УДК 517.983:517.986

СУЩЕСТВЕННО ОБРАТИМЫЕ ИЗМЕРИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА, И КОММУТАТОРЫ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$. Если эрмитовы операторы $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такие, что $-X \leq Y \leq X$ и Y τ-существенно обратим, то X τ-существенно обратим. Пусть $0 < p \leq 1$. Если p-гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим справа, то A τ-существенно обратим. Если p-гипонормальный оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ обратим справа, то A обратим в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Если гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет правый обратный в $S(\mathscr{M}, \tau)$, то A обратим в $S(\mathscr{M}, \tau)$. Если $A, T \in \mathscr{M}$ и $\mu_t(A^n)^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $t > 0$, то оператор AT (TA) не имеет τ-существенного правого (соответственно левого) обратного в $S(\mathscr{M}, \tau)$. Пусть $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\dim \mathscr{H} = \infty$. Существенно обратимый справа (слева) оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда существенно правый обратный (соответственно левый обратный) является коммутатором.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, существенная обратимость, коммутатор.

Введение

Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$ с $\tau(I) = +\infty$. Эта работа продолжает исследования свойств обратимости и τ-существенно обратимости τ-измеримых операторов, начатые в [1, 2]; коммутаторов τ-измеримых операторов, проведенные в [3, 4], и оператора блочного проектирования $\mathscr{P}_m$, выполненные в [5]. Перечислим полученные результаты. Если эрмитовы операторы $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такие, что $-X \leq Y \leq X$ и Y τ-существенно обратим, то X τ-существенно обратим (теорема 1). Пусть $0 < p \leq 1$. Если p-гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим справа, то A τ-существенно обратим (следствие 5). Если p-гипонормальный оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ обратим справа, то A обратим в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ (теорема 2). Если гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет правый обратный в $S(\mathscr{M}, \tau)$, то A

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2022–882).

обратим в $S(\mathscr{M},\tau)$ (теорема 3). Если $A,T\in\mathscr{M}$ и $\mu_t(A^n)^{\frac{1}{n}}\to 0$ при $n\to\infty$ для каждого $t>0$, то оператор AT (TA) не имеет τ-существенного правого (соответственно левого) обратного в $S(\mathscr{M},\tau)$ (теорема 4). В частности, если $A,T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и оператор A квазинильпотентен, то AT (TA) не имеет существенно правого (соответственно левого) обратного оператора (следствие 12). Пусть $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\dim\mathscr{H}=\infty$. Существенно обратимый справа (слева) оператор $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда существенно правый обратный (соответственно левый обратный) является коммутатором (следствие 14).

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P=P^2=P^*$) в $\mathscr{M}$, I — единица $\mathscr{M}$, $P^{\perp}=I-P$ для $P\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathscr{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathscr{M}$.

Отображение $\varphi:\mathscr{M}^+\to[0,+\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X)=\lambda\varphi(X)$ для всех $X,Y\in\mathscr{M}^+$, $\lambda\geq 0$ (при этом $0\cdot(+\infty)\equiv 0$), и $\varphi(Z^*Z)=\varphi(ZZ^*)$ для всех $Z\in\mathscr{M}$. След φ называется *точным*, если $\varphi(X)>0$ для всех $X\in\mathscr{M}^+$, $X\neq 0$; *полуконечным*, если $\varphi(X)=\sup\{\varphi(Y):Y\in\mathscr{M}^+,\ Y\leq X,\ \varphi(Y)<+\infty\}$ для каждого $X\in\mathscr{M}^+$; *нормальным*, если $X_i\nearrow X$ ($X_i,X\in\mathscr{M}^+$) $\Rightarrow\varphi(X)=\sup\varphi(X_i)$ (см. [6, гл. V, § 2]).

Оператор в $\mathscr{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathscr{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathscr{M}'$ алгебры $\mathscr{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathscr{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathscr{H}$ область определения $\mathscr{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой $P\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathscr{H}\subset\mathscr{D}(X)$ и $\tau(P^{\perp})<\varepsilon$. Множество $S(\mathscr{M},\tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [7, гл. IX]. Для семейства $\mathscr{L}\subset S(\mathscr{M},\tau)$ обозначим через $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathscr{M},\tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X\in S(\mathscr{M},\tau)$ и $X=U|X|$ — полярное разложение X, то $U\in\mathscr{M}$ и $|X|=\sqrt{X^*X}\in S(\mathscr{M},\tau)^+$.

Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X\in S(\mathscr{M},\tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X)\colon(0,\infty)\to[0,\infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X)=\inf\{\|XP\|:P\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P^{\perp})\leq t\},\quad t>0.$$

Множество τ-компактных операторов $S_0(\mathscr{M},\tau)=\{X\in S(\mathscr{M},\tau):\lim\limits_{t\to\infty}\mu_t(X)=0\}$ является идеалом в $S(\mathscr{M},\tau)$. Множество элементарных операторов $\mathscr{F}(\mathscr{M},\tau)=\{X\in\mathscr{M}:\exists s>0\ (\mu_t(X)=0\ \forall t>s)\}$ является идеалом в $\mathscr{M}$.

Лемма 1 [8]. *Пусть $X,Y\in S(\mathscr{M},\tau)$. Тогда*
(i) $\mu_t(X)=\mu_t(|X|)=\mu_t(X^*)$ *для всех* $t>0$;
(ii) $\mu_t(\lambda X)=|\lambda|\mu_t(X)$ *для всех* $\lambda\in\mathbb{C}$ *и* $t>0$;
(iii) *если* $|X|\leq|Y|$, *то* $\mu_t(X)\leq\mu_t(Y)$ *для всех* $t>0$;
(iv) *если* $X\in\mathscr{M}$, *то* $\lim\limits_{t\to+0}\mu_t(X)=\sup\limits_{t>0}\mu_t(X)=\|X\|$;
(v) $\mu_{t+s}(X+Y)\leq\mu_t(X)+\mu_s(Y)$ *для всех* $t,s>0$;

(vi) $\mu_t(|X|^\alpha) = \mu_t(X)^\alpha$ *для всех* $\alpha > 0$ *и* $t > 0$.

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ с $\tau(I) = +\infty$. Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *τ-существенно обратимым справа* (слева), если $I - AB \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ (соответственно $I - BA \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$) для некоторого оператора $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *τ-существенно обратимым*, если существует такой оператор $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$, что $I - AB, I - BA \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ [2]. Для оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ следующие условия эквивалентны: (i) A τ-существенно обратим справа; (ii) A τ-существенно обратим слева; (iii) A τ-существенно обратим [2, следствие 3.10]. Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим тогда и только тогда, когда A одновременно τ-существенно обратим справа и слева [2, теорема 3.9]. Справедливы [9] разложения

$$S(\mathscr{M}, \tau) = S_0(\mathscr{M}, \tau) + \mathscr{M}, \quad S(\mathscr{M}, \tau)^+ = S_0(\mathscr{M}, \tau)^+ + \mathscr{M}^+ \tag{1}$$

(т. е. всякий оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет вид $A = A_1 + A_2$ с $A_1 \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, $A_2 \in \mathscr{M}$). Поэтому τ-существенная обратимость (слева, справа) оператора A равносильна τ-существенной обратимости (соответственно слева, справа) оператора A_2.

Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *p-гипонормальным* для некоторого числа $0 < p \leq 1$, если $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$; *p-когипонормальным*, если A^* p-гипонормален. Каждый p-гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ паранормален [10, теорема 4.4], т. е. $2|A|^2 \leq \lambda^{-1}|A^2|^2 + \lambda I$ для всех $\lambda > 0$. Если паранормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ обладает обратным $A^{-1} \in \mathscr{M}$, то A^{-1} также паранормален [11, п. (iii) теоремы 2]. Если оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален и $(\lambda I + A)^{-1} \in \mathscr{M}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то $(\lambda I + A)^{-1}$ гипонормален [11, предложение 2].

Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *коммутатором*, если $A = XY - YX$ для некоторых $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Операторы $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ *подобны*, если существует обратимый оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с $T^{-1} \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такой, что $A = TBT^{-1}$.

Для $P_k = P_k^2 \in \mathscr{M}$, $k = 1, \ldots, m$, с $P_1 + \cdots + P_m = I$ определим (ср. с [5]) обобщенный оператор блочного проектирования $\mathscr{P}_m : S(\mathscr{M}, \tau) \to S(\mathscr{M}, \tau)$ по формуле

$$\mathscr{P}_m(A) = \sum_{k=1}^{m} P_k A P_k, \quad A \in S(\mathscr{M}, \tau).$$

Если $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathscr{M}, \tau)$, $S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $\mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)$ совпадают с $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, с идеалом $\mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$ компактных (т. е. вполне непрерывных) операторов и с идеалом $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ конечномерных операторов в $\mathscr{H}$ соответственно; τ-существенная обратимость справа (слева) совпадает с классической существенной обратимостью справа (слева), исследованной, например, в [12, § 14]. Имеем $\mu_t(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t)$, $t > 0$, где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s-чисел вполне непрерывного оператора X; χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

2. Основные результаты

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ с $\tau(I) = +\infty$.

