Ю.Р. Агачев, Е.К. Липачёв

Прямые полиномиальные и сплайновые методы решения интегральных уравнений второго рода

Учебное пособие

Казанский университет

2017

Рекомендовано к опубликованию и размещению на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета Учебно–методической комиссией Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского, протокол № 7 от 13 апреля 2017 года

Рецензент: к.ф.–м.н., доц. Галимянов А.Ф.

Агачев Ю.Р. Прямые полиномиальные и сплайновые методы решения интегральных уравнений второго рода. Учебное пособие / Ю.Р. Агачев, Е.К. Липачев. – Казань, 2017. – 68 с.

В пособии на основе общей теории приближенных методов функционального анализа и теории приближения функций полиномами и сплайнами дается теоретико–функциональное обоснование известных прямых полиномиальных и сплайновых методов решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода.

Пособие предназначено для студентов-бакалавров старших курсов и магистрантов математических факультетов университетов, специализирующихся в области теории функций и приближений и численных методов решения интегральных уравнений. Оно будет полезно также аспирантам и специалистам в области методов решения интегральных (одномерных и многомерных, регулярных и сингулярных, первого и второго родов) уравнений.

Предполагается, что читатель знако́м с основами функционального анализа, теории приближения функций тригонометрическими полиномами, алгебраическими многочленами и полиномиальными сплайнами в объеме, необходимом для понимания и усвоения изложенного в пособии материала.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение

В настоящее время для приближенного решения различных классов интегральных и дифференциальных уравнений применяется большое число приближенных методов, основанных на различных идеях (см., напр., в [8, 24, 20, 33]). Среди приближенных методов особое место занимают так называемые прямые методы. По определению С.Л.Соболева (см., напр., в [33, 38]), прямыми методами называются такие приближенные методы, которые сводят исходную задачу к конечной системе алгебраических уравнений. К прямым методам относятся наиболее часто используемые на практике метод механических квадратур и все проекционные методы, в частности, методы Галеркина, наименьших квадратов, подобластей и коллокации.

Для суждения об эффективности и обоснованности применения этих методов необходимо их теоретическое исследование, под которым понимают [22, 23, 9, 11]:

1) установление осуществимости и сходимости алгоритма;

2) исследование быстроты сходимости;

3) получение эффективной оценки погрешности.

Решение этих вопросов до появления общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича [21] (см. также [22]) проводилось для каждого класса уравнений и каждого из методов своим путем и часто представляло значительную трудность.

Следует отметить, что в последнее время к трем приведенным пунктам добавляют еще две (см., напр., в [9, 10, 11]):

4) исследование устойчивости и обусловленности приближенных методов;

5) доказательство оптимальности исследуемого метода в том или ином смысле.

В данном пособии для интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода дается теоретическое обоснование известных методов Галеркина, наименьших квадратов, подобластей, коллокации и механических квадратур, основанных на аппроксимации функций полиномами и сплайнами. При этом для каждого из методов мы в основном исследуем вопросы, касающиеся решения указанных выше задач 1)–3). В связи с этим заметим, что использованный здесь вариант общей теории приближенных методов анализа, разработанный Б.Г. Габдулхаевым (см., напр., [9]) применительно к сингулярным уравнениям, позволяет во многих случаях решать и задачу 4).

§1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приводятся некоторые необходимые для дальнейшего сведения из функционального анализа и теории функций и приближений.

1.1. Результаты из общей теории приближенных методов анализа

Пусть X и Y – произвольные линейные нормированные пространства с нормами соответственно $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$, а X_n и Y_n – произвольные последовательности их конечномерных подпространств: $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим уравнения

$$Kx = y \quad (\, x \in X,\, y \in Y\,), \tag{1.1}$$

$$K_n x_n = y_n \quad (\, x_n \in X_n,\, y_n \in Y_n\,), \tag{1.2}$$

где K и K_n $(n \in \mathbb{N})$ – линейные операторы из X в Y и из X_n в Y_n соответственно (всюду ниже этот факт кратко будем обозначать так: $K : X \longrightarrow Y$, $K_n : X_n \longrightarrow Y_n$).

Для уравнений (1.1) и (1.2) имеют место следующие результаты (см., напр., в [9, 12, 2]).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия:*

а) оператор $K : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим, т.е. существует ограниченный обратный* $K^{-1} : Y \longrightarrow X$ *;*

б) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \to 0\,, \quad n \to \infty;$

в) $\dim X_n = \dim Y_n = m(n) < \infty \ (n = 1, 2, \ldots)\,.$

Тогда при всех n *, удовлетворяющих неравенству*

$$q_n \equiv \|K^{-1}\|\, \|K - K_n\| < 1, \quad K - K_n : X_n \longrightarrow Y\,,$$

приближенное уравнение (1.2) имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ *при любой правой части* $y_n \in Y_n$ *, причем*

$$\|x_n^*\| \le \|K_n^{-1}\|\, \|y_n\|, \quad \|K_n^{-1}\| \le \|K^{-1}\| \cdot (1 - q_n)^{-1}.$$

Если, кроме того, выполнено условие

г) $\delta_n \equiv \|y - y_n\| \to 0, \quad n \to \infty,$

то приближенные решения x_n^* *сходятся к точному решению* $x^* \in X$ *по норме пространства* X *. При этом погрешность приближенного решения может быть оценена любым из неравенств*

$$\|K\|^{-1}\, \alpha_n \le \|x^* - x_n^*\| \le \|K^{-1}\|\, \alpha_n,\ \ \alpha_n = \|(y - y_n) + (K_n - K)x_n^*\|, \tag{1.3}$$

$$\|x^* - x_n^*\| \le \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q_n} \Big[\|y - y_n\| + q_n\, \|y\| \Big] = O\,(\varepsilon_n + \delta_n)\,. \tag{1.4}$$

Лемма 2. *Пусть* $P_n : Y \longrightarrow Y_n$ *, уравнение (1.1) имеет решение* $x^* \in X$ *при данной правой части* $y \in Y$ *и оператор* K_n *имеет ограниченный обратный. Тогда погрешность приближенного решения* x_n^* *для правой части* $y_n = P_n y$ *может быть представлена в виде*

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(E - K_n^{-1} P_n K)\,(x^* - x_n) + K_n^{-1}\,(K_n x_n - P_n K x_n)\|, \tag{1.5}$$

где $x_n \in X_n$ *– произвольный элемент, а* E *– единичный оператор в пространстве* X*.*

Следствие 1. *Если* K_n *совпадает с сужением оператора* $P_n K$ *на подпространство* X_n *, то для погрешности верно представление*

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(E - K_n^{-1} P_n K)\,(x^* - x_n)\|, \quad \forall\, x_n \in X_n.$$

Следствие 2. *Пусть* $K = E + H$, $K_n = E + H_n$, *где* H *и* H_n *– линейные операторы в нормированных пространствах* $X = Y$ *и* $X_n = Y_n$ *соответственно, а* E *– единичный оператор.*

Если $H_n - P_n H$ *непрерывен в* X_n, $P_n H$ *непрерывен из пространства* $X - X_n$ *в* X_n *и* $P_n^2 = P_n$, *то в условиях леммы 2 для погрешности справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\| \le \Big(1 + \|K_n^{-1}\|\,\|P_n H\|\Big) \cdot \|x^* - P_n x^*\| +$$

$$+ \|K_n^{-1}\|\,\|H_n - P_n H\| \cdot \|P_n x^*\|\,; \qquad (1.6)$$

в частности, при $H_n = P_n H$

$$\|x^* - x_n^*\| \le \Big(1 + \|K_n^{-1}\|\,\|P_n H\|\Big) \cdot \|x^* - P_n x^*\|.$$

1.2. Сведения из теории приближения функций тригонометрическими полиномами и алгебраическими многочленами

1.2.1. Начнем с изложения известных результатов для периодического случая.

Пусть $C_{2\pi} \equiv L_\infty(0, 2\pi)$ и $L_p = L_p(0, 2\pi), 1 \le p < \infty$ – пространства соответственно непрерывных и суммируемых по Лебегу со степенью $p, 1 \le p < \infty$, 2π–периодических функций с нормами

$$\|x\|_{C_{2\pi}} = \max_s |x(s)| \equiv \|x\|_\infty, \quad x \in C_{2\pi};$$

$$\|x\|_p \equiv \|x\|_{L_p} = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(s)|^p ds\Big)^{1/p}, \quad x \in L_p,\ 1 \le p < \infty.$$

Пусть $W^r H_\alpha$ и $W^r H_p^\alpha$ ($r \ge 0$ –целое, $1 \le p < \infty, 0 < \alpha \le 1$) – классы 2π–периодических функций $x(s)$, имеющих производную r–го порядка $x^{(r)}(s)$ ($x^{(0)}(s) \equiv x(s)$), удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α в пространстве $C_{2\pi}$ и L_p соответственно.

Обозначим через $\mathbb{H}_n^T$ множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n, а через $E_n^T(x)_p, 1 \le p < \infty$, и $E_n^T(x) \equiv E_n^T(x)_\infty$ – наилучшее приближение функции $x(s) \in L_p$ полиномами из $\mathbb{H}_n^T$ по норме пространства $L_p, 1 \le p < \infty$, и, соответственно, наилучшее равномерное приближение функции $x(s) \in C_{2\pi}$ полиномами из $\mathbb{H}_n^T$.

Пусть S_n есть оператор Фурье n–го порядка, построенный по тригонометрической системе функций $\{\sin ks, \cos ks\}$, т.е. оператор, который любой 2π–периодической функции $x(s)$ ставит в соответствие $(2n+1)$–ый отрезок ряда Фурье $S_n(x; s)$. Как хорошо известно, для него справедливы следующие представления:

$$(S_n x)(s) \equiv S_n(x; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x)\, e^{iks} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ks + b_k \sin ks = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma) D_n(s - \sigma)\, d\sigma, \qquad (1.7)$$

где $i^2=-1$, $c_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma)e^{-ik\sigma}\,d\sigma$ есть комплексные коэффициенты Фурье функции $x(s)$, $D_n(s)=\frac{\sin\frac{(2n+1)s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}$ – ядро Дирихле n–го порядка, а $a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma)\cos k\sigma\,d\sigma$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma)\sin k\sigma\,d\sigma$ – вещественные коэффициенты Фурье функции $x(s)$.

Имеют место следующие (см., напр., в [6, 35, 30, 15, 9]) результаты.

Лемма 3. *Для любого натурального n справедливы соотношения*

$$S_n^2=S_n,\quad \|S_n\|_{L_2\to L_2}=1,\ \|S_n\|_{C\to L_2}=1,$$

$$\|S_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}}=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\le 2+\ln n.$$

Лемма 4. *Для любой функции $x(s)\in L_2$ отрезок ряда Фурье $S_n(x;s)$ сходится в среднем к самой функции, при этом*

$$\|x-S_nx\|_2=E_n^T(x)_2.$$

Если $x(s)\in C_{2\pi}$, то скорость сходимости в пространстве L_2 можно охарактеризовать неравенством

$$\|x-S_nx\|_2\le E_n^T(x)_\infty.$$

При дополнительном условии принадлежности $x(s)$ к классу Дини–Липшица в $C_{2\pi}$ имеет место равномерная сходимость с быстротой:

$$\|x-S_nx\|_\infty\le(3+\ln n)E_n^T(x)_\infty.$$

Следствие. Пусть функция $x(s)\in W^rH_2^\alpha$, где $r\ge 0, 0<\alpha\le 1$. Тогда скорость сходимости в пространстве L_2 характеризуется порядковым соотношением

$$\|x-S_nx\|_2=O(n^{-r-\alpha}),\ r\ge 0,\ 0<\alpha\le 1.$$

Если же $x(s)\in W^rH_\alpha$, то

$$\|x-S_nx\|_\infty=O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big),\ r\ge 0,\ 0<\alpha\le 1.$$

Пусть, далее, $\mathcal{L}_n^T$ есть оператор Лагранжа тригонометрического интерполирования n–го порядка по узлам[1)]

$$s_k=\frac{2k\pi}{2n+1},\quad k=\overline{0,2n},\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Этот оператор любой функции $x\in C_{2\pi}$ ставит в соответствие тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа $\mathcal{L}_n^T(x;s)$, построенный по значениям функции $x(s)$ в узлах (1.8).

[1)] Мы рассматриваем лишь случай нечетного числа узлов; в случае четного числа узлов соответствующие результаты см., напр., в [9].

Известно, что для любой $x \in C_{2\pi}$

$$\mathcal{L}_n^T(x;s) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x(s_k) D_n(s - s_k). \tag{1.9}$$

Оператор $\mathcal{L}_n^T$ обладает следующими (см., напр., в [36, 20, 9, 41]) свойствами.

Лемма 5. *Для любого натурального n справедливы соотношения:*

$$\mathcal{L}_n^{T^2} = \mathcal{L}_n^T, \quad \|\mathcal{L}_n^T\|_{L_2 \to L_2} = \infty, \ \|\mathcal{L}_n^T\|_{C \to L_2} = 1,$$

$$\|\mathcal{L}_n^T\|_{C_{2\pi} \to C_{2\pi}} = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2(2n+1)}{\pi}.$$

Лемма 6. *Для любой функции $x(s) \in C_{2\pi}$ интерполяционный полином $\mathcal{L}_n^T(x;s)$ сходится в среднем к самой функции со скоростью*

$$\|x - \mathcal{L}_n^T x\|_2 \leq 2E_n^T(x)_\infty.$$

Если же $x(s)$ принадлежит классу Дини–Липшица, то интерполяционный процесс по узлам (1.8) равномерно сходится со скоростью

$$\|x - \mathcal{L}_n^T x\|_\infty \leq \Big(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2(2n+1)}{\pi}\Big) E_n^T(x)_\infty = O\Big\{\ln n \cdot E_n^T(x)_\infty\Big\}.$$

Следствие. Пусть функция $x(s) \in W^r H_\alpha$, где $r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$. Тогда скорость сходимости в пространствах L_2 и $C_{2\pi}$ характеризуется порядковыми соотношениями:

$$\|x - \mathcal{L}_n^T x\|_2 = O(n^{-r-\alpha}), \ r \geq 0, \ 0 < \alpha \leq 1,$$

$$\|x - \mathcal{L}_n^T x\|_\infty = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big), \ r \geq 0, \ 0 < \alpha \leq 1.$$

Обозначим через Π_n линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $x(s) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, полином $T_n(s) \in \mathbb{H}_n^T$, удовлетворяющий условиям

$$\int_{a_k}^{b_k} T_n(s)\, ds = \int_{a_k}^{b_k} x(s)\, ds, \quad k = \overline{0, 2n}, \tag{1.10}$$

где $\{(a_k, b_k)\}$ — некоторая система взаимно–непересекающихся интервалов ("подобластей"), таких, что замыкание их объединения целиком содержится в сегменте длины 2π.

Отметим, что для любой функции $x(s) \in L_1$ существует единственный полином $T_n(s) \equiv \Pi_n(x;s)$, удовлетворяющий условиям (1.10), причем оператор Π_n является линейным и проекционным. Если $(a_k, b_k) = (s_k, s_{k+1}), k = \overline{0, 2n}$, где $0 \leq s_0 < s_1 < \ldots < s_{2n} < s_{2n+1} \leq 2\pi$, то для любой функции $x(s) \in L_1$ справедливо представление

$$\Pi_n(x;s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma)\, d\sigma + \frac{d}{ds} \mathcal{L}_n^T(z;s), \tag{1.11}$$

где $\mathcal{L}_n(z;s)$ — интерполяционный полином Лагранжа по узлам $s_0, s_1, \dots s_{2n}$ для функции

$$z(s) = \int_0^s x(\sigma)\,d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\,d\sigma.$$

Для оператора $\mathit{\Pi}_n$, построенного по узлам (1.8), имеют место следующие (см., напр., [17, 11, 12]) результаты.

Лемма 7. *Справедливы следующие оценки:*

$$\|S_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \le \|\mathit{\Pi}_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \le (1+\pi)\,\|\mathcal{L}_n^T\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} = O(\ln n),\ n\to\infty;$$

$$\|\mathit{\Pi}_n\|_{L_1\to L_1} = O(\ln n), \quad n\to\infty;$$

$$\|\mathit{\Pi}_n\|_{L_p\to L_p} = O(1), \quad 1<p<\infty,\ n\to\infty;$$

в частности,

$$1 \le \|\mathit{\Pi}_n\|_{L_2\to L_2} \le \sigma_n \le \sqrt{-1+\frac{\pi^2}{4}}\,,$$

где

$$\sigma_n^2 = \max_{-n\le k\le n} \sum_{|\mu|=1}^{\infty} \left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^2 \le \frac{\pi^2}{4} - 1. \tag{1.12}$$

Лемма 8. *Если функция $x(s)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица в L_1, то полиномы $\mathit{\Pi}_n(x;s)$ сходятся к $x(s)$ в среднем со скоростью*

$$\|x - \mathit{\Pi}_n x\|_1 = O(\ln n\,\cdot E_n^T(x)_1).$$

При $x(s)\in L_p, 1<p<\infty$, полиномы $\mathit{\Pi}_n(x;s)$ сходятся к $x(s)$ в среднем с быстротой

$$\|x - \mathit{\Pi}_n x\|_p = O(E_n^T(x)_p);$$

в частности, для любой функции $x(s)\in L_2$ справедливы двусторонние оценки

$$E_n^T(x)_2 \le \|x - \mathit{\Pi}_n x\|_2 \le \sqrt{1+\sigma_n^2}\,E_n^T(x)_2, \quad n\in\mathbb{N},$$

где σ_n определены в (1.12).

Если функция $x(s)\in C_{2\pi}$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то полиномы $\mathit{\Pi}_n(x;s)$ сходятся равномерно со скоростью

$$\|x - \mathit{\Pi}_n x\|_\infty \le (1 + \|\mathit{\Pi}_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}})\,E_n^T(x)_\infty = O(\ln n\,\cdot E_n^T(x)_\infty).$$

1.2.2. Перейдем теперь к изложению аналогичных приведенным в пункте 1.2.1 результатов в непериодическом случае.

Обозначим через $C \equiv C[-1,1]$ [2)] пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой

$$\|x\|_C \equiv \|x\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le t\le 1} |x(t)| = \|x\|_\infty, \quad x \in C[-1,1].$$

Пусть $\rho = \rho(t) \ge 0$ – фиксированная весовая функция на отрезке $[-1,1]$. Обозначим через $L_{2,\rho} \equiv L_{2,\rho}(-1,1)$ пространство функций, квадратично суммируемых по Лебегу в промежутке $(-1,1)$ с весом $\rho(t)$. Норму в этом пространстве введем следующим образом:

$$\|x\|_{2,\rho} \equiv \|x\|_{L_{2,\rho}(-1,1)} = \left\{ \int_{-1}^{+1} \rho(t)|x(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \ x \in L_{2,\rho}(-1,1).$$

Пусть $I\!H_n$ есть множество всех алгебраических многочленов степени не выше n, где $n+1 \in \mathbb{N}$, а $E_n(x)_C$ и $E_n(x)_{2,\rho}$ наилучшее равномерное приближение функции $x \in C$ и, соответственно, наилучшее среднеквадратическое приближение функции $x \in L_{2,\rho}$ всевозможными алгебраическими многочленами степени не выше n. Через $W^r H_\alpha$ и $W^r H^\alpha_{2,\rho}$ ($r \ge 0$ – целое, $0 < \alpha \le 1$) будем обозначать классы функций, имеющих производные порядка r из пространства соответственно C и $L_{2,\rho}$, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α.

