О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЦИОНАЛИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

Фазлеева Эльмира Илдаровна, к.п.н., доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет
elmira.fazleeva@mail.ru

Очевидно, что одно и то же неравенство можно решить несколькими способами. Удачно выбранным способом или, как мы привыкли говорить, рациональным способом любое неравенство решится быстро и легко, решение его получится красивым и интересным. В данной статье хочется более подробно рассмотреть так называемый метод рационализации при решении логарифмических и показательных неравенств, а также неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей, **метод замены функций**, правило знаков) заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при котором неравенство $\boldsymbol{G(x)} \vee \mathbf{0}$ равносильно неравенству $\boldsymbol{F(x)} \vee \mathbf{0}$ в области определения выражения $F(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h – выражения с переменной x, a – фиксированное число ($a > 0$; $a \neq 1$).

№	Выражение F	Выражение G
(1.1) (1.2) (1.3)	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$ (где $f > 0$; $g > 0$)	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
(2.1) (2.2) (2.3)	$log_h f - log_h g$ $log_h f - 1$ $log_h f$ (где $h > 0$; $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$)	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
(3)	$log_f h - log_g h$ (где $h > 0$; $f > 0$; $g > 0$; $f \neq 1$, $g \neq 1$)	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
(4.1) (4.2)	$h^f - h^g$ $h^f - 1$ (где $h > 0$; $h \neq 1$)	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
(5)	$f^h - g^h$ (где $f > 0$; $g > 0$; $f \neq 1$, $g \neq 1$)	$(f-g)h$
(6)	$\|f\| - \|g\|$	$(f-g)(f+g)$
(7)	$\sqrt{f} - \sqrt{g}$ (где $f \geq 0$, $g \geq 0$)	$f - g$

Докажем, например, что выражение $log_h f - log_h g$ при всех допустимых значениях неизвестного выражений h, f, g (т.е. при условии $h > 0$; $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$) равносильно выражению $(h-1)(f-g)$. Пусть нам требуется решить неравенство $log_h f - log_h g > 0$. (*)

В своей области определения это неравенство равносильно совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h > 1, \\ f > g; \end{cases} \\ \begin{cases} h < 1, \\ f < g. \end{cases} \end{array}\right.$

Каждая система полученной совокупности равносильна неравенству $(h-1)(f-g)>0$. Следовательно, исходное неравенство (*) равносильно системе неравенств: $\begin{cases} h>0, \\ h\neq 1, \\ f>0, \\ g>0, \\ (h-1)(f-g)>0. \end{cases}$

Аналогично можно доказать, что неравенство $log_h f - log_h g < 0$ равносильно системе неравенств: $\begin{cases} h>0, \\ h\neq 1, \\ f>0, \\ g>0, \\ (h-1)(f-g)<0. \end{cases}$

Таким образом, формула (2.1) доказана. По аналогии можно доказать справедливость формул (1.1) – (1.3), (2.2), (2.3), (4.1) и (4.2).

Докажем теперь справедливость формулы (3). Рассмотрим неравенство $log_f h - log_g h > 0$.

В своей области определения это неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{log_h f} > \frac{1}{log_h g}$ (осуществлен переход к новому основанию h). В свою очередь, преобразовав полученное неравенство, имеем $\frac{log_h g - log_h f}{log_h f \cdot log_h g} > 0$, которое при всех допустимых значениях неизвестного равносильно совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} log_h g - log_h f > 0, \\ log_h f \cdot log_h g > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} log_h g - log_h f < 0, \\ log_h f \cdot log_h g < 0. \end{cases} \end{array}\right.$ $(**)$

Из первой системы совокупности $(**)$ имеем:

$$\begin{cases} (h-1)(g-f)>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (h-1)(f-1)>0, \\ (h-1)(g-1)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} (h-1)(f-1)<0, \\ (h-1)(g-1)<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (h-1)(g-f)>0, \\ \left[\begin{array}{l} (h-1)^2(f-1)(g-1)>0, \\ (h-1)^2(f-1)(g-1)>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (h-1)(g-f)>0, \\ (f-1)(g-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (f-1)(g-1)(h-1)(g-f)>0.$$

Из второй системы совокупности $(**)$ имеем:

$$\begin{cases} (h-1)(g-f)<0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (h-1)(f-1)<0, \\ (h-1)(g-1)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} (h-1)(f-1)>0, \\ (h-1)(g-1)<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (h-1)(g-f)<0, \\ \left[\begin{array}{l} (h-1)^2(f-1)(g-1)<0, \\ (h-1)^2(f-1)(g-1)<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (h-1)(g-f)<0, \\ (f-1)(g-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (f-1)(g-1)(h-1)(g-f)>0.$$

Таким образом, выражение $log_f h - log_g h$при всех допустимых значениях неизвестного равносильно выражению $(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$. Аналогично доказывается истинность формулы (5).

