrt{1 + c^2}\rho^2 e^{i2\alpha} - 2ic\rho e^{i\alpha} - \sqrt{1 + c^2})(ic\rho e^{i\alpha} + \sqrt{1 + c^2}).$$

После отделения вещественной и мнимой частей получим систему уравнений

$$\begin{cases} \cos \alpha(-\rho^2(2 + 3c^2) + 2 + c^2) = -2\rho^3 c\sqrt{1 + c^2} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sin \alpha(-\rho^2(2 + 3c^2) - c^2) = \rho^3 c\sqrt{1 + c^2}(2 \cos^2 \alpha - 1) - 3\rho c\sqrt{1 + c^2}. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы удовлетворится в одном из трех случаев:

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0, \sin \alpha = 1, \\ \cos \alpha = 0, \sin \alpha = -1, \\ \cos \alpha \neq 0, \sin \alpha = \frac{\rho^2(2+3c^2)-2-c^2}{2\rho^3 c\sqrt{1+c^2}}, \end{cases}$$

причем содержательным для внешней окз окажется лишь первый, поскольку последние два не дадут корней $\rho = |\zeta| \in (0, 1)$.

Итак, $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$, поэтому второе уравнение системы запишется в виде

$$\rho^3 c\sqrt{1 + c^2} - \rho^2(2 + 3c^2) + 3\rho c\sqrt{1 + c^2} - c^2 = 0.$$

Это уравнение имеет три корня¹

$$\begin{cases} \rho_1 \stackrel{\circ}{=} \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} < 1, \\ \rho_2 \stackrel{\circ}{=} \frac{\sqrt{1+c^2}-1}{c} < 1, \\ \rho_3 \stackrel{\circ}{=} \frac{\sqrt{1+c^2}+1}{c} \notin (0, 1). \end{cases}$$

¹Здесь и далее кружок над знаком равенства предполагает самостоятельную проверку приведенного соотношения

Следовательно, внешняя окз разрешима для трех точек

$$\begin{cases} \zeta_0 = 0, \\ \zeta_1 = \frac{ic}{\sqrt{1+c^2}}, \\ \zeta_2 = i\frac{\sqrt{1+c^2}-1}{c}. \end{cases}$$

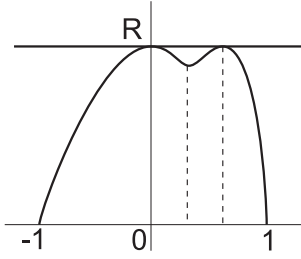


Рис. 7

Найденные решения уравнения Гахова, как известно [2], являются и критическими точками конформного радиуса (см. с. 40 данного пособия). Кривая, которая получится при рассечении поверхности конформного ра-

диуса плоскостью $\zeta = i\eta$, приведена на рисунке 7. \triangleleft

8. М.Т. Нужиным ([12], с. 54) был предложен класс функций

$$f'(\zeta) = e^{a\zeta^n}, \quad a \geq 0,$$

для которого внешняя обратная краевая задача, как и в п. 7, неразрешима единственным образом в круге E . Убедимся в этом.

▷ Уравнение Гахова в этом случае будет иметь вид

$$na\zeta^{n-1} \doteq \frac{2\bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^2}, \quad (11)$$

из которого видно, что $\zeta = 0$ — корень. Найдем оставшиеся решения внешней задачи.

При $\zeta = \rho e^{i\alpha}$, $\rho \neq 0$, уравнение (11) приводится к соотношению

$$\rho^{n-2} e^{i\alpha n} (1 - \rho^2) = \frac{2}{na}.$$

После отделения вещественной и мнимой частей переходим к равносильной системе вещественных равенств

$$\begin{cases} (\rho^{n-2} - \rho^n) \cos \alpha n = \frac{2}{an}, \\ (\rho^{n-2} - \rho^n) \sin \alpha n = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы заключаем, что корни уравнения Гахова лежат на направлениях $\alpha \doteq 2\pi k/n$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому первое уравнение системы примет вид

$$\rho^{n-2} - \rho^n = \frac{2}{an}. \quad (12)$$

Рассмотрим его при $n = 2$

$$1 - \rho^2 = \frac{1}{a}.$$

Нетрудно видеть, что решением этого уравнения будет $\rho = \sqrt{(a-1)/a}$ при $a \geq 1$ и решений не будет при $a < 1$. Таким образом внешняя обратная краевая задача при $n = 2$ разрешима для трех точек

$$\begin{cases} \zeta_0 = 0, \\ \zeta_1 = \sqrt{(a-1)/a}, \\ \zeta_2 = -\sqrt{(a-1)/a}, \end{cases}$$

когда $a \geq 1$, и для одной точки $\zeta_0 = 0$, когда $a < 1$. \triangleleft

9. Рассмотрим уравнение (12) при $n = 3$

$$\rho^3 - \rho + \frac{2}{3a} = 0. \quad (13)$$

\triangleright Возьмем $a = \frac{\sqrt{3}}{\cos \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, перепишем уравнение в виде

$$\rho^3 - \rho + \frac{2 \cos \varphi}{3\sqrt{3}} = 0$$

и проверим, что $\rho_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\varphi}{3}$ является его корнем:

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{4}{3} \cos^3 \frac{\varphi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cos \varphi}{3\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} + 3 \cos \frac{\varphi}{3} + \cos \varphi = 0.$$

Раскладывая третье слагаемое в последнем выражении по формуле тройного аргумента для косинуса, убеждаемся в истинности тождества.

Заметим, что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка ρ_0 пробегает интервал от $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ до -1 , а значит, в число решений внешней задачи не попадет.

Итак, один из корней уравнения (13) найден, поэтому (13) можно переписать в виде

$$\left(\rho + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\varphi}{3}\right) (\rho^2 - 2p\rho + q) = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях последнего уравнения и уравнения (13), получаем $p = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\varphi}{3}$, $q = \frac{1}{3} \frac{\cos \frac{\varphi}{3}}{\cos \frac{2\varphi}{3}}$. Отсюда

$$\rho_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q} \doteq \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi \pm \varphi}{3}.$$

При $\varphi = 0$ корни совпадают $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,6$. При $\varphi = \pi/2$ один из корней $\rho_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi+\varphi}{3} = 0$, другой $\rho_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi-\varphi}{3} = 1$.

Таким образом, внешняя окз разрешима для семи точек

$$\begin{cases} \zeta_0 = 0, \\ \zeta_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi \pm \varphi}{3}, \\ \zeta_{3,4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi \pm \varphi}{3} e^{i2\pi/3}, \\ \zeta_{5,6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi \pm \varphi}{3} e^{i4\pi/3}, \end{cases}$$

когда $a \geq \sqrt{3}$, и для одной точки $\zeta_0 = 0$, когда $a < \sqrt{3}$. \triangleleft

10. До конца удается исследовать разрешимость внешней задачи еще при $n = 4$ и при $n = 6$ (проделать самостоятельно). В первом случае уравнение (12) является биквадратным и сводится к обычному квадратному, во втором — уравнение (12) шестой степени сводится к кубическому.

▷ Сделаем замечание для общего случая. Рассмотрим уравнение (12) как равенство двух функций $x(\rho) = \rho^{n-2} - \rho^n$, $x(0) = x(1) = 0$, и $y(\rho) = \frac{2}{an}$. Производная $x'(\rho) = \rho^{n-3}(n-2-n\rho^2)$ обращается в нуль при $\rho = 0$ и $\rho = \sqrt{\frac{n-2}{n}}$. При переходе через $\rho = \sqrt{\frac{n-2}{n}}$ функция $x'(\rho)$ меняет знак с (+) на (-), то есть в точке $\rho_{max} = \sqrt{\frac{n-2}{n}}$ функция $x(\rho)$ достигает своего максимума $x\left(\sqrt{\frac{n-2}{n}}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n} \leq 1$, $n \geq 2$.

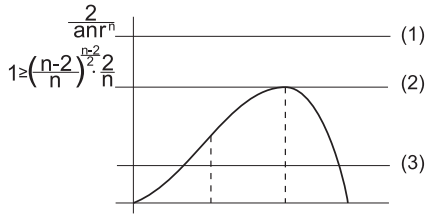


Рис. 8

Вторая производная $x''(\rho) = \rho^{n-4}((n-3)(n-2) - n(n-1)\rho^2)$ обращается в нуль в двух точках: $\rho = 0$ и $\rho = \sqrt{\frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)n}} < \rho_{max}$. На интервале $\left(0, \sqrt{\frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)n}}\right)$ функция $x''(\rho)$ положительна, на $\left(\sqrt{\frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)n}}, 1\right)$ — отрицательна, поэтому график $x(\rho)$ представляет собой кривую, изображенную на рисунке 8. Графики функций $y = x(\rho)$ и $y = \frac{2}{an}$ не пересекаются, если $x(\rho_{max}) < \frac{2}{an}$, т. е.

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n} < \frac{2}{an} \Rightarrow a > \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Уравнение Гахова имеет единственный корень $\zeta = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $y = x(\rho)$ и $y = \frac{2}{an}$ имеют одну общую точку, т. е. $x(\rho_{max}) = \frac{2}{an}$, $a = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{2-n}{2}}$.

В этом случае уравнение Гахова, помимо $\zeta_0 = 0$, имеет решения $\zeta_{1k} = \sqrt{\frac{n-2}{n}} e^{2\pi ki/n}$. Заметим, что при $n = 2$ корни совпадают, т. е. $\zeta_0 = \zeta_{1k} = 0$, и уравнение Гахова по-прежнему разрешимо единственным образом.

При $a < \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{2-n}{2}}$ решениями уравнения Гахова будут $2n + 1$ точек. ◁

§ 2.2. Аналогии между плоскими векторными полями с различным физическим содержанием

Материал данного параграфа частично воспроизводит пп. 6, 7 из § 3 и § 4 из [3].

1. Течение в кольцевой области. Вращательное движение жидкости в кольце $\{\zeta : r_1 < |\zeta| < r_2\}$ описывается комплексным потенциалом

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta. \quad (14)$$

Линиями тока будут окружности $|\zeta| = r$, $r_1 \leq r \leq r_2$, в том числе и граничные.

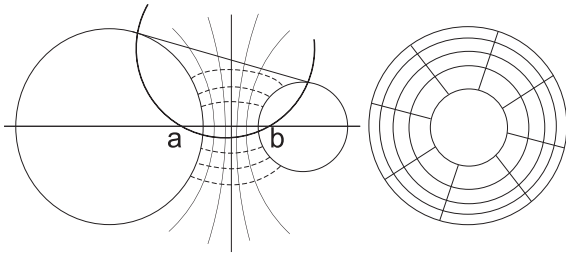


Рис. 9

При переходе к вращательным движениям жидкости между неконцентрическими окружностями в плоскости z нужно найти точки a , b , симметричные

относительно обеих окружностей. Дробно-линейное преобразование $\zeta = (z - a)/(z - b)$ переводит неконцентрическое кольцо в концентрическое $\{\zeta : r_1 < |\zeta| < r_2\}$ с вполне определенными r_1 и r_2 . Комплексный потенциал течения в плоскости z получится как суперпозиция потенциала (14) и отображающей функции, именно,

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - a}{z - b}. \quad (15)$$

Эквипотенциальными линиями такого течения будут те участки окружностей, соединяющих точки a и b , которые расположены между граничными окружностями, линиями тока – окружности, ортогонально пересекающие эквипотенциали (рис. 9).

2. Кольцевой конденсатор. Течения в кольцевой области интересны как гидромеханические аналоги электростатических полей с комплексным потенциалом

$$w = \frac{iv_0}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{z-a}{z-b} \quad (16)$$

и с напряженностью

$$\vec{E}(z) = -i\overline{w'(z)} = \frac{v_0}{\ln(r_2/r_1)} \frac{\bar{b}-\bar{a}}{(\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}-\bar{b})}. \quad (17)$$

Такое поле создается внутри конденсатора с бесконечными цилиндрическими обкладками, направляющими линиями которых являются граничные окружности. Разность потенциалов между обкладками равна v_0 .

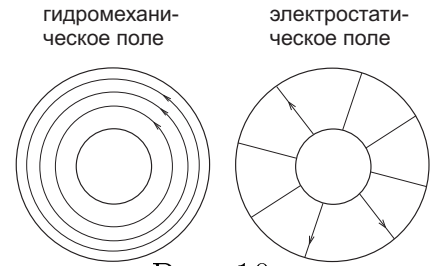


Рис. 10

Полная энергия этого конденсатора (его емкость) определится с помощью интегрирования по области D_z , занятой полем, с переходом к концентрическому кольцу D_ζ ($\zeta = re^{i\theta}$):

$$\begin{aligned} C &= \int \int_{D_z} |\vec{E}(z)|^2 dx dy = \frac{v_0^2 |b-a|^2}{(\ln(r_2/r_1))^2} \int \int_{D_z} \frac{dx dy}{|z-a|^2 |z-b|^2} = \\ &= \frac{v_0^2 |b-a|^2}{(\ln(r_2/r_1))^2} \int \int_{D_\zeta} \frac{r dr d\theta}{|z-a|^2 |z-b|^2} \frac{|z-b|^4}{|b-a|^2} = \\ &= \frac{v_0^2}{(\ln(r_2/r_1))^2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr d\theta}{r} = \frac{2\pi v_0^2}{\ln(r_2/r_1)}. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия соответствующего гидромеханического поля с комплексным потенциалом (15) вычисляется по формуле

$$K = \frac{1}{2} 2\pi \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \ln(r_2/r_1) = \frac{\rho \Gamma^2 \ln(r_2/r_1)}{4\pi},$$

где ρ — плотность жидкости.

Выделим тот факт, что по сравнению с гидромеханическим потенциалом в электростатическом возникает множитель i . Это различие проявляется в записи векторов поля: скорость $\vec{v}(z) = \overline{w'(z)}$, напряженность $\vec{E}(z) = -i\overline{w'(z)}$. Гидромеханические эквипотенциалы для соответствующих электростатических полей становятся силовыми линиями, а линии тока — эквипотенциалами (рис. 10).

3. Течение внутри области с точечным вихрем и электростатический аналог. В предыдущем пункте приведена аналогия между вращательным движением жидкости с двумя граничными окружностями и конденсатором с круговыми обкладками. Если внутренняя граничная окружность стянется в точку, где имеется особенность, то получатся такие аналогичные потенциалы

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta \Leftrightarrow w = -i2q \ln \zeta \quad (18)$$

в случае круга с особенностью в нуле. Для гидромеханического поля в нуле будет вихрь с интенсивностью Γ , а в случае электростатического поля в нуле окажется точечный заряд. Он проявляется как бесконечный заряженный линейный проводник с плотностью заряда q . Этот линейный проводник создает поле, одинаковое в любой плоскости, перпендикулярной проводнику. Величина q получается в пределе, когда $r_1 \rightarrow 0$, а $v_0 \rightarrow \vec{v}_\infty$ из коэффициента в потенциале (16) :

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \frac{v_0}{\ln(r_2/r_1)} = -2q \quad -$$

так обозначается предел. Однако этот предельный переход не позволяет как-либо истолковать величину q в самом обозначении. Поэтому следует по-иному провести подобное вычисление напряженности ([11], гл. III, §2).

4. Найдем вначале напряженность в точке $z = x + iy$, т. е. силу, действующую на единичный положительный заряд со стороны поля. Это электростатическое поле создается заряженной прямой, которая проходит через $z = 0$ перпендикулярно плоскости z . Введем на прямой координату t , $-\infty < t < \infty$, считая $t = 0$ в точке пересечения прямой и плоскости. Элементарный участок $[t, t + dt]$ на прямой имеет заряд qdt и действует на единичный заряд с силой, величина которой равна qdt/R^2 , $R^2 = t^2 + |z|^2$, и которая направлена вдоль прямой, соединяющей точки t и z . Проекция этой силы на плоскость z получится умножением ее на $\cos \alpha = |z|/\sqrt{t^2 + |z|^2}$, где α - угол между отрезками, выходящими из точки z и направленными в начало координат и в точку t . Остается подсчитать всю силу, действующую на единичный заряд в точке z , интегрированием этой проекции. Имеем

$$\begin{aligned} |\vec{E}(z)| &= q|z| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + |z|^2)^{3/2}} = 2q|z| \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^3(1 + |z|^2/t^2)^{3/2}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1 + |z|^2/t^2 = \tau^2, \\ -(|z|^2/t^3)dt = \tau d\tau \end{array} \right] = -\frac{2q}{|z|} \int_{\infty}^1 \frac{\tau d\tau}{\tau^3} = \frac{2q}{|z|} \int_1^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{2q}{|z|}. \end{aligned}$$

Равнодействующая сила для вертикальных составляющих равна нулю, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{tqdt}{(t^2 + |z|^2)^{3/2}} = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

Итак, $|\vec{E}(z)| = 2q/|z|$, и $\arg \vec{E}(z) = \arg z$, т. е.

$$\vec{E}(z) = \frac{2q}{|z|} e^{i \arg z} = \frac{2q}{\bar{z}}.$$

Через комплексный потенциал напряженность выражается по формуле $\vec{E}(z) = -i\overline{w'(z)}$, поэтому $\overline{w'(z)} = i2q/\bar{z}$. Отсюда $w'(z) = -i2q/z$

и

$$w(z) = -i2q \ln z.$$

Тем самым получен комплексный потенциал в правой части соответствия (18).

Отметим, что вещественный потенциал

$$\varphi = \operatorname{Im} w(z) = -2q \ln |z|$$

будет обращаться в нуль на единичной окружности. Осуществить нулевой граничный потенциал можно с помощью электростатического поля в круге $\{z : |z| < 1\}$, заземлив проводящую граничную окружность. Для получения комплексного потенциала электростатического поля в области D с точечным зарядом в точке $a \in D$ и с заземленной проводящей границей нужно воспользоваться функцией $f(z, a)$. Эта функция отображает область D на единичный круг с центром в начале координат так, что a переходит в нуль. Тогда получим комплексный потенциал в форме

$$w = -i2q \ln f(z, a).$$

Нетрудно характеризуется соответствующая гидромеханическая картина:

$$w = (\Gamma/2\pi i) \ln f(z, a).$$

При $q = 1/2$ получится комплексный потенциал, приводящий к функции Грина, связанной с задачей Дирихле для гармонических функций:

$$\mathcal{G} = \operatorname{Im}(-i \ln f(z, a)) = \ln(1/|f(z, a)|).$$

5. Другие виды плоских полей. Приведем формулы для сопоставления комплексных потенциалов полей с различным физическим содержанием.

5.1. Гидромеханика. Комплексный потенциал

$$w = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ – потенциальная функция, $\psi(x, y)$ – функция тока; скорость

$$\vec{v}(z) = \text{grad } \varphi(x, y) = \overline{f'(z)}.$$

5.2. Электростатика. Комплексный потенциал

$$\mathcal{F}(z) = \widetilde{\psi(x, y)} + i\varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ – потенциальная функция, $\widetilde{\psi(x, y)}$ – силовая функция; напряженность

$$\vec{E}(z) = -\text{grad } \varphi(x, y) = -i\overline{\mathcal{F}'(z)}.$$

5.3. Магнитостатика. Комплексный потенциал $\mathcal{F}(z) = \widetilde{\psi(x, y)} + i\varphi(x, y)$; напряженность $\vec{H}(z) = \text{grad } \varphi(x, y) = i\overline{\mathcal{F}'(z)}$.

5.4. Теплостатика. Тепловое поле описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (19)$$

где $u(x, y, t)$ – температура точки $z = x + iy$ в момент времени t , a^2 – коэффициент температуропроводности. Если температура не зависит от времени, то уравнение (19) становится уравнением Лапласа, а $u(x, y)$ – гармонической функцией.

Комплексный потенциал имеет гармонический вид, именно,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

причем $v(x, y)$ – функция, гармонически сопряженная с $u(x, y)$, называется функцией *тока тепла*. Вектор потока тепла определяется по формуле

$$\vec{Q}(z) = -k \text{grad } u(x, y) = -k\overline{f'(z)},$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности.

Различные интерпретации семейств кривых $\varphi = const$ и $\psi = const$ в различных физических задачах представлены в таблице ниже.

Приведем примеры теплового и магнитного полей.

6. Система источника и стока тепла с интенсивностями $\pm q$, расположенных в a и b , имеет комплексный потенциал

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - a}{z - b}.$$

Этот потенциал останется тем же для теплового поля между двумя окружностями (с разными температурами), относительно которых a и b являются симметричными точками.

Таблица

Физическое явление	$\varphi = const$	$\psi = const$
Тепловой поток	Изотермы	Линии теплового потока
Электростатика	Эквипотенциальные кривые	Линии тока
Поток жидкости	Эквипотенциали	Линии потока жидкости
Гравитационное поле	Гравитационный потенциал	Силовые линии
Магнитное поле	Потенциал	Силовые линии
Упругость	Функция напряжений (нагрузки)	Линии напряжений
Электрический ток	Потенциал	Линии тока

При решении задач по теплопроводности следует учитывать, что обозначениям φ , ψ соответствуют обозначения u , v при $w = u + iv$.

7. Предположим, что две параллельные пластины перпендикулярны плоскости z и проходят по горизонтальным прямым $y = a$ и $y = b$. Температура на этих пластинах принимает постоянное значение $T(x, a) = T_1$ и $T(x, b) = T_2$ соответственно. Найти функцию $T(x, y)$.

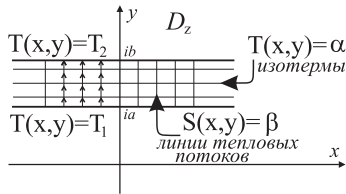


Рис. 11

▷ Предположим, что $T_1 > T_2$ (в природе всегда тепло идет в сторону холода). Область комплексного потенциала w изображена на рисунке 11.