Введем в рассмотрение оператор S_n, который любой функции $x \in L_{2,\rho}$ ставит в соответствие $(n+1)$–ый отрезок ряда Фурье, построенный по системе многочленов $\{\varphi_k(t)\}$, ортогональных с весом $\rho(t)$ на отрезке $[-1,1]$:

$$S_n(x;t) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x)\, \varphi_k(t), \tag{1.13}$$

где $c_k(x) = \int_{-1}^{+1} \rho(t)x(t)\varphi_k(t)\,dt / \int_{-1}^{+1} \rho(t)\varphi_k^2(t)\,dt$ – коэффициенты Фурье функции $x \in L_{2,\rho}$ по системе $\{\varphi_k(t)\}$.

Для оператора S_n справедливы следующие результаты (см., напр., в [35, 40, 9]).

Лемма 9. *При любом натуральном n*

$$S_n^2 = S_n, \quad \|S_n\|_{L_{2,\rho}\to L_{2,\rho}} = 1, \ \|S_n\|_{C\to L_{2,\rho}} = \sqrt{\int_{-1}^{+1} \rho(t)\,dt}\,.$$

Если $x \in L_{2,\rho}$, то отрезок ряда Фурье $S_n(x;t)$ сходится в среднем к функции $x(t)$ со скоростью

$$\|x - S_n x\|_{L_{2,\rho}} = E_n(x)_{2,\rho};$$

[2)] Для определенности все результаты в непериодическом случае приведены для стандартного промежутка $[-1,1]$. В связи с этим отметим, что результаты без существенных изменений остаются в силе и для любого конечного промежутка $[a,b]$.

если же $x \in C$, то

$$\|x - S_n x\|_{L_{2,\rho}} \le \left\{ \int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)\, dt \right\}^{1/2} E_n(x)_C.$$

Следствие. Пусть функция $x \in W^r H^{\alpha}_{2,\rho}$, где $r \ge 0$ – целое, $0 < \alpha \le 1$. Тогда скорость сходимости отрезка ряда Фурье к самой функции характеризуется порядковым соотношением

$$\|x - S_n x\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\alpha}),\ r \ge 0,\ 0 < \alpha \le 1.$$

В случае, когда функция $\rho(t)$ является весом Чебышева первого или второго рода, имеет место также (см., напр., в [35, 15, 28, 9])

Лемма 10. *Пусть $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ или $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$. Тогда справедливы порядковые соотношения*

$$\|S_n\|_{C \to C} = O(\ln n);$$

$$\|x - S_n x\|_C = O\{\ln n\, E_n(x)_C\},\ x \in C[-1, 1].$$

В частности, если $x \in W^r H_\alpha$, где $r \ge 0$ – целое, $0 < \alpha \le 1$, то

$$\|x - S_n x\|_C = O\Big\{ \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \Big\},\ r \ge 0,\ 0 < \alpha \le 1.$$

Пусть $(\mathcal{L}_n x)(t) = \mathcal{L}_n(x; t)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $x \in C$ по некоторым узлам $t_0, t_1, \dots, t_n \in [-1, 1]$. Тогда справедливы (см., напр., [35, 40, 41]) следующие леммы.

Лемма 11. *Если $t_k = t_{k,n}\, (k = \overline{0, n})$ – корни многочлена степени $n + 1$ из системы многочленов, ортогональных с весом $\rho(t)$ на $[-1, 1]$, то для любой $x \in C$ интерполяционные многочлены $\mathcal{L}_n(x; t)$ сходятся к функции $x(t)$ в пространстве $L_{2,\rho}(-1, 1)$ со скоростью, определяемой неравенством*

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{2,\rho} \le 2 \left(\int_{-1}^{+1} \rho(t)\, dt \right)^{1/2} E_n(x)_C.$$

Следствие 1. Операторы $\mathcal{L}_n : C \longrightarrow L_{2,\rho}$ ограничены по норме в совокупности:

$$\|\mathcal{L}_n\|_{C \to L_{2,\rho}} \le \sqrt{\int_{-1}^{+1} \rho(t)\, dt}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 2. Для любой функции $x \in C$ при $n \to \infty$

$$|R_n(x)| \equiv \left| \int_{-1}^{+1} \rho(t)\, [x(t) - \mathcal{L}_n(x; t)]\, dt \right| \to 0$$

со скоростью, определяемой неравенством

$$|R_n(x)| \le 2\, E_n(x)_C \cdot \int_{-1}^{+1} \rho(t)\, dt.$$

В случае выбора конкретных узлов лемма 11 уточняется и усиливается (см., напр., в [17, 9]). Приведем здесь лишь один результат для двух систем узлов:

а) узлы Чебышева I–рода

$$t_k = t_{k,n} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0,n},\ n \in \mathbb{N}; \tag{1.14}$$

б) экстремальные точки многочленов Чебышева I–рода $T_n(t) = \cos n \arccos t$, $-1 \le t \le 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$t_k = t_{k,n} = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0,n},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Лемма 12. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\|\mathcal{L}_n\|_{C\to C} \sim \frac{2}{\pi}\ln n, \quad n\to\infty;$$

$$\frac{2}{\pi}\ln n \le \|\mathcal{L}_n\|_{C\to C} \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4(n+1)}{\pi}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_{2,\rho}} = \sqrt{\pi}, \quad \rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Если функция $x \in C$, то при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_C \le \left\{1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4(n+1)}{\pi}\right\} E_n(x)_C;$$

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{L_{2,\rho}} \le 2\sqrt{\pi}\cdot E_n(x)_C, \quad \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Следствие. Пусть существует производная $\frac{d^r x(\cos\theta)}{d\theta^r} \equiv \psi^{(r)}(\theta), \theta \in [0,\pi]$, и $|\psi^{(r)}(\theta)| \le M_r = \mathrm{const}$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{L_{2,\rho}} \le \frac{\pi\sqrt{\pi}M_r}{(n+1)^r}, \quad \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,,\ r \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим, далее, через $\mathit{\Pi}_n$ линейный оператор, ставящий в соответствие функции $x \in L_{2,\rho}(-1,1)$ многочлен $\mathit{\Pi}_n(x;t) \in \mathbb{H}_{n-1}$, удовлетворяющий условиям

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathit{\Pi}_n(x;t)\,dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t)\,dt, \quad k = \overline{1,n},$$

где $\{t_k = t_{k,n}\}_0^n$ — некоторая система возрастающих узлов из $[-1,1]$.

Для оператора $\mathit{\Pi}_n$ имеют место (см., напр., в [34, 17, 11]) результаты.

Лемма 13. *Для любой функции $x \in C$ в случае любого способа выбора $n+1$ узлов $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [-1,1]$ справедлива оценка*

$$\|x - \mathit{\Pi}_n x\|_{L_{2,\rho}} \le \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\pi} + \|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_{2,\rho^{-1}}}\right)\right\} E_{n-1}(x)_C,\ n \in \mathbb{N},$$

где $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$, $\rho^{-1}(t)=1/\sqrt{1-t^2}$, *а* $\mathcal{L}_n$ *– оператор Лагранжа по узлам* $t_0,t_1,\ldots,t_n$.

Следствие. В случае любой из систем узлов (1.14) и (1.15) для любой функции $x\in C$ многочлены $\Pi_n(x;t)$ сходятся в $L_{2,\rho}$ со скоростью

$$\|x-\Pi_n x\|_{L_{2,\rho}}\le\sqrt{\pi}\Big(\pi+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)E_{n-1}(x)_C,\ \rho(t)=\sqrt{1-t^2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Лемма 14. *Если узлы заданы формулой (1.15), то для погрешности приближенной формулы* $x(t)\approx\Pi_n(x;t)$ *справедливы следующие оценки:*

$$E_{n-1}(x)_{2,\rho}\le\|x-\Pi_n x\|_{L_{2,\rho}}\le\frac{\pi}{2}E_{n-1}(x)_{2,\rho},\quad \rho(t)=\sqrt{1-t^2},\ x\in L_{2,\rho},\ n\in\mathbb{N};$$

$$\|x-\Pi_n x\|_C\le 2\ln(ne)\cdot E_{n-1}(x)_C,\quad x\in C,\ n\in\mathbb{N}.$$

Следствие 1. Для любых $n\in\mathbb{N}$ операторы Π_n обладают свойствами:

$$1\ \le\|\Pi_n\|_{L_{2,\rho}\to L_{2,\rho}}\le\frac{\pi}{2},\ \rho(t)=\sqrt{1-t^2};$$

$$\|\Pi_n\|_{C\to C}\le 3+2\ln n.$$

Следствие 2. Если функция $x\in C$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то многочлены $\Pi_n(x;t)$ сходятся равномерно со скоростью

$$\|x-\Pi_n x\|_C=O\{\ln n\cdot E_{n-1}(x)_C\}.$$

В заключение этого пункта укажем еще одно свойство оператора Π_n (см., напр., в [1]). Обозначим через $L_1\equiv L_1(-1,1)$ пространство функций, суммируемых по Лебегу в промежутке $(-1,1)$. Норму в этом пространстве введем обычным образом:

$$\|x\|_1\equiv\|x\|_{L_1(-1,1)}=\int_{-1}^{+1}|x(t)|\,dt,\ x\in L_1(-1,1).$$

Лемма 15. *Для оператора* Π_n, *построенного по системе узлов (1.15), справедлива оценка*

$$\|P_n\|_{L_1\to L_1}\le 16\ln n+O(1),\quad n\ge 2.$$

Следствие. Многочлены $\Pi_n(x;t)$ сходятся в пространстве L_1 к функции $x(t)$, удовлетворяющей условию Дини–Липшица в L_1, со скоростью

$$\|x-\Pi_n x\|_1=O(\ln n\,E_{n-1}(x)_1),$$

где $E_{n-1}(x)_1$ – наилучшее приближение функции $x(t)$ в пространстве $L_1(-1,1)$ многочленами из $\mathbb{H}_{n-1}$.

1.3. Аппроксимативные свойства полиномиальных сплайнов минимальных степеней

В этом пункте приведем лишь некоторые результаты из теории сплайнов нулевой и первой степеней.

В промежутке $[-1, 1]$ возьмем произвольную сетку из $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, узлов

$$\Delta_n : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1, \tag{1.16}$$

удовлетворяющую естественному условию

$$\|\Delta_n\| \equiv \max_{1 \le k \le n} (t_k - t_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Всюду ниже будем считать это условие выполненным. Кроме того, в некоторых случаях на сетку (1.16) мы будем накладывать более жесткое условие

$$\|\Delta_n\| \Big/ \min_{1 \le k \le n} (t_k - t_{k-1}) \le \beta < \infty, \quad n \ge 2, \tag{1.17}$$

где β – абсолютная постоянная.

Пусть функция $x(\cdot) \in C[-1, 1]$ и $S_n^m(x; t)$ есть интерполяционный сплайн для функции $x(t)$, построенный по узлам из сетки Δ_n.

Известно, что при $m = 0$ и $m = 1$ сплайны $S_n^m(x; t)$ существуют и определяются единственным образом. При этом сплайн $S_n^m(x; t)$ единственным образом [3, 18, 39, 31] представи́м в виде

$$S_n^m(x; t) = \sum_{i=0^m}^{n} x(t_i) s_{n,i}^m(t), \quad 0^0 = 1, \ m = 0, 1, \tag{1.18}$$

где $s_{n,i}^m(t)$ – фундаментальные сплайны степени m на сетке (1.16).

Фундаментальные сплайны нулевой и первой степени имеют достаточно простой вид:

$$s_{n,1}^0(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le t_1, \\ 0, & t_1 < t \le 1, \end{cases} \qquad s_{n,i}^0(t) = \begin{cases} 1, & t_{i-1} < t \le t_i, \\ 0, & t \notin (t_{i-1}, t_i] \end{cases} \qquad (i = \overline{2, n});$$

$$s_{n,0}^1(t) = \begin{cases} \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}, & t_0 \le t \le t_1, \\ 0, & t \ge t_1, \end{cases} \qquad s_{n,n}^1(t) = \begin{cases} 0, & t \le t_{n-1}, \\ \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, & t_{n-1} \le t \le t_n, \end{cases}$$

$$s_{n,i}^1(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & t_{i-1} \le t \le t_i, \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & t_i \le t \le t_{i+1}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}] \end{cases}$$

Обозначим, далее, через Z пространство $M[-1, 1]$ ограниченных измеримых на $[-1, 1]$ функций, если $m = 0$, или $C[-1, 1]$, если $m \ge 1$, и пусть $S_n^m : C \longrightarrow Z$ –

оператор, который любой непрерывной функции $x(t)$ ставит в соответствие ее интерполяционный сплайн m-той степени $S_n^m(x;t)$. Для произвольной функции $x \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ ($L_\infty \equiv C$), ее наилучшее приближение сплайнами степени m дефекта 1 на сетке Δ_n будем обозначать через $E_n^m(x)_p$.

Справедливы следующие (см., напр., [18, 9, 12, 1]) результаты.

Лемма 16. *Пусть $m = 0$ или $m = 1$. Тогда для любой функции $x \in C^{(r)}[-1,1]$ ($r = \overline{0,m}$) справедливы соотношения:*

$$\|S_n^m\|_{C\to Z} = 1, \quad \|x^{(i)} - (S_n^m x)^{(i)}\|_Z \le \left(\frac{\|\Delta_n\|}{4}\right)^{r-i} \omega(x^{(r)}; \|\Delta_n\|), \ \ 0 \le i \le r.$$

Следствие 1. *Для любого $n \ge 2$ справедливо неравенство*

$$E_n^m(x) \equiv E_n^m(x)_\infty \le \Big(\|\Delta_n\|/4\Big)^r \omega(x^{(r)}; \|\Delta_n\|), \ \ 0 \le r \le m, \ m = 0, 1.$$

Следствие 2. *Для интерполяционного сплайна $S_n^m(x;t)$ степени m ($m = 0$ или $m = 1$) имеет место неравенство*

$$\|x - S_n^m x\|_Z \le 2\, E_n^m(x).$$

Далее, для произвольной функции $x \in C[-1,1]$ введем в рассмотрение сплайн–функцию $U_n^0(x;t)$ нулевой степени с узлами из Δ_n, которые в точках интерполяции принимают средние значения:

$$U_n^0(x;t_j) = \Phi_j(x), \quad j = \overline{1,n},$$

где

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(\tau)\, d\tau.$$

Лемма 17. *Для любой функции $x \in C$*

$$\|U_n^0\|_{C\to M} = 1, \quad \|x - U_n^0 x\|_M \le \omega(x; \|\Delta_n\|).$$

Заметим, что "усредненные"сплайны имеют смысл и в случае суммируемой функции $x(t)$. В следующих леммах даются аппроксимативные свойства таких сплайнов в пространствах $L_p \equiv L_p(-1,1)$, $1 \le p < \infty$. Для произвольной функции $x \in L_p$, $1 \le p < \infty$, обозначим через $E_n^0(x)_p$ ее наилучшее приближение в пространстве L_p сплайнами нулевой степени на сетке (1.16), а через $\omega(x;\delta)_p$ – модуль непрерывности $x \in L_p$ с шагом δ, т.е.

$$\omega(x;\delta)_p = \sup_{0<\eta\le\delta} \left\{ \int_{-1}^{1-\eta} |x(t+\eta) - x(t)|^p\, dt \right\}^{1/p}, \quad 0 < \delta \le 2.$$

Лемма 18. *Оператор U_n^0 обладает свойством:*

$$\|U_n^0\|_{L_p\to L_p} = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \ \ 1 \le p < \infty.$$

Следствие. *Для произвольной функции $x \in L_p$ сплайн $U_n^0(x;t)$ сходится к $x(t)$ в пространстве $L_p(-1,1)$ со скоростью*

$$\|x - U_n^0 x\|_p \le 2\, E_n^0(x)_p, \quad 1 \le p < \infty.$$

Лемма 19. *Если сетка Δ_n удовлетворяет условию (1.17), то для любой функции $x \in L_p$ $(L_\infty = C)$, $1 \le p \le \infty$,*

$$\|x - U_n^0 x\|_p \le (2\beta)^{1/p} \omega(x; \|\Delta_n\|)_p, \ 1 \le p \le \infty.$$

§2. Прямые методы решения интегральных уравнений. Периодический случай

В этом параграфе мы дадим обоснование ряда прямых методов решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$Kx \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s,\sigma)\, d\sigma = y(s), \ -\infty < s < \infty, \tag{2.1}$$

где [3] 2π–периодические функции $h(s,\sigma)$ и $y(s)$ – известные, а $x(s)$ – искомая.

2.1. Метод Галеркина. Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде тригонометрического полинома порядка n, $n \in \mathbb{N}$, представленного в комплексной форме:

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \ i^2 = -1, \tag{2.2}$$

а неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определим из условий ортогональности невязки приближенного решения к функциям вида e^{-ijs}, $j = \overline{-n,n}$:

$$\int_0^{2\pi} [(Kx_n)(s) - y(s)]\, e^{-ijs} ds = 0, \ j = \overline{-n,n}.$$

Эти условия дают систему линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ) $(2n+1)$–го порядка относительно $2n+1$ коэффициентов α_k полинома (2.2):

$$\sum_{k=-n}^{n} \beta_{kj} \alpha_k = y_j, \ j = \overline{-n,n}, \tag{2.3}$$

где

$$\beta_{kj} = \int_0^{2\pi} (Ke^{iks})(s)\, e^{-ijs} ds, \ y_j = \int_0^{2\pi} y(s)\, e^{-ijs} ds. \tag{2.4}$$

[3] Приведенные в этом пункте результаты переносятся на случай периодических интегральных уравнений второго рода с любым периодом.

Для вычислительной схемы метода Галеркина (2.1)–(2.4) имеет место

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_2$*;*

2) ядро $h(s,\sigma)$ *таково, что порождаемый им интегральный оператор вполне непрерывен в пространстве* L_2*;*

3) уравнение (2.1) имеет единственное решение при любой правой части из L_2*.*

Тогда СЛАУ (2.3)–(2.4) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ *(хотя бы при всех* n*, начиная с некоторого натурального* n_0*). Приближенные решения* $x_n^*(s)$*, построенные по формуле (2.2) при* $c_k = c_k^*$*,* $k = \overline{-n, n}$*, сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения (2.1) в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(x^*)_2\}, \tag{2.5}$$

где $E_n^T(z)_2$ *– наилучшее среднеквадратическое приближение элемента* $z \in L_2$ *тригонометрическими полиномами порядка не выше* n*.*

Следствие 1. Для погрешности приближенных решений в пространстве L_2 имеет место соотношение

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_2 + E_n^T(Hx^*)_2\};$$

в частности, если $h(s,\sigma) \in L_2([0, 2\pi]^2)$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_2 + E_n^{T\,s}(h)_2\},$$

где $E_n^{T\,s}(h)_2$ – частное наилучшее среднеквадратическое приближение функции $h(s,\sigma)$ по переменной s тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Следствие 2. Если функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_2^\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, то в условиях теоремы для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1. \tag{2.5$'$}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение пространство $X = L_2$ с нормой

$$\|x\|_2 \equiv \|x\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(s)|^2 ds}\,,\ x \in L_2.$$

В этом пространстве уравнение (2.1) запишем в операторной форме

$$Kx \equiv x + Hx = y \quad (x, y \in X), \tag{2.6}$$

где оператор H задается соотношением

$$(Hx)(s) \equiv (Hhx)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma.$$

Поскольку по условию оператор $H : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен, то уравнение (2.6) является уравнением второго рода с вполне непрерывным оператором. Для него, как хорошо известно, справедлива теория Фредгольма (см., напр., [22, 23]), из которой, с учетом условия 3) теоремы, вытекает существование в пространстве X ограниченного обратного K^{-1}.