Лемма 2. *Если $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и операторы $A_1, \dots, A_n \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратимы справа с τ-существенными правыми обратными $B_1, \dots$, B_n соответственно, то произведение $A_1 \dots A_n$ τ-существенно обратимо справа с τ-существенным правым обратным $B_n \dots B_1$. Обратно, если $A_1, A_2 \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и оператор $A_1 A_2$ τ-существенно обратим справа, то A_1 τ-существенно обратим справа.*

Доказательство. Воспользуемся математической индукцией. Пусть $n = 2$, тогда

$$I - A_1 A_2 \cdot B_2 B_1 = I - A_1 B_1 + A_1(I - A_2 B_2) B_1 \in S_0(\mathscr{M}, \tau).$$

Предположим, что утверждение верно для $n = m$. Тогда для $n = m + 1$ имеем

$$I - A_1 \dots A_n \cdot B_n \dots B_1 = I - A_1 B_1 + A_1(I - A_2 \dots A_n \cdot B_n \dots B_2) B_1 \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$$

в силу предположения индукции для набора операторов $A_2, \dots, A_n$.

Если $A_1, A_2 \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и оператор B является τ-существенным правым обратным для $A_1 A_2$, то $I - A_1 \cdot A_2 B = I - A_1 A_2 \cdot B \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, т. е. оператор $A_2 B$ является τ-существенным правым обратным для A_1. $\square$

В частности, если $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим справа и $A = U|A|$ — полярное разложение, то частичная изометрия U также τ-существенно обратима справа. Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Если оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим справа, то A^n τ-существенно обратим справа для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Обратно, если оператор A^n τ-существенно обратим справа для некоторого $n \geq 2$, то A τ-существенно обратим справа.*

Заметим, что из леммы 3 легко получается новое доказательство предложения 3.15 из [2].

Лемма 4. *Пусть $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ и $0 < p < +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *оператор A τ-существенно обратим;*

(ii) *оператор A^p τ-существенно обратим.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть оператор $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такой, что $I - AB \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$.

Шаг 1. Пусть $0 < p < 1$. Из соотношения

$$I - A^p \cdot A^{1-p} B = I - AB \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$$

следует, что оператор A^p τ-существенно обратим справа. Поэтому A^p τ-существенно обратим в силу [2, следствие 3.10].

Шаг 2. Пусть $1 < p < +\infty$. Если $p \in \mathbb{N}$, то работает лемма 3. Пусть $p \notin \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n - 1 < p < n$. Оператор $X = A^n$ является τ-существенно обратимым справа в силу леммы 3. Поэтому оператор $A^p = X^{p/n}$ является τ-существенно обратимым в силу шага 1, поскольку $0 < \frac{p}{n} < 1$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Для оператора $Y = A^p$ имеем $A = Y^{1/p}$ и применяем импликацию (i)$\Rightarrow$(ii) для пары операторов X, $X^{1/p}$. $\square$

Теорема 1. *Пусть операторы $X \in S(\mathscr{M},\tau)^+$, $Y \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ такие, что*

$$-X \leq Y \leq X. \tag{2}$$

Если Y τ-существенно обратим, то и X τ-существенно обратим.

Доказательство. Пусть оператор $Z \in S(\mathscr{M},\tau)$ такой, что $I - YZ \in S_0(\mathscr{M},\tau)$. Из (2) и п. (i) следствия 3.15 в [13] получаем, что

$$Y = X^{1/2}TX^{1/2} \tag{3}$$

для некоторого оператора $T \in \mathscr{M}^{\mathrm{h}}$ с $\|T\| \leq 1$. Тогда

$$I - X^{1/2} \cdot TX^{1/2}Z = I - YZ \in S_0(\mathscr{M},\tau)$$

и оператор $X^{1/2}$ является τ-существенно обратимым справа. В силу леммы 3 оператор $X = (X^{1/2})^2$ также τ-существенно обратим справа. Поэтому оператор X τ-существенно обратим в силу [2, следствие 3.10]. $\square$

Замечание 1. Если операторы $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+$ и $Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{h}}$ удовлетворяют условию (2) и Y обратим, то и X обратим [14, следствие 2]. Из представления (3) и п. (ii) леммы 3.5 в [15] получаем новое доказательство этого факта.