С помощью элементарных преобразований (сдвиг, подобное преобразование, поворот) отображаем область в физической плоскости (рис. 11) на область комплексного потенциала (рис. 12) и получаем

$$w = i \frac{z - ia}{b - a} (T_1 - T_2) + T_1,$$

откуда $u = T(x, y) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b - a} (y - a)$ и $v = S(x, y) = \frac{T_1 - T_2}{b - a} x$. При этом $T(x, y) = \alpha$ — являются горизонтальными линиями на рисунке 11, а линии тепловых потоков $S(x, y) = \beta$ перпендикулярны линиям изотерм, α и β — постоянные величины.

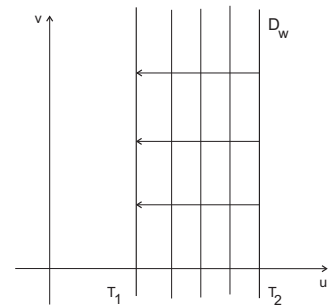


Рис. 12

Можно было бы сразу предположить, что $T(x, y) = f(y)$. Уравнение Лапласа приводит к соотношению $f''(y) = 0$, следовательно, $f(y) = ty + c$, где t и c — постоянные величины, определяемые по граничным условиям $T(x, a) = T_1$ и $T(x, b) = T_2$. После нахождения $S(x, y)$ функция $T(x, y)$ строится как сопряженная гармоническая функция. ◁

8. Найти температуру $T(x, y)$ в каждой точке верхней полуплоскости

$\text{Im } z > 0$, если температура вдоль x удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_1 \text{ для } x > 0, \\ T(x, 0) = T_2 \text{ для } x < 0, \end{cases}$$

при этом $T_1 > T_2$ (рис. 13).

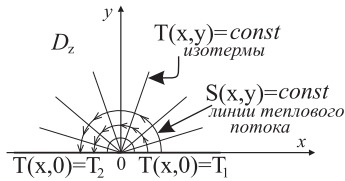


Рис. 13

▷ Область комплексного потенциала будет иметь вид такой же, как и в задаче 8 (рис. 12). Для построения функции комплексного потенциала нужно воспользоваться логарифмической функцией (учитывая, что $\ln z = \ln |z| + i \arg z$), которая пере-

ведет верхнюю полуплоскость на полосу шириной π . После применения к ней подобного преобразования, поворота и сдвига получим

$$w = i \frac{T_1 - T_2}{\pi} (\ln |z| + i \arg z) + T_1.$$

Таким образом, температура и сопряженная к ней гармоническая функция будут соответственно иметь вид

$$T(x, y) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\pi} \arg z,$$

$$S(x, y) = \frac{1}{\pi} (T_1 - T_2) \ln |z|. \triangleleft$$

9. Найти температуру $T(x, y)$ в каждой точке полудиска $\{\text{Im } z > 0, |z| < 1\}$, если заданы следующие граничные условия:

$$\begin{cases} T(x, y) = 100 \text{ для } z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi, \\ T(x, 0) = 50 \text{ для } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

▷ Для построения комплексного потенциала, сначала нужно воспользоваться дробно-линейной функцией

$$w_1 = u_1 + iv_1 = i \frac{1 - z}{1 + z} =$$

$$= \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2},$$

которая отобразит область D_z (рис. 14) на первый квадрант. Далее по аналогии с предыдущей задачей применить логарифмическую функцию, совершить подобное преобразование и сдвиг, учитывая, что

$$\arg w_1 = \arg \operatorname{tg} \frac{v_1}{u_1}.$$

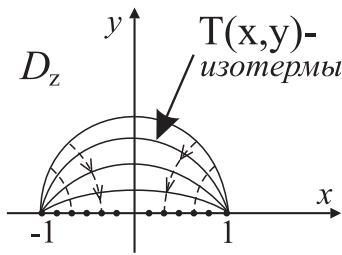


Рис. 14

После определения комплексного потенциала выражение для температуры в каждой точке полудиска будет иметь вид

$$T(x, y) = 100 - \frac{100}{\pi} \operatorname{arg} \operatorname{tg} \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}.$$

Изотермами $T(x, y) = \operatorname{const}$ будут окружности, проходящие через точки ± 1 , как показано на рисунке 14. \triangleleft

10. Найти функцию установившейся температуры $T(x, y)$ для области $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ с граничными условиями:

$$\begin{cases} T(x, 0) = 1 \text{ для } x > 1, \\ T(x, 0) = -1 \text{ для } x < -1, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = T_y(x, 0) = 0 \text{ для } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

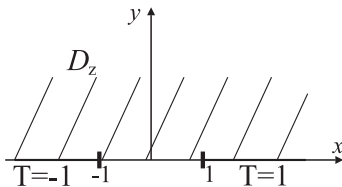


Рис. 15

\triangleright В данной задаче граничное условие, накладываемое на производную, означает, что граница $(-1, 1)$ теплоизолирована.

При построении комплексного потенциала нужно воспользоваться вспомогательной функцией

$$w_1 = u_1 + iv_1 = \arcsin z$$

которая переведет верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на полуполосу $v_1 > 0$, $-\pi/2 < u_1 < \pi/2$, а затем применить подобное преобразование.

Таким образом,

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \text{Re}(\arcsin z) = \frac{2}{\pi} u_1(x, y).$$

Выразим $\arcsin z$ через x и y , пользуясь соотношением

$$x + iy = \sin w_1 = \sin u_1 \text{ch } v_1 + i \cos u_1 \text{sh } v_1,$$

откуда $\text{ch } v_1 = \frac{x}{\sin u_1}$, $\text{sh } v_1 = \frac{y}{\cos u_1}$. Исключая v_1 , получим уравнение

$$\frac{x^2}{\sin^2 u_1} - \frac{y^2}{\cos^2 u_1} = 1$$

для определения $u_1(x, y)$. \triangleleft

Примеры 11, 12 и 13 предназначены для самостоятельного решения. В каждом из них нужно найти функцию $T(x, y)$ в соответствующей области.

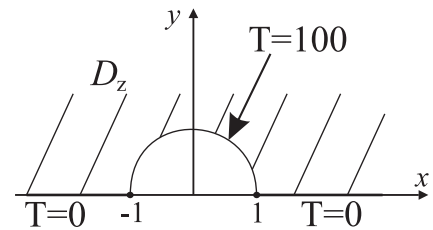


Рис. 16

11. На границе области D_z (рис. 16) заданы условия:

$$\begin{cases} T(x, 0) = 0 \text{ для } x > 1, \\ T(x, 0) = 0 \text{ для } x < -1, \\ T(x, y) = 100, \text{ если } z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi. \end{cases}$$

У к а з а н и е: использовать функцию $i \frac{1-z}{1+z}$.

12. На границе области D_z (рис. 17) заданы условия:

$$\begin{cases} T(x, y) = 0 \text{ для } z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ T(x, y) = 50 \text{ для } z = 2e^{i\theta}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = T_y(x, 0) = 0 \text{ для } 1 < x < 2, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = T_x(0, y) = 0 \text{ для } 1 < y < 2. \end{cases}$$

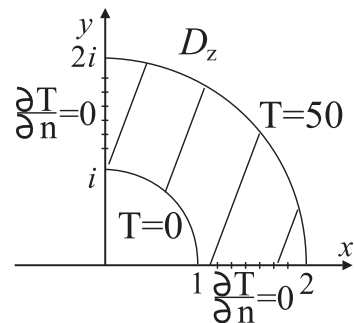


Рис. 17

У к а з а н и е: использовать функцию $\ln z$.

13. Найти функцию температуры $T(x, y)$ в сектор-области, где $0 < r < 1$, $0 < \arg z < \alpha$, которая будет удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} T(x, 0) = 100 \text{ для } 0 < x < 1, \\ T(x, y) = 50 \text{ для } z = re^{i\alpha}, 0 < r < 1, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ для } z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \alpha. \end{cases}$$

У к а з а н и е: использовать функцию $\ln z$.

14. Найти выражение температуры $T(x, y)$ для любой точки полубесконечной пластины $\{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$ (рис. 18) при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} T(\frac{\pi}{2}, y) = 0 \text{ для } y > 0, \\ T(-\frac{\pi}{2}, y) = 0 \text{ для } y > 0, \\ T(x, 0) = 1 \text{ для } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

▷ Для нахождения функции температуры найдем функцию, отображающую область D_z (рис. 18) на область D_w (рис. 12, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$). Воспользуемся отображением $f_1 =$

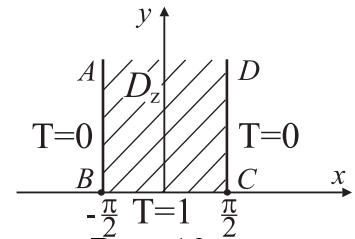


Рис. 18

$u_1 + iv_1 = \sin z$, которое переведет полуполосу на верхнюю полуплоскость с соответствием точек $-\frac{\pi}{2} \rightarrow -1$, $\frac{\pi}{2} \rightarrow 1$. Далее удобно перевести полуплоскость в полосу шириною π с помощью логарифмической функции

$$\log \frac{f_1 - 1}{f_1 + 1} = f_2 = \log \left| \frac{f_1 - 1}{f_1 + 1} \right| + i \arg \frac{f_1 - 1}{f_1 + 1}.$$

После применения к ней подобного преобразования, поворота и с учетом

$$v_2 = \arg \frac{f_1 - 1}{f_1 + 1} \doteq \operatorname{arctg} \left(\frac{2v_1}{u_1^2 + v_1^2 - 1} \right),$$

где $0 \leq \arg \frac{f_1-1}{f_1+1} \leq \pi$, выражение для температуры получим в виде

$$T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2v_1}{u_1^2 + v_1^2 - 1} \right).$$

Выражая u_1 и v_1 через x и y

$$u_1 = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v_1 = \cos x \operatorname{sh} y,$$

имеем

$$T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y - 1} \right).$$

Выражение в скобках перепишем в виде

$$\frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x} = \frac{2 \cos x / \operatorname{sh} y}{1 - (\cos x / \operatorname{sh} y)^2} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

где $\operatorname{tg} \alpha = \cos x / \operatorname{sh} y$. Тогда температуру в каждой точке можно найти по формуле

$$T = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y} \right).$$

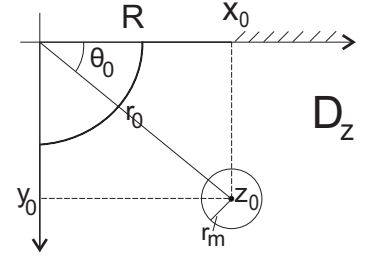
Уравнения для изотерм будут иметь вид $T(x, y) = \operatorname{const} = c$, т. е. $\cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2} \operatorname{sh} y$, и для любого c кривая будет проходить через точки $(\pm\pi/2, 0)$ в области D_z . \triangleleft

15. Получить формулу для определения температуры и функции потока теплового поля в области D_z (рис. 19), где $x \geq R$ — теплоизолированный участок, остальные участки, включая $|z| = R$, теплопроводящие. В точке z_0 расположен источник тепла.

▷ Данную задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть труба неограниченной длины радиуса r_m находится в однородном пласте на глубине y_0 . Пласт ограничен теплопроводящей поверхностью \mathbf{P} , перпендикулярной непроводящей поверхности \mathbf{I} , причем эти поверхности соединяются частью d поверхности кругового цилиндра радиуса

R . Труба является источником теплового воздействия на пласт. Найдем стационарное распределение температуры в пласте при заданной температуре на поверхности трубы и теплопроводящей цилиндрической поверхности d .

В точке $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $r_0 > R + r_m$, расположен источник с производительностью Q . Для построения комплексного потенциала воспользуемся методом симметрии ([4], с. 24).



$$w = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln(z - z_0) + \ln(z - \bar{z}_0) - \ln(z + z_0) - \ln\left(z + \frac{R^2}{z_0}\right) - \ln\left(z - \frac{R^2}{z_0}\right) - \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right) + \ln\left(z + \frac{R^2}{z_0}\right) + \ln\left(z + \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right) \right].$$

Отделив действительную и мнимую части, получим формулы для определения температуры и функции потока теплового поля в области D_z (рис. 20).

Изотермическую линию теплового поля, описываемого комплексным потенциалом, которая проходит через точку $z_1 = (r_0 + r_m)e^{i\theta_0}$, примем за контур трубы. Этот контур отличается от кругового, однако при $r_m \ll r_0$ отличие незначительно, поэтому будем считать контур круговым.

Температуру в точке $z_1 = (x_0 + x_m) + i(y_0 + y_m)$ примем за температуру на контуре трубы радиуса r_m с центром в z_0 . Эта температура равна

$$T(x, y) \Big|_{z=z_1} \doteq \frac{Q}{4\pi} \left(\ln \frac{(x_m^2 + y_m^2)(x_m^2 + (2y_0 + y_m)^2)}{((2x_0 + x_m)^2 + y_m^2)((2x_0 + x_m)^2 + (2y_0 + y_m)^2)} + \ln \frac{(x_0 + x_m + R^2 x_0 / r_0^2)^2 + (y_0 + y_m + R^2 y_0 / r_0^2)^2}{(x_0 + x_m - R^2 x_0 / r_0^2)^2 + (y_0 + y_m - R^2 y_0 / r_0^2)^2} + \ln \frac{(x_0 + x_m + R^2 x_0 / r_0^2)^2 + (y_0 + y_m - R^2 y_0 / r_0^2)^2}{(x_0 + x_m - R^2 x_0 / r_0^2)^2 + (y_0 + y_m + R^2 y_0 / r_0^2)^2} \right).$$

Температура T на проводящей границе равна нулю. Если в последнем выражении учесть, что $x_m \ll x_0$ и $y_m \ll y_0$, получим формулу для расчета теплопередачи трубы, заложенной в пласте с определенными выше границами. \triangleleft

У п р а ж н е н и е. Рассмотрите такой же по форме пласт, только теперь цилиндрическая поверхность d , которая соединяет теплопроводящую поверхность P с непроводящей I , является непроводящей.

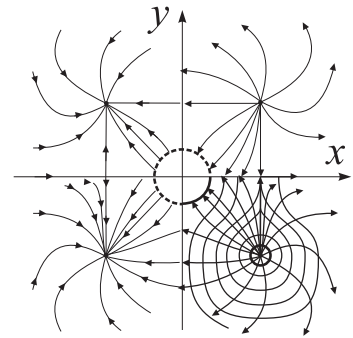


Рис. 20

Переходим к задачам по магнитостатике, в которых нужно учесть, что обозначениям \vec{V} , φ , ψ , $w = \varphi + i\psi$ соответствуют обозначения \vec{B} , u , v , $w = u + iv$.

16. Комплексный потенциал магнитного поля тока с плотностью J , текущего по бесконечному линейному проводнику, перпендикулярному плоскости z , равен $2J \ln z$. Напряженность вычисляется по формуле $\vec{H}(z) = i2J/\bar{z}$. Вычисления проводятся аналогично случаю электростатического поля линейного проводника.

Если число таких токов равно n и соответствующие проводники проходят через точки a_k , $k = \overline{1, n}$, то получим

$$F(z) = \sum_{k=1}^n 2J_k \ln(z - a_k).$$

17. Бесконечно длинный и тонкий проводник с током расположен вблизи круглого цилиндра с бесконечно большой магнитной проницаемостью (рис. 21).

\triangleright Магнитное поле создается линейным током J в точке $z = -b$, $b > 0$, вблизи сечения цилиндра $|z| = a$ ($b > a$) с $\mu = \infty$.

После применения принципа симметрии получим выражение для комплексного потенциала в виде

$$w = u+iv = \frac{Ji}{2\pi} \left(\ln(z+b) + \ln\left(z + \frac{a^2}{b}\right) - \ln z \right) = \frac{Ji}{2\pi} \ln \frac{(z+b)(z+a^2/b)}{z},$$

u — потенциал магнитного поля, v — функция потока магнитного поля.

Для построения картины линий поля с $v = \frac{J}{2\pi} \ln \frac{|z+b||z+a^2/b|}{|z|}$ и $u = -\frac{J}{2\pi} \arg \frac{(z+b)(z+a^2/b)}{z}$ положим $v = c$ и $u = \tilde{c}$, тогда семейство линий потока магнитного поля и семейство линий равного потенциала будут представлены соответственно равенствами

$$\frac{|z+b||z+a^2/b|}{|z|} = e^{\frac{2\pi c}{J}} \text{ и } \arg \frac{(z+b)(z+a^2/b)}{z} = -\frac{2\pi \tilde{c}}{J}.$$

У п р а ж н е н и е. Найти нулевую эквипотенциальную линию (указание: перейти к полярным координатам).

Вектор магнитной индукции в произвольной точке z , лежащей вне $|z| = a$, примет вид

$$\vec{B} = -\frac{Ji \overline{(z^2 - a^2)}}{2\pi \bar{z}(z+b)(z^2 + a^2/b)}. \triangleleft$$

Перейдем теперь к дополнительным задачам в случае электростатического поля: 1) нахождение комплексного потенциала поля плоского конденсатора с двумя прямолинейными пластинами, бесконечными в обе стороны; 2) расчет поля у концов

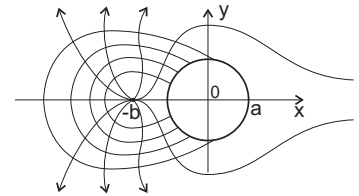


Рис. 21

плоского конденсатора; 3) с этим расчетом связан конденсатор Роговского, в котором напряженность на эквипотенциалах будет убывающей функцией (расчет конденсатора Роговского проведем в задаче 19).

18. Понятие конденсатора употребляется в математике и без условия его физической реализуемости. Под конденсатором понимается область, в которой построена гармоническая функция, принимающая значение 1 на одной граничной компоненте γ и значение 0 на других граничных компонентах этой области, т. е. на $\partial D \setminus \gamma$. Эта гармоническая функция называется *гармонической мерой* компоненты γ относительно области D .

Плодотворным является сопоставление гидромеханических и электростатических полей. Для полей одинакового очертания комплексные потенциалы гидромеханического поля $f(z)$ и электростатического $\mathcal{F}(z)$ связаны очень просто: $\mathcal{F} = if(z)$, поэтому $|\vec{E}(z)| = |\vec{H}(z)|$. Существуют приборы ЭГДА (электро-гидродинамические аналогии), на которых гидродинамические процессы (в частности, подземная фильтрация) моделируются на электростатических полях.

19. Рассмотрим подробно задачу нахождения поля конденсатора Роговского ([11], стр. 248). На рисунке 22 представлен гидромеханический аналог конденсатора. Изображенные на рисунке линии тока гидромеханического поля являются эквипотенциальными линиями электростатического поля. Значение потенциала на пластинах известно $\psi = \pm V$, а также известно расстояние между пластинами $2h$.

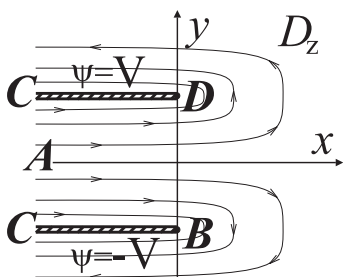


Рис. 22

Необходимо найти комплексный потенциал $w = f(z) = \varphi + i\psi$, дающий отображение области поля на полосу $-V < \text{Im } w < V$ с соответствием точек $f(A) = -\infty$, $f(C) = \infty$.

▷ Поскольку картина поля (рис. 22) симметричная, для простоты будем рассматривать только верхнюю часть

ADC , где на оси абсцисс потенциал $\psi = 0$.

Введем вспомогательную функцию $z = z(\zeta)$, осуществляющую конформное отображение полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ на область D_z плоскости z с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца (при соответствии точек: $A \rightarrow \zeta = 0$, $D \rightarrow \zeta = -1$, $C \rightarrow \zeta = \infty$, а углы при вершине A и D соответственно 0 и 2π)

$$z = C \int_{\zeta_0}^{\zeta} \zeta^{-1}(1 + \zeta)d\zeta + C_1. \quad (20)$$

Из соответствия точек $D(z = ih)$ и $\zeta = -1$ следует, что при $\zeta_0 = -1$ получим

$$z = C \int_{-1}^{\zeta} \frac{(1 + \zeta)}{\zeta} d\zeta + ih = C [\ln \zeta + \zeta] \Big|_{-1}^{\zeta} + ih. \quad (21)$$

Для определения C заметим, что обходу точки $\zeta = 0$ в верхней полуплоскости по дуге полуокружности бесконечно малого радиуса ρ против часовой стрелки соответствует переход со стороны AC на сторону CD . При этом приращение z равно $\Delta z = ih$. С другой стороны, из (21), положив $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ и перейдя к пределу при $\rho \rightarrow 0$, получим

$$\Delta z = iC \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\pi} (1 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = i\pi C.$$

Следовательно, $C = h/\pi$, а уравнение (21) перепишется в форме

$$z = \frac{h}{\pi} (\ln \zeta + \zeta + 1) + ih. \quad (22)$$

Функция $\zeta = e^{\frac{\pi w}{V}}$ осуществляет конформное отображение полосы $0 < \text{Im } w < V$ плоскости w на верхнюю полуплоскость ζ , поэтому функция

(22), переписанная в виде

$$z = \frac{h}{\pi} \left[\frac{\pi w}{V} + e^{\frac{\pi w}{V}} + 1 \right], \quad (23)$$

переводит полосу $0 < \text{Im } w < V$ плоскости w на область D_z .

На рисунке 22 представлены линии равного потенциала. Силовые линии поля будут проходить перпендикулярно к эквипотенциальным линиям. Параметрические уравнения для линий примут вид системы

$$\begin{aligned} x &= \frac{h}{\pi} \left[\frac{\pi \varphi}{V} + e^{\frac{\pi \varphi}{V}} \cos \frac{\pi \psi}{V} + 1 \right], \\ y &= \frac{h}{\pi} \left[\frac{\pi \psi}{V} + e^{\frac{\pi \varphi}{V}} \sin \frac{\pi \psi}{V} \right]. \end{aligned}$$

В этой системе нужно положить $v = \text{const}$ для эквипотенциалей и $u = \text{const}$ для силовых линий ($w = u + iv$).