Запишем теперь систему (2.3)–(2.4) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = I\!H_n^T$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть S_n есть оператор Фурье n–го порядка, т.е. он каждую функцию $z \in X$ переводит в $(2n+1)$–ый отрезок ряда Фурье по тригонометрической системе функций $e^{iks}, k = \overline{-n, n}$:

$$S_n(z; s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} z(\sigma) D_n(s - \sigma)\, d\sigma = \sum_{k=-n}^{n} c_k(z) e^{iks}, \; z \in X,$$

где $D_n(s) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} s}{2 \sin \frac{s}{2}}$ есть ядро Дирихле n–го порядка, а $c_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} z(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma$ – коэффициенты Фурье функции z.

Покажем, что СЛАУ (2.3)–(2.4) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{2.7}$$

где $P_n = S_n$.

Здесь (и далее) эквивалентность СЛАУ (2.3)–(2.4) и операторного уравнения (2.7) понимается в следующем смысле: *СЛАУ и операторное уравнение одновременно разрешимы или неразрешимы и, в случае разрешимости, их решения связаны формулой (2.2).*

В самом деле, СЛАУ (2.3)–(2.4) эквивалентна условиям совпадения коэффициентов Фурье функций $(Kx_n)(s)$ и $y(s)$. Но, очевидно, коэффициенты Фурье функции однозначно определяют $(2n + 1)$–ый отрезок ее ряда Фурье. Поэтому $(2n + 1)$–ые отрезки ряда Фурье функций $(Kx_n)(s)$ и $y(s)$ совпадают, что дает эквивалентность СЛАУ (2.3)–(2.4) и уравнения (2.7), если учесть проекционность оператора Фурье $(S_n^2 = S_n)$.

Таким образом, нам достаточно доказать однозначную разрешимость уравнения (2.7). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. Обозначив через $z_n = x_n / \|x_n\|$ $(x_n \neq 0)$, имеем

$$\begin{aligned} \|Kx_n - K_n x_n\| = \|Hx_n - P_n H x_n\| = \|x_n\| \cdot \|Hz_n - P_n H z_n\| \leq \\ \leq \|x_n\| \cdot \sup_{z \in V} \|Hz - P_n H z\|, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где V есть единичный шар с центром в нуле пространства X. Поскольку по условию оператор H вполне непрерывен, то он множество $V \subset X$ переводит в компактное множество пространства X. На таком множестве по теореме Гельфанда (см., напр., в [22, 23]) сильно сходящаяся последовательность операторов сходится равномерно. Тогда из (2.8) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq \sup_{g \in HV} \|g - P_n g\| \to 0, \; n \to \infty.$$

Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (2.7) и эквивалентная ему СЛАУ (2.3)–(2.4) однозначно разрешимы при всех натуральных n, для которых $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\| < 1$. Более того, операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности.

Далее, для правых частей уравнений (2.6) и (2.7) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\| = E_n^T(y)_2 \to 0,\ n \to \infty,$$

что с учетом той же леммы 1 доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Для доказательства оценки (2.5) воспользуемся следствием 2 к лемме 2. Из неравенства (1.6), лемм 3 и 4 следует, что

$$\|x^* - x_n^*\| \le \Big(1 + \|K_n^{-1}\|\,\|P_n\|\,\|H\|\Big)\|x^* - P_n x^*\|_2 = O(\|x^* - P_n x^*\|_2) = O(E_n^T(x^*)_2).$$

Теорема 2.1 доказана.

Далее, следствие 1 доказывается с использованием тождества $x^* \equiv y - Hx^*$ и известного неравенства для наилучших приближений $E_n^T(x+y)_2 \le E_n^T(x)_2 + E_n^T(y)_2$, справедливого для любых $x, y \in L_2$. Если же функция $h(s,\sigma) \in L_2([0,2\pi]^2)$, то, обозначив через $h_n(s,\sigma)$ квадратично–суммируемую функцию, являющуюся тригонометрическим полиномом порядка n наилучшего среднеквадратического приближения для функции $h(s,\sigma)$ по переменной s, с учетом неравенства Коши–Буняковского будем иметь:

$$E_n^T(Hx^*)_2^2 \le \|Hhx^* - Hh_n x^*\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(s,\sigma) - h_n(s,\sigma)]x^*(\sigma)\,d\sigma\right|^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}|h(s,\sigma) - h_n(s,\sigma)|^2 d\sigma\,ds \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x^*(\sigma)|^2 d\sigma =$$

$$= \|h - h_n\|_2^2 \cdot \|x^*\|_2^2 = E_n^{Ts}(h)_2^2 \cdot \|x^*\|_2^2.$$

Следствие 2 доказывается с помощью прямых теорем конструктивной теории функций (теорем Джексона) в пространстве L_2 (см., напр., в [40, 27, 28]).

Теорема 2.2. *Пусть известные функции h и y таковы, что точное решение $x^* \in C_{2\pi}$. Тогда, в условиях теоремы 2.1, для погрешности приближенных решений в пространстве $C_{2\pi}$ имеет место порядковая оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\Big(\sqrt{n}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} E^T_{2^{k-1}n}(x^*)_2\Big).$$

Следствие. Пусть решение $x^* \in W^r H_2^\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, причем $r + \gamma > 1/2$. Тогда приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ равномерно с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\Big(n^{-r-\gamma+1/2}\Big).$$

Доказательство. Так как мы находимся в условиях теоремы 2.1, то для погрешности приближенных решений справедливо представление

$$x^*(s) - x_n^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1} n}^*(s)\Big].$$

Отсюда, используя неравенство (см., напр., в [15]) $\|Q_n\|_\infty \leq \sqrt{2n+1}\,\|Q_n\|_2$, справедливого для любого $Q_n \in \mathbb{H}_n^T$, следует, что

$$\|x^*(s) - x_n^*(s)\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big\|x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1} n}^*(s)\Big\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2^{k+1} n + 1}\, \Big\|x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1} n}^*(s)\Big\|_2.$$

Вычитая и прибавляя под зна́ком нормы точное решение $x^*(s)$ и применяя неравенство треугольника, с учетом теоремы 2.1 находим

$$\|x^*(s) - x_n^*(s)\|_\infty = O\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2^k n}\, \Big[E_{2^k n}^T(x^*)_2 + E_{2^{k-1} n}^T(x^*)_2\Big]\right\}, \tag{2.9}$$

что, с учетом свойств наилучших приближений, доказывает утверждение теоремы.

Далее, в условиях следствия $E_n^T(x^*)_2 = O(n^{-r-\gamma})$; поэтому оценку (2.9) можно продолжить:

$$\|x^*(s) - x_n^*(s)\|_\infty = O\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2^k n}\, \Big[(2^k n)^{-r-\gamma} + (2^{k-1} n)^{-r-\gamma}\Big]\right\} =$$

$$= O\left\{n^{-r-\gamma+1/2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} \cdot 2^{-k(r+\gamma)}\right\} = O\left\{n^{-r-\gamma+1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(r+\gamma-1/2)}}\right\}. \tag{2.10}$$

Очевидно, при $r + \gamma > 1/2$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(r+\gamma-1/2)}}$$

сходится и поэтому из (2.10) получим утверждение следствия. Тем самым, теорема 2.2 доказана полностью.

В связи с доказанной теоремой 2.2 возникает вопрос: является ли окончательной скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному решению, указанная в следствии к этой теореме? Ответ на данный вопрос отрицателен хотя бы потому, что при $h(t,s)\equiv 0$ приближенное решение определяется по формуле $x_n^*(s)=S_n(y;s)$. Поэтому, учитывая лемму 4, имеем

$$\|x^*-x_n^*\|_\infty=\|y-S_ny\|_\infty O\Big(\ln n\cdot E_n^T(y)_\infty\Big).$$

Поэтому приведем здесь для метода Галеркина еще один результат.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия:*

1) $y\in C_{2\pi}$*;*

2) функция $h(s,\sigma)$ *такова, что* $H: L_2\longrightarrow C_{2\pi}$ *непрерывен;*

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет лишь тривиальное решение.

Тогда при всех достаточно больших n *СЛАУ (2.3)–(2.4) имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}$*. Для погрешности приближенных решений в равномерной метрике справедлива следующая порядковая оценка*

$$\|x^*-x_n^*\|_\infty=O\{\ln n\cdot E_n^T(x^*)_\infty\}. \tag{2.11}$$

Если $h(s,\sigma)$ *непрерывна по совокупности переменных, то погрешность приближенных решений в пространстве* $C_{2\pi}$ *характеризуется соотношением*

$$\|x^*-x_n^*\|_\infty=O\{\ln n[E_n^T(y)_\infty+E_n^{Ts}(h)_\infty]\}. \tag{2.11$'$}$$

Следствие. Пусть функции $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ (по переменной s) удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся равномерно к точному решению $x^*(s)$ со скоростями (2.11) и (2.11$'$). В частности, при $y\in W^rH_\gamma$, $h\in W^rH_\gamma$ (по переменной s), где $r\ge 0$ – целое, $0<\gamma\le 1$, скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному определяется формулой

$$\|x^*-x_n^*\|_\infty=O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r\ge 0,\ 0<\gamma\le 1.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы находимся в условиях теоремы 2.1, поэтому разрешиость СЛАУ (2.3)–(2.4) имеет место, хоты бы при достаточно больших n. С другой стороны, в условиях теоремы 2.3 точное решение $x^*(s)$ является функцией непрерывной. Поэтому имеет смысл рассматривать погрешность приближенных решений в равномерной метрике.

С учетом тождеств $x^*\equiv y-Hx^*$, $x_n^*\equiv P_ny-P_nHx_n^*$, неравенства треугольника для нормы, леммы 3 и теремы 2.1, имеем

$$\begin{gathered}\|x^*-x_n^*\|_\infty\le\|x^*-P_nx^*\|_\infty+\|P_nx^*-x_n^*\|_\infty\le\\ \le 2\|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}}E_n^T(x^*)_\infty+\|P_nHx_n^*-P_nHx^*\|_\infty\le\\ \le\|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}}\{2E_n^T(x^*)_\infty+\|H\|_{L_2\to C_{2\pi}}\|x^*-x_n^*\|_2\}=\\ =O\Big\{\ln n[E_n^T(x^*)_\infty+E_n^T(x^*)_2]\Big\}=O\{\ln n\,E_n^T(x^*)_\infty\}.\end{gathered}$$

Для получения оценки $(2.11')$ заметим, что для точного решения $x^*(s)$ имеет место тождество $x^* = y - Hx^*$. Поэтому

$$E_n^T(x^*)_\infty \leq E_n^T(y)_\infty + E_n^T(Hx^*)_\infty. \tag{2.12}$$

Далее, в условиях следствия точное решение $x^*(s)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица. Поэтому из оценки (2.11) следует равномерная сходимость приближенных решений к точному.

Пусть функция $h_n(s,\sigma) \in L_2([0,2\pi]^2)$ является полиномом из $\mathbb{H}_n^T$ по переменной s таким, что $\|h - h_n\|_\infty = E_n^{Ts}(h)_\infty$. Тогда

$$E_n^T(Hx^*)_\infty \leq \|Hhx^* - Hh_nx^*\|_\infty = \|H[h - h_n]x^*\|_\infty \leq$$

$$\leq \|h - h_n\|_{C_{2\pi}\times L_2} \cdot \|x^*\|_2 \leq \|h - h_n\|_\infty \cdot \|x^*\|_2 = E_n^{Ts}(h)_\infty \cdot \|x^*\|_2.$$

Тогда, с учетом (2.12), имеем

$$E_n^T(x^*)\|_\infty \leq E_n^T(y)_\infty + \|x^*\|_2 \cdot E_n^{Ts}(h)_\infty.$$

Остальное очевидно.

Замечание. Полученные в следствии 2 теоремы 2.1 и следствии теоремы 2.3 оценки погрешности приближенных решений в пространствах L_2 и $C_{2\pi}$ соответственно не могут быть улучшены по порядку. Этот факт можно вывести из уравнения (2.1) при $h(s,\sigma) \equiv 0$ и результатов из теории приближения 2π–периодических функций отрезком ряда Фурье.

2.2. Метод наименьших квадратов. Приближенное решение уравнения (2.1) будем по–прежнему искать в виде тригонометрического полинома (2.2), а неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определим из условия минимальности невязки приближенного решения по норме пространства L_2:

$$\int_0^{2\pi} |Kx_n(s) - y(s)|^2 ds = \min\,. \tag{2.13}$$

Учитывая необходимые условия экстремума, условие (2.13) дает СЛАУ $(2n+1)$–го порядка относительно $2n+1$ коэффициентов α_k полинома (2.2):

$$\sum_{k=-n}^{n} \beta_{kj}\alpha_k = y_j,\ j = \overline{-n,n}, \tag{2.14}$$

где

$$\beta_{kj} = \int_0^{2\pi} (Ke^{iks})(s)(Ke^{-ijs})(s)\,ds,\ y_j = \int_0^{2\pi} y(s)(Ke^{-ijs})(s)\,ds. \tag{2.15}$$

Для вычислительной схемы метода наименьших квадратов (2.1), (2.2), (2.14)–(2.15) справедливы следующие результаты.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_2$*;*

2) ядро $h(s,\sigma)$ *таково, что оператор* $H : L_2 \longrightarrow L_2$ *ограничен;*

3) уравнение (2.1) имеет единственное решение при данной правой части $y(s)$*.*

Тогда СЛАУ (2.14)–(2.15) также имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ *для всех натуральных* n*. Приближенные решения* $x_n^*(s)$*, построенные по формуле (2.2) при* $\alpha_k = \alpha_k^*$*,* $k = \overline{-n,n}$*, обладают тем свойством, что невязка* $r_n^*(s) \equiv Kx_n^*(s) - y(s)$ *сходится к нулю в пространстве* L_2*.*

Доказательство. Обозначим через $X = Y = L_2$, $X_n = \mathbb{H}_n^T, Y_n = KX_n$. Поскольку оператор $K : X \longrightarrow X$ ограничен, то Y_n есть конечномерное подпространство пространства X, причем $\dim X_n = \dim Y_n$. Рассмотрим условие (2.13):

$$\min_{\{\alpha_k\}} \|Kx_n - y\|_{L_2}^2 \equiv \min_{x_n \in X_n} \|Kx_n - y\|_{L_2}^2 = \min_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|_{L_2}^2.$$

В силу ограниченности оператора K в пространстве L_2, система функций $\{Ke^{ijs}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ является системой линейно–независимой и полной. Поэтому существует единственный элемент $y_n^* \in Y_n$ такой, что

$$\|y - y_n^*\|_2 = \inf_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|_2 = E(y; Y_n) \equiv \widetilde{E}_n(y)_2 \to 0, \ n \to \infty.$$

Получили, что элемент $y_n^* \in Y_n$ есть элемент наилучшего приближения для $y \in L_2$. Но, как хорошо известно, таким элементом в гильбертовом пространстве L_2 является $(2n+1)$–ый отрезок ряда Фурье, построенный по базису подпространства Y_n. Поэтому, обозначив через P_n оператор Фурье n–го порядка по базису подпространства Y_n, находим $y_n^* = P_n y$.

Таким образом, элемент $x_n \in X_n$, определяемый из условия (2.13), должен быть решением уравнения

$$Kx_n = P_n y \quad (x_n \in X_n).$$

Отметим также, что это уравнение в силу определений подпространств X_n и Y_n имеет единственное решение x_n^* при любом натуральном n, при этом

$$\|r_n^*\|_2 = \|y - P_n y\|_2 = \widetilde{E}_n(y)_2 \to 0, \ n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены предположения 1) и 2) теоремы 2.4 и однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет лишь тривиальное решение. Тогда приближенные решения* $x_n^*(s)$ *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \le \eta(K) E_n^T(x^*)_2,$$

где $\eta(K) = \|K\| \cdot \|K^{-1}\|$ *– число обусловленности оператора* $K : L_2 \longrightarrow L_2$*.*

В самом деле, $x^* - x_n^* = K^{-1}[Kx^* - Kx_n^*] = K^{-1}[y - Kx_n^*]$. Поэтому

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \le \|K^{-1}\| \cdot \|r_n^*\|_2. \tag{2.16}$$

С другой стороны, $r_n^* = K(x^* - x_n^*)$ имеет минимальную норму в L_2 и, следовательно, для любого элемента $x_n \in X_n$

$$\|r_n^*\|_2 \le \|K(x^* - x_n)\|_2 \le \|K\| \cdot \|x^* - x_n\|_2 .$$

Выбирая в качестве $x_n \in X_n$ элемент наилучшего среднеквадратического приближения для x^*, из последнего неравенства находим

$$\|r_n^*\|_2 \le \|K\| \cdot E_n^T(x^*)_2. \tag{2.17}$$

Из оценок (2.16) и (2.17) вытекает утверждение теоремы 2.5.

2.3. Метод подобластей. На сегменте $[0, 2\pi]$ выберем систему из $2n+2$ точек $s_k, k = \overline{0, 2n+1}$, расположенных в порядке возрастания. Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать снова в виде полинома (2.2), а его неизвестные коэффициенты определим из условий

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} [Kx_n(s) - y(s)]\, ds = 0,\ j = \overline{0, 2n}. \tag{2.18}$$

Ясно, что эти условия относительно коэффициентов $\{\alpha_k\}$ представляют СЛАУ вида

$$\sum_{k=-n}^{n} \beta_{kj}\alpha_k = y_j,\ j = \overline{0, 2n}, \tag{2.19}$$

где

$$\beta_{kj} = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (Ke^{iks})(s)\, ds,\ y_j = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} y(s)\, ds. \tag{2.20}$$

Для вычислительной схемы метода подобластей (2.1), (2.2), (2.19)–(2.20) имеют место следующие результаты.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_2$;

2) ядро $h(s, \sigma)$ таково, что порождаемый им интегральный оператор вполне непрерывен в пространстве L_2;

3) уравнение (2.1) имеет единственное решение при любой правой части из L_2;

4) $$s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n+1}. \tag{2.21}$$

Тогда СЛАУ (2.19)–(2.20) также имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$, хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(s)$, построенные по формуле (2.2) при $\alpha_k = \alpha_k^*$, $k = \overline{-n, n}$, сходятся к точному решению $x^*(s)$ уравнения (2.1) в пространстве L_2 со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(x^*)_2\}. \tag{2.22}$$

Следствие 1. Для погрешности приближенных решений в пространстве L_2 имеет место соотношение
$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_2 + E_n^T(Hx^*)_2\};$$
в частности, если $h(s,\sigma) \in L_2([0,2\pi]^2)$, то
$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_2 + E_n^{Ts}(h)_2\}.$$

Следствие 2. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_2^\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка
$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C_{2\pi}$;

2) ядро $h(s,\sigma)$ таково, что соответствующий интегральный оператор $H : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}$ ограничен;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет лишь тривиальное решение;

4) точки s_j заданы формулой (2.21).