Следствие 1. *Множество* $\{X \in S(\mathscr{M},\tau)^+ : X$ τ-существенно обратим$\}$ *является подконусом в конусе $S(\mathscr{M},\tau)^+$.*

Следствие 2. *Для оператора $X \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *X τ-существенно обратим;*

(ii) *$|X|$ τ-существенно обратим.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Следует из неравенства $-|X| \leq X \leq |X|$ и теоремы 1.

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть оператор $Z \in S(\mathscr{M},\tau)$ такой, что $I - |X|Z \in S_0(\mathscr{M},\tau)$. Пусть $X = X_+ - X_-$ — разложение Жордана на положительную и отрицательную части с $X_+X_- = 0$ и $|X| = X_+ + X_-$. Пусть проектор $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — носитель оператора X_+. Для $U = P - P^{\perp}$ имеем $U^2 = I$, $U|X| = X$ и

$$U(I - |X|Z)U = I - X \cdot ZU \in S_0(\mathscr{M},\tau),$$

т. е. оператор X τ-существенно обратим. $\square$

Следствие 3. *Пусть $A, B \in S(\mathscr{M},\tau)$ и $X_1 = A^*A + B^*B$, $Y_1 = A^*B + B^*A$; для $A \geq 0$ пусть $X_2 = A + BAB^*$, $Y_2 = AB^* + BA$; для $A, B \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ и $0 \leq t \leq 1$ пусть $X_3 = A^2 + B^2$, $Y_3 = t^{1/2}A + (1-t)^{1/2}B$; для $A, B \geq 0$ пусть $X_4 = A + B$, $Y_4 = A - B$. Если Y_k τ-существенно обратим, то и X_k τ-существенно обратим, $k = 1, 2, 3, 4$.*

Доказательство. Для $k = 1$ утверждение вытекает из неравенств

$$(A \pm B)^*(A \pm B) \geq 0$$

и теоремы 1. Для $k = 2$ утверждение следует из неравенств

$$(A^{1/2} \pm BA^{1/2})^*(A^{1/2} \pm BA^{1/2}) \geq 0$$

и теоремы 1. Для $k = 3$ утверждение получаем из неравенства

$$|t^{1/2}A + (1-t)^{1/2}B| \leq (A^2 + B^2)^{1/2}$$

(см. доказательство предложения 3.5 в [13]), следствия 2 и теоремы 1. $\square$

Следствие 4. *Пусть операторы $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X \in \mathscr{M}$ с $\|X\| \leq 1$. Если оператор XA^pX^* τ-существенно обратим для некоторого $0 < p \leq 1$, то оператор XAX^* τ-существенно обратим.*

Доказательство. Поскольку функция $f(t) = t^p$ $(0 < p \leq 1)$ операторно монотонна на полуоси $[0, +\infty)$, имеем $XA^pX^* \leq (XAX^*)^p$ в силу неравенства Хансена, доказанного в [16] для ограниченных операторов, но без труда обобщающегося на τ-измеримые операторы. Поэтому оператор $(XAX^*)^p$ τ-существенно обратим в силу теоремы 1. Следовательно, оператор XAX^* τ-существенно обратим в силу леммы 4. $\square$

Следствие 5. *Если p-гипонормальный для некоторого числа $0 < p \leq 1$ оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим справа, то A τ-существенно обратим.*

Доказательство. Оператор $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим справа тогда и только тогда, когда оператор XX^* τ-существенно обратим [2, следствие 3.3]. Поэтому оператор AA^* τ-существенно обратим. В силу леммы 4 оператор $(AA^*)^p$ τ-существенно обратим. Поскольку $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$, оператор $(A^*A)^p$ τ-существенно обратим в силу теоремы 1. Теперь в силу леммы 4 оператор A^*A τ-существенно обратим. Поэтому оператор A τ-существенно обратим слева в силу [2, теорема 3.2]. Следовательно, оператор A τ-существенно обратим в силу [2, теорема 3.9]. $\square$

Переходя к сопряженным операторам, получаем

Следствие 6. *Если p-когипонормальный для некоторого числа $0 < p \leq 1$ оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ τ-существенно обратим слева, то A τ-существенно обратим.*

Следствие 7. *Для нормального оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ следующие условия эквивалентны:*
(i) *A τ-существенно обратим слева;*
(ii) *A τ-существенно обратим справа;*
(iii) *A τ-существенно обратим.*