Напряженность поля равна

$$\vec{E} = -i \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{i}{\left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)} = -\frac{i}{\frac{h}{V} [1 + e^{\pi \bar{w}/V}]}. \quad (24)$$

Рассмотрим изменение величины напряженности поля $|E| = \left| \frac{dw}{dz} \right|$ вдоль линий равного потенциала. Поскольку величина производной аналитической функции не зависит от направления, по которому эта производная вычисляется, то можем вычислить ее в направлении силовой линии $\psi = \text{const}$. Тогда $|dw| = |d\varphi|$,

$$|dz| = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{h}{V} \sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}\psi} + 2e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos \frac{\pi}{V}\varphi + 1} d\varphi,$$

(полагаем $z = x + iy$, $w = \psi + i\varphi$), следовательно,

$$|E| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{V}{h} \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}\psi} + 2e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos \frac{\pi}{V}\varphi + 1}}. \quad (25)$$

При фиксированном φ найдем максимум E . Для этого необходимо, чтобы в (25) подкоренное выражение по ψ было минимальным. Необходимое условие экстремума $e^{\frac{\pi}{V}\psi} + \cos \frac{\pi}{V}\varphi = 0$ (которое получается приравниванием нулю производной по ψ) заведомо не выполняется, когда косинус положителен, т. е. при $|\varphi| < \frac{V}{2}$. Вдоль таких линий напряженность поля $|E|$ меняется монотонно, не имея ни максимума, ни минимума. Для $\varphi = \pm \frac{V}{2}$ максимум

$$|E| = \frac{V}{h} \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}\psi} + 1}}$$

достигается при $\psi = -\infty$, т. е. на левом конце конденсатора. При увеличении ψ , т. е. при подходе к краям, напряженность поля убывает. В этом заключается основной эффект, который характеризует конденсатор Роговского. \triangleleft

20. Используем идею аналогий между электростатическими и гидромеханическими полями и создадим гидромеханический аналог конденсатора Роговского.

\triangleright Электростатические силовые линии становятся для соответствующих гидромеханических полей эквипотенциальными линиями, а электростатические эквипотенциали — гидромеханическими линиями тока. Поэтому в гидромеханической интерпретации на рисунке 22 тонкими линиями со стрелочками изображены линии тока. Различие проявляется в записи векторов поля. Сравним напряженность (24) и скорость

$$\vec{v}(z) = \overline{w'(z)} = \frac{V}{h(1 + e^{\pi\bar{w}/V})}. \quad (26)$$

Из формулы (26) видно, что в точках D и B скорость обращается в бесконечность, а сам поток ведет себя следующим образом: сначала разгоняется от $-\infty$ ($v \rightarrow \frac{V}{h}$) до $x = 0$, а затем при ($\varphi \rightarrow +\infty$) $v \rightarrow 0$,

здесь $w = \varphi + i\psi$. В случае, когда $\psi = \pm V/2$ получим в плоскости две линии, которые образуют границу «канала Роговского». Этот канал характеризуется тем, что максимум скорости будет достигаться в крайней левой части канала. При расширении канала максимум скорости будет перемещаться слева направо. Этот максимум достигнет бесконечности при $\psi = \pm V$ в точках $\pm ih$. \triangleleft

§ 2.3. Плоские векторные поля, связанные с конформным радиусом и его градиентом

По аналогии с годографом скорости $\vec{v}(z) = \overline{f'(z)} = \text{grad Re } f(z)$, который применяется в гидромеханике, можно изучать годограф напряженности $\vec{E}(z) = -i\overline{\mathcal{F}'(z)} = -\text{grad Im } \mathcal{F}(z)$ в электростатике и годографы других векторных полей. Как обычно, под годографом векторного поля $\vec{v}(z)$ в области D будем понимать область значений векторной функции $\vec{v}(z)$, $z \in D$.

В этом разделе будем рассматривать задачи на построение годографов таких векторных полей, которые образованы градиентом конформного радиуса для областей с выпуклыми границами.

Приведем основное определение и решим две задачи из ([1], с. 96).

Пусть D – некоторая односвязная область плоскости z , имеющая более одной граничной точки. Внутренним радиусом (или конформным радиусом) области D относительно точки $z_0 \in D$ называется величина $R = R(D, z_0)$, равная радиусу круга $|w| < R$, который получается из области D при отображении функцией $w = F(z)$, нормированной условиями

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) = 1.$$

1. Пусть функция $z = f(\zeta) = z_0 + c_1\zeta + \dots$, $c_0 = z_0$, регулярна в круге $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ и однолистно отображает этот круг на область D . Показать, что

$$R(D, f(0)) = R(D, z_0) = |c_1| = |f'(0)|$$

или в общем случае

$$R \equiv R(D, f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2).$$

▷ Из геометрических соображений справедливо соотношение $f\left(\frac{F(z)}{R}\right) = e^{i\beta}z$. Поэтому дифференцируя его $f'\left(\frac{F(z)}{R}\right)\frac{F'(z)}{R} = e^{i\beta}$, при $z = z_0$ получаем $\left|f'\left(\frac{F(z_0)}{R}\right)\frac{F'(z_0)}{R}\right| = 1$, следовательно, $R = |f'(0)| = |c_1|$.

Для того чтобы получить формулу для внутреннего радиуса в общем виде, используем функцию $z = \tilde{f}(\omega) = f\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)$, $\omega \in E$. Имеем

$$R \equiv R(D, z) = |\tilde{f}'(0)| = \left|f'\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)'\right|_{\omega=0} = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2). \triangleleft$$

2. Если $D \subseteq D_0$, то $R(D, z) \leq R(D_0, z)$.

▷ Пусть функции $f : E \rightarrow D$, $f(0) = z$, и $f_0 : E \rightarrow D_0$, $f_0(0) = z$, отображают единичный круг E на области D и D_0 соответственно.

Организуем отображение $f_0^{-1}(f(\zeta)) = \varphi(\zeta)$, $\varphi(E) \subset E$, причем

$$\varphi(0) = f_0^{-1}(f(0)) = f_0^{-1}(z) = 0.$$

Тогда в силу леммы Шварца ([11], с. 57) $|\varphi'(0)| \leq 1$. Поскольку $\varphi'(\zeta) = (f_0^{-1})'_z \cdot f'(\zeta)$ и $\varphi'(0) = f'(0)/f'_0(0)$, то $|f'(0)| \leq |f'_0(0)|$. Следовательно,

$$R(D, z) = |f'(0)| \leq |f'_0(0)| = R(D_0, z). \triangleleft$$

Сформулируем и решим задачи на построение годографа для вектора $\vec{\Omega} = \text{grad } R = \frac{\partial R}{\partial x} + i\frac{\partial R}{\partial y} \doteq 2\frac{\partial R}{\partial \bar{z}}$ (см. сноску на с. 14)

3. Доказать, что годографом для $\vec{\Omega} = \text{grad } R(f(E), f(\zeta))$ в конечной выпуклой области $D = f(E)$ с гладкой границей является круг радиуса 2 с центром в начале координат.

▷ Вычислим производную конформного радиуса

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = \sqrt{f'(\zeta)}(\sqrt{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2))'_{\bar{z}} \doteq \frac{|f'(\zeta)|}{f'(\zeta)} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \zeta \right)$$

и выясним, куда под действием градиентной функции

$$\vec{\Omega} = \frac{|f'(\zeta)|}{f'(\zeta)} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} (1 - |\zeta|^2) - 2\zeta \right)$$

переходит граница единичного круга. Гладкость границы с уравнением $z = f(e^{i\theta})$ понимается в том смысле, что отображающая функция имеет производную второго порядка, ограниченную в замкнутом круге. Это приводит к предельному переходу

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow 1} \frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} (1 - |\zeta|^2) = 0.$$

Поэтому

$$\vec{\Omega} |_{\zeta=e^{i\theta}} = -2e^{i\theta} \frac{|f'(e^{i\theta})|}{f'(e^{i\theta})} = 2ie^{i\alpha(\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где $\alpha(\theta)$ – функция, равная углу наклона касательной. Поскольку D – конечная выпуклая область, то $\alpha(\theta)$ является неотрицательной монотонно возрастающей функцией при $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $|e^{i\alpha(\theta)}| = 1$, а значит, годографом будет внутренность окружности $|\vec{\Omega}| = 2$. \triangleleft

Примером конечной выпуклой области является внутренность эллипса, но явный вид годографа $\vec{\Omega} = F([z(\zeta)])$ с граничной окружностью $|\vec{\Omega}| = 2$ для этой области очень сложен.

4. Доказать, что годографом для $\vec{\Omega}$ в области с конечным выпуклым дополнением с гладкой границей является внешность круга радиуса 2 с центром в начале координат.

\triangleright Пусть D^- – область с конечным выпуклым дополнением. Конформный радиус для D^- вычисляется по формуле

$$R(D^-, z) = |f'(\zeta)| (|\zeta|^2 - 1),$$

где $\zeta \in E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$, $f(E^-) = D^-$.

Вычислим

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = \sqrt{f'(\zeta)} (\sqrt{f'(\zeta)} (|\zeta|^2 - 1))'_{\bar{z}} \doteq \sqrt{\frac{|f'(\zeta)|}{f'(\zeta)}} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \frac{|\zeta|^2 - 1}{2} + \zeta \right)$$

и выясним образ E^- под действием $\vec{\Omega} = 2R_{\bar{z}}$. Для этого, как и в задаче **3**, рассмотрим

$$\vec{\Omega}|_{\zeta=e^{i\theta}} = 2e^{i\theta} \frac{|f'(e^{i\theta})|}{f'(e^{i\theta})} = 2ie^{i\alpha(\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где $\alpha(\theta)$ – монотонно убывающая функция, равная углу наклона касательной при $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Поэтому годографом для D^- будет внешность окружности $|\vec{\Omega}| = 2$. \triangleleft

5. Появление прямолинейных участков на границе области D или появление угловых точек приводит к вырождению на границе годографа. Именно, прямолинейному участку границы соответствует одна точка на границе годографа, а угловой точке (с разными подходами к ней) – целая линия внутри или вне круга $|w| < 2$.

\triangleright Для того чтобы убедиться в данном утверждении, построим годограф для векторного поля, образованный конформным радиусом угловой области $D = D_\alpha = \{z : |\arg z| < \alpha\pi/2\}$, $0 < \alpha < 2$. Функция

$$\zeta = F(z) = \frac{z^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} + \bar{z}_0^{1/\alpha}}$$

переводит D_α на единичный круг E . Поскольку

$$F'(z_0) = \frac{1}{\alpha} \frac{z_0^{(1-\alpha)/\alpha}}{2 \operatorname{Re} z_0^{1/\alpha}} \quad \text{и} \quad R(D_\alpha, z_0) = \frac{1}{|F'(z_0)|},$$

то окончательно выражение для конформного радиуса примет вид

$$R(D_\alpha, z_0) = 2\alpha \left| \frac{\operatorname{Re} z_0^{\frac{1}{\alpha}}}{z_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \right| = 2\alpha |z_0| \left| \cos \frac{\arg z_0}{\alpha} \right| = 2\alpha |z_0| \cos \frac{\arg z_0}{\alpha}.$$

Снимем индекс у z_0 и с учетом равенства $\arg z = -i(\ln z - \ln \bar{z})/2$ вычислим

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}} &= 2\alpha\sqrt{z}(\sqrt{\bar{z}} \cos \frac{\arg z}{\alpha})'_{\bar{z}} \stackrel{\circ}{=} e^{iat}(\alpha \cos t - i \sin t) = \\ &= \frac{1}{2}((\alpha - 1)e^{i(\alpha+1)t} + (\alpha + 1)e^{i(\alpha-1)t}) = \vec{\Omega}/2, \quad t = \frac{\arg z}{\alpha}. \end{aligned}$$

Заметим, что определяющим для годографа будет только направление t , так как в полученном соотношении не участвует величина $|z|$. Все точки, лежащие на одном луче, под действием функции $\vec{\Omega}/2$ перейдут в одну единственную точку. Действительно, геометрически найденная векторная сумма описывает след, оставляемый точкой, лежащей на окружности радиуса $|\alpha - 1|$, при прокатывании этой окружности по неподвижной окружности радиуса 2. При $0 < \alpha < 1$ прокатывание происходит по внутренней дуге окружности радиуса 2, и след представляет собой ветвь гипоциклоиды, при $1 < \alpha < 2$ прокатывание происходит по внешней дуге, и след будет ветвью эпициклоиды. При $\alpha = 1$ прокатывания не будет, и $\vec{\Omega} \equiv 2$. \triangleleft

6. Построить годограф для $\vec{\Omega}$ в области, ограниченной выпуклой кривой с бесконечно удаленной граничной точкой (рассмотреть области, внутренние и внешние по отношению к этой кривой).

У к а з а н и е. Исследовать функцию $z = f(a, \alpha; \zeta) = (\zeta + a)^\alpha$, $a > 0$, $0 < \alpha < 2$.

\triangleright Правая полуплоскость $H = \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ отображается функцией

$$z = f(a, \alpha; \zeta) = (\zeta + a)^\alpha, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 2,$$

на выпуклую область при $0 < \alpha \leq 1$ и на область с выпуклым дополнением до полной плоскости при $1 \leq \alpha < 2$. Проверим выпуклость граничной линии с уравнением $z = (a + i\eta)^\alpha$, $-\infty < \eta < +\infty$. Учтем, что

касательная прямая к граничной линии в точке, соответствующей значению $\zeta = i\eta$, образует с положительным направлением вещественной оси угол

$$\Phi(\eta) = \pi/2 + \arg z'_\eta.$$

Монотонность этого угла следует из постоянства знака производной

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = (\operatorname{Im} \ln z'_\eta)'_\eta = \operatorname{Im} \frac{z''_\eta}{z'_\eta} = (\alpha - 1) \operatorname{Im} \frac{i}{a + i\eta} = \frac{(\alpha - 1)a}{a^2 + \eta^2}.$$

Видно, что $d\Phi/d\eta > 0$ при $\alpha > 1$ и $d\Phi/d\eta < 0$ при $\alpha < 1$. Это обеспечивает монотонное возрастание угла $\Phi(\eta)$ при $\alpha > 1$ и его монотонное убывание при $\alpha < 1$. Поэтому граничная линия в плоскости z будет выпуклой.

Найдем годограф для векторного поля $\vec{\Omega} = 2R_{\bar{z}}$, которое образовано градиентом конформного радиуса $R(D(a, \alpha), f(a, \alpha; \zeta)) = |f'(a, \alpha; \zeta)| 2 \operatorname{Re} \zeta$ в области $D(a, \alpha) = f(a, \alpha; H)$. Произведем необходимые вычисления. Так как $f'(a, \alpha; \zeta) = \alpha(\zeta + a)^{\alpha-1}$, то $R = \alpha|\zeta + a|^{\alpha-1}(\zeta + \bar{\zeta})$ и

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}} &= \frac{1}{f'} \alpha (\zeta + a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \left[\frac{\alpha-1}{2} (\bar{\zeta} + a)^{\frac{\alpha-3}{2}} (\zeta + \bar{\zeta}) + (\bar{\zeta} + a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \right] = \\ &= \left(\frac{\zeta + a}{\bar{\zeta} + a} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{1}{2(\bar{\zeta} + a)} [(\alpha-1)\zeta + (\alpha+1)\bar{\zeta} + 2a] = \vec{\Omega}/2. \end{aligned}$$

Определим граничные точки годографа. Для этого представим

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(i\eta) &= \left(\frac{a + i\eta}{a - i\eta} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{(\alpha-1)i\eta + (\alpha+1)(-i\eta) + 2a}{(a - i\eta)} = \\ &= 2 \left(\frac{a + i\eta}{a - i\eta} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} = 2e^{i(\alpha-1) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{a}}. \end{aligned}$$

Когда η меняется от $-\infty$ до $+\infty$, точка $\vec{\Omega}(i\eta)$ (т. е. конец этого вектора с началом в 0) будет двигаться по дуге окружности радиуса 2 с центром

в 0 от $2e^{-i(\alpha-1)\pi/2}$ до $2e^{i(\alpha-1)\pi/2}$, не выходя за пределы дуги окружности между точками $\pm 2i$.

Теперь нужно найти образы при различных подходах к ∞ . Для этого подсчитаем пределы $\vec{\Omega}(re^{i\beta})$ при $r \rightarrow \infty$, когда фиксированная величина β находится в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\Omega}(re^{i\beta}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{re^{i\beta} + a}{re^{-i\beta} + a} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{(\alpha-1)re^{i\beta} + (\alpha+1)re^{-i\beta} + 2a}{(a + re^{-i\beta})} \right] = \\ &= e^{i\beta(\alpha-1)} e^{i\beta} [(\alpha-1)e^{i\beta} + (\alpha+1)e^{-i\beta}] = (\alpha-1)e^{i\beta(\alpha+1)} + (\alpha+1)e^{i\beta(\alpha-1)} = \varphi(\beta). \end{aligned}$$

Если β будет меняться от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то точка $\varphi(\beta)$ опишет дугу циклоиды между крайними точками $2ie^{-i\alpha\pi/2}$ (при $\beta = -\pi/2$) и $-2ie^{i\alpha\pi/2}$ (при $\beta = \pi/2$).

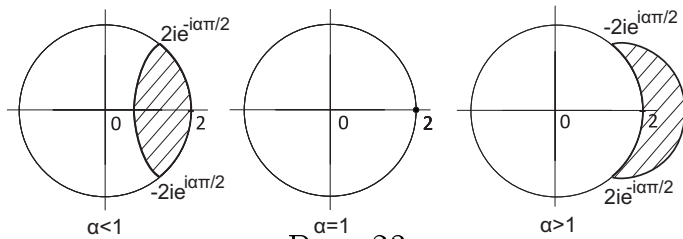


Рис. 23

Годограф не зависит от $a \neq 0$. Если $a = 0$, то при $\alpha < 1$ образ вырождается во внутреннюю дугу циклоиды, при $\alpha > 1$ образ вырождается во внешнюю дугу циклоиды. Точечный образ при $\alpha = 1$ сохраняется для любых a . \triangleleft

Примерами граничных линий с параметрическим представлением $z = (a + i\eta)^\alpha$, $-\infty < \eta < +\infty$, $a > 0$, являются параболы и гиперболы.

Параболы получаются при $\alpha = 2$:

$$z = (a + i\eta)^2 \Leftrightarrow \{x = a^2 - \eta^2, y = 2a\eta\} \Leftrightarrow x - a^2 = -\frac{y^2}{4a^2} \Leftrightarrow y^2 = -4a^2(x - a^2).$$

Равносторонние гиперболы получаются при $\alpha = 1/2$:

$$z = (a + i\eta)^{1/2} \Rightarrow a + i\eta = (x + iy)^2 \Leftrightarrow a = x^2 - y^2, \eta = 2xy.$$

7. Доказать, что 1) функция $\vec{\Omega}$ в любой выпуклой области D , отличной от D_α , $\alpha \in (0, 1]$, и D_0 , осуществляет квазиконформное отображение; 2) для угловой области D_α , $\alpha \in (0, 1]$, и полосы D_0 по всей области справедливо тождество $\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}(D, z)}{R_{zz}(D, z)} \right| \equiv 1$; 3) при переходе ко вложенным областям $f(rE)$, $0 < r < 1$, получим $K(r^2)$ -квазиконформные отображения для любой выпуклой области $f(E)$, где $K(r^2) \leq \frac{1+r^2}{1-r^2}$.

П о я с н е н и е. Говорят, что функция $\vec{\Omega} = 2R_{\bar{z}}$ осуществляет $K(k)$ -квазиконформное отображение ([6], с. 13), если $\vec{\Omega}$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\vec{\Omega}_{\bar{z}} = \mu(z, \bar{z}) \vec{\Omega}_z$$

с соответствующим коэффициентом $k = \frac{K-1}{K+1}$ для этого уравнения:

$$\left| \frac{(R_{\bar{z}})_{\bar{z}}}{(R_{\bar{z}})_z} \right| = |\mu(z, \bar{z})| \leq k < 1, \quad z \in D.$$

Разложим $R(z) \equiv R(D, z)$ в усеченный ряд в окрестности точки z_0

$$R(z_0 + re^{i\theta}) = R(z_0) + 2 \operatorname{Re}(R_z e^{i\theta})|_{r=0} \cdot r + (\operatorname{Re}(R_{zz} e^{2i\theta}) + R_{z\bar{z}})|_{r=0} \cdot r^2 + O(r^3).$$

Выпуклость вверх или вниз поверхности конформного радиуса будет определяться знаком коэффициента в разложении при r^2 . Именно, для выпуклости вверх необходимо выполнение неравенства

$$\operatorname{Re}(R_{zz} e^{2i\theta}) + R_{z\bar{z}} \leq |R_{zz}| + R_{z\bar{z}} \leq 0,$$

для выпуклости вниз — неравенства

$$\operatorname{Re}(R_{zz} e^{2i\theta}) + R_{z\bar{z}} \geq -|R_{zz}| + R_{z\bar{z}} \geq 0 \Leftrightarrow |R_{zz}| - R_{z\bar{z}} \leq 0,$$

причем $|R_{\bar{z}\bar{z}}| = |R_{zz}|$.

Перенесем в этих соотношениях смешанную производную вправо, возведем получившиеся неравенства в квадрат и запишем их в виде $|R_{zz}|^2 \leq |R_{z\bar{z}}|^2$. Отсюда получим соотношение $|R_{z\bar{z}}|^2 - |R_{\bar{z}\bar{z}}|^2 \geq 0$, от которого легко перейдем к неравенству

$$\left| \frac{(R_{\bar{z}})_{\bar{z}}}{(R_{\bar{z}})_z} \right| \leq 1.$$

▷ Необходимое и достаточное условие выпуклости области D ([10], с. 166), полученной из круга E под действием функции $z = f(\zeta)$, записывается в виде $\operatorname{Re} \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + 1 \geq 0$. Из геометрических соображений ясно, что $\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \Phi_0(\zeta)$, где $\Phi_0(\zeta)$ осуществляет однолистное отображение круга E на полуплоскость $\{\operatorname{Re} \Phi_0 > -1\}$ (здесь знак подчинения « \prec » означает, что множество значений функции $\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$ лежит в области значений функции $\Phi_0(\zeta)$). Тогда $\Phi_0^{-1}(\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}) = \tilde{\varphi}(\zeta)$ — функция из леммы Шварца, то есть $|\tilde{\varphi}(\zeta)| \leq 1$ и $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Поэтому $\tilde{\varphi}(\zeta) = \zeta \varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ — регулярная функция в E , и справедлива цепочка неравенств

$$|\tilde{\varphi}| \leq |\zeta| \implies \frac{|\tilde{\varphi}|}{|\zeta|} \leq 1 \implies |\varphi| \leq 1.$$

Таким образом, φ — функция из обобщенной леммы Шварца ([10], с. 319).