Тогда при всех n, начиная хотя бы с некоторого натурального n_0, СЛАУ (2.19)–(2.20) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$. Для погрешности приближенных решений в пространстве $C_{2\pi}$ справедлива следующая порядковая оценка
$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, E_n^T(x^*)_\infty\}. \tag{2.23}$$
Если же $h(s,\sigma)$ непрерывна по совокупности переменных, то погрешность приближенных решений в пространстве $C_{2\pi}$ характеризуется соотношением
$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n[E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_\infty]\}. \tag{2.23$'$}$$

Следствие. Пусть функции $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ (по переменной s) удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся равномерно к точному решению $x^*(s)$ со скоростью (2.23). В частности, при $y \in W^r H_\gamma, h \in W^r H_\gamma$ (по переменной s), где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному определяется формулой
$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство теорем. Как и выше, введем в рассмотрение пространство $X = L_2$ с нормой
$$\|x\|_2 \equiv \|x\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |x(s)|^2 ds}\,,\ x \in L_2.$$

В этом пространстве уравнение (2.1) запишем в виде операторного уравнения (2.6), где оператор K в пространстве X имеет ограниченный обратный.

Запишем теперь систему (2.19)–(2.20) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n^T$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{L}_n^T(z; s)$ есть тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа для функции $z \in C_{2\pi}$ по узлам (1.8). Для функции $x \in L_2$ построим тригонометрический полином $\Pi_n(x; s)$ порядка n, обладающий свойствами:

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \Pi_n(x; s)\, ds = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} x(s)\, ds,\ j = \overline{0, 2n}.$$

Как отмечено в § 1, такой полином существует и единствен и определяется формулой (1.11):

$$\Pi_n(x; s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}_n^T(z; s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma)\, d\sigma,$$

где функция $z(s) = \int_0^s x(\sigma)\, d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\, d\sigma$.

Обозначив через $P_n = \Pi_n$, нетрудно показать, что СЛАУ (2.19)–(2.20) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению (2.7). Поскольку оператор P_n здесь обладает такими же свойствами, что и соответствующий оператор Фурье в методе Галеркина (см. леммы 7 и 8), то сформулированные выше теоремы доказываются так же, как и теоремы 2.1 и 2.3.

Однако, здесь имеют место и другие результаты. Приведем лишь следующие две теоремы.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_p, 1 < p < \infty$;

2) $h \in L_p \times L_q$, *где* q *– сопряженное с* p *число;*

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет лишь тривиальное решение;

4) точки s_j *заданы формулой (2.21).*

Тогда СЛАУ (2.19)–(2.20) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ *хотя бы при всех* n*, начиная с некоторого. Приближенные решения* $x_n^*(s)$*, построенные по формуле (2.2) при* $\alpha_k = \alpha_k^*$, $k = \overline{-n, n}$*, сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения (2.1) в пространстве* L_p *со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:*

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_p} = O\{E_n^T(x^*)_p\}; \tag{2.24}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_p} = O\{E_n^T(y)_p + E_n^{T\,s}(h)_{p,q}\}, \tag{2.25}$$

где $E_n^T(z)_p$ *есть наилучшее приближение функции* $z \in L_p$ *тригонометрическими полиномами из* $\mathbb{H}_n^T$*, а* $E_n^{T\,s}(h)_{p,q}$ *– частное наилучшее приближение функции* $h(s, \sigma) \in L_p \times L_q$ *по переменной* s *тригонометрическими полиномами из* $\mathbb{H}_n^T$.

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $y(s)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица в пространстве L_1;

2) ядро $h \in L_1 \times C_{2\pi}$ удовлетворяет условию Дини–Липшица по переменной s;

3) уравнение (2.1) имеет единственное решение в пространстве L_1;

4) точки s_j определены формулой (2.21).

Тогда СЛАУ (2.19)–(2.20) при всех достаточно больших натуральных n также имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся в метрике пространства L_1 к точному решению $x^*(s)$ уравнения (2.1) со скоростями:

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_1} = O\{\ln n\, E_n^T(x^*)_1\}; \tag{2.26}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_1} = O\{\ln n \cdot [E_n^T(y)_1 + E_n^{Ts}(h)_{1,\infty}]\}, \tag{2.27}$$

где $E_n^T(z)_1$ есть наилучшее приближение функции $z \in L_1$ тригонометрическими полиномами из $\mathbb{H}_n^T$, а $E_n^{Ts}(h)_{1,\infty}$ – частное наилучшее приближение функции $h(s,\sigma) \in L_1 \times C_{2\pi}$ по переменной s тригонометрическими полиномами из $\mathbb{H}_n^T$.

Доказательство теорем 2.8 и 2.9 может быть проведено так же, как и доказательство теорем 2.6 и 2.7 соответственно, при этом используются соответствующие аппроксимативные свойства операторов Π_n, построенных по узлам (2.21), в пространствах L_p $(1 < p < \infty)$ и L_1 соответственно (см. леммы 7 и 8).

2.4. Метод коллокации. На сегменте $[0, 2\pi]$ выберем систему из $2n+1$ попарно неэквивалентных точек $s_k, k = \overline{0, 2n}$. Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде полинома (2.2), а неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определим из условий

$$[Kx_n - y](s_j) = 0,\ j = \overline{0, 2n}. \tag{2.28}$$

Условия (2.28) дают СЛАУ $(2n+1)$–го порядка вида (2.19), где

$$\beta_{kj} = (Ke^{iks})(s_j),\ y_j = y(s_j). \tag{2.29}$$

Для вычислительной схемы метода коллокации (2.1), (2.2), (2.19), (2.29) имеет место

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C_{2\pi}$;

2) ядро $h \in C_{2\pi} \times L_2$;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет лишь нулевое решение;

4) $$s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}. \tag{2.30}$$

Тогда СЛАУ (2.19), (2.29) также имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(s)$, построенные по формуле (2.2) при $\alpha_k = \alpha_k^*$, $k = \overline{-n, n}$, сходятся к точному решению

$x^*(s)$ уравнения (2.1) в пространстве L_2 со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(x^*)_\infty\}. \tag{2.31}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_{\infty,2}\}. \tag{2.32}$$

Следствие 1. Если $h(s,\sigma) \in C([0,2\pi]^2)$, то скорость сходимости приближенных решений к точному может быть охарактеризована порядковым соотношением

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_\infty\}.$$

Следствие 2. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = L_2$ уравнение (2.1) запишем в виде операторного уравнения (2.6), где оператор K, как и в методе Галеркина, в пространстве X имеет ограниченный обратный K^{-1}.

Запишем систему (2.19), (2.29) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n^T$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathcal{L}_n^T$ есть оператор Лагранжа тригонометрического интерполирования по узлам (2.30). Тогда СЛАУ (2.19), (2.29) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению (2.7), где $P_n = \mathcal{L}_n$.

Покажем однозначную разрешимость уравнения (2.7). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. С учетом неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\| = \|Hx_n - P_n H x_n\| = \|H[h - P_n^s h]x_n\|_2 \leq$$

$$\leq \|h - P_n^s h\|_2 \cdot \|x_n\|_2 \leq 2\|P_n\|_{C_{2\pi}\to L_2} \cdot E_n^{Ts}(h)_{\infty,2}\|x_n\|_2.$$

Отсюда, используя лемму 5, находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq 2E_n^{Ts}(h)_{\infty,2} \to 0,\ n \to \infty.$$

Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (2.7) и эквивалентная ему СЛАУ (2.19), (2.29) однозначно разрешимы при всех натуральных n, для которых $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\| < 1$. Более того, из той же леммы 2.1 следует, что операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности.

Далее, для правых частей уравнений (2.6) и (2.7), с учетом леммы 6, имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_2 \leq 2E_n^T(y)_\infty \to 0,\ n \to \infty,$$

что доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_{\infty,2}\}.$$

Для доказательства оценки (2.31) воспользуемся следствием 2 к лемме 2. С учетом лемм 5 и 6 имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \le \Big(1 + \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \cdot \|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} \cdot \|H\|_{L_2 \to C_{2\pi}}\Big) \|x^* - P_n x^*\|_2 =$$

$$= O(\|x^* - P_n x^*\|_2) = O(E_n^T(x^*)_\infty).$$

Далее, следствие 1 вытекает из очевидного неравенства $\|z\|_2 \le \|z\|_\infty$, $z \in C_{2\pi}$.

Следствие 2 доказывается с помощью теорем Джексона в пространстве $C_{2\pi}$ (см., напр., в [15, 27, 28, 35]).

Теорема 2.11. *В условиях теоремы 2.10 приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в узлах коллокации (2.30) с быстротой*

$$\max_{0 \le k \le 2n} |x^*(s_k) - x_n^*(s_k)| = O(\|x^* - x_n^*\|_2). \tag{2.33}$$

Доказательство. Запишем тождества для решений уравнений (2.6) и (2.7):

$$x^*(s_k) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_k, \sigma) x^*(\sigma)\, d\sigma = y(s_k),$$

$$x_n^*(s_k) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_k, \sigma) x_n^*(\sigma)\, d\sigma = y(s_k),$$

где s_k – один из узлов (2.30). Из этих соотношений вытекает, что

$$|x^*(s_k) - x_n^*(s_k)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(s_k, \sigma)|\, |x^*(\sigma) - x_n^*(\sigma)|\, d\sigma \le$$

$$\le \|h(s_k, \cdot)\|_2 \cdot \|x^* - x_n^*\|_2 \le \|h\|_{\infty,2} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2,$$

что и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Из теоремы 2.11 можно получить скорость сходимости приближенных решений к точному в узлах коллокации, если решение обладает определенными гладкостными свойствами (см., напр., следствие 2 к теореме 2.10).

Теорема 2.12. *В условиях теоремы 2.10 для погрешности приближенных решений к точному в пространстве $C_{2\pi}$ справедливы следующие порядковые соотношения:*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, E_n^T(x^*)_\infty\}, \tag{2.34}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, [E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_{\infty,2}]\}. \tag{2.35}$$

Доказательство теоремы 2.12 может быть проведено аналогично доказательству теоремы 2.3, так как операторы Фурье и Лагранжа в пространстве $C_{2\pi}$, согласно леммам 3–6, обладают одинаковыми свойствами.

Теорема 2.13. *Пусть, в условиях теоремы 2.10, функции $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ (по переменной s) удовлетворяют условию Дини–Липшица.*

Тогда приближенные решения $x_n^*(s)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(s)$, при этом скорость сходимости определяется любым из порядковых соотношений (2.34) и (2.35).

Теорема 2.13 с учетом леммы 6 непосредственно вытекает из теоремы 2.12.

Заметим, что из отрицательных результатов теории приближений тригонометрическими интерполяционными полиномами (см., напр., в [35, 37, 40]) следует, что без дополнительного требования о принадлежности функций $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ (по переменной s) к классу Дини–Липшица обеспечить равномерную сходимость приближенных решений к точному нельзя. В связи с этим возникает вопрос: *нельзя ли приближенное решение построить таким образом, чтобы соответствующая равномерная сходимость имела место лишь при условии непрерывности данных функций $y(s)$ и $h(s,\sigma)$?*

На этот вопрос мы здесь дадим положительный ответ, приведя всего один результат.

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$\overline{x}_n{}^*(s) = y(s) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)x_n^*(\sigma\, d\sigma, \tag{2.36}$$

где $x_n^*(\sigma)$ – решение, полученное методом коллокации (2.2), (2.19), (2.29).

Имеет место следующая

Теорема 2.14. *В условиях теоремы 2.10 приближенные решения $\overline{x}_n{}^*(s)$, построенные по формуле (2.36), сходятся равномерно к точному решению $x^*(s)$ уравнения (2.1) со скоростью*

$$\|x^* - \overline{x}_n{}^*\|_\infty = O\Big\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_{\infty,2}\Big\}; \tag{2.37}$$

в частности, если $h \in C([-1,1]^2)$, то

$$\|x^* - \overline{x}_n{}^*\|_\infty = O\Big\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_\infty\Big\}.$$

В самом деле, в условиях теоремы 2.10 существует единственное решение $x_n^*(s)$, построенное методом коллокации (2.1), (2.2), (2.19), (2.29), а следовательно, существует единственная функция $\overline{x}_n{}^*(s)$ при всех натуральных n, начиная с некоторого. Поэтому остается лишь доказать равномерную сходимость $\overline{x}_n^*(s)$ к точному решению $x^*(s)$. Имеем

$$\|x^* - \overline{x}_n{}^*\|_\infty = \|Hx^* - Hx_n^*\|_\infty \le \|h\|_{\infty,2} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2.$$

Поэтому, воспользовавшись оценкой (2.32) для погрешности $\|x^* - x_n^*\|_2$, получим

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_\infty = O\Big\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_{\infty,2}\Big\}.$$

Остальное очевидно.

2.5. Метод механических квадратур. Для всех рассмотренных выше прямых методов (они, как известно, являются также проекционными методами) при реализации соответствующих СЛАУ необходимо вычислять интегралы, что может вызвать определенные трудности. Поэтому эти методы могут оказаться не очень эффективными с точки зрения реализации на практике. Этого недостатка лишен метод механических квадратур, к рассмотрению которого мы и переходим.

Возьмем на сегменте $0, 2\pi]$ систему равноотстоящих точек[4)]

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n}, \tag{2.37}$$

и рассмотрим квадратурную формулу левых прямоугольников, построенную по узлам (2.37):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z(s)\, ds \approx \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} z(s_k),\ z \in C_{2\pi}. \tag{2.38}$$

Заменим в левой части уравнения (2.1) интеграл на квадратурную сумму согласно (2.38) и потребуем, чтобы левая и правая части уравнения (2.1) после такой замены совпадали в узлах (2.37). В результате относительно приближенных значений $\{c_k = x_n(s_k)\}$ решения уравнения (2.1) получим следующую СЛАУ:

$$c_j + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} h(s_j, s_k)c_k = y(s_j),\ j = \overline{0, 2n}. \tag{2.39}$$

Если система (2.39) однозначно разрешима, то восстановить решение можно с помощью тригонометрического интерполяционного полинома Лагранжа:

$$x_n(s) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} c_k D_n(s - s_k), \tag{2.40}$$

где $D_n(s)$ – ядро Дирихле n–го порядка.

Для вычислительной схемы (2.1), (2.40), (2.39) имеет место

Теорема 2.15. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C_{2\pi}, h \in C([0, 2\pi]^2)$*;*

2) уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет лишь нулевое решение.

Тогда СЛАУ (2.39) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$*, хотя бы при всех натуральных* n*, начиная с некоторого. Приближенные решения* $x_n^*(s)$*, построенные по*

4) Результаты этого пункта сохраняются, если метод механических квадратур строится на основе формулы прямоугольников, построенной по узлам

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1} + \frac{\omega}{2n+1},\ k = \overline{0, 2n},\ 0 < \omega \le \pi.$$

формуле (2.40) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0, 2n}$, сходятся к точному решению $x^*(s)$ уравнения (2.1) в пространстве L_2 со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty\}. \tag{2.41}$$

Следствие. Пусть функции y и h (по каждой из переменных равномерно относительно другой) принадлежат классу $W^r H_\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = L_2$ уравнение (2.1) запишем в виде операторного уравнения (2.6), где, в условиях теоремы, оператор K в пространстве X имеет ограниченный обратный K^{-1}.

Теперь запишем систему (2.39) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n^T$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathcal{L}_n^T$ есть оператор Лагранжа тригонометрического интерполирования по узлам (2.37). Поскольку квадратурная формула (2.38) по узлам (2.37) является интерполяционной (см., напр., в [7, 24, 29]), то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{L}_n^{T\sigma}(h(s,\sigma)x(\sigma))\,d\sigma = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} h(s,s_k)x(s_k),$$

где $\mathcal{L}_n^{T\sigma}$ означает применение оператора $\mathcal{L}_n^T$ по переменной σ. Поэтому имеют место равенства

$$x_n(s_k) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{L}_n^{T\sigma}(h(s_k,\sigma)x_n(\sigma))\,d\sigma = y(s_k),\ x_n(s_k) = c_k,\ k = \overline{0, 2n}.$$

Отсюда следует, что

$$P_n\Big(x_n + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma(h(s,\sigma)x_n(\sigma))\,d\sigma\Big) = P_n y,$$

где $P_n = \mathcal{L}_n^T$. Учитывая проекционность оператора P_n, окончательно получим

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H P_n^\sigma(h x_n) = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{2.42}$$

где, как и выше,

$$(Hx)(s) \equiv (Hhx)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma.$$

Таким образом, мы показали эквивалентность СЛАУ (2.39) операторному уравнению (2.42).

Покажем однозначную разрешимость уравнения (2.42). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. Очевидно, имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\| = \|Hx_n - P_n H P_n^\sigma(h x_n)\| \leq$$

$$\leq \|Hx_n - P_nHx_n\| + \|P_nHx_n - P_nHP_n^\sigma(hx_n)\| \equiv I_1 + I_2. \tag{2.43}$$

Первое слагаемое в (2.43) оценивается так же, как и в методе коллокации:

$$I_1 = \|H[h - P_n^s h]x_n\|_2 \leq 2E_n^{Ts}(h)_\infty \|x_n\|_X. \tag{2.44}$$

Для оценки второго слагаемого I_2 воспользуемся тем фактом, что квадратурная формула левых прямоугольников (2.38) является формулой наивысшей тригонометрической степени точности (см., напр., в [7]). Следовательно, она точна для любого тригонометрического полинома порядка не выше $2n$. Учитывая, что функция $P_n^\sigma(h)x_n(\sigma)$ по переменной σ является тригонометрическим полиномом порядка $2n$, мы заключаем, что

$$HP_n^\sigma(hx_n) = H(P_n^\sigma h)x_n.$$

Поэтому для I_2, с учетом неравенства Коши–Буняковского, последовательно находим

$$I_2 = \|P_nHx_n - P_nHP_n^\sigma(hx_n)\|_2 \leq \|Hx_n - HP_n^\sigma(hx_n)\|_\infty =$$

$$= \|H(h - P_n^\sigma h)x_n\|_\infty \leq \|h - P_n^\sigma h\|_{\infty,2} \cdot \|x_n\|_2 \leq 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty \cdot \|x_n\|_X. \tag{2.45}$$

Из (2.43)–(2.45) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|Kx_n - K_nx_n\|_{X_n \to X} \leq 2\{E_n^{Ts}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty\} \to 0,\ n \to \infty,$$

что влечет за собой однозначную разрешимость уравнения (2.42), хотя бы для достаточно больших n, а следовательно, и СЛАУ (2.38), при этом

$$\|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} = O(1), n \to \infty.$$

Остается заметить, что

$$\delta_n \equiv \|y - P_ny\|_2 \leq 2E_n^T(y)_\infty \to 0,\ n \to \infty,$$

чтобы получить утверждение теоремы и ее следствия.