Предложение 1. *Пусть $A = U|A|$ — полярное разложение оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Тогда $(I - UU^*)(I - AB) = I - UU^*$ для всех $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Напомним, что $UU^*U = U$. $\square$

Следствие 8. *Пусть $A = U|A|$ — полярное разложение оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Если A τ-существенно обратим справа, то $I - UU^* \in \mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)$.*

Следствие 9. *Пусть проектор $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — носитель τ-существенно обратимого оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$. Тогда $P^{\perp} \in \mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)$.*

Теорема 2. *Если p-гипонормальный для некоторого числа $0 < p \leq 1$ оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеет правый обратный в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, то A обратим в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.*

Доказательство. Для каждого ненулевого оператора $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ положим $X_1 = X/\|X\|$. Тогда в силу неравенства Хансена [16] имеем

$$X^*(AA^*)^pX \leq X^*(A^*A)^pX = \|X\|^2X_1^*(A^*A)^pX_1 \leq \|X\|^2(X_1^*A^*AX_1)^p.$$

Поэтому если $AX = 0$ $(\Leftrightarrow AX_1 = 0)$, то $(A^*A)^{p/2}X = 0$ и

$$AA^*X = (AA^*)^{1-p/2}(AA^*)^{p/2}X = 0.$$

Следовательно, $X^* \cdot AA^*X = |A^*X|^2 = 0$ и $A^*X = 0$.

Предположим, что $AB = I$ для некоторого оператора $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Тогда $A(BA-I) = (AB-I)A = 0$, тем самым $A^*(BA-I) = 0$ (полагаем $X = BA-I$) и в силу равенства $B^*A^* = I$ получаем

$$BA - I = B^*A^*(BA - I) = 0. \tag{4}$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 10. *Если p-когипонормальный для некоторого числа $0 < p \leq 1$ оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеет левый обратный в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, то A обратим в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.*

Теорема 3. *Если гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет правый обратный в $S(\mathscr{M}, \tau)$, то A обратим в $S(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Для каждого оператора $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеем

$$|A^*X|^2 = X^*AA^*X \leq X^*A^*AX \leq X^*A^*AX = |AX|^2.$$

Поэтому если $AX = 0$, то $A^*X = 0$.

Предположим, что $AB = I$ для некоторого оператора $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Тогда $A(BA-I) = (AB-I)A = 0$ и $A^*(BA-I) = 0$ (полагаем $X = BA-I$) и выполнено равенство (4). $\square$

Следствие 11. *Если когипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет левый обратный в $S(\mathscr{M}, \tau)$, то A обратим в $S(\mathscr{M}, \tau)$.*

Замечание 2. (i) Если $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $AB = I + X$ для некоторого оператора $X \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, то $BA = (BA)^2 + Y$ для некоторого оператора $Y \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Действительно, имеем $B(AB - I) = (BA - I)B \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $(BA - I)BA \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Если $\tau(I) = +\infty$, то $BA \notin S_0(\mathscr{M}, \tau)$: если предположить, что $BA \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, то $A \cdot BA \cdot B = (AB)^2 = I + 2X + X^2 \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$; противоречие.

(ii) Если $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $AB = I$, то $BA = (BA)^2$, т. е. оператор BA является идемпотентом. Если $\tau(I) = +\infty$, то $BA \notin S_0(\mathscr{M}, \tau)$.

Лемма 5. *Пусть $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и число $x > 0$ такие, что $\mu_t(X) \geq x$ для всех $t > 0$. Тогда для каждого $Y \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ имеем $\mu_t(X + Y) \geq x$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторых чисел $s > 0$, $\varepsilon > 0$ выполнены следующие неравенства: $\mu_s(X + Y) \leq x - 2\varepsilon$, $\mu_s(Y) < \varepsilon$. Тогда в силу пп. (v) и (ii) леммы 1 имеем

$$x \leq \mu_{2s}(X) = \mu_{2s}((X + Y) - Y) \leq \mu_s(X + Y) + \mu_s(Y) < x - \varepsilon;$$

противоречие. $\square$

Теорема 4. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$, $A, T \in \mathscr{M}$ и $\mu_t(A^n)^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $t > 0$. Тогда оператор AT (TA) не имеет τ-существенного правого (соответственно, левого) обратного в $S(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что оператор AT (TA) не имеет τ-существенного правого (соответственно левого) обратного в $\mathscr{M}$, см. разложение (1).

Шаг 1. Предположим, что оператор AT имеет τ-существенно правый обратный в $\mathscr{M}$, т. е. существует оператор $X \in \mathscr{M}$ такой, что $AT \cdot X = I + K$ с $K \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Тогда

$$ATX \cdot X^*T^*A^* = I + K_1 \geq 0, \tag{5}$$

где $K_1 = KK^* + K + K^* \in S_0(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$. Ясно, что

$$TXX^*T^* = |X^*T^*|^2 \leq \|X^*T^*\|^2 \cdot I = \|TX\|^2 \cdot I. \tag{6}$$

Из (5), (6) имеем

$$\|TX\|^2 \cdot AA^* \geq I + K_1 \geq 0. \tag{7}$$

Умножив обе части неравенства (7) слева на оператор A и справа на оператор A^*, с учетом (7) получаем

$$\|TX\|^2 \cdot A^2A^{*2} \geq AA^* + AK_1A^* \geq \|TX\|^{-2} \cdot I + \|TX\|^{-2}K_1 + AK_1A^*,$$

т. е. $\|TX\|^4 \cdot A^2A^{*2} \geq I + K_2$ с $K_2 = K_1 + \|TX\|^2 \cdot AK_1A^* \in S_0(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$. Продолжая такой процесс, по индукции получаем

$$\|TX\|^{2n} \cdot A^nA^{*n} \geq I + K_n, \tag{8}$$

где $K_n = K_{n-1} + \|TX\|^2 \cdot AK_{n-1}A^* \in S_0(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ для $n = 2, 3, \dots$. Поскольку $K_n \geq -|K_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, из (7) и (8) имеем $\|TX\|^{2n} \cdot A^nA^{*n} + |K_n| \geq I$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из п. (iii) леммы 1 следует, что

$$\mu_t(\|TX\|^{2n} \cdot A^nA^{*n} + |K_n|) \geq \mu_t(I) = 1 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},\ t > 0.$$

Применив лемму 5 с $X = \|TX\|^{2n} \cdot A^nA^{*n} + |K_n|$, $Y = -|K_n|$ и $x = 1$, получаем неравенства

$$\mu_t(\|TX\|^{2n} \cdot A^nA^{*n}) \geq 1 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},\ t > 0.$$

В силу пп. (i), (ii) и (vi) леммы 1 имеем $\|TX\|^{2n}\mu_t(A^n)^2 \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$. Следовательно, $\mu_t(A^n)^2 \geq \|TX\|^{-2n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$. Ввиду монотонности вещественной функции $\lambda \mapsto \lambda^{\frac{1}{2n}}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, получаем $\mu_t(A^n)^{\frac{1}{2n}} \geq \|TX\|^{-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$; противоречие.

Шаг 2. Предположим, что оператор AT имеет τ-существенно левый обратный в $\mathscr{M}$, т. е. существует оператор $X \in \mathscr{M}$ такой, что $X \cdot TA = I + K$ с $K \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Переходя к сопряженным операторам, получаем, что $A^*T^* \cdot X^* = I + K^*$ с $K \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Заметим, что в силу п. (i) леммы 1 $\mu_t(A^{*n})^{\frac{1}{n}} = \mu_t(A^{n*})^{\frac{1}{n}} = \mu_t(A^n)^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $t > 0$. Ввиду шага 1 снова получаем противоречие. Теорема доказана. $\square$

Следствие 12. *Пусть $A, T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и оператор A квазинильпотентен. Тогда оператор AT (TA) не имеет существенно правого* (*соответственно левого*) *обратного оператора.*

Доказательство. Известно, что оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ квазинильпотентен тогда и только тогда, когда $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$ (см., например, [17]). Для каждого оператора $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеем (напомним, что $\tau = \mathrm{tr}$)

$$\|B\| = s_1(B) = \mu_t(B) \quad \text{при } t \in (0, 1),$$

поэтому для $t \in (0, 1)$ выполнено $\mu_t(A^n)^{\frac{1}{n}} = \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Замечание 3. Напомним [17, с. 208], что в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ оператор интегрирования

$$(Jf)(s) = \int\limits_0^s f(t)\,dt$$

не нильпотентен, но квазинильпотентен.

Замечание 4. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$. Если оператор $A \in \mathscr{M}$ квазинильпотентен, то в силу п. (iv) леммы 1 для каждого $t > 0$ имеем $\mu_t(A^n)^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Предложение 2. *Если операторы $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ подобны, то A τ-существенно обратим слева (τ-существенно обратим справа; τ-существенно обратим) тогда и только тогда, когда B τ-существенно обратим слева (соответственно τ-существенно обратим справа, τ-существенно обратим).*

Доказательство. Пусть A τ-существенно обратим слева, т. е. $I - XA \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ для некоторого $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Имеем

$$I - T^{-1}XT \cdot B = T^{-1}(I - X \cdot TBT^{-1})T \in S_0(\mathscr{M}, \tau).$$

Остальное очевидно. $\square$

Теорема 5. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ с $\tau(I) = +\infty$. Пусть оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет правый (левый) τ-существенно обратный оператор $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$, т. е. $I - AB \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ (соответственно $I - BA \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$). Если $A = \lambda I + X$ с некоторыми $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $X \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, то $B = \lambda^{-1}I + Y$ с некоторым $Y \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Пусть $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ — правый τ-существенно обратный оператор для $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Имеем

$$Z = I - AB = I - \lambda B - XB \in S_0(\mathscr{M}, \tau),$$

откуда получаем $\lambda B = I - XB - Z$, т. е. $B = \lambda^{-1}I - \lambda^{-1}(XB + Z) = \lambda^{-1}I + Y$. Очевидно, $Y = -\lambda^{-1}(XB + Z) \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, поскольку $X, Z \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. $\square$

Следствие 13. *Пусть $\dim \mathscr{H} = \infty$, оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеет правый (левый) существенно обратный оператор $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и является суммой вполне непрерывного и ненулевого скалярного операторов. Тогда оператор B не может быть коммутатором.*

Доказательство. Сумма вполне непрерывного и ненулевого скалярного операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве не может быть коммутатором [18, гл. 19, следствие к задаче 182]. $\square$

Следствие 14. *Пусть $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\dim \mathscr{H} = \infty$. Существенно обратимый справа (слева) оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда существенно правый обратный A_r^{-1} (соответственно левый обратный A_l^{-1}) является коммутатором.*

Доказательство. Если $\mathscr{H}$ сепарабельно и бесконечномерно, то оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда он не представим в виде суммы ненулевого скалярного и вполне непрерывного операторов (см. [18, гл. 19, задача 182]). Пусть $A, A_r^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $Z = I - AA_r^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$.

Пусть $A = \lambda I + X$ с некоторыми $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператором $X \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$. Тогда $I - (\lambda I + X)A_r^{-1} = Z$ и $A_r^{-1} = \lambda^{-1}I + Y$ с оператором $Y = -\lambda^{-1}(Z + XA_r^{-1}) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$.

Пусть $A_r^{-1} = \lambda I + X$ с некоторыми $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператором $X \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$. Тогда $I - A(\lambda I + X) = Z$ и $A = \lambda^{-1}I + Y$ с оператором $Y = -\lambda^{-1}(Z + AX) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$. Остальное очевидно. $\square$

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\dim \mathscr{H} = \infty$, $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Если $\mathscr{P}_m(A)$ является коммутатором, то A является коммутатором.*

Доказательство. Пусть оператор $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ не является коммутатором, т. е. $B = \lambda I + X$ с некоторыми $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $X \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$. Тогда $\mathscr{P}_m(B) = \lambda I + Y$ с $Y = \sum\limits_{k=1}^{m} P_k X P_k \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$, т. е. $\mathscr{P}_m(B)$ не является коммутатором. $\square$

Предложение 4. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ с $\tau(I) = +\infty$. Оператор вида $\lambda I + X$ с $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $X \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ не может быть коммутатором операторов $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с $B = C + Y$, где $C^2 = C \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $Y \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Пусть, напротив, найдутся такие $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $X \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с $B = C + Y$, где $C^2 = C$ и $Y \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$, что

$$\lambda I + X = AB - BA.$$

Умножив обе части этого равенства слева и справа на идемпотент $C \in S(\mathscr{M}, \tau)$, получаем $\lambda C + CXC = CAYC - CYAC$. Поскольку $X, Y \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $\lambda \neq 0$, имеем $C \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Следовательно, $B \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $\lambda I + X \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$; противоречие. $\square$

Для матрицы $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ следующие условия эквивалентны:
(i) X унитарно эквивалентна матрице с нулевой диагональю;
(ii) $\mathrm{tr}(X) = 0$;
(iii) X есть коммутатор;
(iv) $\mathrm{tr}(|I + zX|) \geq n$ для всех $z \in \mathbb{C}$;
(v) $\mathscr{P}_m(X)$ является коммутатором.