Возьмем $\Phi_0(\zeta) = \frac{2\zeta}{1-\zeta}$, тогда $\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \Phi_0(\tilde{\varphi}(\zeta)) = 2 \frac{\zeta \varphi(\zeta)}{1-\zeta \varphi(\zeta)}$ и, следовательно,

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = 2 \frac{\varphi(\zeta)}{1-\zeta \varphi(\zeta)}.$$

Вычислим необходимые производные. Имеем

$$R_{\bar{z}} = \frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{\bar{f}'}} \left(\frac{\bar{f}''}{\bar{f}'} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \zeta \right),$$

$$R_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{\bar{f}'} \frac{1-|\zeta|^2}{2} \{\bar{f}, \bar{\zeta}\} \sqrt{\frac{f'}{\bar{f}'}}.$$

Модуль последнего выражения умножим на R и перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
R |R_{\bar{z}z}| &= \frac{(1 - |\zeta|^2)^2}{2} |\{f, \zeta\}| = \frac{(1 - |\zeta|^2)^2}{2} \left| \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right| = \\
&= \frac{(1 - |\zeta|^2)^2}{2} \left| \frac{2\varphi'}{1 - \zeta\varphi} + \frac{2\varphi(\varphi + \zeta\varphi')}{(1 - \zeta\varphi)^2} - \frac{1}{2} \frac{4\varphi^2}{(1 - \zeta\varphi)^2} \right| = \\
&= \frac{(1 - |\zeta|^2)^2}{2} \frac{1}{|1 - \zeta\varphi|^2} |2\varphi'(1 - \zeta\varphi) + 2\varphi^2 + 2\zeta\varphi\varphi' - 2\varphi^2| = \frac{|\varphi'|(1 - |\zeta|^2)^2}{|1 - \zeta\varphi|^2}.
\end{aligned}$$

Далее

$$R_{\bar{z}z} = \frac{1}{|f'|(1 - |\zeta|^2)} \left(\left| \frac{f''}{f'} \frac{1 - |\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 - 1 \right).$$

Домножив последнее равенство на R , получим

$$\begin{aligned}
R |R_{\bar{z}z}| &= 1 - \left| \frac{f''}{f'} \frac{1 - |\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 = 1 - \left| \frac{2\varphi}{1 - \zeta\varphi} \frac{1 - |\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 = \\
&= 1 - \left| \frac{\varphi - \bar{\zeta}}{1 - \zeta\varphi} \right|^2 = 1 - \frac{(\varphi - \bar{\zeta})(\bar{\varphi} - \zeta)}{(1 - \zeta\varphi)(1 - \bar{\zeta}\bar{\varphi})} = \\
&= \frac{1 - \zeta\varphi - \bar{\zeta}\bar{\varphi} + |\zeta\varphi|^2 - |\varphi|^2 + \bar{\zeta}\bar{\varphi} + \zeta\varphi - |\zeta|^2}{|1 - \zeta\varphi|^2} = \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - |\varphi|^2)}{|1 - \zeta\varphi|^2}.
\end{aligned}$$

Составляя отношение производных, будем иметь

$$\begin{aligned}
\left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right| &= \frac{(1 - |\zeta|^2)^2 |\{f, \zeta\}|}{2 \left(1 - \left| \frac{f''}{f'} \frac{1 - |\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 \right)} = \frac{(1 - |\zeta|^2)^2 |\varphi'|}{|1 - \zeta\varphi|^2} \cdot \frac{|1 - \zeta\varphi|^2}{(1 - |\zeta|^2)(1 - |\varphi|^2)} = \\
&= \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - |\varphi|^2} |\varphi'| \leq \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - |\varphi|^2} \frac{1 - |\varphi|^2}{1 - |\zeta|^2} = 1.
\end{aligned}$$

По обобщенной лемме Шварца равенство $|\varphi'| = \frac{1 - |\varphi|^2}{1 - |\zeta|^2}$ достигается на экстремальной функции вида $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \frac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}$, $|a| < 1$. В нашем случае эта функция определит тождество $\left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right| \equiv 1$. Выясним, для каких функций f оно справедливо. Для этого подставим экстремальную функцию φ из леммы Шварца в выражение для f''/f' и разложим правую

часть полученного равенства на простейшие дроби. Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{f''}{f'} &= \frac{2ae^{i\alpha}}{1 + (\bar{a} - ae^{i\alpha})\zeta - e^{i\alpha}\zeta^2} = -e^{i\alpha/2} \frac{2t + 2ae^{i\alpha/2}}{(t - t_1)(t - t_2)} = \\ &= e^{i\alpha/2} \left(\frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2} \right) = e^{i\alpha/2} \frac{(A + B)t - (At_2 + Bt_1)}{(t - t_1)(t - t_2)},\end{aligned}$$

где $t = e^{i\alpha/2}\zeta$ и

$$t_1 = -i \operatorname{Im}\{ae^{i\alpha/2}\} + \sqrt{1 - \operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}} \in \partial E,$$

$$t_2 = -i \operatorname{Im}\{ae^{i\alpha/2}\} - \sqrt{1 - \operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}} \in \partial E.$$

Решая систему $\begin{cases} A + B = -2, \\ At_2 + Bt_1 = 2ae^{i\alpha/2}, \end{cases}$ найдем

$$A = -\frac{2t_1 + 2ae^{i\alpha/2}}{t_1 - t_2} = -(1 + \theta),$$

$$B = -2 - A = -1 + \theta,$$

где

$$\theta = \frac{\operatorname{Re}\{ae^{i\alpha/2}\}}{\sqrt{1 - \operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}}} \in \mathbb{R}.$$

Тогда, интегрируя соотношение

$$\frac{f''}{f'} = e^{i\alpha/2} \left(\frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2} \right),$$

получим

$$\ln f' = \ln \left(C \left(\frac{t - t_2}{t - t_1} \right)^{\theta-1} \frac{1}{(t - t_1)^2} \right),$$

т. е. функция

$$f = C_1 \left(\frac{t - t_2}{t - t_1} \right)^\theta + C_2$$

будет отображать единичный круг на угловую область раствора $\pi\theta$.

Для r -линий уровня получим

$$r \frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = 2r \frac{\varphi(r\zeta)}{1 - r\zeta\varphi(r\zeta)}.$$

Так как

$$R|R_{\bar{z}\bar{z}}| = \frac{r^2|\varphi'(r\zeta)|(1 - |\zeta|^2)^2}{|1 - r\zeta\varphi(r\zeta)|^2},$$

$$R|R_{\bar{z}z}| = \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - r^2|\varphi(r\zeta)|^2)}{|1 - r\zeta\varphi(r\zeta)|^2},$$

то

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{\bar{z}z}} \right| = \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - r^2|\varphi(r\zeta)|^2} r^2 |\varphi'(r\zeta)| \leq r^2 \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - r^2|\varphi(r\zeta)|^2} \frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{1 - r^2|\zeta|^2} \leq r^2.$$

Завершая доказательство, заметим, что тождество $\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{\bar{z}z}} \right| \equiv r^2$ достигается при $r = 1$ для полученной выше экстремальной функции, отображающей внутренность единичного круга rE на внутренность угловой области раствора $\pi\theta$. \triangleleft

У п р а ж н е н и е. В качестве тем для самостоятельных исследований предлагается сформулировать и доказать результаты, аналогичные представленным в задаче 7, для областей с конечным выпуклым дополнением и областей с выпуклым дополнением и бесконечно удаленной точкой на границе.

Одним из исключительных случаев квазиконформности градиента (случай улучшения) проявляется при обращении величины $\mu(z, \bar{z})$ в нуль, когда уравнение Бельтрами приводится к виду $(R_{\bar{z}})_{\bar{z}} = 0$.

8. Доказать, что функция $\vec{\Omega}$ осуществляет конформное отображение области D тогда и только тогда, когда граница D является окружностью в \mathbb{C} .

\triangleright 1. Достаточность. Рассмотрим функцию $z = f(\zeta) = \rho\zeta + a$, $\zeta \in E$, осуществляющую отображение единичного круга E на круг

$E(a, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке a . Поскольку производная $f'(\zeta) = \rho > 0$ и $\zeta = \frac{z-a}{\rho}$, то конформный радиус запишется в виде

$$R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) = \rho \left(1 - \frac{|z-a|^2}{\rho^2}\right) = \frac{\rho^2 - |z-a|^2}{\rho},$$

а

$$\vec{\Omega} = -2 \frac{z-a}{\rho} \quad (27)$$

определится линейной функцией, реализующей конформное отображение.

Функция $z = f(\zeta) = \frac{\rho}{\zeta} + a$ переведет E на внешность круга $E^-(a, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке a . Так как $|f'(\zeta)| = \frac{\rho}{|\zeta|^2}$ и $\zeta = \frac{\rho}{z-a}$, то конформный радиус запишется в виде

$$R(D, z) = \frac{|z-a|^2}{\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{|z-a|^2}\right) = \frac{|z-a|^2 - \rho^2}{\rho},$$

и

$$\vec{\Omega} = 2 \frac{z-a}{\rho} \quad (28)$$

определится линейной функцией, реализующей конформное отображение.

Полуплоскость (как предельное положение круга или внешности круга) определяет конформный радиус с функцией $\vec{\Omega}$ в виде константы, и поэтому $\vec{\Omega}$ не задает конформное отображение. Действительно, функция $z = f(\zeta) = \frac{e^{i\theta}}{\zeta+1} + c$ отобразит круг на любую фиксированную полуплоскость с направляющим вектором граничной прямой в виде $e^{i(\theta+\pi/2)}$.

Запишем конформный радиус

$$R(f(E), f(\zeta)) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|\zeta+1|^2} = |z-c|^2 \left(\frac{e^{i\theta}}{z-c} + \frac{e^{-i\theta}}{\bar{z}-\bar{c}} - \frac{1}{|z-c|^2} \right) =$$

$$= e^{i\theta}(\bar{z} - \bar{c}) + e^{-i\theta}(z - c) - 1$$

и градиент для него

$$\vec{\Omega} = 2e^{i\theta}.$$

Вся полуплоскость под действием функции $\vec{\Omega}$ переходит в одну единственную точку на окружности радиуса 2. Поэтому полуплоскость не входит в класс областей, характеризующихся конформностью $\vec{\Omega}$.