Теорема 2.16. *В условиях теоремы 2.15 приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в узлах (2.37) со скоростью:*

$$\max_{0 \leq k \leq 2n} |x^*(s_k) - c_k^*| = O\{E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty\}. \tag{2.46}$$

В самом деле, из уравнений (2.6) и (2.42) следует, что

$$|x^*(s_k) - c_k^*| = |x^*(s_k) - x_n^*(s_k)| = |(Hhx^*)(s_k) - (HP_n^\sigma(hx_n^*))(s_k)| \leq$$

$$\leq |[H(h - P_n^\sigma h)x^*](s_k)| + |[H(P_n^\sigma h)(x^* - x_n^*)](s_k)| \leq$$

$$\leq \|H(h - P_n^\sigma h)x^*\|_\infty + \|H(P_n^\sigma h)(x^* - x_n^*)\|_\infty \leq$$

$$\leq \|h - P_n^\sigma h\|_{\infty,2} \cdot \|x^*\|_2 + \|P_n^\sigma h\|_{\infty,2} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2 \leq$$

$$\leq 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty \|x^*\|_2 + \|h\|_\infty \cdot \|x^* - x_n^*\|_2.$$

Остается теперь воспользоваться утверждением теоремы 2.15, чтобы получить требуемую оценку.

Теорема 2.17. *В условиях теоремы 2.15 для погрешности приближенных решений в пространстве $C_{2\pi}$ верна оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\,[E_n^T(y)_\infty + E_n^{Ts}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty]\}. \tag{2.47}$$

Теорема 2.18. *Пусть, в условиях теоремы 2.15, функции $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ (по каждой из переменных равномерно относительно другой) удовлетворяют условию Дини–Липшица.*

Тогда приближенные решения $x_n^*(s)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(s)$ со скоростью (2.47).

Заметим, что утверждение теоремы 2.18 непосредственно вытекает из теоремы 2.17. Поэтому докажем теорему 2.17. Имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \le \|x^* - P_n x^*\|_\infty + \|P_n x^* - x_n^*\|_\infty \equiv I_1 + I_2. \tag{2.48}$$

Первое слагаемое в (2.48) оценивается просто:

$$I_1 \le 2\|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} E_n^T(x^*)_\infty = O\{\ln n \cdot E_n^T(x^*)_\infty\}. \tag{2.49}$$

Оценку второго слагаемого I_2 будем проводить, исходя из уравнений (2.6) и (2.42):

$$I_2 = \|P_n H x^* - P_n H(P_n^\sigma h)x_n^*\|_\infty = O(\ln n)\cdot\|Hx^* - h(P_n^\sigma h)x_n^*\|_\infty. \tag{2.50}$$

Но

$$\begin{aligned}\|Hx^* - H(P_n^\sigma h)x_n^*\|_\infty &\le \|H(h - P_n^\sigma h)x^*\|_\infty + \|H(P_n^\sigma h)(x^* - x_n^*)\|_\infty \le \\ &\le \|h - P_n^\sigma h\|_{\infty,2}\|x^*\|_2 + \|P_n^\sigma h\|_{\infty,2}\cdot\|x^* - x_n^*\|_2 = \\ &= O\{E_n^{T\sigma}(h)_\infty + \|x^* - x_n^*\|_2\}.\end{aligned}$$

Последнее соотношение позволяет продолжить оценку (2.50):

$$I_2 = O\{\ln n\,[E_n^{T\sigma}(h)_\infty + \|x^* - x_n^*\|_2]\}. \tag{2.51}$$

Из (2.48)–(2.50) и теоремы 2.15 вытекает утверждение теоремы 2.17.

В заключение этого параграфа остановимся еще на одном способе обоснования вычислительной схемы (2.1), (2.40), (2.39). Наряду с СЛАУ (2.39) метода механических квадратур, рассмотрим СЛАУ (2.19), (2.29) метода коллокации. Эти системы запишем в операторной форме в пространстве $X = m_n$ $(2n+1)$–мерных векторов $\overline{c} = (c_0, \dots, c_{2n})$ с нормой $\|\overline{c}\| = \max\limits_k |c_k|$. Для этого заметим, что полином (2.2) может быть представлен в виде

$$x_n(s) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} x_n(s_k) D_n(s - s_k),$$

где $D_n(s)$ – ядро Дирихле n–го порядка. Поэтому СЛАУ метода коллокации в пространстве X имеет вид

$$\overline{A}_n\overline{c} \equiv \overline{c} + A_n\overline{c} = \overline{y} \quad (\overline{c}, \overline{y} \in X), \tag{2.52}$$

а СЛАУ (2.39) – вид

$$\overline{B}_n\overline{c} \equiv \overline{c} + B_n\overline{c} = \overline{y} \quad (\overline{c}, \overline{y} \in X), \tag{2.53}$$

где матрицы $A_n = \{\alpha_{kj}\}$ и $B_n = \beta_{kj}$ задаются коэффициентами

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(2n+1)\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s_j,\sigma)D_n(\sigma - s_k)\,d\sigma,$$

$$\beta_{kj} = \frac{1}{2n+1}h(s_j,s_k).$$

Рассмотрим для произвольного элемента $\overline{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{2n}) \in X$, $c_k = x_n(s_k)$,

$$\|\overline{A}_n\overline{c} - \overline{B}_n\overline{c}\| = \max_{0\le j\le 2n}\left|\sum_{k=0}^{2n}[\alpha_{kj} - \beta_{kj}]c_k\right| = \max_{0\le j\le 2n}\left|\sum_{k=0}^{2n}[\alpha_{kj} - \beta_{kj}]x_n(s_k)\right| =$$

$$= \max_{0\le j\le 2n}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s_j,\sigma)x_n(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} h(s_j,s_k)x_n(s_k)\right| =$$

$$= \max_{0\le j\le 2n}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s_j,\sigma)x_n(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma(h(s_j,\sigma)x_n(\sigma))\,d\sigma\right| =$$

$$= \max_{0\le j\le 2n}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[h(s_j,\sigma) - P_n^\sigma h(s_j,\sigma)]x_n(\sigma)\,d\sigma\right| \le$$

$$\le \left\|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[h(s,\sigma) - P_n^\sigma h(s,\sigma)]x_n(\sigma)\,d\sigma\right\|_\infty \le$$

$$\le \|h - P_n^\sigma h\|_{\infty,2}\cdot\|x_n\|_2 = \|h - P_n^\sigma h\|_{\infty,2}\cdot\|P_n x_n\|_2 \le$$
$$\le 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty\|P_n\|_{C_{2\pi}\to L_2}\cdot\max_{0\le k\le 2n}|x_n(s_k)| = 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty\cdot\|\overline{c}\|.$$

Таким образом, получили

$$\varepsilon_n \equiv \|\overline{A}_n - \overline{B}_n\| \le 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty \to 0,\ n\to\infty.$$

Поэтому из леммы 1 следует, что если СЛАУ (2.39) метода коллокации однозначно разрешима (хотя бы при достаточно больших n), СЛАУ (2.29) метода механических квадратур будет также однозначно разрешимой при всех натуральных n, начиная с некоторого. При этом сходимость приближенных решений, полученных методом механических квадратур, может быть установлена через уже оцененную выше погрешность соответствующих приближенных решений для метода коллокации.

§3. Прямые методы решения интегральных уравнений Фредгольма. Непериодический случай

В этом параграфе будем изучать вопросы обоснования полиномиальных прямых методов решения непериодических интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для определенности рассмотрим интегральное уравнение на стандартном промежутке $[-1,+1]$:

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds = y(t),\ -1 \le t \le 1, \tag{3.1}$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ – известные, а $x(t)$ – искомая функции.

3.1. Метод Галеркина. Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде алгебраического многочлена степени n, $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k, \tag{3.2}$$

а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)[Kx_n(t) - y(t)]\,t^j dt = 0,\ j = \overline{0,n},$$

где $\rho(t)$ – некоторая весовая на $[-1,1]$ функция. Эти условия дают СЛАУ $(n+1)$–го порядка относительно $n+1$ коэффициентов $\{c_k\}$ полинома (3.2):

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0,n}, \tag{3.3}$$

где

$$\alpha_{kj} = \int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)(Kt^k)(t)\,t^j dt,\ y_j = \int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)y(t)t^j dt. \tag{3.4}$$

Для вычислительной схемы метода Галеркина (3.1)–(3.4) имеет место

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ или $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$;

2) $y \in L_{2,\rho}(-1,1)$;

3) ядро $h(t,s)$ таково, что порождаемый им интегральный оператор вполне непрерывен в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$;

4) уравнение (3.1) имеет единственное решение при любой правой части из $L_{2,\rho}$.

Тогда СЛАУ (3.3)–(3.4) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ хотя бы при всех n, начиная с некоторого натурального n_0. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.2) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,n}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (3.1) в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(x^*)_{2,\rho}\}, \tag{3.5}$$

где $E_n(z)_{2,\rho}$ – наилучшее среднеквадратическое приближение элемента $z \in L_{2,\rho}(-1,1)$ алгебраическими многочленами степени не выше n.

Следствие 1. Для погрешности приближенных решений в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$ имеет место порядковое соотношение

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_{2,\rho} + E_n(Hx^*)_{2,\rho}\}; \tag{3.5$'$}$$

в частности, если $h(t,s) \in L_{2,\rho}(-1,1) \times L_{2,1/\rho}(-1,1)$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_{2,\rho} + E_n^t(h)_{2;\rho,1/\rho}\},$$

где $E_n^t(h)_{2;\rho,1/\rho}$ – частное наилучшее среднеквадратическое приближение функции $h(t,s) \in L_{2,\rho}(-1,1) \times L_{2,1/\rho}(-1,1)$ по переменной t алгебраическими многочленами степени не выше n.

Следствие 2. Если функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_{2,\rho}^\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$, то, в условиях теоремы 3.1, для погрешности приближенных решений верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 1,\ 0 < \gamma \leq 1. \tag{3.5”}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. Введем в рассмотрение пространство $X = L_{2,\rho}$ с нормой

$$\|x\|_{2,\rho} \equiv \|x\|_{L_{2,\rho}} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)|x(t)|^2 dt}\,,\ x \in L_{2,\rho}(-1,1).$$

В этом пространстве уравнение (3.1) запишем в операторной форме

$$Kx \equiv x + Hx = y \quad (x, y \in X), \tag{3.6}$$

где оператор H задается соотношением

$$(Hx)(t) = \int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds.$$

Поскольку по условию 3) оператор $H : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен, то уравнение (3.6) является уравнением второго рода с вполне непрерывным оператором и для него справедлива теория Фредгольма. С учетом условия 4) теоремы, из этой теории следует существование в пространстве X ограниченного обратного K^{-1}. Запишем теперь систему (3.3)–(3.4) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть S_n есть оператор Фурье, который любой функции $z \in X$ ставит в соответствие $(n+1)$–ый отрезок ряда Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода $T_k(t) = \cos n \arccos t, k = \overline{0,n}$:

$$S_n(z;t) = \frac{c_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k(z)T_k(t),\ z \in X,$$

где $c_k(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \rho(s)x(s)T_k(s)\,ds$ – коэффициенты Фурье–Чебышева функции $z(t)$.

Ясно, что СЛАУ (3.3)–(3.4) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{3.7}$$

где $P_n = S_n$.

Таким образом, нам достаточно доказать однозначную разрешимость уравнения (3.7). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. Обозначив через $z_n = x_n/\|x_n\|$ $(x_n \neq 0)$, имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X = \|Hx_n - P_n H x_n\| = \|x_n\| \cdot \|Hz_n - P_n H z_n\| \leq$$
$$\leq \|x_n\| \cdot \sup_{z\in V} \|Hz - P_n H z\|, \tag{3.8}$$

где V есть единичный шар с центром в нуле пространства X. Поскольку по условию оператор H вполне непрерывен, то он множество V переводит в компактное множество пространства X. На таком множестве по теореме Гельфанда, как уже отмечалось выше, сильно сходящаяся последовательность операторов сходится равномерно. Тогда из (3.8) следует, что (см. также [40])

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq \sup_{g\in HV} \|g - P_n g\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (3.7) и эквивалентная ему СЛАУ (3.3)–(3.4) однозначно разрешимы при всех натуральных n, для которых $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\| < 1$. Более того, операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности.

Далее, для правых частей уравнений (3.6) и (3.7) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\| = E_n(y)_{2,\rho} \to 0,\ n \to \infty,$$

что, с учетом той же леммы 1, доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Для доказательства оценки (3.5) воспользуемся следствием 2 к лемме 2. Учитывая лемму 9, имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \Big(1 + \|K_n^{-1}\| \cdot \|P_n\| \cdot \|H\|\Big)\|x^* - P_n x^*\| =$$
$$= O(\|x^* - P_n x^*\|_{2,\rho}) = O(E_n(x^*)_{2,\rho}).$$

Теорема 2.1 доказана.

Далее, следствие 1 доказывается с использованием тождества $x^* \equiv y - Hx^*$ и известного неравенства для наилучших приближений $E_n(x+y)_{2,\rho} \leq E_n(x)_{2,\rho} + E_n(y)_{2,\rho}$, справедливого для любых $x, y \in L_{2,\rho}$. Если же функция $h(t,s) \in L_{2,\rho}(-1,1)\times$

$L_{2,1/\rho}(-1,1) \equiv V$, то, обозначив через $h_n(t,s) \in V$ функцию, являющуюся алгебраическим многочленом степени n наилучшего среднеквадратического приближения для функции $h(t,s)$ по переменной t, с учетом неравенства Коши–Буняковского будем иметь:

$$E_n(Hx^*)^2_{2,\rho} \leq \|Hhx^* - Hh_n x^*\|^2_{2,\rho} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \rho(t) \left| \int\limits_{-1}^{+1} [h(t,s) - h_n(t,s)] x^*(s)\, ds \right|^2 dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\rho(t)}{\rho(s)} |h(s,\sigma) - h_n(s,\sigma)|^2 ds\, dt \cdot \int\limits_{-1}^{+1} \rho(s) |x^*(s)|^2 ds =$$

$$= \|h - h_n\|^2_{2;\rho,1/\rho} \cdot \|x^*\|^2_{2,\rho} = E^t_n(h)^2_{2,\rho,1/\rho} \cdot \|x^*\|^2_{2,\rho}.$$

Следствие 2 доказывается с помощью теорем Джексона в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$ (см., напр., [28, 40]).

Теорема 3.2. *Пусть $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ или $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ и выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1]$;

2) функция $h(t,s)$ такова, что $H : L_{2,\rho} \longrightarrow C[-1,1]$ непрерывен;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь тривиальное решение.

Тогда при всех достаточно больших n СЛАУ (3.3)–(3.4) имеет единственное решение $\{c^*_k\}$. Для погрешности приближенных решений в равномерной метрике справедлива следующая порядковая оценка

$$\|x^* - x^*_n\|_\infty = O\{\ln n E_n(x^*)_\infty\}. \tag{3.9}$$

Если $h(t,s)$ непрерывна по совокупности переменных, то погрешность приближенных решений в пространстве $C[-1,1]$ характеризуется соотношением

$$\|x^* - x^*_n\|_\infty = O\{\ln n[E_n(y)_\infty + E^t_n(h)_\infty]\}. \tag{3.9'}$$

Следствие. Пусть функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда приближенные решения $x^*_n(t)$ сходятся равномерно к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (3.9). В частности, при $y \in W^r H_\gamma, h \in W^r H_\gamma$ (по переменной t), где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному определяется формулой

$$\|x^* - x^*_n\|_\infty = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы находимся в условиях теоремы 3.1, поэтому разрешиость СЛАУ (3.3)–(3.4) имеет место, хоты бы при достаточно больших n. С другой стороны, в условиях теоремы 3.2 точное решение $x^*(t)$ является функцией непрерывной. Поэтому имеет смысл рассматривать погрешность приближенных решений в равномерной метрике.

С учетом тождеств $x^* \equiv y - Hx^*$, $x_n^* \equiv P_n y - P_n H x_n^*$ и неравенства треугольника для нормы имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \le \|x^* - P_n x^*\|_\infty + \|P_n x^* - x_n^*\|_\infty \le$$

$$\le 2\|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} E_n(x^*)_\infty + \|P_n H x_n^* - P_n H x^*\|_\infty \le$$

$$\le \|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \{2E_n(x^*)_\infty + \|H\|_{L_{2,\rho}\to C} \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho}\} =$$

$$= O\{E_n(x^*)_\infty + E_n(x^*)_{2,\rho}\} = O\{E_n(x^*)_\infty\}.$$

Для получения оценки (3.9′) заметим, что

$$E_n(x^*)_\infty \le E_n(y)_\infty + E_n(Hx^*)_\infty. \tag{3.10}$$

Пусть функция $h_n(t,s) \in C([-1,1]^2)$ является полиномом из $\mathbb{H}_n$ по переменной t таким, что $\|h - h_n\|_\infty = E_n^t(h)_\infty$. Тогда

$$E_n(Hx^*)_\infty \le \|Hhx^* - Hh_n x^*\|_\infty = \|H[h - h_n]x^*\|_\infty \le$$

$$\le \|h - h_n\|_{C\times L_{2,1/\rho}} \cdot \|x^*\|_{2,\rho} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \|h - h_n\|_\infty \cdot \|x^*\|_{2,\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, E_n^t(h)_\infty \cdot \|x^*\|_{2,\rho}.$$

Тогда, с учетом (3.10), имеем

$$E_n(x^*)\|_\infty \le E_n(y)_\infty + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \|x^*\|_{2,\rho} \cdot E_n^t(h)_\infty.$$

Далее, в условиях следствия точное решение $x^*(t)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица. Поэтому из оценки (3.9) следует равномерная сходимость приближенных решений к точному.

Замечание. Полученные в следствии 2 теоремы 3.1 и следствии теоремы 3.2 оценки погрешности приближенных решений в пространствах $L_{2,\rho}$ и $C[-1,1]$ соответственно не могут быть улучшены по порядку.

3.2. Метод наименьших квадратов. Приближенное решение уравнения (3.1) будем по–прежнему искать в виде алгебраического многочлена (3.2), а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условия минимальности невязки приближенного решения по норме пространства $L_{2,\rho}$:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t)|Kx_n(t) - y(t)|^2 dt = \min. \tag{3.11}$$

Это условие дает СЛАУ $(n+1)$–го порядка относительно $n+1$ коэффициентов c_k полинома (3.2):

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0,n}, \tag{3.12}$$

где

$$\alpha_{kj} = \int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)(Kt^k)(t)(Kt^j)(t)\,dt,\ y_j = \int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)y(t)(Kt^j)(t)\,dt. \tag{3.13}$$

Для вычислительной схемы метода наименьших квадратов (3.1), (3.2), (3.12)–(3.13) справедливы следующие результаты.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_{2,\rho}(-1,1)$;

2) оператор $H : L_{2,\rho} \longrightarrow L_{2,\rho}$ ограничен;

3) уравнение (3.1) имеет единственное решение при данной правой части $y \in L_{2,\rho}$.

Тогда СЛАУ (3.12)–(3.13) для всех натуральных n также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.2) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,n}$, обладают тем свойством, что невязка $r_n^*(t) \equiv Kx_n^*(t) - y(t)$ сходится к нулю в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$.

Доказательство. Обозначим через $X = Y = L_{2,\rho}$, $X_n = I\!H_n, Y_n = KX_n$. Поскольку оператор $K : X \longrightarrow X$ ограничен, то Y_n есть конечномерное подпространство пространства X, причем $\dim X_n = \dim Y_n$. Рассмотрим условие (3.11):

$$\min_{\{c_k\}} \|Kx_n - y\|^2_{L_{2,\rho}} \equiv \min_{x_n \in X_n} \|Kx_n - y\|^2_{L_{2,\rho}} = \min_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|^2_{L_{2,\rho}}.$$

В силу ограниченности оператора K в пространстве $L_{2,\rho}$, система функций $\{Kt^j\}_{j=0}^{\infty}$ является системой линейно–независимой и полной. Поэтому существует единственный элемент $y_n^* \in Y_n$ такой, что

$$\|y - y_n^*\|_{2,\rho} = \inf_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|_{2,\rho} = E(y; Y_n) \equiv \widetilde{E}_n(y)_{2,\rho}.$$

Получили, что элемент $y_n^* \in Y_n$ есть элемент наилучшего приближения для $y \in L_{2,\rho}$. Но, как хорошо известно, таким элементом в гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}$ является $(n+1)$–ый отрезок ряда Фурье, построенный по базису подпространства Y_n. Поэтому, обозначив через P_n оператор Фурье, построенный по базису подпространства Y_n, находим $y_n^* = P_n y$.

Таким образом, элемент $x_n \in X_n$, определяемый из условия (3.11), должен быть решением уравнения

$$Kx_n = P_n y \quad (x_n \in X_n).$$

Отметим также, что это уравнение в силу определений подпространств X_n и Y_n имеет единственное решение x_n^* при любом натуральном n, при этом

$$\|r_n^*\|_{2,\rho} = \|y - P_n y\|_{2,\rho} = \widetilde{E}_n(y)_{2,\rho} \to 0,\ n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены предположения 1) и 2) теоремы 3.3 и однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь тривиальное решение. Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{2,\rho} \le \eta(K) E_n(x^*)_{2,\rho},$$

где $\eta(K) = \|K\| \cdot \|K^{-1}\|$ – число обусловленности оператора $K : L_{2,\rho} \longrightarrow L_{2,\rho}$.

В самом деле, $x^* - x_n^* = K^{-1}[Kx^* - Kx_n^*] = K^{-1}[y - Kx_n^*]$. Поэтому

$$\|x^* - x_n^*\|_{2,\rho} \le \|K^{-1}\| \cdot \|r_n^*\|_{2,\rho}. \tag{3.14}$$

С другой стороны, $r_n^* = K(x^* - x_n^*)$ имеет минимальную норму в $L_{2,\rho}$ и, следовательно, для любого элемента $x_n \in X_n$

$$\|r_n^*\|_{2,\rho} \le \|K(x^* - x_n)\|_{2,\rho} \le \|K\| \cdot \|x^* - x_n\|_{2,\rho}.$$

Выбирая в качестве $x_n \in X_n$ элемент наилучшего среднеквадратического приближения для $x^* \in L_{2,\rho}$, из последнего неравенства находим

$$\|r_n^*\|_{2,\rho} \le \|K\| \cdot E_n(x^*)_{2,\rho}. \tag{3.15}$$

Из неравенств (3.14) и (3.15) вытекает утверждение теоремы 3.4.

3.3. Метод подобластей. На сегменте $[-1, 1]$ выберем систему из $n + 2$ точек $t_k, k = \overline{0, n+1}$, расположенных в порядке возрастания. Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать снова в виде многочлена (3.2), а его неизвестные коэффициенты определим из условий

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \rho(t)[(Kx_n)(t) - y(t)]\, dt = 0,\ j = \overline{0, n}. \tag{3.16}$$

Ясно, что эти условия относительно коэффициентов $\{c_k\}$ представляют СЛАУ вида

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0, n}, \tag{3.17}$$

где

$$\alpha_{kj} = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \rho(t)(Kt^k)(t)\, dt,\ y_j = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \rho(t) y(t)\, dt. \tag{3.18}$$

Для вычислительной схемы метода подобластей (3.1), (3.2), (3.17)–(3.18) имеют место следующие результаты.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_{2,\rho},\ \rho(t) = \sqrt{1 - t^2}$;

2) ядро $h(t, s)$ таково, что порождаемый им интегральный оператор вполне непрерывен в пространстве $L_{2,\rho}$;

3) уравнение (3.1) имеет единственное решение при любой правой части из $L_{2,\rho}$;

4) $$t_j = -\cos\frac{j\pi}{n+1}, \quad j = \overline{0, n+1}. \tag{3.19}$$

Тогда СЛАУ (3.17)–(3.18) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.2) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0, n}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (3.1) в пространстве $L_{2,\rho}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(x^*)_{2,\rho}\}. \tag{3.20}$$

Следствие 1. Для погрешности приближенных решений в пространстве $L_{2,\rho}$ имеет место соотношение

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_{2,\rho} + E_n(Hx^*)_{2,\rho}\};$$

в частности, если $h(t,s) \in L_{2,\rho}(-1,1) \times L_{2,1/\rho}(-1,1)$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_{2,\rho} + E_n^T(h)_{2;\rho,1/\rho}\}.$$

Следствие 2. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_{2,\rho}^\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1]$;

2) ядро $h(t,s)$ таково, что соответствующий интегральный оператор $H : L_{2,\rho} \longrightarrow C$ ограничен, где $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь тривиальное решение;

4) точки t_j заданы формулой (3.19).

Тогда при всех n, начиная хоты бы с некоторого натурального n_0, СЛАУ (3.17)–(3.18) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$. Для погрешности приближенных решений в пространстве $C[-1,1]$ справедлива следующая порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n E_n(x^*)_\infty\}. \tag{3.21}$$

Если $h(t,s)$ непрерывна по совокупности переменных, то погрешность приближенных решений в пространстве $C[-1,1]$ характеризуется соотношением

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n[E_n(y)_\infty + E_n^t(h)_\infty]\}. \tag{3.21$'$}$$

Следствие. Пусть функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся равномерно к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (3.21). В частности, при $y \in W^r H_\gamma, h \in W^r H_\gamma$ (по переменной t), где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному определяется формулой

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_1(-1,1)$;

2) ядро $h(t,s)$ таково, что соответствующий интегральный оператор $H : L_1 \longrightarrow L_1$ вполне непрерывен;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь тривиальное решение;

4) точки t_j заданы формулой (3.19).

Тогда при всех n, начиная хотя бы с некоторого натурального n_0, СЛАУ (3.17)–(3.18) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$. Для погрешности приближенных решений в пространстве $L_1(-1,1)$ справедлива следующая порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_1 = O\{\ln n E_n(x^*)_1\}. \tag{3.22}$$

Если $h(t,s)$ непрерывна по переменной s, то погрешность приближенных решений в пространстве $L_1(-1,1)$ характеризуется соотношением

$$\|x^* - x_n^*\|_1 = O\{\ln n[E_n(y)_1 + E_n^\tau(h)_{1,\infty}]\}, \tag{3.22$'$}$$

где $E_n(z)_1$ – наилучшее приближение функции $z \in L_1$ алгебраическими многочленами из $\mathbb{H}_n$.

Следствие. Пусть функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица в пространстве L_1. Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ в пространстве L_1 со скоростью (3.22). В частности, при $y \in W^r H_1^\gamma, h \in W^r H_1^\gamma$ (по t), где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, скорость сходимости приближенных решений к точному определяется формулой

$$\|x^* - x_n^*\|_1 = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство теорем. Как и выше, введем в рассмотрение пространство $X = L_{2,\rho}$ с нормой

$$\|x\|_{2,\rho} \equiv \|x\|_{L_{2,\rho}} = \Big\{\int_{-1}^{+1} \rho(t)|x(t)|^2 dt\Big\}^{1/2},\ x \in L_{2,\rho}.$$

В этом пространстве уравнение (3.1) запишем в виде операторного уравнения (3.6), где оператор K в пространстве X имеет ограниченный обратный.

Запишем теперь систему (3.17)–(3.18) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{L}_{n+1}(z;t)$ есть интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $z \in C[-1,1]$ по узлам (3.19). Для функции $x \in L_{2,\rho}$ построим многочлен $\Pi_n(x;t)$ степени n, обладающий свойствами:

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Pi_n(x;t)\,dt = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)\,dt,\ j = \overline{0,n}.$$

Как отмечено в § 1, такой многочлен существует, единствен и определяется формулой:

$$\Pi_n(x;t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{n+1}(z;t),$$

где функция $z(t) = \int_0^t x(s)\,ds$.

Обозначив через $P_n = \Pi_n$, нетрудно показать, что СЛАУ (3.17)–(3.18) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению (3.7). Поскольку оператор P_n здесь обладает такими же свойствами, что и соответствующий оператор Фурье в методе Галеркина (см. леммы 14 и 15), то сформулированные выше теоремы доказываются так же, как и теоремы 3.1 и 3.2.

Замечание. Из леммы 13 следует, что аналогичные результаты имеют место и для вычислительной схемы метода подобластей, построенной по узлам Чебышева I–рода.

3.4. Метод коллокации. На сегменте $[-1,1]$ выберем систему из $n+1$ точек $t_k, k=\overline{0,n}$. Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде многочлена (3.2), а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$[Kx_n - y](t_j) = 0,\ j = \overline{0,n}. \tag{3.22}$$

Условия (3.22) дают СЛАУ $(n+1)$–го порядка вида (3.17), где

$$\alpha_{kj} = (Kt^k)(t_j),\ y_j = y(t_j). \tag{3.23}$$

Для вычислительной схемы метода коллокации (3.1), (3.2), (3.17), (3.23) имеет место

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1]$;

2) ядро $h \in C[-1,1] \times L_{2,1/\rho}$, $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь нулевое решение;

4) узлы $\{t_j\}$ определены по любой из формул

$$а)\ t_j = -\cos\frac{(2j+1)\pi}{2n+2},\ j=\overline{0,n}; \qquad б)\ t_j = -\cos\frac{j\pi}{n},\ j=\overline{0,n}. \tag{3.24}$$

Тогда СЛАУ (3.17), (3.23) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.2) при $c_k = c_k^*$, $k=\overline{0,n}$, сходятся к точному решению

$x^*(t)$ уравнения (3.1) в пространстве $L_{2,\rho}$ со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(x^*)_\infty\}. \tag{3.25}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_\infty + E_n^t(h)_{\infty;2,1/\rho}\}. \tag{3.26}$$

Следствие 1. Если $h(t,s) \in C([-1,1]^2)$, то скорость сходимости может быть охарактеризована порядковым соотношением

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_\infty + E_n^t(h)_\infty\}.$$

Следствие 2. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = L_{2,\rho}$ уравнение (3.1) запишем в виде операторного уравнения (3.6), где оператор K, как и в методе Галеркина, в пространстве X имеет ограниченный обратный K^{-1}.

Запишем систему (3.17), (3.23) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathcal{L}_n$ есть оператор Лагранжа алгебраического интерполирования по узлам (3.24). Тогда СЛАУ (3.17), (3.23) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению (3.7), где $P_n = \mathcal{L}_n$.

Покажем однозначную разрешимость уравнения (3.7). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. С учетом неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X = \|Hx_n - P_n H x_n\| = \|H[h - P_n^t h]x_n\|_{2,\rho} \leq$$

$$\leq \|x_n\|_{2,\rho} \cdot \|h - P_n^t h\|_{2;\rho,1/\rho} \leq 2\|P_n\|_{C \to L_{2,\rho}} \cdot E_n^t(h)_{\infty;2,1/\rho} \|x_n\|_{2,\rho}. \tag{3.27}$$

Отсюда, используя лемму 12, находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n^t(h)_{\infty;2,1/\rho} \to 0,\ n \to \infty.$$

Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (3.7) и эквивалентная ему СЛАУ (3.17), (3.23) однозначно разрешимы при всех натуральных n, для которых $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\| < 1$. Более того, из той же леммы 1 следует, что операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности.

Далее, для правых частей уравнений (3.6) и (3.7) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_{2,\rho} \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n(y)_\infty \to 0,\ n \to \infty,$$

что доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O\{E_n(y)_\infty + E_n^t(h)_{\infty;2,1/\rho}\}.$$

Для доказательства оценки (3.25) воспользуемся следствием 2 к лемме 2. Учитывая лемму 12, получим

$$\|x^* - x_n^*\|_{2,\rho} \le \Big(1 + \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \cdot \|P_n\|_{C \to L_{2,\rho}} \cdot \|H\|_{L_{2,\rho} \to C}\Big) \|x^* - P_n x^*\|_{2,\rho} =$$

$$= O(\|x^* - P_n x^*\|_{2,\rho}) = O(E_n(x^*)_\infty),$$

что и доказывает утверждение теоремы 3.7.

Далее, следствие 1 доказывается с использованием очевидного неравенства

$$\|z\|_{2,\rho} \le \sqrt{\pi}\, \|z\|_\infty,\ z \in C[-1,1],\ \rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}.$$

Следствие 2 доказывается с помощью теорем Джексона в пространстве $C[-1,1]$ (см., напр., [15, 28, 35, 40]).

Теорема 3.8. *В условиях теоремы 3.7 приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ в узлах коллокации (3.24) с быстротой*

$$\max_{0 \le k \le n} |x^*(t_k) - x_n^*(t_k)| = O(\|x^* - x_n^*\|_{2,\rho}). \tag{3.28}$$

Доказательство. Запишем тождества для решений уравнений (3.6) и (3.7):

$$x^*(t_k) + \int\limits_{-1}^{+1} h(t_k, s) x^*(s)\, ds = y(t_k),$$

$$x_n^*(t_k) + \int\limits_{-1}^{+1} h(t_k, s) x_n^*(s)\, ds = y(t_k),$$

где t_k – один из узлов (3.24). Из этих соотношений вытекает, что

$$|x^*(t_k) - x_n^*(t_k)| \le \int\limits_{-1}^{+1} |h(t_k, s)|\, |x^*(s) - x_n^*(s)|\, ds \le$$

$$\le \|h(t_k, \cdot)\|_{2,1/\rho} \cdot \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho} \le \|h\|_{\infty;2,1/\rho} \cdot \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho},$$

что и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Из теоремы 3.8 можно получить скорость сходимости приближенных решений к точному в узлах коллокации, если решение обладает определенными гладкостными свойствами.

Теорема 3.9. *В условиях теоремы 3.7 для погрешности приближенных решений в пространстве $C[-1,1]$ справедливы следующие порядковые соотношения:*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, E_n(x^*)_\infty\}, \tag{3.29}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, [E_n(y)_\infty + E_n^t(h)_{\infty;2,1/\rho}]\}. \tag{3.30}$$

Доказательство теоремы 3.9 может быть проведено аналогично доказательству теоремы 3.2, так как соответствующие операторы Фурье и Лагранжа в пространстве $C[-1,1]$ обладают одинаковыми свойствами (сравни леммы 10 и 12).

Теорема 3.10. *Пусть, в условиях теоремы 3.7, функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица.*

Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$, при этом скорость сходимости определяется любым из порядковых соотношений (3.29) и (3.30).

Теорема 3.10 с учетом леммы 12 непосредственно вытекает из теоремы 3.9.

3.5. Метод механических квадратур. Возьмем на сегменте $[-1,1]$ систему узлов Чебышева I–рода

$$t_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = \overline{0,n}, \tag{3.31}$$

и рассмотрим квадратурную формулу Эрмита–Чебышева

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{z(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z(t_k), \ z \in C[-1,1]. \tag{3.32}$$

Заменим в левой части уравнения (3.1) интеграл по квадратурной формуле (3.32) и потребуем, чтобы левая и правая части уравнения (3.1) после такой замены совпадали в узлах (3.31). В результате относительно приближенных значений $\{c_k = x_n(s_k)\}$ решения уравнения (3.1) получим следующую СЛАУ:

$$c_j + \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} h(t_j, t_k)\sqrt{1-t_k^2}\; c_k = y(t_j), \ j = \overline{0,n}. \tag{3.33}$$

Если система (3.33) однозначно разрешима, то восстановить решение можно с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного по узлам (3.31):

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{n} c_k l_k(t), \tag{3.34}$$

где $l_k(t) = \frac{(-1)^k\sqrt{1-t_k^2}}{n+1}\frac{T_{n+1}(t)}{t-t_k}$, $k = \overline{0,n}$, – фундаментальные многочлены Лагранжа.

Для вычислительной схемы (3.1), (3.34), (3.33) имеет место

Теорема 3.11. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1], h \in C([-1,1]^2)$;

2) уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь нулевое решение.

Тогда СЛАУ (3.33) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при всех натуральных n, начиная с некоторого. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.34) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,n}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (3.1) в пространстве $L_{2,\rho}, \rho = \rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$, со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_\infty + E_n^T(h)_\infty + E_n^s(\widetilde{h})_\infty\}, \tag{3.35}$$

где $\widetilde{h}(t,s) = h(t,s)\cdot\sqrt{1-s^2}$.

Следствие. Пусть функции y и $\widetilde{h}$ (по каждой из переменных равномерно относительно другой) принадлежат классу W^rH_γ, где $r \geq 0$ – целое, а $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = L_{2,\rho}, \rho = \rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$, уравнение (3.1) запишем в виде операторного уравнения (3.6), где

$$(Hx)(t) \equiv (H\widetilde{h}x)(t) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\widetilde{h}(t,s)x(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds = \int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds,$$

а оператор K, в условиях теоремы 3.11, в пространстве X имеет ограниченный обратный K^{-1}.

Теперь запишем систему (3.33) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства $X_n = \mathbb{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathcal{L}_n$ есть оператор Лагранжа алгебраического интерполирования по узлам (3.31). Поскольку квадратурная формула (3.32) по узлам (3.31) является интерполяционной (см., напр., в [7, 41]), то

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\mathcal{L}_n^s(\widetilde{h}(t,s)x(s))}{\sqrt{1-s^2}}ds = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{h}(t,t_k)x(t_k) = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} h(t,t_k)\sqrt{1-t_k^2}\,x(t_k),$$

где $\mathcal{L}_n^s$ означает применение оператора $\mathcal{L}_n$ по переменной s. Поэтому имеют место равенства

$$x_n(t_j) + \int\limits_{-1}^{+1} \mathcal{L}_n^s(\widetilde{h}(t_j,s)x_n(s))\,ds = y(t_j),\ x_n(t_j) = c_j,\ j = \overline{0,n}.$$

Отсюда следует, что

$$P_n\Big(x_n + \int\limits_{-1}^{+1} \frac{P_n^s(\widetilde{h}(t,s)x_n(s))}{\sqrt{1-s^2}}ds\Big) = P_n y,$$

где $P_n = \mathcal{L}_n$. Учитывая проекционность оператора P_n, окончательно получим

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H P_n^s(\widetilde{h}x_n) = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{3.36}$$

Таким образом, мы показали эквивалентность СЛАУ (3.33) операторному уравнению (3.36).

Покажем однозначную разрешимость уравнения (3.36). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_nx_n$. С учетом неравенства треугольника для нормы, имеем

$$\|Kx_n - K_nx_n\| = \|Hx_n - P_nHP_n^s(\widetilde{h}x_n)\| \leq$$

$$\leq \|Hx_n - P_nHx_n\| + \|P_nHx_n - P_nHP_n^s(\widetilde{h}x_n)\| \equiv I_1 + I_2. \tag{3.37}$$

Первое слагаемое в (3.37) оценивается так же, как и в методе коллокации:

$$I_1 = \|H[\widetilde{h} - P_n^{\tau}\widetilde{h}]x_n\|_{2,\rho} \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n^{\tau}(\widetilde{h})_{\infty}\|x_n\|_X \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n^{\tau}(h)_{\infty}\|x_n\|_X. \tag{3.38}$$

Для оценки второго слагаемого I_2 воспользуемся тем фактом, что квадратурная формула Эрмита–Чебышева (3.32) является формулой наивысшей алгебраической степени точности (см., напр., в [7, 29]). Следовательно, она точна для любого алгебраического многочлена степени не выше $2n+1$. Учитывая, что функция $P_n^s(\widetilde{h})x_n(s)$ по переменной s является алгебраическим многочленом степени $2n$, мы заключаем, что

$$HP_n^s(\widetilde{h}x_n) = H(P_n^s\widetilde{h})x_n.$$

Поэтому для I_2, с учетом неравенства Коши–Буняковского, последовательно находим

$$I_2 = \|P_nHx_n - P_nHP_n^s(\widetilde{h}x_n)\|_{2,\rho} \leq \sqrt{\pi}\,\|Hx_n - HP_n^s(\widetilde{h}x_n)\|_{\infty} =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\|H(\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h})x_n\|_{\infty} \leq \sqrt{\pi}\,\|\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h}\|_{\infty;2,1/\rho} \cdot \|x_n\|_{2,\rho} \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n^s(\widetilde{h})_{\infty} \cdot \|x_n\|_X. \tag{3.39}$$

Из (3.37)–(3.39) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq 2\sqrt{\pi}\,\{E_n^t(h)_{\infty} + E_n^s(\widetilde{h})_{\infty}\} \to 0,\ n \to \infty,$$

что влечет за собой однозначную разрешимость уравнения (3.36), хотя бы для достаточно больших n, а следовательно, и СЛАУ (3.33), при этом $\|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} = O(1)$, $n \to \infty$. Остается заметить, что

$$\delta_n \equiv \|y - P_ny\|_{2,\rho} \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n(y)_{\infty} \to 0,\ n \to \infty,$$

чтобы получить утверждение теоремы и ее следствия.

Теорема 3.12. *В условиях теоремы 3.11 приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ в узлах (3.31) со скоростью:*

$$\max_{0 \leq k \leq n} |x^*(t_k) - c_k^*| = O\{E_n(y)_{\infty} + E_n^t(h)_{\infty} + E_n^s(\widetilde{h})_{\infty}\}.$$

В самом деле, из уравнений (3.6) и (3.36) следует, что

$$|x^*(t_k) - c_k^*| = |x^*(t_k) - x_n^*(t_k)| = |(H\widetilde{h}x^*)(t_k) - (HP_n^s(\widetilde{h}x_n^*))(t_k)| \leq$$

$$\leq |[H(\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h})x^*](t_k)| + |[H(P_n^s\widetilde{h})(x^* - x_n^*)](t_k)| \leq$$

$$\leq \|H(\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h})x^*\|_{\infty} + \|H(P_n^s\widetilde{h})(x^* - x_n^*)\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \sqrt{\pi}\,\|\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h}\|_{\infty;2,1/\rho} \cdot \|x^*\|_{2,\rho} + \|P_n^s\widetilde{h}\|_{\infty;2,1/\rho} \cdot \|x^* - x_n^*)\|_{2,\rho} \leq$$

$$\leq 2\sqrt{\pi}\, E_n^s(\widetilde{h})_{\infty}\|x^*\|_{2,\rho} + \sqrt{\pi}\,\|h\|_{\infty} \cdot \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho}.$$

Остается теперь воспользоваться утверждением теоремы 3.11, чтобы получить требуемую оценку.

Теорема 3.13. *В условиях теоремы 3.11 для погрешности приближенных решений в пространстве $C[-1,1]$ верна оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, [E_n(y)_\infty + E_n^t(h)_\infty + E_n^s(\widetilde{h})_\infty]\}. \tag{3.40}$$

Теорема 3.14. *Пусть, в условиях теоремы 3.11, функции $y(t)$ и $\widetilde{h}(t,s)$ (по каждой из переменных равномерно относительно другой) удовлетворяют условию Дини–Липшица.*

Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (3.40).

Заметим, что утверждение теоремы 3.14 непосредственно вытекает из теоремы 3.13. Поэтому докажем теорему 3.13. Имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \le \|x^* - P_n x^*\|_\infty + \|P_n x^* - x_n^*\|_\infty \equiv I_1 + I_2. \tag{3.41}$$

Первое слагаемое в (3.41) оценивается просто:

$$I_1 \le 2\|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} E_n(x^*)_\infty = O\{\ln n \cdot E_n(x^*)_\infty\}. \tag{3.42}$$

Оценку второго слагаемого I_2 будем проводить, исходя из уравнений (3.6) и (3.36):

$$I_2 = \|P_n H x^* - P_n H(P_n^s \widetilde{h}) x_n^*\|_\infty = O(\ln n) \cdot \|Hx^* - (P_n^s\widetilde{h})x_n^*\|_\infty. \tag{3.43}$$

Но

$$\|Hx^* - H(P_n^s\widetilde{h})x_n^*\|_\infty \le \|H(\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h})x^*\|_\infty + \|H(P_n^s\widetilde{h})(x^* - x_n^*)\|_\infty \le$$
$$\le \sqrt{\pi}\,\|\widetilde{h} - P_n^s\widetilde{h}\|_{\infty;2,1/\rho}\|x^*\|_{2,\rho} + \|P_n^s\widetilde{h}\|_{\infty;2,1/\rho} \cdot \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho} =$$
$$= O\{E_n^s(\widetilde{h})_\infty + \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho}\}.$$

Последнее соотношение позволяет продолжить оценку (3.43):

$$I_2 = O\{\ln n\, [E_n^s(\widetilde{h})_\infty + \|x^* - x_n^*\|_{2,\rho}]\}. \tag{3.44}$$

Из (3.41), (3.42), (3.44) и теоремы 3.11 вытекает утверждение теоремы 3.13.

Замечания. 1. Если ядро $h(t,s)$ интегрального оператора уравнения (3.1) имеет вид

$$h(t,s) = \frac{h_0(t,s)}{\sqrt{1-s^2}},$$

то все теоремы, касающиеся метода механических квадратур, остаются в силе, причем в оценках вместо $h(t,s)$ и $\widetilde{h}(t,s)$ можно брать функцию $h_0(t,s)$.

2. Аналогичные утверждения можно доказать для метода механических квадратур, построенного на основе квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности, т.е. квадратурной формулы вида

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) z(t)\, dt \approx \sum_{k=0}^{n} A_k z(t_k),$$

где $\{t_k\}_0^n$ – нули многочлена степени n из системы многочленов, ортогональных на $[-1,1]$ с весом $\rho(t)$.

§4. Прямые методы решения интегральных уравнений Вольтерра

В этом параграфе кратко рассматриваются вопросы обоснования полиномиальных прямых методов решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Для определенности рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Kx \equiv x(t) + \int_{-1}^{t} h(t,s)x(s)\,ds = y(t),\ -1 \le t \le 1, \tag{4.1}$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ – известные, а $x(t)$ – искомая функции.

3.1. Метод Галеркина. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде алгебраического многочлена степени n, $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k, \tag{4.2}$$

а его неизвестные коэффициенты определим из условий

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t)[Kx_n(t) - y(t)]\, t^j dt = 0,\ j = \overline{0,n},$$

где $\rho(t)$ – весовая на $[-1,1]$ функция. Эти условия дают СЛАУ $(n+1)$–го порядка относительно $n+1$ коэффициентов c_k полинома (4.2):

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0,n}, \tag{4.3}$$

где

$$\alpha_{kj} = \int_{-1}^{+1} \rho(t)(Kt^k)(t)\, t^j dt,\ y_j = \int_{-1}^{+1} \rho(t)y(t)t^j dt. \tag{4.4}$$

Для вычислительной схемы метода Галеркина (4.1)–(4.4) имеют место следующие результаты.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения:*

1) $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ *или* $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$*;*

2) $y \in L_{2,\rho}(-1,1)$*;*

3) ядро $h(t,s)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \int_{-1}^{t} \frac{1}{\rho(s)} |h(t,s)|^2 ds < \infty.$$

Тогда СЛАУ (4.3)–(4.4) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при всех n, начиная с некоторого натурального n_0. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (4.2) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,n}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (4.1) в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(E_n(x^*)_{2,\rho}), \tag{4.5}$$

где $E_n(z)_{2,\rho}$ – наилучшее среднеквадратическое приближение функции $z \in L_{2,\rho}(-1,1)$ алгебраическими многочленами степени не выше n.

Следствие. Пусть функция $y(t)$ и ядро $h(t,s)$ таковы, что решение $x^* \in W^r H_{2,\rho}^{\gamma}$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда приближенные решения сходятся к точному решению в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1. \tag{4.5$'$}$$

Теорема 4.2. *Пусть $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ или $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ и выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1]$;

2) функция $h(t,s) \in C \times L_{2,1/\rho}$.

Тогда для погрешности приближенных решений в равномерной метрике справедлива следующая порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{\infty} = O\{\ln n\, E_n(x^*)_{\infty}\}. \tag{4.6}$$

Следствие. Пусть функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся равномерно к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (4.6).

Если же функции $y(t)$ и $h(t,s)$ таковы, что решение $x^* \in W^r H_{\gamma}$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, то скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному определяется формулой

$$\|x^* - x_n^*\|_{\infty} = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1. \tag{4.7}$$

4.2. Метод подобластей. На сегменте $[-1,1]$ выберем систему из $n+2$ точек $t_k, k = \overline{0,n+1}$, расположенных в порядке возрастания. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать снова в виде многочлена (4.2), а его неизвестные коэффициенты определим из условий

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \rho(t)[(Kx_n)(t) - y(t)]\,dt = 0,\ j = \overline{0,n}. \tag{4.8}$$

Ясно, что эти условия относительно коэффициентов $\{c_k\}$ представляют СЛАУ вида (3.17), где

$$\alpha_{kj} = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \rho(t)(Kt^k)(t)\,dt,\ y_j = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \rho(t)y(t)\,dt. \tag{4.9}$$

Для вычислительной схемы метода подобластей (4.1), (4.2), (3.17), (4.9) имеют место следующие результаты.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_{2,\rho},\ \rho(t) = \sqrt{1-t^2}$*;*

2) ядро $h(t,s)$ *таково, что порождаемый им интегральный оператор вполне непрерывен в пространстве* $L_{2,\rho}$*;*

3) точки $\{t_j\}$ *определены формулой (3.19).*

Тогда СЛАУ (3.17), (4.9) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$*, хотя бы при всех достаточно больших натуральных* n*. Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле (4.2) при* $c_k = c_k^*$*,* $k = \overline{0,n}$*, сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (4.1) в пространстве* $L_{2,\rho}$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(x^*)_{2,\rho}\}. \tag{4.10}$$

Следствие. Для погрешности приближенных решений в пространстве $L_{2,\rho}$ имеет место соотношение

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(y)_{2,\rho} + E_n(Hx^*)_{2,\rho}\}; \tag{4.10$'$}$$

в частности, если функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_{2,\rho}^{\gamma}$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, то для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1]$*;*

2) ядро $h(t,s)$ *таково, что соответствующий интегральный оператор* $H : L_{2,\rho} \longrightarrow C$ *ограничен, где* $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$*;*

3) точки t_j *заданы формулой (3.19).*

Тогда при всех n*, начиная хоты бы с некоторого натурального* n_0*, СЛАУ (3.17), (4.9) имеет единственное решение* $\{c_k^*\}$*. Для погрешности приближенных решений в пространстве* $C[-1,1]$ *справедлива следующая порядковая оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_{\infty} = O\{\ln n E_n(x^*)_{\infty}\}. \tag{4.11}$$

Следствие. Пусть функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся равномерно к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (4.11). В частности, если y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_{\gamma}$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$, скорость равномерной сходимости приближенных решений к точному определяется формулой

$$\|x^* - x_n^*\|_{\infty} = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}\Big),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

4.3. Метод коллокации. На сегменте $[-1,1]$ выберем систему из $n+1$ точек $t_k, k=\overline{0,n}$. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде многочлена (4.2), а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$[Kx_n - y](t_j) = 0,\ j = \overline{0,n}. \tag{4.12}$$

Условия (4.12) дают СЛАУ $(n+1)$–го порядка вида (3.17), где

$$\alpha_{kj} = (Kt^k)(t_j),\ y_j = y(t_j). \tag{4.13}$$

Для вычислительной схемы метода коллокации (4.1), (4.2), (3.17), (4.13) имеет место

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1]$;

2) ядро $h \in C[-1,1] \times L_{2,1/\rho}$, $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$;

3) точки $\{t_j\}$ заданы одной из формул (3.24).

Тогда СЛАУ (3.17), (4.13) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (4.2) при $c_k = c_k^*$, $k=\overline{0,n}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (4.1) в пространстве $L_{2,\rho}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O\{E_n(x^*)_\infty\}. \tag{4.14}$$

Следствие. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in W^r H_\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_{2,\rho}} = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 4.6. *В условиях теоремы 4.5 приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ в узлах коллокации (3.24) с быстротой*

$$\max_{0 \leq k \leq n} |x^*(t_k) - x_n^*(t_k)| = O(E_n(x^*)_\infty). \tag{4.15}$$

Теорема 4.7. *В условиях теоремы 4.5 для погрешности приближенных решений к точному в пространстве $C[-1,1]$ справедливо порядковое соотношение:*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\ln n\, E_n(x^*)_\infty\}. \tag{4.16}$$

Теорема 4.8. *Пусть, в условиях теоремы 4.5, функции $y(t)$ и $h(t,s)$ (по переменной t) удовлетворяют условию Дини–Липшица.*

Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$, при этом скорость сходимости определяется порядковым соотношением (4.16).

Доказательство теорем 4.1–4.8. Пусть $X = L_{2,\rho}, X_n = I\!\!H_n \subset X$. Уравнение (4.1) запишем в операторной форме

$$Kx \equiv x + Hx = y \quad (x, y \in X) \tag{4.17}$$

Заметим, что в условиях теоремы 4.1 уравнение (4.17) в пространстве $X = L_{2,\rho}(-1,1)$ является уравнением второго рода с вполне непрерывным оператором, и, следовательно, для него имеет место теория Фредгольма. С другой стороны, уравнение Вольтерра всегда имеет единственное решение при любой правой части. Поэтому в пространстве X оператор K уравнения (4.1) непрерывно обратим. Далее, в подпространстве X_n СЛАУ (4.3)–(4.4) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{4.18}$$

где P_n – оператор Фурье n–го порядка по системе многочленов Чебышева первого рода.

Поскольку близость правых частей очевидна (см. также § 3), остается показать близость операторов K и K_n на подпространстве X_n. Обозначив через $\widetilde{h}$ функцию, определенную по формуле

$$\widetilde{h}(t,s) = \begin{cases} h(t,s), & \text{если} \quad s \le t, \\ 0, \quad \text{если} \quad s > t, \end{cases}$$

имеем для любого $x_n \in X_n$

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X^2 = \|Hx_n - P_n H x_n\|_X^2 = \int_{-1}^{+1} \rho(t) \Big| \int_{-1}^{+1} [\widetilde{h}(t,s) - P_n^t \widetilde{h}(t,s)] x_n(s)\, ds \Big|^2 dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{+1} \rho(t) \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\rho(s)} |\widetilde{h}(t,s) - P_n^t \widetilde{h}(t,s)|^2 ds \cdot \int_{-1}^{+1} \rho(s) |x_n(s)|^2 ds\, dt \le$$

$$\le \|x_n\|_{2,\rho} \|\widetilde{h} - P_n^t \widetilde{h}\|_{2;\rho,1/\rho} = E_n^t(\widetilde{h})_{2;\rho,1/\rho} \cdot \|x_n\|_X \le E_n^t(h)_{2;\rho,1/\rho} \cdot \|x_n\|_X .$$

Последнее означает, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \le E_n^t(h)_{2;\rho,1/\rho} \to 0, \; n \to \infty.$$

А тогда из леммы 1 вытекает утверждение теоремы 4.1. Теорема 4.2 следует из свойств оператора Фурье (см. леммы 9 и 10).

Теоремы 4.3 и 4.4 доказываются аналогично, так как оператор метода подобластей, согласно лемме 14, обладает такими же свойствами, что и оператор Фурье в методе Галеркина.

Теоремы 4.5–4.8 могут быть доказаны так же, как и соответствующие теоремы для случая уравнения Фредгольма (см. § 3). Однако следует отметить, что в методе коллокации (точнее, во всех проекционных методах) оператор проектирования на подпространство основного пространства не может быть введен под знак интегрального оператора, как это имело место в случае уравнения Фредгольма. Отсюда следуют и различия в доказательствах. Поэтому остановимся здесь лишь на доказательстве теоремы 4.5.

Покажем, что, в условиях теоремы 4.5, операторы K и K_n уравнений (4.17) и (4.18) близки на подпространстве X_n. С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. С учетом леммы 12 имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X = \|Hx_n - P_n H x_n\| \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n(Hx_n)_\infty. \tag{4.19}$$

По теореме Джексона–Корнейчука (см., напр., в [28]) в пространстве $C[-1,1]$ для наилучших равномерных приближений справедливо неравенство

$$E_n(z)_\infty \leq \omega(z; \pi/(n+1)),\ z \in C[-1,1],$$

где $\omega(z;\delta)$ есть обычный модуль непрерывности функции z с шагом δ. Поэтому из (4.19), используя неравенство Коши–Буняковского, получим неравенство

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X \leq 2\sqrt{\pi}\omega(Hx_n; \pi/(n+1)) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{\pi}\Big\{\omega_t(h; \pi/(n+1))_{\infty;2,1/\rho} + \sup_{\substack{-1\leq t\leq 1-\eta \\ 0<\eta\leq\pi/(n+1)}} \Big[\int\limits_t^{t+\eta} \sqrt{1-s^2}\,|h(t,s)|^2 ds\Big]\Big\} \cdot \|x_n\|_{2,\rho}. \tag{4.20}$$

Так как, по условию теоремы 4.5, функция $h \in C \times L_{2,1/\rho}$, то величина

$$\sup_{\substack{-1\leq t\leq 1-\eta \\ 0<\eta\leq\pi/(n+1)}} \Big[\int\limits_t^{t+\eta} \sqrt{1-s^2}\,|h(t,s)|^2 ds\Big] \to 0,\ n \to \infty.$$

Поэтому из последнего предельного соотношения и неравенства (4.20) вытекает, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \to 0,\ n \to \infty.$$

Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (4.18) и эквивалентная ему СЛАУ (3.17), (4.13) однозначно разрешимы при всех натуральных n, для которых величина $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\|$ меньше 1. Более того, из той же леммы 1 следует, что операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности.

Далее, для правых частей уравнений (4.17) и (4.18) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_{2,\rho} \leq 2\sqrt{\pi}\, E_n(y)_\infty \to 0,\ n \to \infty,$$

что доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X.

Для доказательства оценки (4.14) воспользуемся следствием 2 к лемме 2. Учитывая лемму 12, получим

$$\|x^* - x_n^*\|_{2,\rho} \leq \Big(1 + \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \cdot \|P_n\|_{C \to L_{2,\rho}} \cdot \|H\|_{L_{2,\rho} \to C}\Big)\|x^* - P_n x^*\|_{2,\rho} =$$

$$= O(\|x^* - P_n x^*\|_{2,\rho}) = O(E_n(x^*)_\infty),$$

что и доказывает утверждение теоремы 4.5.

§5. Сплайн–методы решения интегральных уравнений

В этом параграфе вкратце рассмотрим вопросы обоснования сплайновых прямых методов решения интегральных уравнений второго рода. Для определенности рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма на стандартном промежутке $[-1,1]$:

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \ -1 \le t \le 1, \tag{5.1}$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ – известные, а $x(t)$ – искомая функции.

5.1. Метод подобластей. На сегменте $[-1,1]$ выберем равномерную сетку узлов

$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \ k = \overline{0,n}. \tag{5.2}$$

Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде сплайна нулевого порядка на сетке (5.2):

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\psi_k(t), \ \psi_k(t) = s^0_{n,k}(t), \tag{5.3}$$

а его неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} [(Kx_n)(t) - y(t)]\,dt = 0, \ j = \overline{1,n}.$$

Ясно, что эти условия относительно коэффициентов $\{c_k\}$ представляют СЛАУ вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} c_k = y_j, \ j = \overline{1,n}, \tag{5.4}$$

где

$$\alpha_{kj} = \delta_{kj} + \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} h(t,s)\,ds\,dt, \ y_j = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} y(t)\,dt. \tag{5.5}$$

Для вычислительной схемы метода подобластей (5.1), (5.2), (5.4)–(5.5) имеют место следующие результаты.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ $(L_\infty \equiv C)$;

2) ядро $h \in L_p \times L_q$, *где* q *– сопряженное с* p *число;*

3) уравнение (5.1) имеет единственное решение при любой правой части из L_p.

Тогда СЛАУ (5.4)–(5.5) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (5.3) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,n}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (5.1) в пространстве L_p со скоростью, определяемой порядковыми соотношениями:

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_p} = O\{\omega(x^*; 1/n)_p\}; \tag{5.6}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_p} = O\{\omega(y; 1/n)_p + \omega_t(h; 1/n)_{p,q}\}, \tag{5.6}$$

где $\omega(z;\delta)_p$ есть интегральный модуль непрерывности функции $z \in L_p$ с шагом δ, а $\omega_t(h;\delta)_{p,q}$ – частный интегральный модуль непрерывности функции $h(t,s) \in L_p \times L_q$ по переменной t с шагом δ.

Следствие. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in H_p^\gamma$, где $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_p} = O(n^{-\gamma}),\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение пространство $X = L_p$ с нормой

$$\|x\|_p \equiv \|x\|_{L_p} = \left\{\int\limits_{-1}^{+1} |x(t)|^p dt\right\}^{1/p},\ x \in L_p.$$

В этом пространстве уравнение (5.1) запишем в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv x + Hx = y \quad (x, y \in X), \tag{5.7}$$

где оператор H задается формулой

$$(Hx)(t) = \int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds.$$

В условиях теоремы оператор $H : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен, и поэтому оператор K в пространстве X имеет ограниченный обратный.

Запишем теперь систему (5.4)–(5.5) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства X_n сплайнов вида (5.3). Пусть $U_n^0(z;t)$ есть сплайн нулевого порядка, интерполирующий средние значения функции $z \in C[-1,1]$ на частичных промежутках $[t_{k-1}, t_k]$.

Обозначив через $P_n = U_n^0$, нетрудно показать, что СЛАУ (4.4)–(4.5) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{5.8}$$

Используя лемму 19, для правых частей уравнений (5.7) и (5.8) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_p \leq 2^{1/p}\omega(y; 2/n)_p \to 0,\ n \to \infty. \tag{5.9}$$

Покажем теперь близость операторов K и K_n на подпространстве X_n. С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и оценим разность $Kx_n - K_n x_n$. Используя лемму 19 и неравенство Гельдера, последовательно находим

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X = \|Hx_n - P_n H x_n\|_p \le 2^{1/p}\omega(Hx_n; 2/n)_p \le$$

$$\le 2^{1/p}\omega_t(h; 2/n)_{p,q} \cdot \|x_n\|_p,$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \le 2^{1/p}\omega_t(h; 2/n)_{p,q} \to 0,\ n \to \infty.$$

Остается воспользоваться леммой 1, чтобы получить утверждения теоремы 5.1.

Замечание. Утверждения теоремы 5.1 и ее следствия сохраняются, если вычислительная схема метода подобластей строится на произвольной сетке узлов (1.16), удовлетворяющей условию (1.17).

5.2. Метод коллокации. Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде сплайна (5.3) с узлами (5.2), а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$[Kx_n - y](t_j) = 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{5.10}$$

Условия (5.10) дают СЛАУ n–го порядка вида (5.4), где

$$\alpha_{kj} = (K\psi_k)(t_j),\ y_j = y(t_j). \tag{5.11}$$

Для вычислительной схемы метода коллокации (5.1), (5.2), (5.4), (5.11) имеет место

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1, 1]$;

2) ядро $h \in C[-1, 1] \times L_1$;

3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (5.1), имеет лишь нулевое решение.

Тогда СЛАУ (5.4), (5.11) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при всех достаточно больших натуральных n. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (5.3) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{1, n}$, равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (5.1) со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(x^*; 1/n)_\infty\}; \tag{5.12}$$

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(y; 1/n)_\infty + \omega_t(h; 1/n)_{\infty,1}\}. \tag{5.13}$$

Следствие 1. Если $h(t, s) \in C([-1, 1]^2)$, то скорость сходимости может быть охарактеризована порядковым соотношением

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(y; 1/n)_\infty + \omega_t(h; 1/n)_\infty\}.$$

Следствие 2. Пусть функции y и h таковы, что решение $x^* \in H_\gamma$, где $0 < \gamma \le 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O(n^{-\gamma}),\ 0 < \gamma \le 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = M[-1,1]$ ограниченных и измеримых на $[-1,1]$ функций уравнение (5.1) запишем в виде операторного уравнения (5.7), где оператор K, как и в методе подобластей, в пространстве X имеет ограниченный обратный K^{-1}.

Запишем систему (5.4), (5.11) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства X_n функций вида (5.2), и пусть $S_n^0 : X \longrightarrow X_n$ есть оператор сплайн–интерполирования нулевого порядка. Тогда СЛАУ (5.4), (5.11) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению (5.8), где $P_n = S_n^0$.

Покажем однозначную разрешимость уравнения (5.8). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. Учитывая лемму 16, имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X = \|Hx_n - P_n H x_n\| = \|H[h - P_n^T h]x_n\|_M \le$$
$$\le \|x_n\|_M \cdot \|h - P_n^T h\|_{\infty,1} \le \omega_t(h; 2/n)_{\infty,1} \cdot \|x_n\|_M.$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \le \omega_t(h; 2/n)_{\infty,1} \to 0,\ n \to \infty.$$

Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (5.8) и эквивалентная ему СЛАУ (5.4), (5.11) однозначно разрешимы при всех натуральных n, для которых $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\| < 1$. Более того, из той же леммы 1 следует, что операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности.

Далее, для правых частей уравнений (5.7) и (5.8) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_M \le \omega(y; 2/n)_\infty \to 0,\ n \to \infty,$$

что доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O\{\omega(y; 1/n)_\infty + \omega_t(h; 1/n)_{\infty,1}\}.$$

Для доказательства оценки (5.12) воспользуемся следствием 2 к лемме 2. Учитывая лемму 16, получим

$$\|x^* - x_n^*\|_M \le \Big(1 + \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \cdot \|P_n\|_{C \to M} \cdot \|H\|_{C \to C}\Big)\|x^* - P_n x^*\|_M =$$
$$= O(\|x^* - P_n x^*\|_M) = O(\omega(x^*; 1/n)_\infty),$$

что и доказывает утверждение теоремы 5.2.

Будем теперь приближенное решение искать в виде сплайна первого порядка

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t),\ \varphi_k(t) = s_{n,k}^1(t), \tag{5.14}$$

а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$(Kx_n)(t_j) = y(t_j),\ j = \overline{0, n}.$$

Ясно, что эти условия относительно коэффициентов $\{c_k\}$ дают СЛАУ вида

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y(t_j),\ j = \overline{0, n}, \quad \alpha_{kj} = (K\varphi_k)(t_j). \tag{5.15}$$

Теорема 5.3. *В условиях теоремы 5.2 СЛАУ (5.15) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех n, начиная хотя бы с некоторого. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (5.14) при $c_k = c_k^*$, равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{E_n^1(x^*)_\infty\}; \tag{5.16}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{E_n^1(y)_\infty + E_n^{1t}(h)_{\infty,1}\}, \tag{5.17}$$

где $E_n^1(z)_\infty$ есть наилучшее равномерное приближение функции $z(t)$ сплайнами вида (5.14), а $E_n^{1t}(h)_{\infty,1}$ – частное наилучшее приближение функции $h \in C \times L_1$ по переменной t сплайнами вида (5.14).

Следствие. Пусть функции y и h (по переменной t) принадлежат классу Гельдера $W^r H_\gamma$, где $r \geq 0$ – целое, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда скорость сходимости приближенных решений к точному может быть охарактеризована порядковым соотношением

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\gamma}),\ r \geq 0,\ 0 < \gamma \leq 1.$$

Отметим, что доказательство теоремы 5.3 аналогично доказательству теоремы 5.2. Поэтому приведем лишь основные отличия. За основное пространство берется пространство $C[-1,1]$, за подпространство X_n – множество функций вида (5.14), и при доказательстве близости операторов и правых частей уравнений (5.7) и (5.8) используется следствие 2 к лемме 16.

5.3. Метод механических квадратур. Для определенности вычислительную схему метода механических квадратур построим на основе квадратурной формулы правых прямоугольников по узлам (5.2):

$$\int_{-1}^{+1} z(s)\, ds \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} z(t_k),\ z \in C[-1,1]. \tag{5.18}$$

Заменим в левой части уравнения (5.1) интеграл по квадратурной формуле (5.18) и потребуем, чтобы левая и правая части уравнения (5.1) после такой замены совпадали в узлах (5.2). В результате относительно приближенных значений $\{c_k = x_n(s_k)\}$ решения уравнения (5.1) получим следующую СЛАУ:

$$c_j + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} h(t_j, t_k)\, c_k = y(t_j),\ j = \overline{1, n}. \tag{5.19}$$

Если система (5.19) однозначно разрешима, то восстановить решение можно с помощью интерполяционного сплайна нулевого порядка, построенного по узлам (5.2):

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(t). \tag{5.20}$$

Для вычислительной схемы (5.1), (5.20), (5.19) имеет место

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия:*

1) $y \in C[-1,1], h \in C([-1,1]^2)$*;*

2) уравнение, соответствующее уравнению (3.1), имеет лишь нулевое решение.

Тогда СЛАУ (5.19) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$*, хотя бы при всех натуральных* n*, начиная с некоторого. Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле (5.20) при* $c_k = c_k^*$*,* $k = \overline{0,n}$*, сходятся равномерно к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (5.1) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\omega(y;1/n)_\infty + \omega_t(h;1/n)_\infty + \omega_s(h;1/n)_\infty\}. \tag{5.21}$$

Следствие. Пусть функции y и h (по каждой из переменных равномерно относительно другой) принадлежат классу H_γ, где $0 < \gamma \le 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-\gamma}),\ 0 < \gamma \le 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = M[-1,1]$ уравнение (5.1) запишем в виде операторного уравнения (5.7), где

$$(Hx)(t) \equiv (Hhx)(t) = \int_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds,$$

а оператор K, в условиях теоремы 5.4, в пространстве X имеет ограниченный обратный K^{-1}.

Теперь запишем систему (5.19) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространства X_n функций вида (5.3), и пусть $S_n^0 : X \longrightarrow X_n$ есть оператор сплайн–интерполирования нулевого порядка. Тогда СЛАУ (5.19) будет эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H P_n^s(hx_n) = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{5.22}$$

где $P_n = S_n^0$.

Поэтому достаточно показать однозначную разрешимость уравнения (5.22). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. С учетом неравенства треугольника для нормы, имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\| = \|Hx_n - P_n H P_n^s(hx_n)\| \le$$

$$\leq \|Hx_n - P_n H x_n\| + \|P_n H x_n - P_n H P_n^s(hx_n)\| \equiv I_1 + I_2. \tag{5.23}$$

Первое слагаемое в (5.23) оценивается так же, как и в методе коллокации:

$$I_1 = \|H[h - P_n^t h]x_n\|_\infty \leq 2\omega_t(h; 2/n)_\infty \|x_n\|_X. \tag{5.24}$$

Для оценки второго слагаемого I_2 воспользуемся тем фактом, что

$$HP_n^s(hx_n) = H(P_n^s h)x_n.$$

Поэтому для I_2, с учетом леммы 16, последовательно находим

$$I_2 = \|P_n H x_n - P_n H P_n^s(hx_n)\|_\infty \leq \|Hx_n - HP_n^s(hx_n)\|_\infty =$$

$$= \|H(h - P_n^s h)x_n\|_\infty \leq \|h - P_n^s h\|_{\infty,1} \cdot \|x_n\|_\infty \leq 2\omega_s(h; 2/n)_\infty \cdot \|x_n\|_X. \tag{5.25}$$

Из (5.23)–(5.25) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq 2\{\omega_t(h; 2/n)_\infty + \omega_s(h; 2/n)_\infty\} \to 0, \ n \to \infty,$$

что влечет за собой однозначную разрешимость уравнения (5.22), хотя бы для достаточно больших n, а следовательно, и СЛАУ (5.19), при этом $\|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} = O(1), n \to \infty$. Остается заметить, что

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_\infty \leq \omega(y; 2/n)_\infty \to 0, \ n \to \infty,$$

чтобы получить утверждение теоремы и ее следствия.

Замечания. 1. Аналогичные утверждения можно получить для метода механических квадратур, построенного на основе квадратурной формулы трапеций, при этом скорость сходимости может достигать по порядку величины n^{-2}.

2. Сплайн–методы обладают, как хорошо известно, свойством насыщаемости. Поэтому прямые методы, основанные на сплайн–аппроксимации функций, целесообразно применять лишь в случае недостаточной гладкости данных функций $y(t)$ и $h(t, s)$.

3. Для интегрального уравнения Вольтерра второго рода особых трудностей в обосновании сплайн–методов, как правило, не возникает. Тем не менее, следует отметить, что оператор сплайн–проектирования основного пространства X в подпространство X_n здесь по–прежнему нельзя внести под знак интегрального оператора (см., напр., обоснование полиномиального метода коллокации в § 4).

В заключение отметим, что в пособии нами рассмотрены лишь вопросы обоснования прямых методов решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода с достаточно "хорошими"ядрами, в частности, с так называемыми фредгольмовыми ядрами. Тем не менее некоторые теоремы, сформулированные в терминах полной непрерывности интегрального оператора, позволяют получить обоснование соответствующего прямого метода и для некоторых других классов интегральных уравнений (см., напр., соответствующие результаты из [32], касающиеся полной непрерывности интегральных операторов со слабо сингулярными ядрами). Кроме того, мы не рассматривали случай, когда интегральный оператор, задаваемый интегралом в левой части уравнения, не обязательно является вполне непрерывным в рассматриваемом пространстве, но является малым по норме. В связи с этим отметим, что для большинства исследованных нами прямых методов сформулированные выше результаты сохраняются и, более того, усиливаются. В частности, удается доказать однозначную разрешимость соответствующей СЛАУ при любых натуральных n. И, наконец, в пособии мы вообще не затрагивали вопросов устойчивости и обусловленности прямых методов (по этому поводу см., напр., в [9, 11, 12, 2]). Однако заметим, что при выполнении условий леммы 1 из хорошей обусловленности исходного уравнения, как правило, вытекает хорошая обусловленность аппроксимирующих уравнений, а также устойчивость исследуемого прямого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агачев Ю.Р.* Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений/ Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. — Казань, 1987. – 144 с.

2. *Агачев Ю.Р.* Общая теория приближенных методов анализа (учебное пособие) / Ю.Р. Агачев, Р.Т. Валеева. — Казань, Изд–во Казанск. ун–та, 1998. – 48 с.

3. *Алберг Дж.* Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. — М.: Мир, 1972. – 316 с.

4. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. – 407 с.

5. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа / К.И. Бабенко. — М.: Наука, 1986. – 744 с.

6. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

7. *Бахвалов Н.С.* Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. – 632 с.

8. *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. — Киев : Наук. думка, 1986. – 543 с.

9. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г. Габдулхаев. – Казань: Иэд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

10. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений: Дисс... д–ра физ.–мат. наук в форме научного доклада. — Киев, 1985. – 48 с.

11. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I –рода. Численный анализ / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1994. – 288 с.

12. *Габдулхаев Б.Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1995. – 230 с.

13. *Габдулхаев Б.Г.* Один новый полиномиальный оператор и его приложения / Б.Г. Габдулхаев, Л.Б. Ермолаева //Труды междун. конф. по теории приближения функций. — М.: Наука, 1987. – С. 98–100.

14. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций / В.Л. Гончаров. — М.: Гостехиздат, 1954. – 328 с.

15. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций / И.К. Даугавет. — Л.: Изд–во ЛГУ, 1977. – 184 с.

16. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. – 490 с.

17. *Ермолаева Л.Б.* Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро–дифференциальных уравнений методом подобластей: Дисс... канд. физ.–мат. наук. — Казань, 1987. – 154 с.

18. *Завъялов Ю.С.* Методы сплайн–функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. — М.: Наука, 1980. – 352 с.

19. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Том 2 / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. – 538 с.

20. *Иванов В.В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В.В. Иванов. — Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.

21. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика / Л.В. Канторович // Успехи матем. наук. — 1948. – т. 3, вып. 6. – С. 89–185.

22. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

23. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. – 744 с.

24. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. — М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

25. Керге Р.М. *О сходимости и устойчивости метода подобластей:* Автореферат дисс... канд. физ–мат. наук. — Тарту, 1979. – 10 с.

26. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. — М.: Мир, 1969. – 448 с.

27. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1976. – 320 с.

28. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1987. – 424 с.

29. *Крылов В.И.* Вычислительные методы. Т. 1 / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. — М.: Наука, 1976. – 304 с.

30. *Лоран П.–Ж.* Аппроксимация и оптимизация / П.–Ж. Лоран. — М.: Мир, 1975. – 496 с.

31. *Марчук Г.И.* Введение в проекционно–сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. — М.: Наука, 1981. – 416 с.

32. *Михлин С.Г.* Курс математической физики / С.Г. Михлин. — М.: Физматгиз, 1969. – 575 с.

33. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. – 512 с.

34. *Нагих В.В.* Оценка нормы некоторого полиномиального оператора в пространстве непрерывных функций / В.В. Нагих // Методы вычислений. Вып. 10. — Л.: Изд–во ЛГУ, 1976. – С. 99–103.

35. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. — М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

36. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами / С.М. Никольский // Труды МИАН им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1945, Т. 15. – С. 1–58.

37. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций. В 2–х книгах / А.А. Привалов. — Саратов: Изд–во Сарат. ун–та. — Кн. 1, 1990, С. 1–229; кн. 2, 1990, С. 231–422.

38. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — Л.: Изд–во ЛГУ, 1950. – 256 с.

39. *Стечкин С.Б.* Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. — М.: Наука, 1976. – 248 с.

40. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. — М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

41. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. — Минск: Изд–во "Высшая школа 1968. – 328 с.