Для доказательства справедливости формулы (6) решим неравенство $|f|-|g|>0$, которого можно переписать следующим образом: $|f|>|g|$. После возведения обеих частей этого неравенства в квадрат, получим цепочку равносильных друг другу неравенств:

$f^2>g^2 \Leftrightarrow (f-g)(f+g)>0$. Таким образом, левую часть исходного неравенства можно заменить равносильным выражением $(f-g)(f+g)$. Аналогично доказывается формула (7).

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решить неравенство $log_{2x+3}x^2<1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $log_{2x+3}x^2-1<0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases}(2x+2)(x^2-2x-3)<0,\\ 2x+3>0,\\ 2x+3\neq 1,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2(x-3)<0,\\ x>-1{,}5,\\ x\neq -1,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

Решением последней системы является $(-1{,}5;\ -1)\cup(-1;\ \ 0)\cup(0;\ \ 3)$.

Ответ: $(-1{,}5;\ -1)\cup(-1;\ \ 0)\cup(0;\ \ 3)$.

Пример 2. Решить неравенство $log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\leq 2$.

Решение. Запишем неравенство в виде $log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)-log_{|x+2|}(x+2)^2\leq 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases}(|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4)\leq 0,\\ 4+7x-2x^2>0,\\ x+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2-1)(x+2+1)(-3x^2+3x)\leq 0,\\ (x+0{,}5)(x-4)<0,\\ x\neq -2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x+3)x(x-1)\geq 0,\\ (x+0{,}5)(x-4)<0,\\ x\neq -2\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-0{,}5;0]\cup[1;4).$$

Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$.

Пример 3. Решить неравенство $log_{\frac{x}{3}}\left(log_x\sqrt{3-x}\right)\geq 0$.

Решение. Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)\left(log_x\sqrt{3-x}-1\right)\geq 0,\\ log_x\sqrt{3-x}>0,\\ 3-x>0,\\ x>0,\\ x\neq 3,\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)\left(\sqrt{3-x}-x\right)\geq 0,\\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right)>0,\\ x<3,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(3-x-x^2)\leq 0,\\ (x-1)(3-x-1)>0,\\ x<3,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\geq 0,\\ 1<x<2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2}\leq x<2.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

Пример 4. Решить неравенство $log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geq log_{2x^2-5x+3}(3-x)$.

Решение. Запишем неравенство в виде $log_{12x^2-41x+35}(3-x) - log_{2x^2-5x+3}(3-x) \geq 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases} (12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36x-32) \geq 0, \\ 12x^2-41x+35 > 0, \\ 2x^2-5x+3 > 0, \\ 12x^2-41x+34 \neq 0, \\ 2x^2-5x+2 \neq 0, \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right) > 0, \\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0, \\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2) \neq 0, \\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \neq 0, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};2\right) \cup (2;3).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};2\right) \cup (2;3)$.

Пример 5. Решить неравенство $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} - 1 > 0$. Используя формулу (4.2), получим равносильное неравенство $(4x^2+2x)(x^2-x) > 0$, решением которого является $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (1;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (1;\ +\infty)$.

Можно выделить и доказать также некоторые следствия приведенных в таблице формул:

- $log_h f \cdot log_p q \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (h-1)(f-1)(p-1)(q-1) \vee 0, \\ h > 0, \\ h \neq 1, \\ f > 0, \\ p > 0, \\ p \neq 1, \\ q > 0. \end{cases}$ (8)

- $log_h f + log_h g \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg-1)(h-1) \vee 0, \\ h > 0, \\ h \neq 1, \\ f > 0, \\ g > 0. \end{cases}$ (9)

- $\frac{h^f-h^g}{h^p-h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f-g}{p-q} \vee 0, \\ h > 0, \\ h \neq 1, \\ p \neq q. \end{cases}$ (10)

Данные формулы намного упрощают и рационализируют решение сложных неравенств.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1} \leq 0$.

Решение. Преобразовав левую часть, получим равносильное неравенство: $\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0} \leq 0$. Далее, использовав формулу (10), имеем следующую цепочку равносильных систем: $\begin{cases} \frac{2x^2+6x-4+2x^2+2x-1}{x} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2,5)(x-0,5)}{x} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty;\ -2,5] \cup (0; 0,5]$.

Ответ: $(-\infty;\ -2,5] \cup (0; 0,5]$.

Пример 7. Решить неравенство $log_{2-x}(x+2) \cdot log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

Решение. По формуле (8) исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} (1-x)(x+1)(x+2)(2-x) \leq 0, \\ 2-x > 0, \\ x \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+3 > 0, \\ x \neq -2, \\ 3-x > 0, \end{cases}$$

решением которой является $(-2;\ -1] \cup (1; 2)$.

Ответ: $(-2;\ -1] \cup (1; 2)$.

Список литературы:

1. *Уравнения, неравенства и их системы. Методическое руководство для студентов математических факультетов. Часть 2-я.* / Сост. Л.Р. Шакирова, Н.В. Тимербаева, Э.И. Фазлеева. – Казань: ТГГПУ, 2008. – 96 с.
2. *Шестаков С.* Письменный экзамен. Неравенства и системы неравенств // Математика, 2004. № 12. – С. 29-32.