2. Необходимость. Из условия теоремы $R_{\bar{z}\bar{z}} = 0$. Решением этого дифференциального уравнения будет функция $CR = c_1(z)\bar{z} + c_2(z)$, где $c_1(z), c_2(z)$ — аналитические функции, C — постоянная положительная величина. Пусть $c_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$, $k = 1, 2$. В силу вещественности R имеем $\text{Im}\{(u_1 + iv_1)(x - iy) + u_2 + iv_2\} = 0$, т. е. $v_2 = yu_1 - xv_1$. Так как v_2 — гармоническая, то

$$\Delta(yu_1 - xv_1) = 0, \tag{29}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Поскольку

$$(yu_1 - xv_1)_{xx} = yu_{1xx} - xv_{1xx} - 2v_{1x},$$

$$(yu_1 - xv_1)_{yy} = yu_{1yy} - xv_{1yy} + 2u_{1y},$$

то (29) приведет к виду

$$y\Delta u_1 - x\Delta v_1 - 2(v_{1x} - u_{1y}) = 0,$$

и в силу гармоничности функций u_1 и v_1 получим $v_{1x} - u_{1y} = 0$, т. е. $v_{1x} = u_{1y}$. Это равенство и первое условие Коши-Римана (для функции $c_1(z)$) $v_{1x} = -u_{1y}$ дают тождества $v_{1x} = u_{1y} = 0$. Отсюда при выполнении второго условия Коши-Римана $u_{1x} = v_{1y}$ получим $u_1 = \alpha x + \beta$,

$v_1 = \alpha y + \tilde{\beta}$, $\alpha, \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$. Значит, $c_1(z) = \alpha z + \beta + i\tilde{\beta}$. Функцию $c_2(z)$ восстановим по ее мнимой части $v_2 = y\beta - x\tilde{\beta}$ ([11], с. 189):

$$\begin{aligned} c_2(z) &= i(2v_2(z/2, z/(2i)) - v_2(0, 0) + ic) = \\ &= i(\beta z/i - \tilde{\beta}z) - c = z(\beta - i\tilde{\beta}) - c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, конформный радиус определится выражением

$$\begin{aligned} CR &= c_1(z)\bar{z} + c_2(z) = (\alpha z + \beta + i\tilde{\beta})\bar{z} + z(\beta - i\tilde{\beta}) - c = \\ &= \alpha|z|^2 + 2\operatorname{Re}\{z(\beta - i\tilde{\beta})\} - c \end{aligned} \quad (30)$$

и при $\alpha = 0$ примет вид

$$CR = 2\operatorname{Re}\{z(\beta - i\tilde{\beta})\} - c.$$

Так как на границе области $R(t) = 0$, то уравнение граничной кривой $2\operatorname{Re}[t(\beta - i\tilde{\beta})] - c = 0$ задает прямую линию, и область D является полуплоскостью. Поэтому $\vec{\Omega} = 2\frac{\beta+i\tilde{\beta}}{C} = 2e^{i\theta}$, т. е. $C = |\beta + i\tilde{\beta}|$.

При $\alpha \neq 0$ перепишем (30) в виде

$$CR = \alpha \left| z + \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - \alpha \left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - c. \quad (31)$$

Учитывая граничное свойство конформного радиуса, получим

$$\begin{aligned} 0 &= CR \Big|_{z=t} = \alpha \left| t + \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - \alpha \left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - c \Rightarrow \\ \left| t + \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 &= \left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 + \frac{c}{\alpha}, \end{aligned} \quad (32)$$

где (32) – уравнение окружности. \triangleleft

Сделаем некоторые замечания относительно α . Из (31) при $C = 1$ имеем

$$\vec{\Omega} = 2(\alpha z + \beta + i\tilde{\beta}). \quad (33)$$

Пусть $\alpha > 0$. Тогда перепишем (33) в виде

$$\vec{\Omega} = 2 \frac{z + \frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда, сравнивая полученное с (28), заключаем, что область D при $\alpha > 0$ есть внешность круга радиуса $\frac{1}{\alpha}$ с центром в точке $-\frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\alpha}$.

При $\alpha < 0$ перепишем (33) следующим образом

$$\vec{\Omega} = -2 \frac{z + \frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha}} = -2 \frac{z + \frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\alpha}}{\frac{1}{|\alpha|}}.$$

Сравнение этого выражения с (27) позволяет заключить, что в случае $\alpha < 0$ область D будет кругом радиуса $\frac{1}{|\alpha|}$ с центром в точке $-\frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\alpha}$.

Заметим, что (32) описывает целое семейство окружностей. Используя возможность выбора c , полагаем $|\frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\alpha}|^2 + \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$.

Для конкретных примеров коэффициент квазиконформности может быть и меньше, чем $K(r^2) = \frac{1+r^2}{1-r^2}$.

9. Пусть область D представляет собой квадрат и отображающая функция ([10], с. 77) имеет вид

$$z = f(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{1/2}}.$$

Для вложенных в квадрат областей $f(r\zeta)$, $0 < r < 1$, коэффициент квазиконформности для $\vec{\Omega}$ будет равен $K(r^4) = \frac{1+r^4}{1-r^4} < K(r^2)$. Убедимся в этом.

▷ Конформный радиус запишется в виде

$$R(\zeta) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - r^4 \zeta^4|^{1/2}}.$$

Поэтому

$$R_{\bar{z}} = \frac{\sqrt{1 - r^4 \bar{\zeta}^4}}{\sqrt[4]{1 - r^4 \zeta^4}} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{\sqrt[4]{1 - r^4 \bar{\zeta}^4}} \right)'_{\bar{\zeta}} = \frac{r^4 \bar{\zeta}^3 - \zeta}{\sqrt[4]{1 - r^4 \zeta^4} \sqrt[4]{(1 - r^4 \bar{\zeta}^4)^3}},$$

$$R_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\sqrt{1-r^4\bar{\zeta}^4}}{\sqrt[4]{1-r^4\bar{\zeta}^4}} \left(\frac{r^4\bar{\zeta}^3 - \zeta}{\sqrt[4]{(1-r^4\bar{\zeta}^4)^3}} \right)'_{\bar{\zeta}} = \frac{3}{\sqrt[4]{1-r^4\bar{\zeta}^4}} \frac{r^4\bar{\zeta}^2(1-|\zeta|^2)}{\sqrt[4]{(1-r^4\bar{\zeta}^4)^5}},$$

$$R_{zz} = \frac{\sqrt{1-r^4\zeta^4}}{\sqrt[4]{(1-r^4\zeta^4)^3}} \left(\frac{r^4\zeta^3 - \zeta}{\sqrt[4]{1-r^4\zeta^4}} \right)'_{\zeta} = -\frac{1-r^8|\zeta|^6}{\sqrt[4]{(1-r^4\zeta^4)^3}\sqrt[4]{(1-r^4\bar{\zeta}^4)^3}}.$$

Составляя отношение вторых производных по модулю, после сокращений будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \frac{(R_{\bar{z}})_{\bar{z}}}{(R_{\bar{z}})_z} \right| &= \frac{3r^4|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-r^8|\zeta|^6} \leq \frac{3r^4|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^6} = \\ &= \frac{3r^4|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2+|\zeta|^4} = \frac{3r^4}{\frac{1}{|\zeta|^2}+1+|\zeta|^2} \leq r^4, \end{aligned}$$

так как $\frac{1}{|\zeta|^2} + 1 + |\zeta|^2 \geq 3$. \triangleleft

10. Следующий пример иллюстрирует существование таких функций, для которых квазиконформность $\vec{\Omega}$ нарушается лишь в одной точке.

\triangleright Рассмотрим отображение $rz = \ln(1+r\zeta)$, для которого

$$\left| \frac{(R_{\bar{z}})_{\bar{z}}}{(R_{\bar{z}})_z} \right| \stackrel{\circ}{=} r^2 \frac{1-|\zeta|^2}{|r^2 - r^2|\zeta|^2 - 4 - 4r \operatorname{Re} \zeta|} \leq r^2 \max_{\zeta=\xi+i\eta \in E} \Phi(\xi, \eta),$$

где функция $\Phi(\xi, \eta) = \frac{1-\xi^2-\eta^2}{4-r^2+4r\xi+r^2(\xi^2+\eta^2)}$ обращается в нуль на границе круга E и положительна внутри него, значит, достигает максимума внутри E . Для его вычисления решим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -4 \frac{r\xi^2+2\xi+r-r\eta^2}{(4-r^2+4r\xi+r^2(\xi^2+\eta^2))^2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -8\eta \frac{1+r\xi}{(4-r^2+4r\xi+r^2(\xi^2+\eta^2))^2} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем два случая. Первый случай, когда $\eta = 0$, при подстановке в первое уравнение системы дает $\xi_0(r) = \frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r}$. Второй случай, при котором найденное значение

$\xi_1(r) = -1/r$ попадет в класс решений задачи лишь при $r = 1$, причем $\xi_1(1) = \xi_0(1) = -1$. Поэтому

$$\max_{\zeta = \xi + i\eta \in E} \Phi(\xi, \eta) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r}, 0\right) = \frac{1}{r^2} \frac{1-\sqrt{1-r^2}}{1+\sqrt{1-r^2}} \leq \frac{1}{r^2},$$

причем равенство в последнем неравенстве возможно лишь при $r = 1$ в точке $(-1, 0)$. Следовательно, $|(R_{\bar{z}})_{\bar{z}} / (R_{\bar{z}})_z| \begin{cases} < r^2 \text{ при } r < 1, \\ \leq 1 \text{ при } r = 1 \end{cases}$ с достижением знака равенства в граничной точке $z = \lim_{\xi \rightarrow -1} \ln(1 + \xi)$. \triangleleft

* * * * *

Составители выражают надежду, что разработанные в пособии задачи привлекут внимание студентов и пробудят в них интерес к творческой деятельности, которая является важным элементом высшего образования.

За любые замечания по постановкам и решениям задач авторы-составители будут благодарны студентам и преподавателям.

Литература

1. Аксентьев Л.А. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1969. – 56 с.; 1984. – 90 с; 2005. – 122 с.
2. Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области. – Изв. вузов. Математика. – 1984.– №2. – С. 3-11.
3. Аксентьев Л.А. Комплексный потенциал плоского поля. – Казань, 1989. – 44 с.
4. Аксентьев Л.А. *Применение метода симметрии в конформных отображениях и в краевых задачах.* – Казань, КГУ, 1993. – 48 с.
5. Аксентьев Л.А., Калимуллина А.Н. *Методы расчетов плоских полей.* – Казань, КГУ, 2007. – 34 с.
6. Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* – М.: Мир, 1969. – 135 с.
7. Ахиезер Н.И. *Элементы теории эллиптических функций.* – 2 изд., М.: Наука, 1970. – 304 с.
8. Ахметова А.Н. *Свойства конформного радиуса и теоремы единственности для внешних обратных краевых задач:* дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Казан. госуд. университет. – Казань. – 2009. – 105 с.
9. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.

10. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Изд-во Наука, 1987. – 688 с.
12. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения*. – 2-е изд., Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 334 с.

Дополнительная литература

13. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. – М.: Изд-во Наука, 1975. – 320 с.
14. Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. – М.: Изд-во Мир, 1964. – 655 с.
15. Родыгин В.М., Голубева О.В. *Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники*. – М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
16. Mathews J.H., Howell R.W. *Complex analysis for mathematics and engineering, Third Edition*. – Sudbury, MA: Jones and Bartlett Pub. Inc., 1997. – 484 pp.