Доказательство эквивалентности (i)⇔(ii) см. в [19, гл. II, задача 209], эквивалентности (ii)⇔(iii) — в [18, гл. 19, задача 182], (ii)⇔(iv) — в [20, теорема 4.8]. Эквивалентность (ii)⇔(v) следует из равенства $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(\mathscr{P}_m(X))$ для всех $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ и $m \leq n$ (см. лемму 1 в [21]). Известна формула Якоби $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$ для всех матриц $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ [22, теорема 2.12]. Поэтому если $\mathrm{tr}(X) = 0$, то $\det(e^X) = 1$.

Теорема 6. *Для обратимого коммутатора $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ со спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ обратная матрица A^{-1} является коммутатором тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_n^{-1} = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Утверждение следует из эквивалентности (i)⇔(iii) и совпадения спектрального следа с матричным следом [19, гл. II, теорема 201]. В частности, обратимая матрица $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда A^{-1} является коммутатором. $\square$

Следствие 15. *Для обратимого коммутатора $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ обратная матрица A^{-1} является коммутатором тогда и только тогда, когда ее спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ состоит из кубических корней числа* $\det(A)$.

Доказательство. Необходимость. Имеем (9) для $n = 3$. Умножив обе части равенства $\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} = 0$ на число $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, получаем $\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 = 0$. Отсюда с учетом равенства $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = 0$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0. \tag{10}$$

Из системы

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3, \\ \lambda_1^2 = -\lambda_2^2 - \lambda_3^2 \end{cases}$$

имеем $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = -\lambda_2^2 - \lambda_3^2$, т. е. $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3 = 0$. Из (10) следует, что $\lambda_1^2 = \lambda_2\lambda_3$. В силу симметрии $\lambda_2^2 = \lambda_1\lambda_3$, $\lambda_3^2 = \lambda_1\lambda_2$. Из равенств

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$

получаем $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3$.

Достаточность. Пусть матрица $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ имеет спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, состоящий из кубических корней числа $\det(A) \neq 0$. Тогда $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ и A является коммутатором. Спектр $\sigma(A^{-1}) = \left\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}\right\}$ состоит из кубических корней числа $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. Поэтому $\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} = 0$ и A^{-1} является коммутатором. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tembo I. D.* Invertibility in the algebra of τ-measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications. Basel: Birkhäuser Verl., 2010. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195. P. 245–256.

2. *Bikchentaev A. M.* On τ-essentially invertibility of τ-measurable operators // Internat. J. Theor. Phys. 2021. V. 60, N 2. P. 567–575.

3. *Caspers M., Potapov D., Sukochev F., Zanin D.* Weak type commutator and Lipschitz estimates: resolution of the Nazarov–Peller conjecture // Amer. J. Math. 2019. V. 141, N 3. P. 593–610.

4. *Бер А. Ф., Кудайбергенов К. К., Сукочев Ф. А.* Дифференцирования на алгебрах Мюррея — фон Неймана // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 5. С. 183–184.

5. *Bikchentaev A., Sukochev F.* Inequalities for the block projection operators // J. Funct. Anal. 2021. V. 280, N 7. Article 108851. 18 pp.

6. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5. Berlin: Springer-Verl., 2002.

7. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125. Operator algebras and non-commutative geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.

8. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.

9. *Stroh A., West G. P.* τ-Compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1993. V. 93, N 1. P. 73–86.

10. *Bikchentaev A.* Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra. II // Positivity. 2020. V. 24, N 5. P. 1487–1501.

11. *Бикчентаев А. М.* Два класса τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Изв. вузов. Математика. 2017. № 1. С. 86–91.

12. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.

13. *Bikchentaev A., Sukochev F.* When weak and local measure convergence implies norm convergence // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 1414–1431.

14. *Бикчентаев А. М.* Об одной лемме Ф. А. Березина // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 796–800.

15. *Бикчентаев А. М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^*-алгебрах // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 4. С. 3–20.

16. *Hansen F. An operator inequality* // Math. Ann. 1980. V. 246, N 3. P. 249–250.

17. *Любич Ю. И.* Линейный функциональный анализ // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 19. С. 5–316. (Итоги науки и техники).

18. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

19. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969.

20. *Бикчентаев А. М.* О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 73–82.

21. *Бикчентаев А. М. Неравенства для определителей и характеризация следа* // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 314–321.

22. *Hall B.* Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction. Second ed.. Cham: Springer, 2015. (Graduate Texts Math.; V. 222).

Поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.
После доработки 8 февраля 2022 г.
Принята к публикации 10 февраля 2022 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID ?) **?!**
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru