

Краткое сообщение, представленное Д.Х. Муштари

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

## О ЗАДАЧЕ ХААГЕРУПА О СУБАДДИТИВНЫХ ВЕСАХ НА $W^*$ -АЛГЕБРАХ

*Аннотация.* У. Хаагеруп в 1975 г. поставил следующую задачу: *будет ли каждый нормальный субаддитивный вес на  $W^*$ -алгебре сигма-слабо полунепрерывным снизу?* В этой работе дано положительное решение задачи для случая абелевых  $W^*$ -алгебр и найден общий вид нормальных субаддитивных весов на этих алгебрах.

*Ключевые слова:*  $C^*$ -алгебра,  $W^*$ -алгебра, субаддитивный вес, измеримая функция.

УДК: 517.983 : 517.986

*Abstract.* In year 1975 U. Haagerup posed the following question: *Whether every normal subadditive weight on a  $W^*$ -algebra is sigma-weakly lower semicontinuous?* Here we positively answer this question in a particular case of abelian  $W^*$ -algebras and present a general form of normal subadditive weights on these algebras.

*Keywords:*  $C^*$ -algebra,  $W^*$ -algebra, subadditive weight, measurable function.

### ВВЕДЕНИЕ

Как отмечено в аннотации, в данной работе представлено решение задачи У. Хаагерупа [1] для случая абелевых  $W^*$ -алгебр. Также получено приложение к разложениям сублинейных ожиданий [2] на измеримых функциях. Основные результаты (без доказательств) были анонсированы в [3].

#### 1. СУБАДДИТИВНЫЕ ВЕСА НА $C^*$ -АЛГЕБРЕ

Пусть  $\mathcal{A}$  —  $C^*$ -алгебра,  $\mathcal{A}^+$  — конус неотрицательных элементов  $\mathcal{A}$ . В [1] (см. также [4], замечание 1.6) дано

**Определение 1.1.** *Субаддитивным весом на  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$  называется отображение  $\varphi : \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ , удовлетворяющее условиям*

- (i)  $x \leq y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$  для всех  $x, y \in \mathcal{A}^+$ ,
- (ii)  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$  для всех  $x, y \in \mathcal{A}^+$ ,
- (iii)  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$  для всех  $x \in \mathcal{A}^+$ ,  $\lambda \geq 0$  (при этом  $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$ ).

Множество  $\mathcal{A}$  положительных мер, определенных на  $(\Omega, \mathcal{B})$ , называется *разложением* СО  $\varphi$  ([2], с. 96; ср. с (1)), если

$$\varphi(x) = \sup \left\{ \int_{\Omega} x d\mu : \mu \in \mathcal{A} \right\} \quad \forall x \in \overline{\mathcal{L}}^0(\Omega, \mathcal{B})^+.$$

Напомним, что свойство нормальности субаддитивного веса  $\varphi$  совпадает с 5), если  $W^*$ -алгебра  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -конечна. Оно было применено лишь в лемме 2.1 для сведения общего случая к случаю пространства с  $\sigma$ -конечной мерой. В доказательстве теоремы 3.1 использовалось свойство 5) субаддитивного веса  $\varphi$ . Теперь с учетом вышесказанной возможности перехода к  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \nu)^+$  и того, что сужение каждого функционала  $\omega \in F_\varphi$  на  $\mathcal{B}$  является положительной мерой, из следствия 3.1 вытекает

**Следствие 4.1** ([2], теорема 1). Для любого сублинейного ожидания существует разложение.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Naagerup U. *Normal weights on  $W^*$ -algebras*, J. Funct. Anal. **19** (3), 302–317 (1975).
- [2] Лебедев А.А. *О монотонных сублинейных доминируемых функционалах на пространстве измеримых функций*, Сиб. матем. журн. **33** (6), 94–105 (1992).
- [3] Бикчентаев А.М. *О полуаддитивных весах на  $W^*$ -алгебрах*, Актуальные проблемы математики и механики. Матер. междунар. научн. конф. (Казань, 26.09–01.10.2004). Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского (Казанск. матем. о-во, Казань, 2004), т. 25, с. 45–47.
- [4] Combes F. *Poids sur une  $C^*$ -algèbre*, J. Math. Pures Appl. **47** (1), 57–100 (1968).
- [5] Takesaki M. *Theory of operator algebras* (Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1979), v. 1.
- [6] Kadison R.V. *Strong continuity of operator functions*, Pacific J. Math. **26** (1), 121–129 (1968).
- [7] Grothendieck A. *Espaces vectoriels topologiques* (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1954).
- [8] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения* (Мир, М., 1969).

А.М. Бикчентаев

ведущий научный сотрудник, НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ул. Профессора Нужи́на, д. 1/37, г. Казань, 420008,

e-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

A.M. Bikchentaev

Leading Researcher, Research Institute of Mathematics and Mechanics,  
Kazan (Volga region) Federal University,  
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru