

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Ф.Г. АВХАДИЕВ, Р.К. ГУБАЙДУЛЛИНА, Р.Г. НАСИБУЛЛИН

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ АНАЛИЗА**

КАЗАНЬ — 2019

*Печатается по решению методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

Научный редактор

к.п.н., доцент **Маклецов С.В.**

Рецензенты

доцент к.ф.-м.н. **Агачев Ю.Р.**, к.ф.-м.н. **Шафигуллин И.К.**

Авхадиев Ф.Г., Губайдуллина Р.К., Насибуллин Р.Г. Учебно-методическое пособие по численным методам анализа / Ф.Г. Авхадиев, Р.К. Губайдуллина, Р.Г. Насибуллин — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2019. — 113 с.

Аннотация. Учебно-методическое пособие посвящено численным методам решения задач анализа. В нем кратко изложены теория приближения функций и методы численного интегрирования, приведены задачи с подробными решениями, а также задачи для самостоятельного решения. Теоретический материал представляет собой часть лекций по численным методам, читаемых студентам Казанского федерального университета в Институте математики и механики им. Н. И. Лобачевского.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов-бакалавров, изучающих курс численных методов.

© Казанский университет, 2019

© Авхадиев Ф.Г., Губайдуллина Р.К., Насибуллин Р.Г., 2019

Содержание

| | |
|---|-----|
| Введение | 3 |
| 1. Приближение функций алгебраическими полиномами | 4 |
| 1.1 Интерполяционный полином Лагранжа | 4 |
| 1.2 Полиномы Чебышева первого рода. | 7 |
| 1.3 Оценка погрешности интерполирования для гладких функций | 10 |
| 2. Интерполяционный полином Ньютона | 17 |
| 2.1 Разделенные разности | 17 |
| 2.2 Представление полинома Ньютона | 18 |
| 2.3 Переход от разделенных к конечным разностям | 20 |
| 3. Кратное интерполирование | 24 |
| 3.1 Интерполяционный полином Эрмита | 24 |
| 3.2 Частные случаи полинома Эрмита. Полином Эрмита-Фейера | 30 |
| 4. Приближение периодических функций | 33 |
| 4.1 Тригонометрический интерполяционный полином | 34 |
| 4.2 Случай равноотстоящих узлов | 36 |
| 5. Сплайн-интерполяция | 38 |
| 5.1 Сплайны первой степени | 42 |
| 5.2 Кубические сплайны | 47 |
| 6. Наилучшие приближения в нормированных и гильбертовых пространствах | 53 |
| 6.1 Теоремы существования и единственности | 54 |
| 6.2 Приближения в гильбертовом пространстве | 55 |
| 6.3 Примеры применения общих теорем | 56 |
| 6.4 Способы построения полинома наилучшего приближения | 60 |
| 6.5 Наилучшие равномерные приближения полиномами | 73 |
| 7. Квадратурные формулы | 83 |
| 7.1 Интерполяционные квадратурные формулы | 84 |
| 7.2 Погрешность интерполяционной квадратурной формулы | 86 |
| 8. Квадратурная формула Ньютона-Котеса | 89 |
| 8.1 Оценки погрешности трех квадратурных формул | 90 |
| 9. Квадратурные формулы Гаусса | 97 |
| 9.1 Структура квадратурных формул Гаусса | 100 |
| 9.2 Оценки погрешности | 101 |
| 9.3 Явный вид формул для специальных весов | 102 |
| 10. Задания для самостоятельного решения | 109 |
| Рекомендуемая литература | 112 |

Введение

Данное учебно-методическое пособие посвящено численным методам. Численные методы представляют собой весьма разнообразный математический аппарат, содержащий ряд новых определений, понятий, алгоритмов и теорем. Следует знать, что освоить численные методы невозможно без самостоятельного решения задач.

В учебно-методическом пособии рассматриваются несколько разделов численных методов, а именно, основные аспекты разнообразных методов теории приближения функций и методы численного интегрирования. По каждой теме даны необходимые определения и основные теоремы. Теоретический материал иллюстрирован подробно разобранными решениями практических задач. Также в пособии имеются упражнения для самостоятельного решения.

В численных методах одним из основных вопросов является оценка погрешности. Поэтому рекомендуем обратить особое внимание на соответствующие теоремы по оценкам погрешности для различных интерполяционных методов, теории наилучших приближений в функциональных пространствах, а также оценки погрешности основных квадратурных формул.

1. Приближение функций алгебраическими полиномами

1.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Предполагаем, что $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$. Для непрерывной функции f будем рассматривать следующую задачу.

Задача. Найти алгебраический полином $L_n(f; x)$ наименьшей степени и такой, что

$$L_n(f; x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$L_n(f; x)$ называют интерполяционным полиномом Лагранжа, а точки x_j ($j = 1, \dots, n$) — узлами интерполяционного полинома Лагранжа или узлами интерполирования.

Теорема 1. Для любой функции $f \in C[a, b]$ и заданных узлов x_1, x_2, \dots, x_n интерполяционный полином $L_n(f; x)$ степени не выше $n - 1$ существует и определяется единственным образом.

Далее приведем основное представление для полинома Лагранжа в виде явной формулы, включающей узлы интерполирования x_1, x_2, \dots, x_n и значения интерполируемой функции в этих точках. Основное представление интерполяционного полинома Лагранжа имеет вид

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x),$$

где

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - x_j) / \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k - x_j) = \\ &= \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \end{aligned}$$

Отметим, что $l_k(x)$ называются **фундаментальными полиномами Лагранжа**. В узлах интерполирования получаем

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j \end{cases}.$$

Часто удобнее пользоваться другой записью основного представления. Рассмотрим произведение

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \prod_{j=1}^n (x - x_j).$$

Легко видеть, что

$$l_k(x) = \frac{A}{B},$$

где

$$A = \frac{\omega_n(x)}{x - x_k}, \quad B = \omega'_n(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k - x_j),$$

так как

$$\begin{aligned} \omega'_n(x) &= (x - x_2) \dots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \\ &\dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее, равносильное основному, представление

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)}. \quad (1.1)$$

Пример 1. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ по узлам

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Решение.

Имеем три узла, т. е. $n = 3$. Применяв основное представление полинома Лагранжа, получим

$$L_n(f; x) = f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) = l_1(x) + l_3(x),$$

где

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, \\ l_3(x) &= \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_3(f; x) = x^2.$$

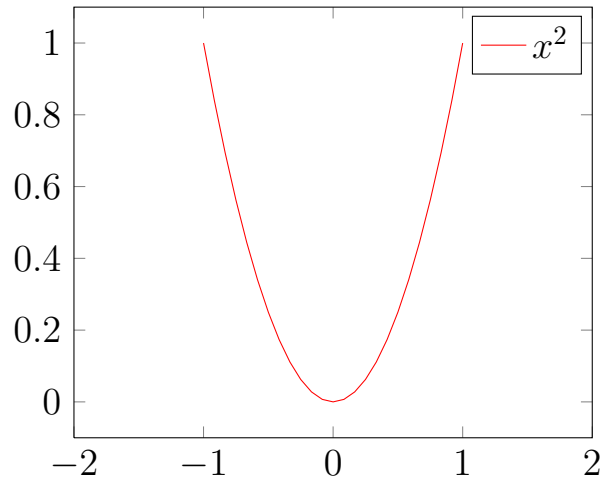


Рис. 1: График полинома Лагранжа.

Пример 2. Используя $\omega_n(x)$, построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x) = x^4$ по узлам

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Решение.

Имеем три узла, т. е. $n = 3$. Используя второе представление полинома Лагранжа, а именно формулу (1.1), получаем

$$L_3(f; x) = f(x_1) \frac{\omega_3(x)}{(x - x_1)\omega_3'(x_1)} + f(x_2) \frac{\omega_3(x)}{(x - x_2)\omega_3'(x_2)} + f(x_3) \frac{\omega_3(x)}{(x - x_3)\omega_3'(x_3)},$$

где

$$\omega_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

В нашем случае имеем

$$\omega_3(x) = (x + 1)x(x - 1) = x^3 - x,$$

$$\omega_3'(x) = 3x^2 - 1.$$

В итоге,

$$L_3(f; x) = \frac{(x + 1)x(x - 1)}{(x + 1)(3 - 1)} + \frac{(x + 1)x(x - 1)}{(x - 1)(3 - 1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = x^2.$$

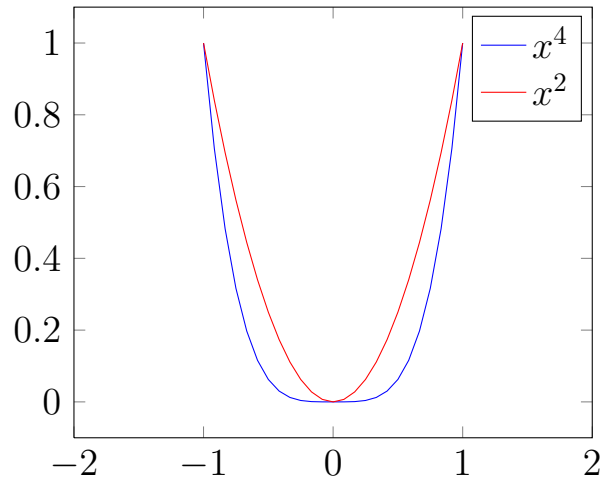


Рис. 2: График полинома Лагранжа и интерполируемой функции.

Задания для самостоятельного решения.

1. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x) = x^3$ по узлам

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

2. Используя $\omega_n(x)$, построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x) = x^6$ по узлам

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$$

1.2 Полиномы Чебышева первого рода.

Рассмотрим функции, определяемые формулами:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad n \geq 1, t \in [-1, 1].$$

Как показывают следующие лемма и теорема П. Л. Чебышева, эти функции оказываются полиномами, наименее отклоняющимися от нуля. Они называются полиномами Чебышева 1-го рода.

Лемма 1. $T_n(t)$ – полиномы степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1} и с нулями

$$t_k^0 = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

т. е.

$$T_n(t) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(t - \cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

Кроме того, максимум и минимум $T_n(t)$ достигаются в точках $t_k^* = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n}$, причем $T_n(t_k^*) = (-1)^{k-1}$.

Отметим, что корни полинома Чебышева

$$t_k^0 = \cos \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

мы будем называть узлами Чебышева.

Для полиномов Чебышева справедлива следующая рекуррентная формула:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Пример 3. Построить $L_3(f; x)$ для функции $f(x) = x^3$ по узлам Чебышева.

Решение.

Для начала найдем соответствующие узлы и значения в них данной функции f . По условию $n = 3$. Ясно, что

$$x_1 = \cos \frac{(2-1)\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \cos \frac{(4-1)\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$x_3 = \cos \frac{(6-1)\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

и

$$y_1 = f(x_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$y_2 = f(x_2) = 0,$$

$$y_3 = f(x_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Построим фундаментальные полиномы Лагранжа для этих узлов Чебышева.

С помощью непосредственных вычислений получаем:

$$l_1(x) = \frac{x-0}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}x \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$l_3(x) = \frac{x-0}{\frac{-\sqrt{3}}{2}-0} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}x \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Таким образом,

$$L_3(f; x) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{2}{3} x \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{4} x.$$

Далее приведем 2-ой способ решения данной задачи.

Поскольку многочлены Чебышева имеют вид

$$T_n(x) = 2^{n-1}(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 2^{n-1}\omega_n(x),$$

то

$$l_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x - x_k)T'_n(x_k)}.$$

В нашем случае при $n = 3$ получим:

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x,$$

$$T'_3(x) = 12x^2 - 4.$$

То есть

$$l_1(x) = \frac{4x^3 - 3x}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\right)},$$

$$l_3(x) = \frac{4x^3 - 3x}{6 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Таким образом,

$$L_3(f; x) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{4x^3 - 3x}{6} \left(\frac{1}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{3x}{4}.$$

На следующем рисунке мы приведем графики функции $f(x) = x^3$ и полинома Лагранжа $L_3(f; x)$, построенного по узлам Чебышева.

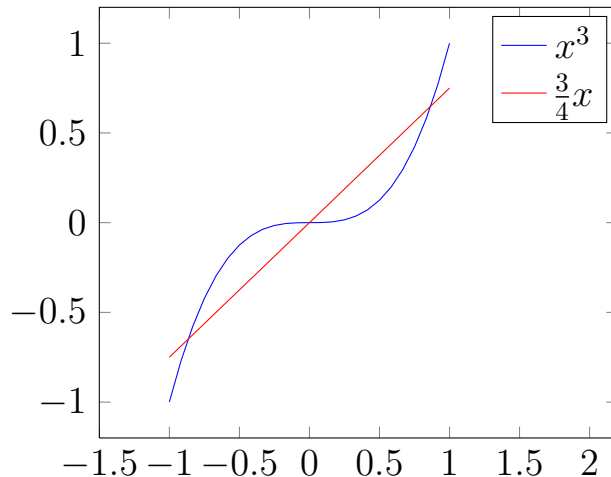


Рис. 3: График полинома Лагранжа и интерполируемой функции.

1.3 Оценка погрешности интерполирования для гладких функций

Будем рассматривать снова n узлов $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$.

Обозначим через

$$r_n(x) = f(x) - L_n(f; x)$$

остаточный член, называемый также **погрешностью интерполяции**.

Теорема 2. Пусть $f \in C^{(n-1)}[a, b]$ и на отрезке $[a, b]$ существует ограниченная $f^{(n)}(x)$. Тогда для любого $x \in [a, b]$ существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x), \quad (1.2)$$

где $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$.

Следствие 2.1. Если $|f^{(n)}(x)| \leq M_n = \text{const}$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$|r_n(x)| = |f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_n}{n!} (b - a)^n$$

для любого $x \in [a, b]$.

Следствие 2.2. Пусть функция f имеет производные любого порядка. Обозначим

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| = M_n < \infty.$$

Если

$$\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

то $r_n(x) \rightarrow 0$ равномерно на $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 4. Пусть необходимо построить $L_2(f; x)$ для функции $f(x) = x^3$ по узлам $x_1 = -1, x_2 = 0$. Оценить

$$r_2(-1/4), \text{ и } r_2(x).$$

Решение.

Подставим функцию $f(x) = x^3$ в (1.2). Получим

$$r_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \omega_2(x) = \frac{6\xi}{2} (x + 1)x.$$

Очевидно, что

$$|r_2(x)| \leq 3|\xi||x(x+1)| \leq 3|x(x+1)|.$$

Следовательно,

$$|r_2(-1/4)| \leq 3 \left| \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{4} \right) \right| = \frac{9}{16}.$$

т. е. расхождение между интерполяционным многочленом в точке $x = -1/4$ может дойти до $\frac{9}{16}$.

Оценим функцию $g(x) = x(x+1)$ на всем промежутке $[-1, 0]$. Для этого найдем точку экстремума этой функции.

$$g'(x) = 2x + 1 = 0.$$

Следовательно, $x = -\frac{1}{2}$ является точкой экстремума и

$$\max_{x \in [-1, 0]} |g(x)| = \left| \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$|r_2(x)| \leq \frac{3}{4}.$$

Последнее неравенство означает, что на всем промежутке погрешность может дойти до $3/4$.

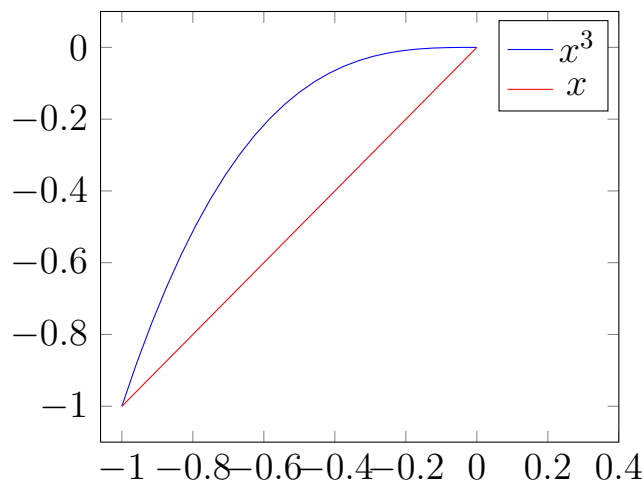


Рис. 4: График интерполируемой функции и полинома Лагранжа L_2 .

Пример 5. Пусть необходимо построить $L_3(f; x)$ для функции $f(x) = x^3$ по узлам $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Оценить

$$r_3(-1/4) \quad \text{и} \quad r_3(x).$$

Решение.

Аналогичным образом решается задачи при $n = 3$. Имеем

$$r_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \omega_3(x) = (x+1)x(x-1).$$

В точке $x = -1/4$ получим

$$|r_3(-1/4)| \leq \left| \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{5}{4}\right) \right| = \frac{15}{64} \leq \frac{1}{4},$$

т. е. расхождение между интерполяционным многочленом в точке $x = -1/4$ может дойти до $1/4$.

Оценим функцию $g(x) = x(x+1)(x-1)$ на всем промежутке $[-1, 1]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 1 = 0.$$

Следовательно, точки $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками экстремума и

$$\max_{x \in [-1, 1]} |g(x)| = \left| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{3} - 1\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$|r_3(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{2}{5},$$

значит на всем промежутке погрешность не превосходит $2/5$.

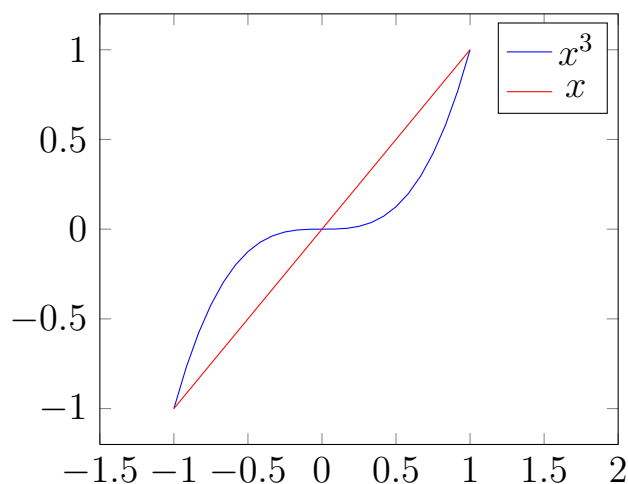


Рис. 5: График интерполируемой функции и полинома Лагранжа L_3 .

Пример 6. Определить количество узлов, необходимых для приближения функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[a, b] = [0, 3]$ с точностью $\varepsilon = 0.1$.

Решение.

Используя формулу (1.2), получим:

$$|r_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_{C[a,b]}}{n!} \|\omega\|_{C[a,b]}.$$

Напомним, что для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $g = g(x)$ ее норма определяется следующим образом:

$$\|g\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

Очевидно, что для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, 3]$ справедливо неравенство

$$\|f^{(n)}\|_{C[0,3]} \leq 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что n -я производная от $\sin x$ равна $\pm \sin x$ или $\pm \cos x$.

Несложно понять, что

$$\|\omega_n(x)\|_{C[a,b]} = \|(x - x_1) \dots (x - x_n)\|_{C[a,b]} \leq (b - a)^n.$$

При $a = 0$ и $b = 3$ получим

$$\|\omega_n(x)\|_{C[0,3]} \leq 3^n.$$

Таким образом,

$$|r_n(x)| \leq \frac{3^n}{n!}.$$

Далее найдем такое минимальное n , для которого

$$\frac{3^n}{n!} \leq 0, 1.$$

Отметим, что такое неравенство станет верным при $n = 9$:

$$\frac{2187}{40320} \leq 0, 1.$$

Приведем график функции $f(x) = \sin x$ и полинома Лагранжа

$$L_3(f; x) = 1.28295x - 0.411971x^2.$$

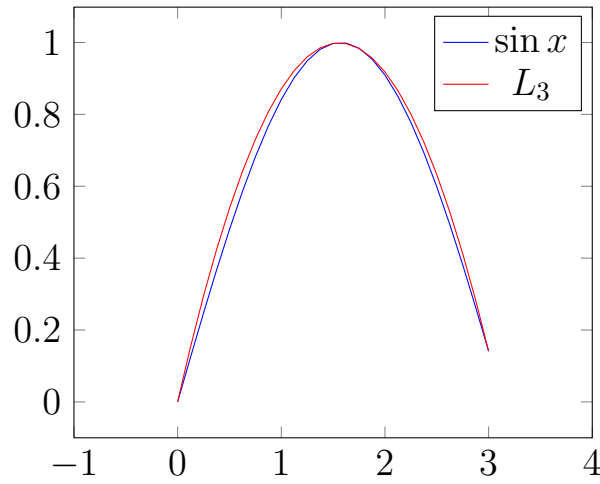


Рис. 6: График интерполируемой функции и полинома Лагранжа.

Пример 7. *Определить, сколько узлов Чебышева достаточно для приближения функции $f(x) = e^{x/5}$ на отрезке $[a, b] = [-1, 1]$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.*

Решение.

Для решения воспользуемся соотношением

$$|r_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}(\xi)\|_{C[a,b]}}{n!} \|\omega\|_{C[a,b]}.$$

Ясно, что для функции $f(x) = e^{x/5}$ производные вычисляются по формуле

$$f^{(n)}(x) = 1/5^n e^{x/5}.$$

Так как $e^{x/5}$ является возрастающей функцией, получим

$$\|f^{(n)}(x)(\xi)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{e^{1/5}}{5^n}.$$

В случае узлов Чебышева I рода имеем

$$\omega_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\|\omega_n(x)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$|r_n(x)| \leq \frac{e^{1/5}}{5^n n! 2^{n-1}}.$$

Найдем минимальное n , для которого справедливо неравенство

$$\frac{e^{1/5}}{5^n n! 2^{n-1}} \leq 0,001.$$

Несложно проверить, что при $n = 3$ имеем

$$\frac{e^{1/5}}{5^3 3! 2^2} \approx 0,0004 \leq 0,001.$$

Замечание. В случае необходимости использования узлов Чебышева на произвольном отрезке $[a, b]$ делают замену

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

при которой отрезок $[-1, 1]$ отображается на $[a, b]$. Тогда узлы Чебышева на отрезке $[a, b]$ определяются по формуле

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_k,$$

где t_k — узлы Чебышева на $[-1, 1]$. При этом

$$\omega_n(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n (t-t_1) \cdot \dots \cdot (t-t_n).$$

В случае узлов Чебышева 1-го рода известно, что

$$\omega_n(t) = \frac{T_n(t)}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, на произвольном отрезке $[a, b]$ имеем

$$\|\omega_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Пример 8. Пусть $f(x) = e^{x^2} \cos x$, $x \in [0, 1]$. На следующих графиках мы приближаем функцию $f(x)$ интерполяционными полиномами Лагранжа по равноотстоящим узлам соответственно при $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$. Обратим внимание на то, что погрешность интерполяции уменьшается при увеличении n .

Проверьте самостоятельно, что

$$L_2(f; x) = 1. + 0.468694x,$$

$$L_3(f; x) = 1 + 0.0386593x + 0.430035x^2,$$

$$L_4(f; x) = 1 - 0.0161683x + 0.594517x^2 - 0.109655x^3,$$

$$L_5(f; x) = 1 + 0.0271645x + 0.291188x^2 + 0.497004x^3 - 0.346663x^4.$$

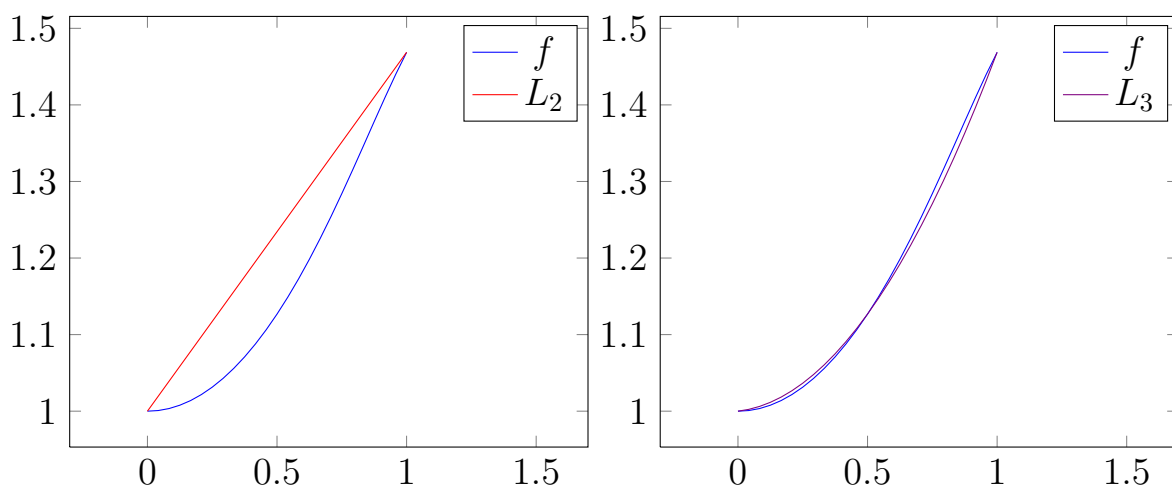


Рис. 7: Графики интерполируемой функции и полиномов Лагранжа L_2 и L_3 .

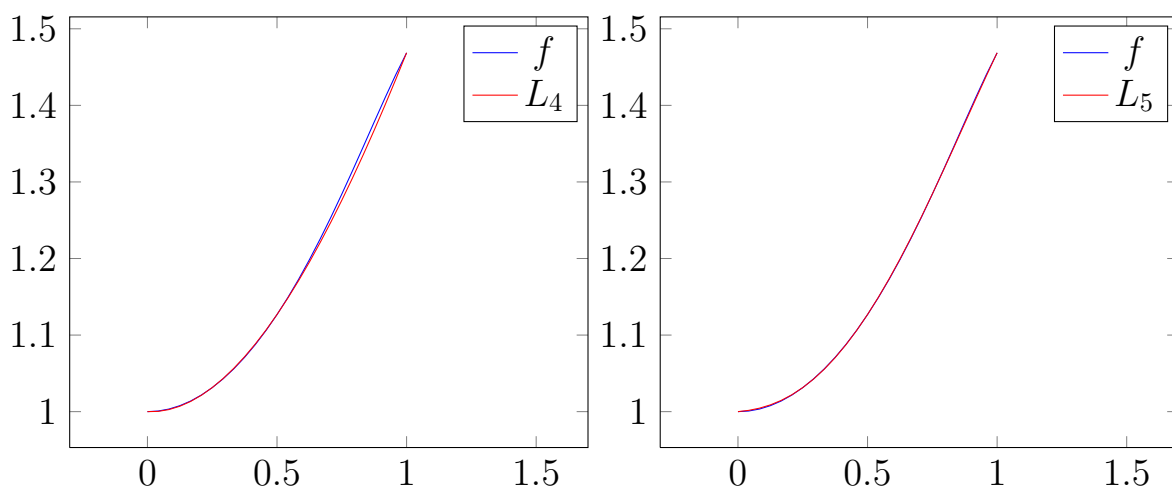


Рис. 8: Графики интерполируемой функции и полиномов Лагранжа L_4 и L_5 .

2. Интерполяционный полином Ньютона

Для $f \in C[a, b]$ и точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ интерполяционный полином $L_n(f; x)$ по этим n узлам записывается по формуле

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x),$$

где

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)},$$

$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Если добавить новый узел x_{n+1} и строить интерполяционный полином по узлам $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in [a, b]$, то получаем следующее представление Лагранжа

$$L_{n+1}(f; x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)},$$

где

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}).$$

Понятно, что при добавлении нового узла приходится пересчитывать все слагаемые в представлении Лагранжа.

Формула для интерполяционного полинома, которая не требует пересчета всех слагаемых при добавлении нового узла, была известна еще Ньютону. Такая формула называется формулой Ньютона для интерполяционного полинома Лагранжа или **интерполяционным полиномом Ньютона**.

2.1 Разделенные разности

Выражения

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

называются **разделенными разностями 1-го порядка** и обозначаются через $f(x_1; x_2)$ и $f(x_2; x_3)$, соответственно. Разделенные разности высоких порядков определяются индуктивно. А именно, **разделенная разность 2-го порядка** $f(x_1; x_2; x_3)$ задается формулой

$$f(x_1; x_2; x_3) = \frac{f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)}{x_3 - x_1},$$

а **разделенная разность** $f(x_1; x_2; \dots; x_k)$ **порядка** $k - 1$ определяется так:

$$f(x_1; x_2; \dots; x_k) = \frac{f(x_2; x_3; \dots; x_k) - f(x_1; x_2; \dots; x_{k-1})}{x_k - x_1}.$$

Для полноты картины значения $f(x)$ в узлах, т. е. числа $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ называют разделенными разностями порядка 0.

Свойства разделенных разностей.

Свойство 1. Разделенная разность является линейным функционалом от f , т. е. для любых постоянных C_1 и C_2

$$\begin{aligned} (C_1 f + C_2 g)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= C_1 f(x_1; x_2; \dots; x_n) + C_2 g(x_1; x_2; \dots; x_n). \end{aligned}$$

Свойство 2. Разделенная разность $f(x_1, \dots, x_n)$ является симметричной функцией своих аргументов, т. е. инвариантна относительно перестановки аргументов (например, $f(x_1; x_2) = f(x_2; x_1)$).

Свойство 3. Если Q — полином степени n , то разделенные разности Q порядка $(n + 1)$ и выше равны 0.

2.2 Представление полинома Ньютона

Теорема 3. Интерполяционный полином для функции $f \in C[a, b]$ по узлам x_1, x_2, \dots, x_n можно представить формулой Ньютона

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_1; x_2; \dots; x_k) \omega_{k-1}(x).$$

Пример 9. Построить интерполяционный полином Ньютона, если

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1,$$

$$y_1 = f(x_1) = -1, \quad y_2 = f(x_2) = 1.$$

Решение.

По условию $n = 2$. Интерполяционный полином Ньютона будем искать в следующем виде

$$L_2(f, x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x_2).$$

По определению разностных отношений первого порядка имеем

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2.$$

Таким образом,

$$L_2(f, x) = -1 + 2(x - 0) = 2x - 1.$$

Пример 10. Построить интерполяционный полином Ньютона, если

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = f(x_1) = -1, \quad y_2 = f(x_2) = 1,$$

$$x_3 = 1/2, \quad y_3 = f(x_3) = 1.$$

Решение.

Воспользуемся преимуществом интерполяционного полинома Ньютона при добавлении нового узла.

$$L_3(f, x) = L_2(f, x) + (x - x_1)(x - x_2)f(x_1, x_2, x_3).$$

Найдем чему равно $f(x_1, x_2, x_3)$. По определению разностных отношений, имеем

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{0 - 2}{1/2 - 0} = -4.$$

Таким образом,

$$L_3(f, x) = 2x - 1 + (x - 0)(x - 1)4 = -4x^2 + 6x - 1.$$

Пример для самостоятельного решения.

Построить интерполяционный полином Ньютона, если

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3,$$

и

$$y_1 = f(x_1) = 0, \quad y_2 = f(x_2) = -1, \quad y_3 = f(x_3) = 0, \quad y_4 = f(x_4) = 8.$$

2.3 Переход от разделенных к конечным разностям

В этом пункте мы запишем формулу Ньютона для интерполяционного полинома с заменой разделенных разностей на конечные разности.

Рассмотрим функцию $f \in C[a, b]$ и узлы $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, обозначим

$$y_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

По определению, конечная разность 1-го порядка равна

$$\Delta^1 y_k = y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$$

(как и при определении дифференциалов функций принято отождествлять Δ^1 и Δ). Конечная разность 2-го порядка $\Delta^2 y_k = \Delta^1(\Delta^1 y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k)$ выражается формулой

$$\Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k,$$

и конечная разность 3-го порядка — формулой

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_k &= \Delta(\Delta^2 y_k) = y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1} - y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k = \\ &= y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k. \end{aligned}$$

Индуктивно определяем конечную разность порядка m . Получаем

$$\Delta^m y_k = \Delta(\Delta^{m-1} y_k) = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j y_{k+m-j},$$

где C_m^j — биномиальные коэффициенты.

На отрезке $[a, b]$ возьмем равноотстоящие узлы

$$a \leq x_1, \quad x_2 = x_1 + h, \quad x_3 = x_1 + 2h, \quad \dots, \quad x_n = x_1 + (n-1)h \leq b$$

с шагом $h > 0$ и поменяем разделенные разности на конечные разности в формуле

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_1; x_2; \dots; x_k) \omega_{k-1}(x).$$

Имеем $f(x_1) = y_1$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{\Delta^1 y_1}{h},$$

$$f(x_1; x_2; x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{\Delta y_2}{h} - \frac{\Delta y_1}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}$$

и по индукции

$$f(x_1; x_2; \dots; x_k) = \frac{\Delta^{k-1} y_1}{(k-1)! h^{k-1}}.$$

С учетом естественного соглашения

$$\Delta^0 y_1 = y_1,$$

получаем формулу

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^{k-1} y_1 \omega_{k-1}(x)}{(k-1)! h^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta^k y_1}{k! h^k} \omega_k(x).$$

Эта формула приобретает универсальный вид

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta^k y_1}{k!} t(t-1) \dots (t-k+1)$$

при следующей замене переменных

$$x = x_1 + ht, \quad 0 \leq t \leq n-1.$$

Выведенная формула называется формулой Ньютона для интерполирования вперед. Это название имеет естественное объяснение.

Напомним прежде всего, что при выводе основного представления Лагранжа (или Ньютона) для интерполяционного полинома не было требований на взаимное расположение узлов, кроме условия $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$. Далее, если интерполяционные полиномы используются для приближенного определения значений функции, заданной таблично, то наибольший вклад в значение $L_n(f; x)$ в фиксированной точке x вносят узлы, ближайšie к точке x . Поэтому полученная выше формула с узлами

$$x_k = x_1 + kh, \quad (h > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1)$$

считается полезной для интерполирования в начале таблицы.

Если интерполируется значение функции в конце таблицы, то применяют другие формулы. Для шага $h > 0$ берутся узлы

$$x_n, \quad x_n - h, \quad x_n - 2h, \quad x_n - 3h, \quad \dots$$

и снова можно пользоваться формулой Ньютона через разделенные разности.

При интерполировании в середине таблицы в качестве первых узлов выгодно брать узлы, ближайšie к точке x и удовлетворяющие, например, неравенствам $x < x_{2k}$, $x > x_{2k-1}$. Подобные идеи являются классическими и плодотворно реализованы рядом математиков. Заинтересованный читатель найдет замечательные формулы Гаусса, Бесселя, Стирлинга и других классиков для интерполяционного полинома в ряде книг, например, в учебнике Березина и Жидкова (см. [5], том 1, стр.125-142).

Пример 11. Построить интерполяционный полином Ньютона, если

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

и

$$y_1 = f(x_1) = -1, \quad y_2 = f(x_2) = 1, \quad y_3 = f(x_3) = -1.$$

Решение.

При $n = 3$ имеем

$$L_3(f, x) = \Delta^0 y_1 + t \Delta^1 y_1 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_1.$$

По определению конечных разностей получим:

$$\Delta^0 y_1 = y_1 = -1,$$

$$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1 = 1 - (-1) = 2$$

и

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1 = -1 - 2 \cdot 1 - 1 = -4.$$

Следовательно,

$$L_3(f, x) = -1 + 2t - 4 \frac{t(t-1)}{2}.$$

Обратная замена переменных $t = x + 1$ даст нам окончательное решение

$$L_3(f, x) = -1 + 2t - 4 \frac{t(t-1)}{2} = -1 + 2(x+1) - 2(x+1)x = -2x^2 + 1.$$

Пример 12. Вычислить $L_4(f, 1)$, если

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 4$$

и

$$y_1 = f(x_1) = 6, \quad y_2 = f(x_2) = 1, \quad y_3 = f(x_3) = -2, \quad y_4 = f(x_4) = -15.$$

Решение.

При $n = 4$ имеем

$$L_4(f, x) = \Delta^0 y_1 + t \Delta^1 y_1 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_1.$$

По определению конечных разностей получим:

$$\Delta^0 = y_1 = -5,$$

$$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1 = 1 - 6 = -5,$$

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1 = -2 - 2 \cdot 1 + 6 = 2$$

и

$$\Delta^3 y_1 = \Delta(\Delta^2 y_1) = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 = -15 + 6 + 3 - 6 = -12.$$

Следовательно,

$$L_4(f, x) = 6 - 5t + t(t-1) - 2t(t-1)(t-2).$$

Нам нужно вычислить значение $L_4(f, x)$ при $x = 1$, т. е. при $t = \frac{x-x_1}{h} = 3/2$.

Следовательно,

$$L_3(f, 1) = 0.$$

3. Кратное интерполирование

При построении интерполяционного полинома Лагранжа мы требовали совпадения значений функции со значениями полинома в узлах. Понятно, что если дополнительно требовать совпадения значений и некоторых производных в узлах, то интерполяционный полином будет лучше приближать функцию.

Наиболее простым является следующий частный случай. Рассмотрим узлы интерполирования $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ и непрерывно дифференцируемую функцию f на этом отрезке.

Интерполяционный полином $H_n(f; x)$ ищется как полином наименьшей степени, удовлетворяющий следующим условиям

$$\begin{aligned} H_n(f; x_1) &= f(x_1), & H_n(f; x_2) &= f(x_2), & \dots, & & H_n(f; x_n) &= f(x_n); \\ H'_n(f; x_1) &= f'(x_1), & H'_n(f; x_2) &= f'(x_2), & \dots, & & H'_n(f; x_n) &= f'(x_n). \end{aligned}$$

Для определения $H_n(f; x)$ получаем $2n$ уравнений. Естественно искать его как полином степени $2n - 1$

$$H_n(f; x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1}.$$

Оказывается, что такой полином, называемый интерполяционным полиномом Эрмита-Фейера, существует и находится единственным образом. Мы получим этот факт из более общего утверждения.

3.1 Интерполяционный полином Эрмита

Пусть f — непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$. Заданы узлы интерполирования

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$$

и их кратности (натуральные числа)

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Требуется найти полином наименьшей степени $H(x)$, называемый **интерполяционным полиномом Эрмита**, по следующим условиям:

в каждой узловой точке x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) должны выполняться равенства

$$H^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j) \quad (3.1)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, a_j - 1$.

Очевидно, для записи системы уравнений (3.1) достаточно, чтобы функция f была непрерывно дифференцируемой $(a_j - 1)$ раз в некоторой окрестности точки x_j , где $j = 1, 2, \dots, n$.

Число уравнений для определения $H(x)$ равно

$$m = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

поэтому естественно искать полином $H(x)$ степени $\leq m - 1$.

Первый способ построения полинома Эрмита

Решение ищется в виде:

$$H_{m-1}(f, x) = L_n(f; x) + (x - x_1) \dots (x - x_n) H_{m-n-1}(x),$$

где $L_n(f; x)$ – интерполяционный полином Лагранжа, построенный по узлам x_i и H_{m-n-1} – некоторый полином степени $m - n - 1$, который находится из оставшихся условий. Оказывается, полином H_{m-n-1} есть снова полином Эрмита.

Пример 13. Построить интерполяционный полином Эрмита при

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 1, \\ y_1 &= -1, & y_2 &= 1, \\ y'_1 &= 1/2. \end{aligned}$$

Решение.

Ясно, что количество узлов $n = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и количество условий $m = a_1 + a_2 = 3$. Следовательно, мы строим полином 2-ой степени в следующей форме:

$$H_2(f, x) = L_1(f, x) + (x - x_1)(x - x_2)H_0(x) = L_1(f, x) + A(x - x_1)(x - x_2).$$

Несложно построить интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_1(f, x) = 2x - 1.$$

Задача свелась к нахождению константы A , используя условие на производную $y'_1 = 1/2$, т. е.

$$H'_2(f, x_1) = y'_1.$$

Имеем

$$H'_2(f, x) = (2x - 1 + Ax(x - 1))' = 2 + A(2x - 1).$$

Следовательно,

$$1/2 = y'_1 = H'_2(f, 0) = 2 - A.$$

Отсюда $A = 3/2$.

Таким образом, $H_2(f, x) = 3/2x^2 + x/2 - 1$.

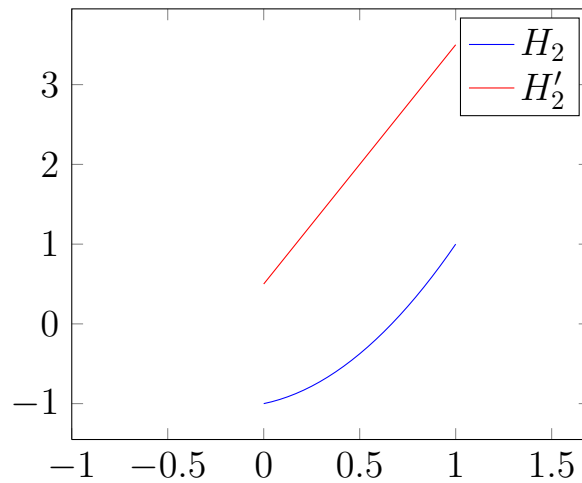


Рис. 9: График полинома Эрмита и его производной.

Для самостоятельного решения.

1. Построить полином Эрмита, если

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 1, \\ y_1 &= -1, & y_2 &= 1, \\ y'_1 &= 1/2, & y'_2 &= -1. \end{aligned}$$

2. Построить полином Эрмита, если

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 1, \\ y_1 &= -1, & y_2 &= 1, \\ y'_1 &= 1/2, & y'_2 &= -1, \\ y''_1 &= 1. \end{aligned}$$

Теорема 4. Интерполяционный полином Эрмита степени $\leq m - 1$ существует и определяется единственным образом, причем его можно представить в следующей форме

$$H(x) = P_1(x) + (x - x_1)^{a_1} P_2(x) + (x - x_1)^{a_1} (x - x_2)^{a_2} P_3(x) + \dots \quad (3.2) \\ + (x - x_1)^{a_1} (x - x_2)^{a_2} \dots (x - x_{n-1})^{a_{n-1}} P_n(x),$$

где $P_j(x) = A_{j,0} + A_{j,1}(x - x_j) + \dots + A_{j,a_j-1}(x - x_j)^{a_j-1}$ и коэффициенты $A_{i,j}$ такие, что часть полинома $H(x)$ до слагаемого с множителем $P_j(x)$ включительно удовлетворяет условиям интерполяции для узла x_j .

Формула для остаточного члена при интерполяции с кратными узлами для функции $f \in C^m[a, b]$ приведена в следующей теореме.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ является $m = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ раз непрерывно дифференцируемой, то существует точка ξ такая, что

$$r(x) = f(x) - H(x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \Omega(x),$$

где $\Omega(x) = (x - x_1)^{a_1} (x - x_2)^{a_2} \dots (x - x_n)^{a_n}$.

Второй способ построения полинома Эрмита

Пример 14. Построить интерполяционный полином Эрмита, если

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \\ y_1 = 2, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 2, \\ y'_2 = -1.$$

Решение.

Легко заметить, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 1$. Следовательно, решение ищем в следующем виде:

$$H_3(f, x) = P_1(x) + (x - x_1)P_2(x) + (x - x_1)(x - x_2)P_3(x),$$

где

$$P_1 = A_{1,0}; P_2(x) = A_{2,0} + A_{2,1}(x - x_2); P_3(x) = A_{3,0}.$$

По определению интерполяционного полинома Эрмита в узловых точках выполняются условия интерполяции, т. е.

$$\begin{aligned} H_3(f, x_1) = y_1, \quad H_3(f, x_2) = y_2, \quad H_3(f, x_3) = y_3, \\ H'_3(f, x_2) = y'_2. \end{aligned}$$

В нашей задаче три узловых точки. Следовательно, задачу будем решать в три шага: 1) $j = 1$; 2) $j = 2$; 3) $j = 3$.

Шаг 1 при $j = 1$. Обозначим через $H_1(x)$ часть полинома $H_3(f, x)$ до слагаемого $P_1(x)$ включительно. Для этого полинома потребуем выполнения условия интерполяции в узловой точке x_1 , т. е.

$$H_1(x_1) = P_1(x_1) = y_1.$$

Следовательно, $A_{1,0} = 2$.

Шаг 2 при $j = 2$. Через $H_2(x)$ обозначим часть полинома $H_3(f, x)$ до слагаемого $P_2(x)$ включительно. Ясно, что

$$H_2(x) = P_1(x) + (x - x_1)P_2(x)$$

и

$$H'_2(x) = P_2(x) + (x - x_1)P'_2(x).$$

Для них справедливо

$$H_2(x_2) = 2 + (x_2 - x_1)(A_{2,0} + A_{2,1}(x_2 - x_2)) = y_2,$$

$$H'_2(x_2) = A_{2,0} + (x_2 - x_1)A_{2,1} = y'_2.$$

В итоге имеем, $A_{2,0} = 0$ и $A_{2,1} = -1$.

Шаг 3 при $j = 3$. Часть полинома $H_3(f, x)$ до $P_3(x)$ включительно:

$$H_3(x) = 2 - (x + 1)x + (x + 1)x^2 A_{3,0}.$$

Требуем, чтобы $H_3(x_3) = y_3$. Следовательно, $A_{3,0} = 1$.

Таким образом, искомым полином Эрмита

$$H(x) = x^3 - x + 2.$$

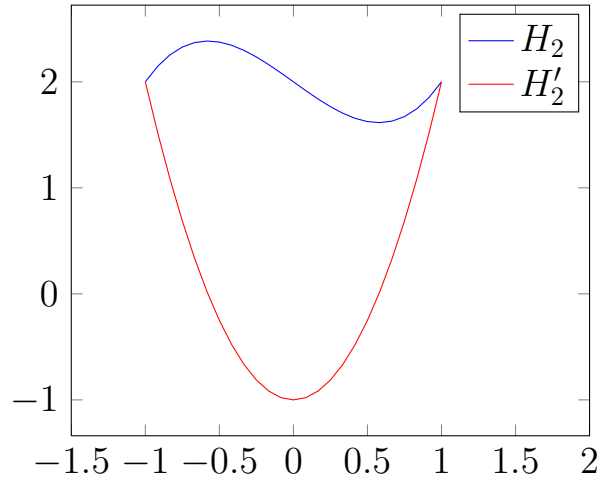


Рис. 10: График полинома Эрмита и его производной.

Пример 15. Пусть $f(x) = \sin \pi x$ и

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/2, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1.$$

Построить интерполяционный полином Эрмита.

Решение.

Очевидно, что $y_1 = 0$, $y_1' = \pi$, $y_2 = 1$.

Часть полинома $H_2(f, x)$ до P_1 и P_2 включительно соответственно равны:

$$H_1(x) = A_{1,0} + A_{1,1}x,$$

$$H_2(x) = A_{1,0} + A_{1,1}x + x^2 A_{2,0}.$$

Из условий в первом узле x_1 следует, что $A_{1,0} = 0$ и $A_{1,1} = \pi$, т. е. $P_1(x) = \pi x$.

Из условия в точке x_2 получим

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}A_{2,0} = 1.$$

Следовательно, $A_{2,0} = 4 - 2\pi$.

Таким образом,

$$H_2(f, x) = \pi x + (4 - 2\pi)x^2.$$

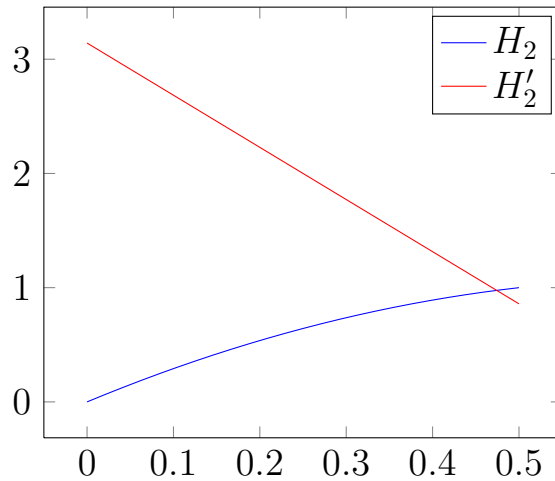


Рис. 11: График полинома Эрмита и его производной.

Задания для самостоятельного решения.

1. Для последнего примера рассмотреть кратности $a_1 = 1, a_2 = 2$.
2. Для последнего примера рассмотреть кратности $a_1 = 2, a_2 = 2$.

3.2 Частные случаи полинома Эрмита. Полином Эрмита-Фейера

Рассмотрим 3 частных случая.

1) Пусть кратности всех узлов равны единице. Тогда мы должны получить, что $H(x) = L_n(f; x)$, и в этом легко убедиться. Действительно, в силу равенств $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ все полиномы P_k в представлении (3.2) имеют нулевую степень, т. е. являются константами. Поэтому формула (3.2) при $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ сводится к формуле Ньютона для интерполяционного полинома Лагранжа с коэффициентами $P_k = A_{k-1} = f(x_1; x_2; \dots; x_k)$.

2) Пусть $n = 1, m = a_1 \geq 2$. Тогда в представлении (3.2) необходимо положить $P_k(x) \equiv 0$ при $k \geq 2$. Из доказательства теоремы следует, что

$$\begin{aligned}
 P_1(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \dots \\
 + \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{m!}(x - x_1)^{m-1}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, эта формула в сочетании с полученной выше формулой для остаточного члена при интерполяции с кратными узлами равносильна

формуле Тейлора для функции $f \in C^m[a, b]$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

3) Пусть $n \geq 2$ и все узлы имеют одинаковую кратность 2, т. е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$. Тогда $m = 2n$. В этом случае мы получаем интерполяционный полином $H(x) = H_n(f; x)$ Эрмита-Фейера, для которого можно получить другое явное представление типа формулы Лагранжа для $L_n(f; x)$.

Мы будем пользоваться стандартными обозначениями $l_k(x)$ для фундаментальных полиномов Лагранжа, т. е.

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)},$$

где

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Пример 16. Построить интерполяционный полином Эрмита, если

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y'_1 = 1/2, \quad y''_1 = 1.$$

Решение.

Решение будем искать в следующем виде:

$$H_2(f, x) = P_1(x) = A_{0,1} + A_{1,1}(x - 0)A_{1,2}(x - 0)^2.$$

$P_1(x)$ восстановим через отрезок ряда Тейлора в точке x_0 , т. е.

$$P_1(x) = -1 + \frac{1}{2}(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2.$$

Таким образом, искомое решение

$$H_2(f, x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1.$$

График полинома Эрмита и его производной

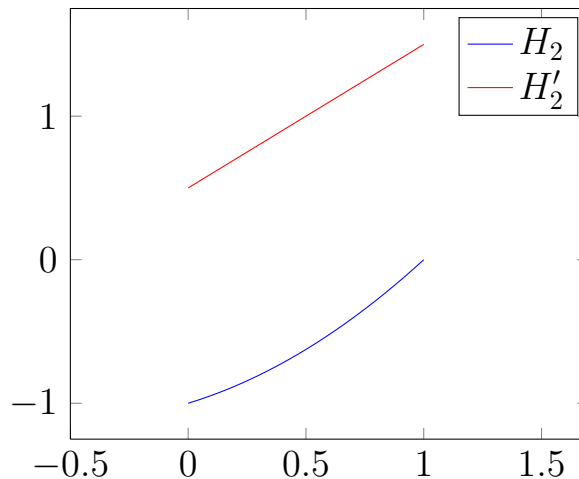


Рис. 12: График полинома Эрмита и его производной.

Пример 17. Оценить погрешность интерполяционного полинома Эрмита-Фейера для функции $f(x) = x^4$, $[a, b] = [1, 2]$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Решение.

Из теоремы 5 следует, что погрешность можно представить в следующем виде.

$$R(x) = f(x) - H_3(f, x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \Omega(x),$$

где $\Omega(x) = \omega_n^2(x)$, $\xi \in (a, b)$, $x \in [a, b]$.

В нашем случае $n = 2$ и

$$R(x) = \frac{4!}{4!} \Omega(x),$$

где $\Omega(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2$. Найдем максимум $|\Omega(x)|$. Для этого сначала найдем первую производную и приравняем нулю.

$$\Omega'(x) = 2(x - 1)(x - 2)^2 + 2(x - 1)^2(x - 2) = 2(x - 1)(x - 2)(2x - 3) = 0.$$

Следовательно, точки $x = 1$, $x = 3/2$ и $x = 2$ являются точками экстремума.

Несложно понять, что

$$\max_{x \in [1, 2]} |R(x)| = \max_{x \in [1, 2]} (x - 1)^2(x - 2)^2 = (3/2 - 1)^2 (3/2 - 2)^2 = \frac{1}{16}.$$

4. Приближение периодических функций

Рассмотрим 2π -периодическую функцию $f \in C(\mathbf{R})$ с вещественными значениями, сетку с $2n+1$ узлами $x_0, x_1, \dots, x_{2n} \in [0, 2\pi]$, удовлетворяющими условиям

$$0 < |x_i - x_j| < 2\pi, \quad i \neq j.$$

Выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

будем называть тригонометрическим полиномом степени n , если $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$.

Естественной является следующая задача: построить тригонометрический полином $T_n(f; x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям

$$T_n(f; x_0) = f(x_0), \quad T_n(f; x_1) = f(x_1), \quad \dots, \quad T_n(f; x_{2n}) = f(x_{2n}).$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$T_n(f; x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, \dots, 2n)$$

порядка $2n+1$. Можно показать, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1/2 & \cos x_1 & \sin x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

отличен от нуля, поэтому интерполяционный тригонометрический полином определится единственным образом.

Но мы избираем другой, более плодотворный путь доказательства. А именно, предъявим аналог формулы Лагранжа для $T_n(f; x)$ и проверим лишь выполнение условий интерполирования и единственности.

4.1 Тригонометрический интерполяционный полином

Нам потребуются фундаментальные тригонометрические полиномы Лагранжа $t_k(x)$, заданные формулами

$$t_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^{2n} \sin \frac{x-x_j}{2}}{\prod_{j=0, j \neq k}^{2n} \sin \frac{x_k-x_j}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Теорема 6. Для каждой непрерывной 2π -периодической функции f ее тригонометрический интерполяционный полином степени не выше n существует и определяется единственным образом, причем его можно представить в форме Лагранжа

$$T_n(f; x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) t_k(x).$$

Если функция нечетная, то и интерполяционный полином должен быть функцией нечетной, то есть полином будет записываться в виде

$$T_n^s(f; x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx.$$

Аналогично для четной функции

$$T_n^c(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin kx.$$

Пример 18. Для функции $f \in C_{2\pi}$ построить тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа по узлам

$$x_0 = 0, x_1 = \pi, x_2 = \frac{5\pi}{4},$$

если

$$y_0 = f(x_0) = -1, y_1 = f(x_1) = 1, y_2 = f(x_2) = -1.$$

Решение.

При трех узлах интерполяции степень интерполяционного тригонометрического полинома $n = 1$. Решение ищем в виде

$$T_1(f; x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) t_k(x) = y_0 t_0(x) + y_1 t_1(x) + y_2 t_2(x),$$

где

$$t_0(x) = \frac{\sin \frac{x-\pi}{2} \cdot \sin \frac{x-5\pi/4}{2}}{\sin \frac{0-\pi}{2} \cdot \sin \frac{0-5\pi/4}{2}},$$

$$t_1(x) = \frac{\sin \frac{x-0}{2} \cdot \sin \frac{x-5\pi/4}{2}}{\sin \frac{\pi-0}{2} \cdot \sin \frac{\pi-5\pi/4}{2}},$$

$$t_2(x) = \frac{\sin \frac{x-0}{2} \cdot \sin \frac{x-\pi}{2}}{\sin \frac{5\pi/4-0}{2} \cdot \sin \frac{5\pi/4-\pi}{2}}.$$

Таким образом, $T_1(f, x) = -\cos x + (1 + \sqrt{2}) \sin x$.

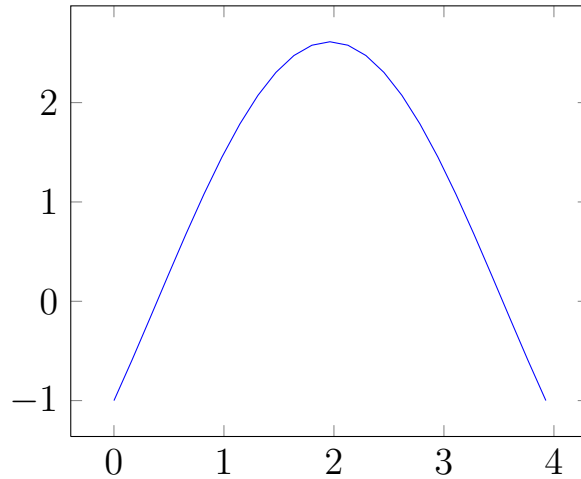


Рис. 13: График тригонометрического интерполяционного полинома.

Пример 19. Для нечетной функции $f \in C_{2\pi}$ построить тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа по узлам

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2},$$

если

$$y_0 = f(x_0) = 0, y_1 = f(x_1) = 2.$$

Решение.

Легко заметить, что недостаточно узлов интерполяции. С учетом нечетности добавим точку $x_2 = -\frac{\pi}{2}$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

Перенесем ее на интервал $[0, 2\pi)$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2.$$

То есть

$$x_2 = \frac{3\pi}{2}, y_2 = -2.$$

Дальнейший ход решения полностью соответствует предыдущему случаю.

Пример 20. Решить задачу из примера 18, используя нечетный тригонометрический полином.

Решение.

Поскольку нечетность уже учтена и $T_n^s(0) = 0$ автоматически, то остается одно условие $T_n^s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Следовательно, у полинома должен быть один неизвестный коэффициент

$$T_1^s(x) = b_1 \sin x,$$

$$T_1^s\left(\frac{\pi}{2}\right) = b_1 \sin \frac{\pi}{2} = b_1 = 2.$$

Таким образом,

$$T_1^s(x) = 2 \sin x.$$

Задание для самостоятельного решения.

Для четной функции $f \in C_{2\pi}$ построить тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа двумя способами по узлам

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2},$$

если

$$y_0 = f(x_0) = 0, y_1 = f(x_1) = 2.$$

4.2 Случай равноотстоящих узлов

Рассмотрим равноотстоящие узлы

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad \dots, \quad x_{2n} = 2nh = \frac{4n\pi}{2n+1}.$$

с шагом $h = \frac{2\pi}{2n+1}$. В этом случае формулы для фундаментальных тригонометрических полиномов Лагранжа упрощаются. Более того, можно

найти явные формулы для коэффициентов a_k и b_k для тригонометрического интерполяционного полинома

$$T_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

Нам потребуется известная функция из теории тригонометрических рядов Фурье, а именно, ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt \equiv \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Теорема 7. Для каждой непрерывной 2π -периодической функции f и равноотстоящих узлов $x_k = \frac{2\pi k}{2n+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$,

$$T_n(f; x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) D_n(x - x_k),$$

т.е.

$$t_k(x) = \frac{2}{2n+1} D_n(x - x_k),$$

а коэффициенты Фурье $T_n(f; x)$ определяются формулами:

$$a_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos mx_k, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \sin mx_k, \quad m = 1, \dots, n.$$

Пример 21. Записать интерполяционный полином по равноотстоящим узлам

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2\pi}{5}, x_2 = \frac{4\pi}{5}, x_3 = \frac{6\pi}{5}, x_4 = \frac{8\pi}{5},$$

если

$$y_0 = f(x_0) = 1, y_1 = f(x_1) = -1,$$

$$y_2 = f(x_2) = 2, y_3 = f(x_3) = 0, y_4 = f(x_4) = -2.$$

Решение.

$$T_2(f; x) = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 y_k D_n(x - x_k) =$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{\sin \frac{5}{2}(x-0)}{\sin \frac{x-0}{2}} - \frac{\sin \frac{5}{2}(x-\frac{2\pi}{5})}{\sin \frac{x-\frac{2\pi}{5}}{2}} + 2 \frac{\sin \frac{5}{2}(x-\frac{4\pi}{5})}{\sin \frac{x-\frac{4\pi}{5}}{2}} - 2 \frac{\sin \frac{5}{2}(x-\frac{8\pi}{5})}{\sin \frac{x-\frac{8\pi}{5}}{2}} \right).$$

5. Сплайн-интерполяция

Как мы видели выше, вопрос о равномерной сходимости интерполяционных полиномов к интерполируемой функции при неограниченном росте числа точек интерполяции является сложным, в общем случае успеха можно добиться лишь специальным подбором узлов. Вопросы сходимости сильно упрощаются, если в качестве приближающих функций используются кусочно-полиномиальные функции. Они называются сплайнами и теория сплайн-интерполяции бурно развивается с сороковых годов XX-го столетия.

Можно отметить, что кусочно-полиномиальные функции (сплайны) возникли уже на заре математического анализа в работах Лейбница и особенно в трудах Эйлера при разработке прямых методов вариационного исчисления. Английское слово "сплайн" означает балка, рейка. Оно стало математическим термином по праву: американские инженеры и чертежники издавна использовали гибкие рейки для ручной интерполяции функций, заданных значениями на конечном числе точек.

Перейдем к точным определениям. Непрерывная функция

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

называется **сплайном**, если существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

такое, что на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция g является некоторым полиномом. Таким образом, ограничение $g|_{[x_{k-1}, x_k]}$ является полиномом. Для простоты мы обозначим его как

$$g_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Определение 1. Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть заданы узлы

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что функция $g(x) = S_n^m(f; x)$ является для f интерполяционным сплайном степени $m \geq 1$, если выполняются условия:

1) g непрерывна на $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$

$$g(x) = g_k(x),$$

где $g_k(x)$ — некоторый полином степени $\leq m$, т. е. имеет вид

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^m a_{kj}x^j;$$

2) для каждого узла x_j ($j = 0, \dots, n$)

$$g(x_j) = f(x_j);$$

3) если $m \geq 2$, то $g \in C^{(m-1)}[a, b]$.

Сплайны представляют удобный аппарат приближения функций конечной гладкости. Мы рассмотрим подробнее лишь наиболее употребительные на практике сплайны первой степени ($m = 1$) и кубические сплайны ($m = 3$).

При исследовании порядка приближения нам потребуется понятие модуля непрерывности для функции $f \in C[a, b]$. Напомним определение и некоторые свойства. *Модуль непрерывности* $\omega(f, \delta)$ определяется следующим образом: для фиксированного положительного числа $\delta \in (0, b - a]$

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x', x'' \in [a, b], |x' - x''| \leq \delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Из определения непосредственно следует, что модуль непрерывности является монотонно неубывающей функцией переменной δ , $\delta \in (0, b - a]$. Кроме того, условие $f \in C[a, b]$ равносильно равенству

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0,$$

в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

Принято выделять подпространства непрерывных функций посредством фиксации свойства модуля непрерывности. Одним из наиболее употребительных подпространств является класс $\text{Lip } \alpha$ (Липшиц-альфа), где $\alpha \in (0, 1]$ — фиксированное число.

По определению, $f \in \text{Lip } \alpha$ означает существование некоторой постоянной $M > 0$ такой, что для всех $x', x'' \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha.$$

Очевидно, условие $f \in \text{Lip } \alpha$ равносильно неравенству

$$\omega(f; \delta) \leq M\delta^\alpha$$

с некоторой постоянной $M > 0$. Отметим также, что если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in \text{Lip } 1$, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Действительно, для любого отрезка $[x', x''] \subset [a, b]$ по формуле Лагранжа о конечных приращениях можно записать: $\exists \xi \in (x', x'')$ такое, что

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x'),$$

поэтому

$$|f(x'') - f(x')| \leq M|x'' - x'|$$

с постоянной

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| < \infty.$$

С другой стороны, функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, не имеет производной в точке нуль, т. е. не является непрерывно дифференцируемой, но она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $M = 1$, так как

$$|f(x'') - f(x')| = ||x''| - |x'|| \leq |x'' - x'|.$$

Модуль непрерывности характеризует максимальное колебание функции на отрезке длиной не больше δ .

Пример 22. Пусть $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$. Найти $\omega(f; \delta)$.

Решение.

При фиксированном x_0 и δ скачок функции $f(x) = |x|$ на интервале $[x_0, x_0 + \delta]$ не превосходит δ . Следовательно, $\omega(f; \delta) = \delta$.

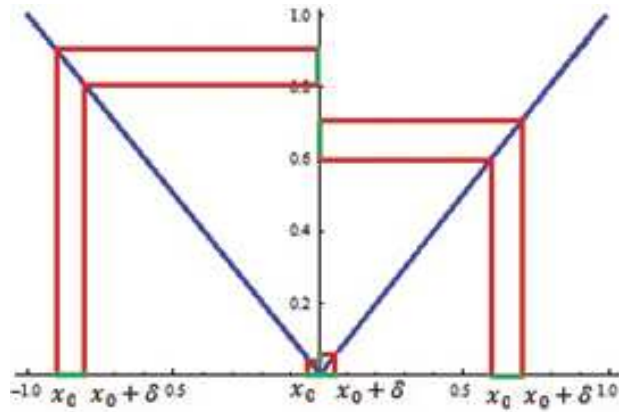


Рис. 14: График функции $f(x) = |x|$.

Пример 23. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b] = [0, 10]$. Найти $\omega(f; x)$.

Решение.

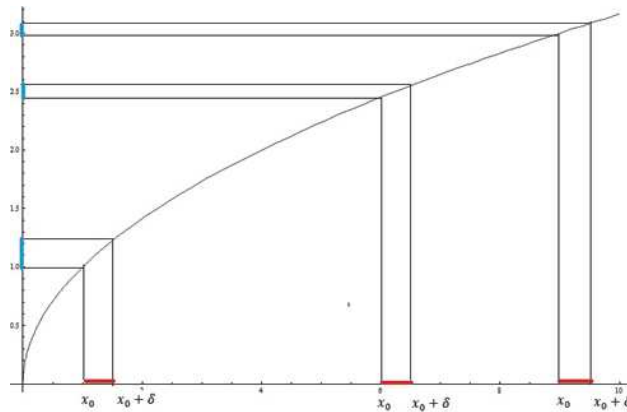


Рис. 15: График функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Ясно, что при фиксированном x_0 и δ скачок функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале $[x_0, x_0 + \delta]$ увеличивается с приближением x_0 к началу координат. Следовательно,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{x_0 \in [0, 10 - \delta]} |\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + \delta}| = \sqrt{\delta}.$$

Пример 24. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b] = [1, 10]$. Найти $\omega(f; x)$.

Решение.

По аналогии с примером 23, легко понять, что $\omega(f; \delta) = \sqrt{1 + \delta} - 1$.

5.1 Сплайны первой степени

Рассмотрим сплайн первой степени $g(x) = S_n^1(f; x)$ для

$$f \in C[a, b], \quad a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

По определению интерполяционного сплайна $g \in C[a, b]$, $g(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, кроме того, на любом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$

$$g(x) = g_k(x) = a_k x + b_k.$$

Таким образом, речь идет об аппроксимации $f \in C[a, b]$ ломаными, т. е. непрерывными кусочно-линейными функциями.

Существование и единственность интерполяционного сплайна первой степени получаются тривиально. Действительно, нахождение $g_k(x) = a_k x + b_k$ геометрически сводится к построению отрезка прямой, проходящей через 2 точки с координатами $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$. Кроме того, мы можем интерпретировать $g_k(x) = a_k x + b_k$ как интерполяционный полином Лагранжа степени ≤ 1 , построенный по двум узлам x_{k-1}, x_k . По доказанному ранее такой полином существует, определяется единственным образом и может быть представлен по формуле Лагранжа на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ в явном виде как

$$g(x) = g_k(x) = f(x_{k-1}) \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Равенства $g(x_k) = f(x_k)$ и $g(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ очевидны.

Рассмотрим аппроксимационные свойства сплайнов первой степени. Отметим, прежде всего, *представление типа Лагранжа*:

$$S_n^1(f; x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) s_j(x),$$

где $s_j(x)$ — *фундаментальные сплайны первой степени* со стандартным свойством $s_j(x_k) = \delta_{kj}$. Мы можем написать их в явном виде. Для крайних узлов

$$s_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - a} & \text{при } a \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{при } x_1 \leq x \leq b; \end{cases}$$
$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{b - x_{n-1}} & \text{при } x_{n-1} \leq x \leq b; \end{cases}$$

и при любом $1 \leq j \leq n - 1$, т. е. для внутренних узлов

$$s_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq x \leq x_{j-1}, \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{при } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{при } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0 & \text{при } x_{j+1} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Норма оператора S_n^1 легко вычисляется и равна 1 при любом n , так как

$$\sum_{j=0}^n |s_j(x)| \equiv \sum_{j=0}^n s_j(x) \equiv 1.$$

В силу ограниченности нормы оператор S_n^1 должен обладать хорошими аппроксимационными свойствами. Мы получим оценки погрешности интерполяции с использованием модуля непрерывности интерполируемой функции или ее производной, а также диаметра разбиения $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, определяемого стандартно как

$$\delta_n = \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Теорема 8. Для каждой функции $f \in C[a, b]$ ее интерполяционный сплайн $S_n^1(f; x)$, построенный по сетке $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ с диаметром разбиения δ_n , имеет следующие свойства:

- 1) $\|f(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a, b]} \leq \omega(f, \delta_n)$;
- 2) $S_n^1(f; x) \rightrightarrows f(x)$ при $\delta_n \rightarrow 0$.

Отметим простое следствие теоремы. Если $f \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то существует постоянная M такая, что $\omega(f, \delta_n) \leq M\delta_n^\alpha$. Поэтому

$$\|f(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a, b]} = O(\delta_n^\alpha).$$

Для непрерывно дифференцируемых функций погрешность интерполяции допускает более сильную оценку.

Теорема 9. Пусть $f \in C^1[a, b]$, $S_n^1(f; x)$ — ее интерполяционный сплайн первой степени, построенный по узлам $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ с диаметром δ_n . Тогда

$$\|f(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a, b]} \leq \frac{\delta_n}{4} \omega(f', \delta_n).$$

Следствие 9.1. Если $f' \in Lip\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то

$$\|f(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a,b]} = O(\delta_n^{1+\alpha}).$$

Следствие 9.2. Для любой функции $f \in C^2[a, b]$

$$\|f(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a,b]} \leq \frac{\delta_n^2}{4} \|f''(x)\| = O(\delta_n^2). \quad (5.1)$$

В частности, если интерполяционный полином построен по равноотстоящим узлам с шагом $h = \delta_n = \frac{b-a}{n}$, то

$$\|f(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a,b]} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отметим так называемое "свойство насыщаемости" сплайна первой степени, которое заключается в следующем: дальнейшее увеличение порядка гладкости интерполируемой функции, например, требование $f \in C^r[a, b]$, $r \geq 3$, не приводит к лучшим оценкам погрешности аппроксимации, чем оценка $O(\delta_n^2)$ для дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Невозможность дальнейшего повышения порядка малости погрешности за счет порядка гладкости интерполируемой функции можно демонстрировать на простом примере.

Пример 1. Рассмотрим сколь угодно гладкую функцию $f_0(x) = x^2$ на отрезке $[-1, 1]$ и сетку с равноотстоящими узлами

$$x_k = -1 + kh, \quad h = 2/n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Пусть n — нечетное число. Тогда один из частичных отрезков имеет вид $[-h/2, h/2]$, и на этом отрезке, очевидно, $S_n^1(f_0, x) \equiv h^2/4$. Поэтому

$$\|f_0(x) - S_n^1(f; x)\|_{C[a,b]} \geq |f_0(0) - S_n^1(f; 0)| = h^2/4.$$

Если n — четное число, то полученная оценка снизу для погрешности интерполяции также верна (покажите!).

Замечание. Обратите внимание, что в предыдущих рассуждениях речь идет об оценках погрешности, гарантированных для всех функций из заданных классов функций. Понятно, что для конкретной функции аппроксимация может быть намного лучше. Например, если взять непрерывную, кусочно-линейную функцию, то погрешность тождественно равна нулю при подходящем выборе сетки.

Пример 25. Для функции $f(x) = e^{\sin \pi x}$ построить сплайн первого порядка по узлам

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/6, \quad x_2 = 1/2.$$

Решение.

Ясно, что значения функции в узловых точках соответственно равны

$$y_0 = 1, \quad y_1 = e^{1/2}, \quad y_2 = e.$$

$$S_2^1(f, x) = \begin{cases} 1 + 6(\sqrt{e} - 1), & x \in [0, \frac{1}{6}] \\ \sqrt{e} + 3(e - \sqrt{e})(x - 1/6), & x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

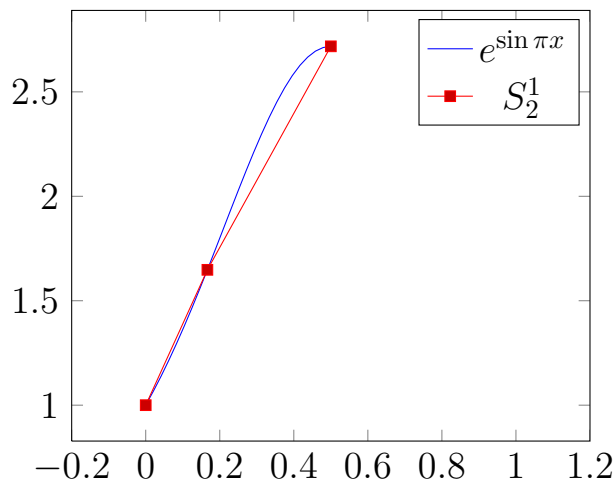


Рис. 16: График сплайна первого порядка и функции $f(x)$.

Пример 26. Для функции $f(x) = e^x$ записать сплайн первого порядка по равноотстоящим узлам

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{0, n},$$

и оценить погрешность.

Решение.

$$S_2^1(f, x) = e^{x_{k-1}} + \frac{e^{x_k} - e^{x_{k-1}}}{h}(x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}.$$

Используя формулу (5.1), получим

$$\|f(x) - S_2^1(f, x)\| \leq \frac{\delta_2^2}{4} \|f''(x)\| = \frac{h^2 e}{4}.$$

Пример 27. Построить сплайн, приближающий функцию $\sin x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение.

Возьмем равноотстоящие узлы

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \delta_n = h = \frac{\pi}{2n}.$$

Найдем минимальное возможное n , при котором точность ε будет обеспечена. Существует f'' и ясно, что $|f''(x)| \leq 1, x \in [0, \pi/2]$, поэтому по третьей оценке имеем

$$\|f(x) - S_n^1(f, x)\| \leq \frac{\delta_n^2}{4} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, минимальное $n = 249$. Имеем

$$x_k = \frac{\pi k}{498}, y_k = \sin x_k = \sin \frac{\pi k}{498}.$$

На отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ сплайн равен

$$y_{k-1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h}(x - x_{k-1}).$$

Таким образом,

$$\sin x \approx S_{249}^1(f, x) = y_{k-1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h}(x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}.$$

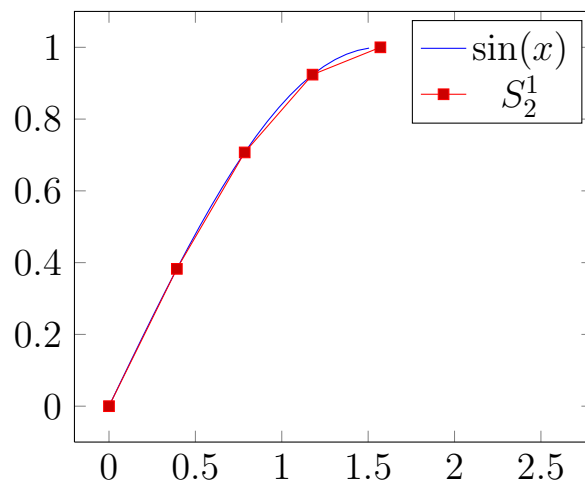


Рис. 17: График сплайна первого порядка и функции $f(x)$.

5.2 Кубические сплайны

Для заданной функции $f \in C[a, b]$ и узлов $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ сплайн третьей степени, т. е. кубический сплайн

$$g(x) = S_n^3(f; x)$$

определяется тремя условиями:

I) на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$g(x) = g_k(x) = a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + a_{k3}x^3$$

— полином третьей степени;

II) для каждого $k = 1, 2, \dots, n$

$$g(x_k) = f(x_k);$$

III) $g \in C^2[a, b]$, т. е. g, g', g'' непрерывны на $[a, b]$. Это условие фактически сводится к дважды гладкой склейке на внутренних узловых точках полиномов g_k из соседних частичных отрезков: для каждого $k = 1, 2, \dots, n - 1$ должны выполняться равенства

$$g_k(x_k) = g_{k+1}(x_k), \quad g'_k(x_k) = g'_{k+1}(x_k), \quad g''_k(x_k) = g''_{k+1}(x_k).$$

Условиями I–III кубический сплайн определяется не единственным образом, поскольку число неизвестных коэффициентов a_{kj} равно $4n$, а число уравнений для их определения равно $4n - 2$. А именно, $n + 1$ уравнение дано условиями интерполирования и $3(n - 1)$ уравнений предоставлены условиями дважды гладкой склейки на внутренних узловых точках.

Таким образом, нужны еще 2 условия. Дополнительные условия вида $g(a) = g(b)$, $g'(a) = g'(b)$ обычно применяются для периодических функций с периодом $T = b - a$.

Для непериодических функций наиболее употребительными являются так называемые естественные кубические сплайны, они определяются присоединением следующих дополнительных условий: $g''(a) = g''(b) = 0$.

Теорема 10. Для каждой функции $f \in C[a, b]$ ее естественный кубический сплайн $g(x) = S_n^3(f; x)$, построенный по сетке $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, существует и определяется единственным образом.

В заключение приведем без доказательства теорему, показывающую свойство насыщения кубических сплайнов.

Теорема 11. Пусть $f \in C[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, δ_n — диаметр разбиения этой сетки и интерполяционный кубический сплайн третьего порядка $S_n^3(f; x)$ удовлетворяет соответствующим краевым условиям. Если $f \in C^r[a, b]$, $r = 1, 2, \dots$, то

$$\|f(x) - S_n^3(f; x)\|_{C[a; b]} = \begin{cases} O(\delta_n^r) & \text{при } r \leq 4; \\ O(\delta_n^4) & \text{при } r \geq 4. \end{cases}$$

Построение кубического сплайна через моменты.

Пусть $M_i \equiv S''(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ — моменты сплайна в узлах x_i . Возьмем конкретный сегмент $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$. Так как на нем S'' является полиномом первого порядка, то

$$g''(x) = M_{k-1} + \frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}).$$

Далее интегрируя, восстанавливаем производную и сам сплайн:

$$g'(x) = \int_{x_{k-1}}^x g''(t) dt + g'(x_{k-1}), \quad k = \overline{1, n},$$

$$g(x) = \int_{x_{k-1}}^x g'(t) dt + g(x_{k-1}), \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, построим кубический сплайн на всем отрезке $[a, b]$. Он будет обладать непрерывной второй производной. Условия интерполяции $g(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$, дадут

$$g(x) = \int_{x_{k-1}}^x g'(t) dt + f(x_{k-1}), \quad k = \overline{1, n}$$

и еще останется условие

$$g(x_n) = f(x_n).$$

Кроме того, надо потребовать непрерывности сплайна и его первой производной во внутренних точках:

$$g(x_{k-1} - 0) = g(x_k + 0), \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

$$g'(x_{k-1} - 0) = g'(x_k + 0), \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

Пример 28. Построить кубический сплайн через метод момент при условии, что

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1;$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Решение.

Полагаем, что

$$g''(x) = M_{k-1} + \frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, 2}.$$

Восстановим первую производную

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{x_{k-1}}^x g''(t) dt + g'(x_{k-1}) = \\ &= M_{k-1}(x - x_{k-1}) + \frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{(x - x_{k-1})^2}{2} + g'(x_{k-1}). \end{aligned}$$

Теперь восстановим саму функцию, т.е. сплайн на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x_{k-1}}^x g'(t) dt + g(x_{k-1}) = \\ &= M_{k-1} \frac{(x - x_{k-1})^2}{2} + \frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{(x - x_{k-1})^3}{6} + g'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + g(x_{k-1}). \end{aligned}$$

Пример 29. Построить кубический сплайн через метод моментов при условии, что

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1;$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Решение.

Возьмем первый частичный промежуток $[x_0, x_1] = [0, 1/2]$:

$$g(x) = \frac{M_0}{2}x^2 + (M_1 - M_0)\frac{x^3}{3} + g'(0)x + g(0).$$

На втором частичном промежутке $[x_1, x_2] = [1/2, 1]$

$$g(x) = \frac{M_1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{M_2 - M_1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right).$$

По определению интерполяционного сплайна третьего порядка на каждом частичном промежутке сплайн должен быть полиномом степени не выше чем третья. Как легко заметить, первое условие по-нашему построению выполнилось. Нам осталось найти следующие неизвестные величины:

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad g'(0), \quad g'(1/2), \quad g(0), \quad g(1/2).$$

Эти неизвестные мы находим из двух оставшихся условий из определения сплайна.

Второе условие — условие интерполяции, т. е.

$$g(x_0) = f(x_0) = y_0,$$

$$g(x_1) = f(x_1) = y_1,$$

$$g(x_2) = f(x_2) = y_2.$$

Условия интерполяции сразу нам дадут значения двух из неизвестных: $g(x_0)$ и $g(x_1)$. А именно,

$$g(0) = y_0 = 0,$$

$$g(1/2) = y_1 = 1.$$

Потребуем выполнение третьего условия. Получим

$$g(x_2) = \frac{M_1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{M_2 - M_1}{3}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^3 + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = y_2.$$

Следовательно,

$$\frac{M_1}{8} + \frac{M_2 - M_1}{24} + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0. \quad (5.2)$$

С условиями интерполяции завершили.

Переходим к условиям непрерывности. Ясно, что сплайн третьего порядка может иметь разрывы только во внутренних точках. Внутренней точкой в нашем примере является только $x_1 = 1/2$.

Непрерывность сплайна во внутренних точках означает, что

$$g(x_1 - 0) = g(x_1 + 0).$$

Следовательно,

$$\frac{M_0}{8} + \frac{M_1 - M_0}{24} + \frac{1}{2}g'(0) = 1. \quad (5.3)$$

Аналогично, непрерывность первой производной:

$$g'(x_1 - 0) = g'(x_1 + 0).$$

Получим

$$\frac{M_0}{2} + \frac{M_1 - M_0}{4} + g'(0) = g' \left(\frac{1}{2} \right). \quad (5.4)$$

Отметим, что условие непрерывности второй производной выполнено автоматически за счет построения метода моментов.

Таким образом, получили три уравнения (5.2), (5.3) и (5.4) для нахождения оставшихся пяти неизвестных.

Добавим еще два условия естественного сплайна, т. е.

$$g''(x_0) = g''(x_2) = 0.$$

Из двух этих условий получим, что $M_0 = M_2 = 0$.

Таким образом, получили следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} g'(0) = 2 - \frac{M_1}{12}, \\ g' \left(\frac{1}{2} \right) = -4 - \frac{M_1}{6}, \\ \frac{M_1}{4} + g'(0) = g' \left(\frac{1}{2} \right). \end{cases}$$

Отсюда получим, что $M_1 = -18$, $g'(0) = 7/2$ и $g' \left(\frac{1}{2} \right) = -1$.

Все неизвестные найдены. Осталось записать сплайн третьего порядка:

$$g(x) = \begin{cases} -6x^3 + \frac{7}{2}x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -9 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 6 \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 - x + \frac{3}{2}, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

График сплайна третьего порядка

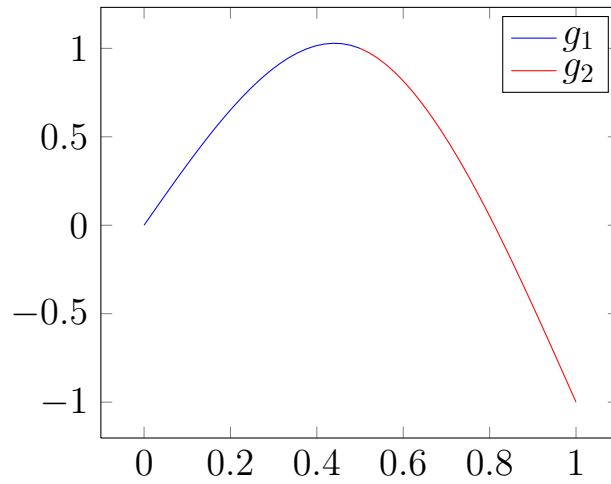


Рис. 18: График сплайна третьего порядка.

Задание для самостоятельного решения.

Решить задачу из предыдущего примера со следующими краевыми условиями

$$g'(0) = 1, \quad g'(1) = 2.$$

6. Наилучшие приближения в нормированных и гильбертовых пространствах

Пусть F — линейное нормированное пространство над полем вещественных чисел. Рассмотрим некоторую систему $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ линейно-независимых элементов из F . Их линейные комбинации т. е. элементы вида

$$f_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k l_k \quad (\alpha_k \in R)$$

образуют замкнутое подпространство $F_n = \{f_n\}$. Для любого $f \in F$ ставится задача минимизации функционала $\Phi : R^n \rightarrow R$, определенного равенством

$$\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k l_k\|_F.$$

Инфимум этой нормы, т. е. неотрицательная величина

$$E_n f = \inf_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \Phi(\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

называется **наилучшим приближением** $f \in F$ (элементами $f_n \in F_n \subset F$). Существование и единственность наилучшего приближения легко следует из определения и классических теорем анализа. Остается открытым лишь вопрос о нахождении этой величины.

Далее, если существует элемент

$$f_n^0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^0 l_k \in F_n,$$

на котором достигается этот инфимум, то его называют **элементом наилучшего приближения**. Возникают естественные **вопросы**:

- 1) существует ли элемент наилучшего приближения f_n^0 ;
- 2) определяется ли он единственным образом;
- 3) каков алгоритм практического построения f_n^0 .

Забегая вперед, укажем, что существование элемента наилучшего приближения имеет место при самых общих предположениях, для единственности и алгоритма построения f_n^0 необходимы дополнительные предположения о структуре пространства F . Вопрос 3) мы рассмотрим в двух случаях, когда пространство F является гильбертовым или F — банахово пространство $C[a, b]$.

6.1 Теоремы существования и единственности

Теорема существования.

Теорема 12. Пусть F — линейное нормированное пространство над полем вещественных чисел. Тогда для любого $f \in F$ существует элемент наилучшего приближения f_n^0 .

Для формулировки теоремы единственности нам потребуется следующее важное определение.

Определение 2. Норма пространства F называется строго выпуклой, если для каждой пары линейно-независимых элементов $f, g \in F$ выполнено строгое неравенство треугольника:

$$\|f + g\| < \|f\| + \|g\|.$$

Ясно, что строгую выпуклость нормы по-иному можно охарактеризовать следующим свойством (равносильным приведенному определению): **если $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$, то существует число $\lambda \geq 0$ такое, что либо $f = \lambda g$, либо $g = \lambda f$.**

Строгая выпуклость нормы оказывается достаточным (хотя и не необходимым) условием единственности элемента наилучшего приближения.

Теорема 13. Пусть F — линейное нормированное пространство со строго выпуклой нормой. Тогда для каждого $f \in F$ элемент наилучшего приближения определяется единственным образом.

Примеры пространств со строго выпуклыми нормами

1) Норма в любом гильбертовом пространстве является строго выпуклой.

2) Для любого $p \in (1, \infty)$ строго выпуклую норму имеет пространство Лебега $L_p^\rho(a, b)$ ($\rho(x) > 0$ п. в. на $[a, b]$) с нормой

$$\|f\| = \left(\int_a^b \rho(x) |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Для случая $p = 2$ это пространство является гильбертовым. Для остальных значений параметра утверждение следует из того, что для линейно-независимых функций известные интегральные неравенства Гельдера и Минковского являются строгими.

Популярные банаховы пространства, нормы в которых не являются строго выпуклыми:

- 1) норма пространства $C[a, b]$ не является строго выпуклой;
- 2) норма пространства Лебега L^1 также не является строго выпуклой.

6.2 Приближения в гильбертовом пространстве

Пусть F — гильбертово пространство, $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ — система линейно-независимых элементов из F . Для любого $f \in F$ элемент наилучшего приближения f_n^0 существует и определяется единственным образом, так как норма гильбертова пространства является строго выпуклой. Оказывается, что в случае гильбертова пространства легко вычислить само наилучшее приближение $E_n f$ и найти явно f_n^0 .

Поскольку любая система линейно-независимых элементов l_1, l_2, \dots, l_n может быть преобразована в ортонормированную применением процесса ортогонализации Грама-Шмидта и этот процесс описывается явными формулами, то нам необходимо в первую очередь рассматривать наилучшие приближения элементами ортонормированной системы.

Теорема 14. Пусть F — гильбертово пространство, система $\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subset F$ является ортонормированной. Тогда для любого $f \in F$ наилучшее приближение по этой системе определяется формулой

$$E_n f = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k^0|^2},$$

а элемент наилучшего приближения f_n^0 — формулой

$$f_n^0 = \sum_{k=1}^n c_k^0 l_k,$$

где числа c_k^0 определяются равенствами $c_k^0 = (f, l_k)$ и называются коэффициентами Фурье.

Теорема 15. Пусть F — гильбертово пространство. Если l_1, l_2, \dots, l_n линейно-независимы, то элемент наилучшего приближения f_n^0 для любого $f \in F$ определяется по формуле

$$f_n^0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^0 l_k,$$

где α_k^0 ($k = 1, 2, \dots, n$) — решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (l_k, l_j) = (f, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

6.3 Примеры применения общих теорем

Приведем несколько примеров применения доказанных теорем.

Пример 1'. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами можно построить следующим образом.

В гильбертовом пространстве $F = L^2(0, 2\pi)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

рассмотрим ортогональную систему

$$\{e^{-irx}, \dots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \dots, e^{irx}\}.$$

Элемент наилучшего приближения для любого $f \in L^2(0, 2\pi)$ по указанной системе определяется формулой

$$f_n^0(x) = \sum_{k=-r}^r \alpha_k^0 e^{ikx},$$

где

$$\alpha_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Пример 2'. Наилучшее приближение алгебраическими полиномами степени $\leq n$ в пространстве L_ρ^2 с весом ρ ($\rho(x) > 0$ почти всюду на $[a, b]$).

В этом случае естественно рассмотреть систему $1, x, x^2, \dots, x^n$. Соответствующая ортонормированная система является системой ортогональных (с весом $\rho(x)$) полиномов

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x).$$

Элемент наилучшего приближения для любой функции $f \in L^2_\rho(a, b)$ представим в виде

$$f_n^0 = \sum_{k=0}^n c_k^0 P_k(x),$$

где

$$c_k^0 = (f, P_k) = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) P_k(x) dx}{\int_a^b \rho(x) P_k^2(x) dx}.$$

Если система ортогональных полиномов $P_k(x)$ неизвестна, то полином наилучшего приближения ищется в виде

$$f_n^0 = \sum_{k=0}^n \alpha_k^0 x^k,$$

неизвестные коэффициенты определяются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n a_{kj} \alpha_k^0 = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$a_{kj} = \int_a^b \rho(x) x^{k+j} dx, \quad b_j = \int_a^b \rho(x) f(x) x^j dx.$$

Примеры 3' и 4' (Случай среднеквадратичных приближений на дискретном множестве точек).

На отрезке $[a, b]$ возьмем точки x_1, x_2, \dots, x_n ($x_j \neq x_k$ при $j \neq k$). Рассмотрим определенные на этих узлах функции $f : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$. Множество всех таких функций образует конечномерное пространство $F = \{f\}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{l=1}^n f(x_l) g(x_l)$$

и нормой

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{l=1}^n |f(x_l)|^2}.$$

Далее, в F рассмотрим систему линейно-независимых функций

$$l_1(x), \quad l_2(x), \quad \dots, \quad l_m(x).$$

Понятно, что должно выполняться неравенство

$$n \geq m.$$

Для любой функции $f \in F$ рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \sum_{l=1}^n |f(x_l) - f_m(x_l)|^2$$

на функциях вида

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k l_k(x).$$

Такую задачу можно попытаться исследовать методами классического дифференциального исчисления, взяв за отправную точку систему необходимых условий экстремума:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Но нам проще интерпретировать эту задачу как частный случай задачи о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

Пример 3'. Алгебраические полиномы наилучшего среднеквадратичного приближения на дискретном множестве точек получаются так. Для узлов $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ и линейно-независимой системы

$$1, x, x^2, \dots, x^{m-1} \quad (\text{т. е. } l_k(x) = x^{k-1})$$

элемент наилучшего приближения можно представить в виде

$$f_m^0 = \sum_{k=1}^m \alpha_k^0 x^{k-1}.$$

Согласно общей теории, неизвестные коэффициенты определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k (l_k, l_j) = (f, l_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

где

$$(l_k, l_j) = \sum_{l=1}^n x_l^{k+j-2}, \quad (f, l_j) = \sum_{l=1}^n f(x_l) x_l^{j-1}.$$

Пример 4'. Среднеквадратичное приближение тригонометрическими полиномами на дискретном множестве точек.

Для n узлов

$$x_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

рассмотрим пространство функций

$$f : \{x_l\}_{l=0}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$$

со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l) \overline{g(x_l)}.$$

Система функций e^{ijx} , $j = 0, 1, \dots, m-1$ ($n \geq m$) является ортонормированной в этом пространстве. Действительно, имеем

$$(l_k, l_j) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{ikx_l} e^{ijx_l} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{i(k-j)\frac{2\pi}{n}l}.$$

Поэтому, если $k = j$, то

$$(l_k, l_k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} 1 = 1;$$

если же $k \neq j$, то с учетом формул

$$u = e^{i(k-j)\frac{2\pi}{n}} \neq 1, \quad u^n = 1,$$

получаем

$$n(l_k, l_j) = \sum_{l=0}^{n-1} u^l = \frac{u^n - 1}{u - 1} = \frac{e^{2\pi i(k-j)} - 1}{u - 1} = 0.$$

Согласно общей теории элемент наилучшего приближения является отрезком ряда Фурье для заданного элемента f , т. е.

$$f_m^0 = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^0 e^{ikx},$$

где

$$\alpha_k^0 = (f, e^{ikx}) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l) \cdot e^{-ikx_l}.$$

6.4 Способы построения полинома наилучшего приближения

Приведем в краткой форме алгоритмы построения полинома наилучшего среднеквадратического приближения.

Способ 1. Многочлен наилучшего приближения (ПНП) ищется в виде

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k.$$

Неизвестные α_k ищутся из условия ортогональности $f(x) - p(x)$ всему подпространству H_n , т. е.

$$(f(x) - p(x), x^j) = \int_a^b \rho(x)[f(x) - p(x)]x^j dx = 0, \quad j = \overline{0, n}.$$

Способ 2. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ — ортогональная система многочленов в L_ρ^2 . Тогда элемент p представляет собой отрезок ряда Фурье

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k^0 \varphi_k(x),$$

где коэффициенты ряда Фурье

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_k(x) dx}.$$

Пример 30. Построить первым способом многочлен n -ой степени наилучшего среднеквадратического приближения (НСКП) для функции $f(x)$ на (a, b) . Вычислить наилучшее приближение $E_n f$:

$$f(x) = x^2, \quad \rho(x) = 1, \quad (a, b) = (-1, 1), \quad n = 1.$$

Решение.

Представим многочлен НСКП в виде $P(x) = c_0 + c_1 x$. Тогда

$$\begin{cases} (f - P, 1) = 0 \\ (f - P, x) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 (x^2 - c_0 - c_1x) \cdot 1 dx = 0 \\ \int_{-1}^1 (x^2 - c_0 - c_1x) \cdot x dx = 0 \end{cases}.$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{3} - 2c_0 = 0 \\ -\frac{2}{3}c_1 = 0 \end{cases},$$

решив которую, получим $c_0 = 1/3, c_1 = 0$. Следовательно, $P(x) = 1/3$, и

$$E_n f = \|f(x) - P(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{45}}.$$

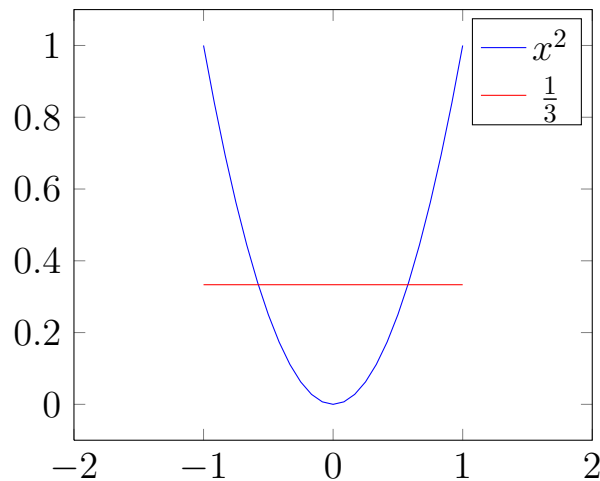


Рис. 19: График функции и ПНП.

Пример 31. Построить первым способом многочлен n -ой степени НСКП для функции $f(x)$ на (a, b) . Вычислить наилучшее приближение $E_n f$:

$$f(x) = x^2, \quad \rho(x) = 1, \quad (a, b) = (0, 1), \quad n = 1.$$

Решение.

Представим многочлен НСКП в виде $P(x) = c_0 + c_1x$. Тогда

$$\begin{cases} (f - P, 1) = 0 \\ (f - P, x) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \int_0^1 (x^2 - c_0 - c_1x) \cdot 1 dx = 0 \\ \int_0^1 (x^2 - c_0 - c_1x) \cdot x dx = 0 \end{cases}.$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - 2c_0 - \frac{1}{2}c_1 = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{3}c_1 = 0 \end{cases},$$

решив которую, получим $c_0 = -1/6, c_1 = 1$. Следовательно, $P(x) = x - 1/6$.

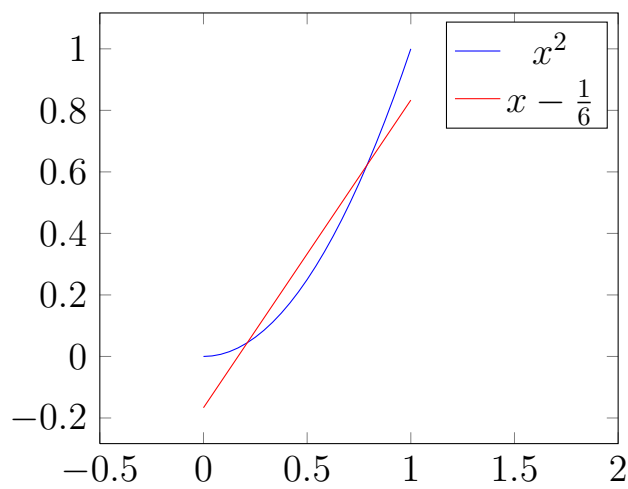


Рис. 20: График функции и ПНП.

Пример 32. Построить вторым способом многочлен n -ой степени НСКП для функции $f(x)$ на (a, b) :

$$f(x) = x^3, \quad \rho(x) = 1, \quad (a, b) = (-1, 1), \quad n = 2.$$

Решение.

Ортогональную систему на $(-1, 1)$ образуют многочлены Лежандра

$$\varphi_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = 2x, \quad \varphi_2(x) = 12x^2 - 4.$$

Тогда

$$P_2(x) = c_0 + 2c_1x + (12x^2 - 4)c_2,$$

и неизвестные коэффициенты c_0, c_1, c_2 вычисляются следующим образом:

$$c_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0,$$

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 2x dx}{\int_{-1}^1 4x^2 dx} = \frac{3}{10},$$

$$c_2 = \frac{(f, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 (12x^2 - 4) dx}{\int_{-1}^1 (12x^2 - 4)^2 dx} = 0.$$

Следовательно $P_2(x) = \frac{3}{5}x$.

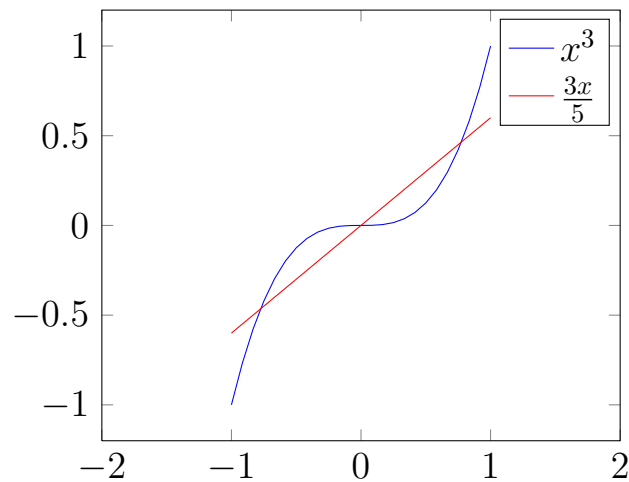


Рис. 21: График функции и ПНП.

Пример 33. Построить вторым способом многочлен n -ой степени НСКП для функции $f(x)$ на (a, b) :

$$f(x) = x^3, \quad \rho(x) = 1, \quad (a, b) = (-1, 1), \quad n = 2.$$

Решение.

Ортогональную систему на $(-1, 1)$ образуют многочлены Лежандра

$$\varphi_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = 2x, \quad \varphi_2(x) = 12x^2 - 4.$$

Тогда

$$P_2(x) = c_0 + 2c_1x + (12x^2 - 4)c_2,$$

и неизвестные коэффициенты c_0, c_1, c_2 вычисляются следующим образом:

$$c_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0,$$

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 2x dx}{\int_{-1}^1 4x^2 dx} = \frac{3}{10},$$

$$c_2 = \frac{(f, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{\int_{-1}^1 x^3(12x^2 - 4) dx}{\int_{-1}^1 (12x^2 - 4)^2 dx} = 0.$$

Следовательно $P_2(x) = \frac{3}{5}x$.

Пример 34. Построить вторым способом многочлен n -ой степени НСКП для функции $f(x)$ на (a, b) :

$$f(x) = x^2, \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (a, b) = (-1, 1), \quad n = 1.$$

Решение.

Ортогональную с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ систему на $[-1, 1]$ образуют многочлены Чебышева 1-го рода

$$T_k(x) = \cos k \arccos x, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = c_0 + c_1x,$$

и неизвестные коэффициенты c_0, c_1 вычисляются следующим образом:

$$c_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{1}{2},$$

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx} = 0.$$

Следовательно $P_2(x) = \frac{1}{2}$.

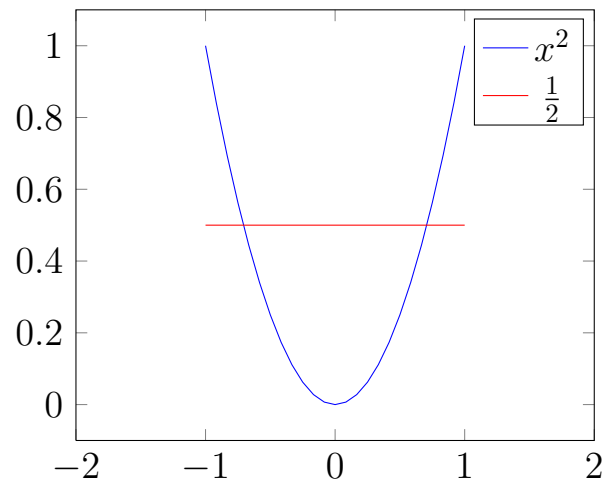


Рис. 22: График функции и ПНП.

Пример 35. Построить вторым способом многочлен n -ой степени НСКП для функции $f(x)$ на (a, b) :

$$f(x) = x^3, \quad \rho(x) = 1, \quad (a, b) = (0, 1), \quad n = 2.$$

Решение.

Возьмем многочлены Лежандра $1, 2t, 12t^2 - 4$ и сделаем замену $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, при которой отрезок $[-1, 1]$ перейдет в $[0, 1]$. Отсюда $t = 2x - 1$ и

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = 4x - 2, \quad \varphi_2(x) = 48x^2 - 48x + 8.$$

Тогда

$$P_2(x) = c_0 + c_1(4x - 2) + c_2(48x^2 - 48x + 8),$$

и неизвестные коэффициенты c_0, c_1, c_2 вычисляются следующим образом:

$$c_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 dx} = \frac{1}{4},$$

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_0^1 x^3 \cdot (4x - 2) dx}{\int_0^1 (4x - 2)^2 dx} = \frac{9}{40},$$

$$c_2 = \frac{(f, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{\int_0^1 x^3 (48x^2 - 48x + 8) dx}{\int_0^1 (48x^2 - 48x + 8)^2 dx} = \frac{1}{32}.$$

Следовательно,

$$P_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{9}{40}(4x - 2) + \frac{1}{32}(48x^2 - 48x + 8) = 0.05 - 0.6x + 1.5x^2.$$

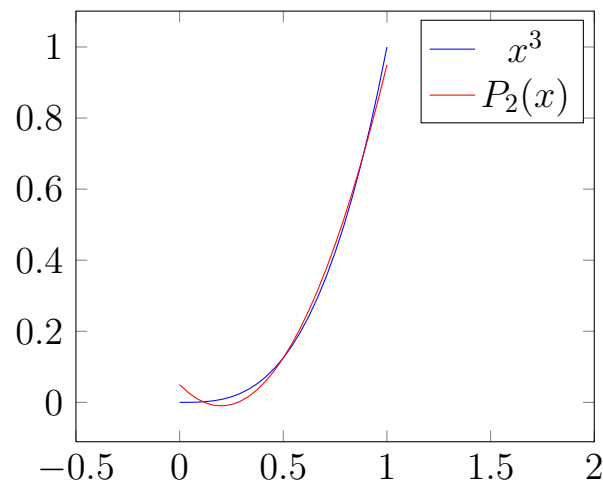


Рис. 23: График функции и ПНП.

Пример 36. Построить вторым способом многочлен n -ой степени НСКП для функции $f(x)$ на (a, b) :

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1, \quad \rho(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad (a, b) = (-1, 1), \quad n = 3.$$

Решение.

Функция $x^4 \notin H_3$, а функция $Q(x) = -3x^2 + 2x + 1 \in H_3$. В силу свойств наилучших приближений достаточно построить многочлен НСКП $\tilde{P}_3(x)$ для функции x^4 , тогда $P_3(x) = \tilde{P}_3(x) + Q(x)$. Ортогональную с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ систему функций образуют многочлены Чебышева 2-го рода:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = 2x, \quad \varphi_2(x) = 4x^2 - 1, \quad \varphi_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

Тогда

$$\tilde{P}_3(x) = c_0 + 2c_1x + (4x^2 - 1)c_2 + (8x^3 - 4x)c_3,$$

и неизвестные коэффициенты c_0, c_1, c_2, c_3 вычисляются следующим образом:

$$c_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_{-1}^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx}{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx} = \frac{1}{8},$$

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_{-1}^1 2x^5 \sqrt{1-x^2} dx}{\int_{-1}^1 4x^2 \sqrt{1-x^2} dx} = 0,$$

$$c_2 = \frac{(f, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{\int_{-1}^1 x^4(4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} dx}{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}(4x^2 - 1)^2 dx} = \frac{3}{16},$$

$$c_3 = \frac{(f, \varphi_3)}{(\varphi_3, \varphi_3)} = \frac{\int_{-1}^1 x^4(8x^3 - 4x)\sqrt{1-x^2} dx}{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}(8x^3 - 4x)^2 dx} = 0.$$

Следовательно,

$$\tilde{P}_3(x) = \frac{1}{8} + (4x^2 - 1)\frac{3}{16} = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{16},$$

$$P_3(x) = -\frac{9x^2}{4} + 2x + \frac{15}{16}.$$

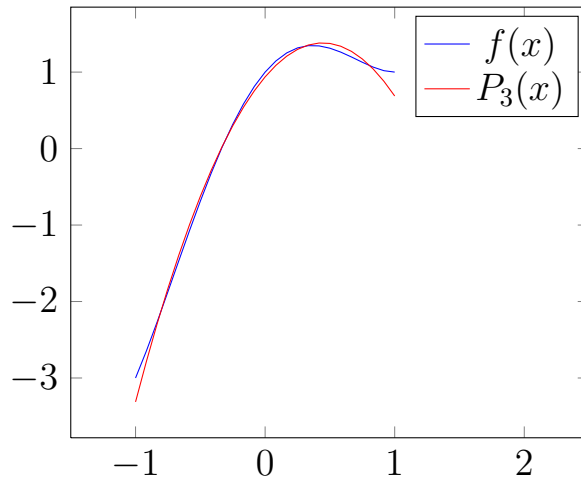


Рис. 24: График функции и ПНП.

Наилучшее среднеквадратическое приближение на дискретном множестве точек

Пример 37. Построить многочлен n -ой степени НСКП на дискретном множестве точек двумя способами. Вычислить $E_n(f)$.

$$f(x) = x^3, \quad \rho_i = 1, \quad x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, \quad n = 1.$$

Решение.

1-ый способ:

$$P(x) = ax + b,$$

и неизвестные коэффициенты a, b находятся из условий

$$\begin{cases} (f - P, 1) = 0 \\ (f - P, x) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - P(x_i)) = 0 \\ \sum_{i=1}^m (f(x_i) - P(x_i))x_i = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 P(x_i) = \sum_{i=1}^3 f(x_i) \\ \sum_{i=1}^3 P(x_i)x_i = \sum_{i=1}^3 f(x_i)x_i \end{cases},$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^3 x_i + b \sum_{i=1}^3 1 = \sum_{i=1}^3 x_i^3 \\ a \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 x_i^4 \end{cases}.$$

Получаем $a = 1, b = 0$ и $P(x) = x$. Многочлен $P(x)$ совпал с многочленом Лагранжа $L_2(f; x)$, поэтому невязка

$$\|f - P\| = 0.$$

2-ой способ:

Построим ортогональную систему функций. Поскольку для ортогональности коэффициент значения не имеет, то $\varphi_0(x)$ можно взять в виде $\varphi_0(x) = 1$. По тем же соображениям $\varphi_1(x) = x + \alpha$.

$$(1, x + \alpha)_{2,m} = -1 + \alpha + 0 + \alpha + 1 + \alpha = 0,$$

откуда $\alpha = 0, \varphi_1(x) = x$.

$$c_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{(x^3, 1)}{(1, 1)} = 0,$$

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{(x^3, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^4}{\sum_{i=1}^3 x_i^2} = 1,$$

$P(x) = x$.

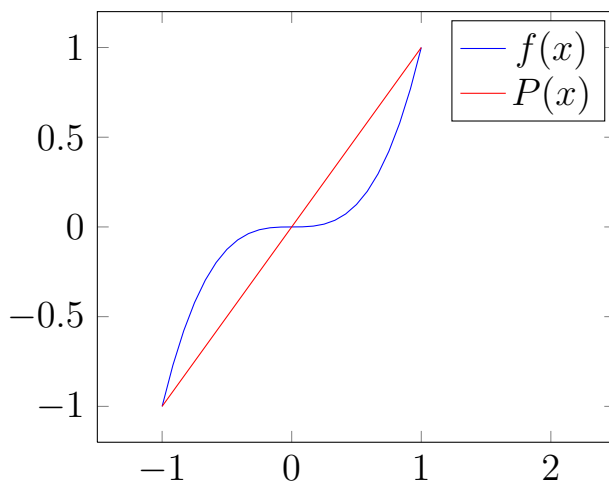


Рис. 25: График функции и ПНП.

Пример 38. Построить многочлен n -ой степени НСКП на дискретном множестве точек двумя способами. Вычислить $E_n(f)$.

$$f(x) = x^3, \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, \quad \rho_i = 1, \quad n = 1.$$

Решение.

Решение ищем в виде $P(x) = ax + b$. Неизвестные a и b найдем из условий:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^3 x_i + b \sum_{i=1}^3 1 = \sum_{i=1}^3 x_i^3 \\ a \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 x_i^4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + 3b = \frac{9}{8} \\ \frac{5}{4}a + \frac{3}{2}b = \frac{17}{16} \end{cases}.$$

Откуда находим $a = 1, b = -1/8$ и

$$P(x) = x - \frac{1}{8}, \quad E_n(f) = \sqrt{\frac{3}{32}}.$$

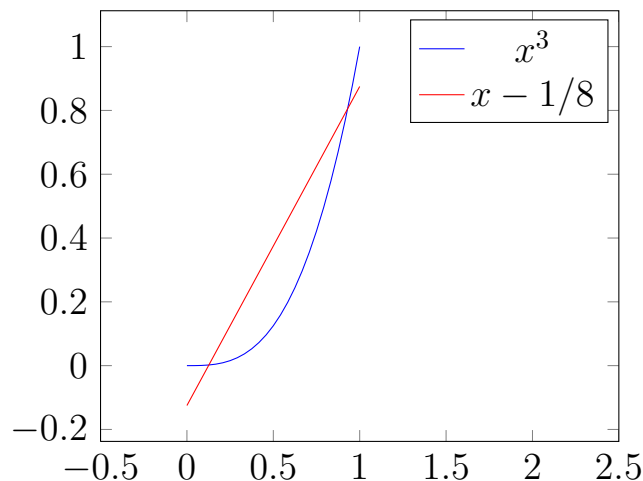


Рис. 26: График функции и ПНП.

Пример 39. $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$, $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$, $\rho_i = 1$, $n = 1$

Решение.

Представим функцию $f(x)$ в виде суммы двух функций $Q(x) = x^3, R(x) = -2x + \frac{1}{2}$. Для функции $Q(x)$ полином 1-й степени НСКП был найден в предыдущем примере: $x - \frac{1}{8}$. Функция $R(x)$ есть полином 1-й степени. Учитывая свойства полиномов НСКП, получаем искомым многочлен

$$P(x) = x - \frac{1}{8} - 2x + \frac{1}{2} = -x + \frac{3}{8}.$$

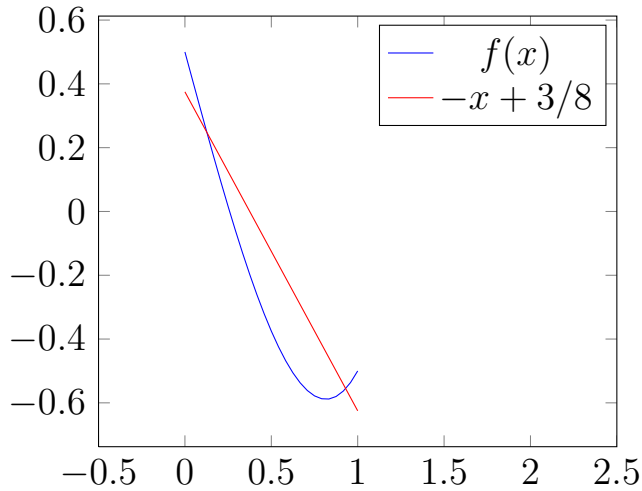


Рис. 27: График функции и ПНП.

Тригонометрические многочлены НСКП

Пример 40. Для функции $f(x) = 2 + 3 \sin x + \cos 2x$ построить тригонометрический многочлен НСКП второй степени, $(a, b) = (-\pi, \pi)$.

Решение.

Необходимо приблизить тригонометрический полином второй степени f тригонометрическим полиномом T такой же степени. Из существования и единственности тригонометрического многочлена НСКП следует, что $T(x) = f(x) = 2 + 3 \sin x + \cos 2x$.

Проверим это непосредственными вычислениями. Многочлен НСКП будем искать в виде

$$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x.$$

Тогда неизвестные коэффициенты найдем следующим образом:

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + 3 \sin x + \cos 2x) dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx} = 2,$$

$$a_1 = \frac{(f, \cos x)}{(\cos x, \cos x)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + 3 \sin x + \cos 2x) \cos x dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx} = 0,$$

$$b_1 = \frac{(f, \sin x)}{(\sin x, \sin x)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + 3 \sin x + \cos 2x) \sin x dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = 3,$$

$$a_2 = \frac{(f, \cos 2x)}{(\cos 2x, \cos 2x)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + 3 \sin x + \cos 2x) \cos 2x dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx} = 1,$$

$$b_2 = \frac{(f, \sin 2x)}{(\sin 2x, \sin 2x)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + 3 \sin x + \cos 2x) \sin 2x dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx} = 0.$$

Тогда

$$T(x) = 2 + 3 \sin x + 2 \cos 2x.$$

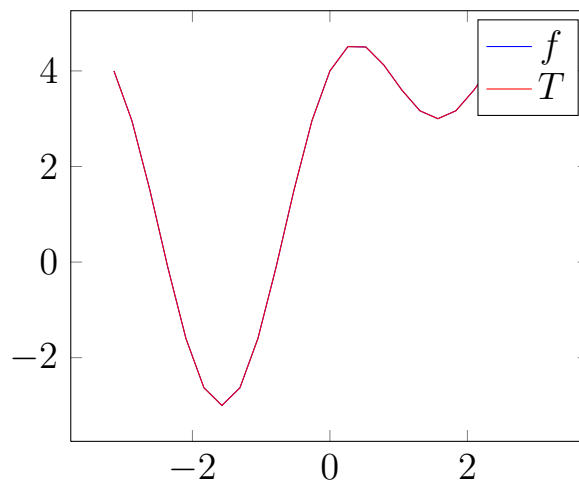


Рис. 28: График функции и ПНП.

Пример 41. Для функции $f(x) = x^3$ построить тригонометрический многочлен НСКП 3-ой степени, $(a, b) = (-\pi, \pi)$.

Решение.

Многочлен НСКП будем искать в виде

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Поскольку функция $f(x)$ нечетная, все $a_k = 0$. Тогда неизвестные коэффициенты b_k найдем следующим образом:

$$b_k = \frac{(f, \sin kx)}{(\sin kx, \sin kx)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin kx dx}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin kx dx}{\pi} =$$

$$= -\frac{2(k\pi(-6 + k^2\pi^2) \cos k\pi - 3(-2 + k^2\pi^2) \sin k\pi)}{k^4\pi}.$$

Следовательно,

$$T(x) = 2(\pi^2 - 6) \sin x + \frac{1}{4}(6 - 4\pi^2) \sin 2x + \frac{2}{27}(-6 + 9\pi^2) \sin 3x.$$

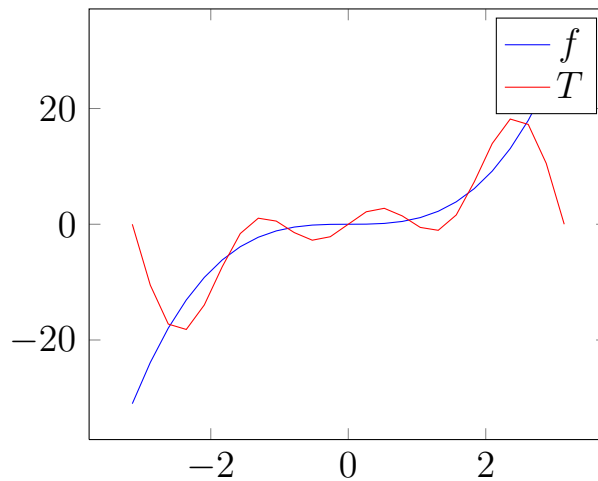


Рис. 29: График функции и ПНП.

6.5 Наилучшие равномерные приближения полиномами

Рассмотрим подробнее задачу о наилучших приближениях алгебраическими полиномами в банаховом пространстве $C[a, b]$ над полем вещественных чисел. Более точно, для любой функции $f \in C[a, b]$ рассматривается величина — наилучшее приближение f в метрике $C[a, b]$ алгебраическими полиномами степени $\leq n$:

$$E_n f = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{C[a, b]},$$

где

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

— полиномы степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами.

Поскольку $C[a, b]$ — линейное нормированное пространство, то, согласно общей теории, существует хотя бы один полином наилучшего равномерного приближения, т. е. существует

$$P_n^0(x) = a_0^0 + a_1^0 x + \dots + a_n^0 x^n,$$

такой, что

$$E_n f = \|f - P_n^0\|_{C[a,b]}.$$

Норма пространства $C[a, b]$ не является строго выпуклой, поэтому необходим иной подход для доказательства единственности полинома наилучшего равномерного приближения $P_n^0(x)$.

Наилучшие равномерные приближения непрерывных функций алгебраическими полиномами описываются теоремами П.Л. Чебышева. Но прежде всего, мы напомним классическую теорему Вейерштрасса.

Теорема 16. *Для любой функции $f \in C[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический полином $P(x)$ такой, что*

$$\|f - P\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

Из определения наилучшего приближения непосредственно следует, что $E_n f \geq 0$ для любого n и

$$E_0 f \geq E_1 f \geq \dots \geq E_n f \geq \dots \quad (n \geq 1).$$

Легко доказывается и следующее утверждение.

Теорема 17. *Для любой функции $f \in C[a, b]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n f = 0.$$

С целью подготовки к пониманию основной теоремы этого параграфа — теоремы о чебышевском альтернансе — рассмотрим задачу нахождения наилучшего приближения в простейших случаях, когда n равно нулю или единице.

Пусть $n = 0$, для непостоянной функции $f \in C[a, b]$ необходимо найти постоянную a_0^0 , реализующую следующий минимум:

$$\min_{a_0} \|f - a_0\|_{C[a,b]} = E_0 f.$$

Геометрически очевидно, что

$$P_0^0(x) = a_0^0 = \frac{M + m}{2}, \quad E_0 f = \frac{M - m}{2},$$

где

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_1), \quad m = \min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_2).$$

Ясно, что существуют по крайней мере две таких различных точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что для остаточного члена $r_0(x) = P_0^0(x) - f(x)$ справедливы равенства

$$r_0(x_1) = -E_0 f, \quad r_0(x_2) = +E_0 f.$$

Если $n = 1$, то наилучшее приближение

$$E_1 f = \min_{a_0, a_1} \|f - (a_0 + a_1 x)\|_{C[a, b]}$$

легко определяется геометрически для случая, когда f — выпуклая функция. Имеем

$$P_1^0(x) = a_0^0 + a_1^0 x, \quad a_1^0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

а постоянная a_0^0 такова, что для $r_0(x) = P_0^0(x) - f(x)$ справедливы равенства

$$r_0(x_j) = \alpha(-1)^j E_1 f, \quad \alpha = \pm 1, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $x_1 = a$, $x_2 \in (a, b)$, $x_3 = b$.

Оказывается верным естественное обобщение этих примеров для любых $n \in \mathbb{N}$: если P_n^0 — полином наилучшего равномерного приближения для $f \in C[a, b]$, то существует не менее $n + 2$ точек

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n+2}, \quad x_k \in [a, b],$$

таких, что

$$P_n^0(x_j) - f(x_j) = \alpha(-1)^j \cdot E_n f, \quad j = 1, 2, \dots, n + 2,$$

где $\alpha = \text{const}$, причем либо $\alpha = 1$, либо $\alpha = -1$.

Теорема 18. (О чебышевском альтернансе.) Для любой функции $f \in C[a, b]$ полином $P_n(x)$ степени $\leq n$ является полиномом наилучшего равномерного приближения f тогда и только тогда, когда на $[a, b]$ существует не менее $n + 2$ точек

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n+2}$$

таких, что

$$P_n(x_j) - f(x_j) = \alpha(-1)^j \|P_n - f\|_{C[a,b]}, \quad j = 1, 2, \dots, n + 2, \quad (6.1)$$

где $\alpha = \text{const}$, причем либо $\alpha = 1$, либо $\alpha = -1$.

Теорема об альтернансе позволяет установить единственность полинома наилучшего равномерного приближения.

Теорема 19. Для любой функции $f \in C[a, b]$ и любого n полином наилучшего равномерного приближения P_n^0 определяется единственным образом.

Следствие 19.1. Пусть $f \in C[-a, a]$, $a > 0$.

1) Если f — четная функция, то ее полином наилучшего равномерного приближения P_n^0 также является четным.

2) Если f нечетна, то P_n^0 также нечетна.

Опишем теперь задачу, показывающую связь полиномов Чебышева 1-го рода с теоремой о чебышевском альтернансе.

Задача Чебышева. Найти $P_{n-1}^0(x)$ — полином наилучшего равномерного приближения степени $\leq n - 1$ для функции $f(x) = x^n$, $x \in [-1, 1]$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}},$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева 1-го рода. Покажем, что искомый полином определяется по формуле: $P_{n-1}^0(x) = x^n - \widetilde{P}_n(x)$.

Для этого достаточно проверить условие альтернанса Чебышева. Поскольку рассматривается задача для полиномов степени $\leq n - 1$, это условие должно выполняться в $n + 1$ точке. Пусть

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Имеем

$$x_k^n - P_{n-1}^0(x_k) = \frac{T_n(x_k)}{2^{n-1}} = \frac{\cos k\pi}{2^{n-1}} = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \|\cos(n \arccos x)\|_{C[-1,1]}.$$

Тогда по теореме Чебышева об альтернансе искомым полином наилучшего равномерного приближения дается формулой

$$P_{n-1}^0(x) = x^n - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}.$$

Следствие 19.2. Для любого полинома $P_{n-1}(x)$ степени $\leq n - 1$

$$\|x^n + P_{n-1}(x)\|_{C[-1;1]} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В заключение отметим, что заменой переменной $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, система полиномов Чебышева 1-го рода

$$\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

преобразуется в тригонометрическую систему косинусов

$$\{1, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots\}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

С учетом этого легко показать, что $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортогональная система в L^2_ρ с весовой функцией

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 42. Найти точки чебышевского альтернанса и построить многочлен наилучшего равномерного приближения (НРП) указанной степени.

$$f(x) = x^2, \quad [a, b] = [0, 1], \quad n = 0, 1.$$

Решение.

Обозначим через $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$P_0(x) = \frac{m + M}{2} = \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пусть теперь $x_1 = 0, x_3 = 1$. Многочлен НРП имеет вид $P_1(x) = Ax + B$, где

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1.$$

Найдем последнюю точку чебышевского альтернанса.

$$A - f'(x_2) = 0.$$

Следовательно, $x_2 = \frac{1}{2}$, и из

$$Aa + B - f(a) + Ax_2 + B - f(x_2) = 0$$

находим, что $B = -\frac{1}{8}$. Тогда $P_1(x) = x - \frac{1}{8}$.

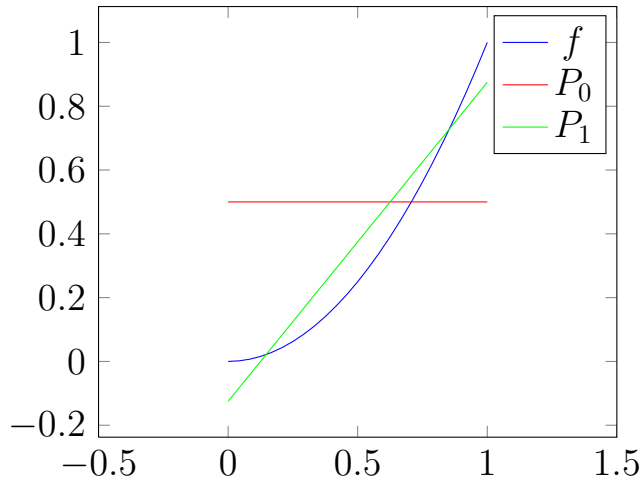


Рис. 30: График функции и ПНП.

Пример 43. Найти точки чебышевского альтернанса и построить многочлен наилучшего равномерного приближения (НРП) указанной степени.

$$f(x) = x^3, \quad [a, b] = [1, 2], \quad n = 0, 1.$$

Решение.

Обозначим через $x_1 = 1, x_2 = 2$.

$$P_0(x) = \frac{m + M}{2} = \frac{f(1) + f(2)}{2} = \frac{9}{2}.$$

Пусть теперь $x_1 = 1, x_3 = 2$. Многочлен НРП имеет вид $P_1(x) = Ax + B$, где

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 7.$$

Найдем последнюю точку чебышевского альтернанса.

$$A - f'(x_2) = 0.$$

Следовательно, $x_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}$, и из

$$Aa + B - f(a) + Ax_2 + B - f(x_2) = 0$$

находим, что $B = -3 - \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3$. Тогда $P_1(x) = 7x - 3 - \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3$.

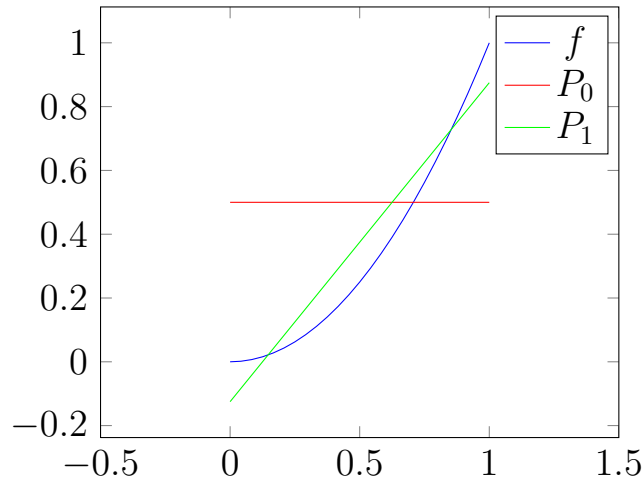


Рис. 31: График функции и ПНП.

Пример 44. Для многочлена x^{n+1} построить на $[-1, 1]$ многочлен НРП n -й степени.

Решение.

По определению многочлена НРП

$$\|x^{n+1} - P_n(x)\|_{C[-1,1]} = \inf_{Q_n \in H_n} \|x^{n+1} - Q_n(x)\|_{C[-1,1]} = \left\| \frac{T_{n+1}(x)}{2^n} \right\|_{C[-1,1]},$$

поскольку $x^{n+1} - Q_n(x)$ — есть многочлен $(n + 1)$ -й степени со старшим коэффициентом, равным 1. Отсюда получим

$$P_n(x) = x^{n+1} - \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}.$$

Пример 45. Для функции $f(x) = x^3$ необходимо построить многочлен НРП второй степени на отрезке $[-1, 1]$.

Решение.

$$P_2(x) = x^3 - \frac{T_3(x)}{2^2}.$$

С помощью рекуррентной формулы для нахождения полиномов Чебышева первого рода

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$

найдем

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Тогда

$$P_2(x) = x^3 - \frac{4x^3 - 3x}{4} = \frac{3}{4}x.$$

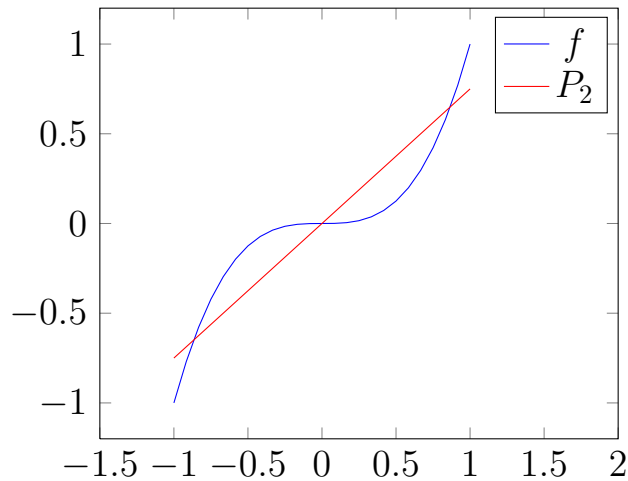


Рис. 32: График функции и ПНП.

Пример 46. Для многочлена S_{n+1} со старшим коэффициентом $a_{n+1} > 0$ построить на $[-1, 1]$ многочлен НРП n -й степени

Решение.

$$\|S_{n+1} - P_n\| = \inf_{Q_n \in H_n} \|S_{n+1} - Q_n\| = a_{n+1} \inf_{Q_n \in H_n} \left\| \frac{S_{n+1} - Q_n}{a_{n+1}} \right\| = a_{n+1} \left\| \frac{T_{n+1}(x)}{2^n} \right\|.$$

Отсюда

$$S_{n+1}(x) - P_n(x) = a_{n+1} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n},$$

$$P_n(x) = S_{n+1}(x) - a_{n+1} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}.$$

Пример 47. Для функции $f(x) = x^3$ на $[0, 2]$ построить многочлен НРП степени 2.

Решение.

Переведем отрезок $[0, 2]$ в $[-1, 1]$:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t = 1+t, \quad t = x-1.$$

Тогда

$$f(t) = (1+t)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1,$$

$$P_2(t) = f(t) - \frac{T_3(t)}{4} = 3t^2 + \frac{15}{4}t + 1,$$

$$P_2(x) = 3(x-1)^2 + \frac{15}{4}(x-1) + 1 = 3x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{4}.$$

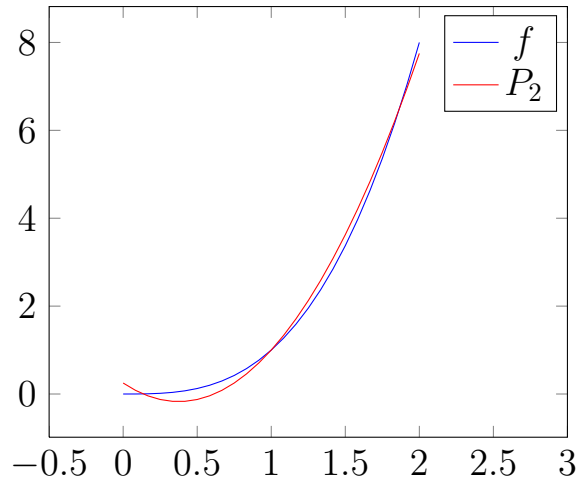


Рис. 33: График функции и ПНП.

Пример 48. Для функции $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$ построить многочлен НРП степени 1.

Решение.

Переведем отрезок $[0, 1]$ в $[-1, 1]$:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad t = 2x-1.$$

Тогда

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2.$$

$$\|f(t) - P_1(t)\| = \inf_{Q(t) \in H_1} \|f(t) - Q(t)\| = \left\| \frac{T_2(t)}{2 \cdot 4} \right\|, \quad T_2(t) = 2t^2 - 1.$$

$$P_1(t) = f(t) - \frac{1}{4} \cdot \frac{T_2(t)}{2} = \frac{t}{2} + \frac{3}{8},$$

следовательно,

$$P_1(x) = \frac{2x - 1}{2} + \frac{3}{8} = x - \frac{1}{8}.$$

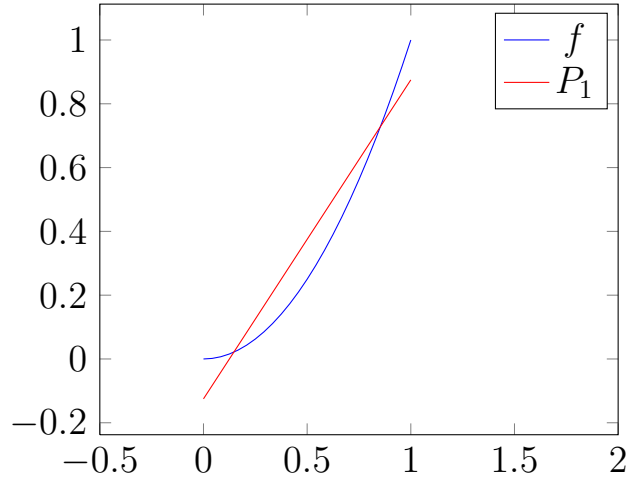


Рис. 34: График функции и ПНП.

Пример 49. Для функции $f(x) = \sin 100x$ на $[0, \pi]$ построить многочлен НРП 50-й степени.

Решение.

Докажем, что $P_{50}(x) = 0$. Для этого найдем 52 точки чебышевского альтернанса.

$$f'(x) = 100 \cos 100x = 0,$$

тогда

$$x = \frac{\pi}{200} + \frac{\pi k}{100}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $x \in [0, \pi]$, то $k = \overline{0, 99}$. Таким образом, получили 100 точек чебышевского альтернанса. Отсюда следует, что многочлен НРП вплоть до 98-й степени будут равны нулю.

7. Квадратурные формулы

Интеграл Римана

$$\int_a^b f(x) dx$$

сколь угодно точно аппроксимируется интегральными суммами вида

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k.$$

Тем не менее, интегральные суммы могут сходиться к значению интеграла очень медленно. Поэтому разработаны оригинальные методы численного интегрирования. Важное место среди них занимают классические квадратурные формулы.

Как это принято в теории меры Жордана символом $\langle a, b \rangle$ мы будем обозначать промежуток от a до b , чтобы охватить одним символом 4 возможных варианта: $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) .

Пусть $f \in C \langle a, b \rangle$, заданы точки $x_1, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$. Будем рассматривать задачу приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx,$$

где $\rho = \rho(x)$ – фиксированная весовая функция. Предполагаем, что

$$\rho(x) \in L_1[a, b], \quad \rho(x) \geq 0, \quad \int_a^b \rho(x) dx > 0.$$

Квадратурной принято называть формулу вида

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (7.1)$$

где A_k – некоторые вещественные числа. Предполагается, что коэффициенты A_k не зависят от f . Точки x_k в формуле (7.1) принято называть узлами.

Определение 3. Пусть M – некоторое семейство функций, непрерывных на промежутке $\langle a, b \rangle$. Говорят, что квадратурная формула (7.1) точна на множестве M , если для каждой функции $F \in M$

$$\int_a^b \rho(x) F(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k F(x_k),$$

т. е. приближенное равенство превращается в обычное. В частности, говорят, что квадратурная формула (7.1) точна на множестве алгебраических полиномов степени $\leq m$, если имеют место равенства

$$\int_a^b \rho(x)x^j dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^j$$

для любого $j = 0, 1, \dots, m$.

Прием, лежащий в основе всех классических квадратурных формул, состоит в замене подинтегральной функции некоторым ее приближением (например, интерполяционным полиномом или сплайном).

7.1 Интерполяционные квадратурные формулы

Пусть $f \in C < a, b >$, рассмотрим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(f; x)$, построенный по сетке узлов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset < a, b >$. Заменяя подинтегральную функцию ее интерполяционным полиномом в форме Лагранжа, получаем приближенную формулу

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x)f(x) dx &\approx \int_a^b \rho(x)L_n(f; x) dx = \\ &= \int_a^b \rho(x) \sum_{k=1}^n f(x_k)l_k(x) dx = \sum_{k=1}^n p_k f(x_k), \end{aligned}$$

где

$$p_k = \int_a^b \rho(x)l_k(x) dx,$$

или, что то же самое,

$$p_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)} dx,$$

где

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Полученная таким образом квадратурная формула

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

называется **интерполяционной квадратурной формулой**.

Пример 50. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с помощью интерполяционной квадратурной формулы с узлами

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 1.$$

Вес взять равным единице.

Решение.

Вычислим A_k , $k = \overline{1, 3}$.

$$A_1 = \int_0^1 \frac{(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6},$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} dx = -4 \int_0^1 (x^2 - x) dx = -4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3}$$

и

$$A_3 = \int_0^1 \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) dx = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, получили следующую интерполяционную квадратурную формулу.

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{6} f(0) + \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} f(1). \quad (7.2)$$

Подставляя вместо f конкретную функцию $\sin x/x$, получим

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sin 1 = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sin 1.$$

Следующая теорема связывает интерполяционность и алгебраическую степень точности.

Теорема 20. Квадратурная формула (7.1) с коэффициентами A_k является точной для любого алгебраического полинома степени $\leq n - 1$ тогда и только тогда, когда она совпадает с интерполяционной квадратурной формулой, т. е. когда $A_k = p_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Пример 51. Найти коэффициенты интерполяционной квадратурной формулы из предыдущего примера, используя теорему 20.

Решение.

Наша цель — построить квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_3 f(1).$$

По условию задачи эта квадратурная формула является интерполяционной. Следовательно, по условию теоремы 20 является точной на всех полиномах степени не выше чем 2. Имеем

$$\begin{cases} \int_0^1 1 dx = A_1 + A_2 + A_3; \\ \int_0^1 x dx = A_2 \frac{1}{2} + A_3; \\ \int_0^1 x^2 dx = A_2 \frac{1}{4} + A_3. \end{cases}$$

Таким образом, получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1; \\ A_2 \frac{1}{2} + A_3 = \frac{1}{2}; \\ A_2 \frac{1}{4} + A_3 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решая ее, получим $A_1 = 1/6$, $A_2 = 2/3$ и $A_3 = 1/2$.

7.2 Погрешность интерполяционной квадратурной формулы

Погрешность интерполяционной квадратурной формулы

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

может быть эффективно оценена для $f \in C^n[a, b]$, где n — число узлов квадратурной формулы.

Теорема 21. Пусть $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, $n \geq 1$. Если $f \in C^n[a, b]$, то существует точка $\eta \in [a, b]$ такая, что для погрешности интерполяционной квадратурной формулы справедлива оценка

$$|R_n(f)| \leq \frac{|f^{(n)}(\eta)|}{n!} \int_a^b \rho(x) |\omega_n(x)| dx.$$

А в частном случае, когда $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, имеет место равенство

$$R_2(f) = \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b \rho(x) \omega_2(x) dx.$$

Пример 52. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с помощью интерполяционной квадратурной формулы по узлам

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 1$$

и оценить погрешность.

Решение.

Воспользуемся квадратурной формулой (7.2). Получим

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{6}e^0 + \frac{2}{3}e^{1/4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{1/4} + \frac{1}{6}.$$

Из теоремы следует, что

$$|R_n(f)| \leq \frac{\|p(x)\|_{C[a,b]} \|f^{(n)}(x)\|_{C[a,b]}}{n!} \int_a^b |\omega_n(x)| dx,$$

где, напомним,

$$\|g(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

В нашем случае $\rho(x) \equiv 1$. Имеем

$$f'''(x) = e^{x^2} (8x^3 + 12x).$$

$$\|f'''(x)\|_C = \max_{x \in [0,1]} |f'''(x)| = f'''(1) = 20e.$$

$$\begin{aligned}
|R_3(f)| &\leq \frac{20e}{6} \int_0^1 \left| x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1) \right| dx = \\
&= \frac{10e}{3} \left(\int_0^1 x \left(\frac{1}{2} - x \right) (1 - x) dx + \int_{1/2}^1 x \left(\frac{1}{2} - x \right) (1 - x) dx \right) = \\
&= \frac{10e}{3} \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64} \right) = \frac{10e}{3} \frac{1}{32} = \frac{e}{9.6} < \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

Пример 53. Интеграл $\int_0^1 e^x dx$ вычисляется с помощью интерполяционной квадратурной формулы с узлами Чебышева I-го рода. Записать узлы и найти минимальное количество узлов, которое обеспечит точность $\varepsilon = 0.01$.

Решение.

Найдем узлы Чебышева на отрезке $[0, 1]$. Отображение

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

переводит отрезок $[-1, 1]$ на произвольный отрезок $[a, b]$, т. е. узлы Чебышева на $[a, b]$ определяются по формуле

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где $t_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ – узлы Чебышева на $[-1, 1]$.

В случае отрезка $[0, 1]$ получим

$$x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Известно, что в случае узлов Чебышева имеем

$$\omega_n(x) = \left(\frac{b-a}{2} \right)^n \omega_n(t) = \frac{T_n(t)}{2^{2n-1}}.$$

Найдем норму n -ой производной функции e^x . Ясно, что

$$\|f^{(n)}(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} f^{(n)}(x) = \max_{x \in [0,1]} e^x = e.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\omega_n(x)| dx &= \int_{-1}^1 \left| \frac{T_n(t)}{2^{2n-1}} \right| \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2^{2n}} \int_{-1}^1 |T_n(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{2n}} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$|R_n(f)| \leq \frac{e}{n!2^{2(n-1)}} < 0.01$$

выполнится при $n = 4$.

8. Квадратурная формула Ньютона-Котеса

Интерполяционную квадратурную формулу на $[a, b]$ для равномерной сетки шага $h = (b - a)/n$ с узлами

$$a = x_0, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \dots, \quad x_n = a + nh = b$$

принято называть **формулой Ньютона-Котеса**.

На практике поступают следующим образом: разбивают промежуток интегрирования на несколько частичных промежутков и на каждом из них применяют интерполяционную квадратурную формулу с небольшим числом узлов. Получаемые на этом пути формулы называются **составными квадратурными формулами**.

Отметим, что популярные приближенные **формулы прямоугольников и трапеций, а также формула Симпсона являются составными квадратурными формулами**. Поясним этот факт подробнее на примере формулы трапеций для приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Приближенную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)],$$

принято называть **малой формулой трапеций**.

Общая (большая) формула трапеций строится так: сегмент $[a, b]$ делим на $n \geq 2$ равных частей точками

$$a = x_0, \quad x_1 = a + h, \quad \dots, \quad x_k = a + kh, \quad \dots, \quad x_n = a + nh = b,$$

и представляем искомый интеграл в виде суммы:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

Применяя на каждом частичном отрезке малую формулу трапеций, находим

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{2} [f(x_{k-1}) + f(x_k)] = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]. \end{aligned}$$

Обозначив $f_k = f(x_k)$, $h = (b-a)/n$, мы можем записать **большую формулу трапеций** в традиционной форме

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} \right].$$

8.1 Оценки погрешности трех квадратурных формул

Формула трапеций

Из общей теоремы оценки погрешности интерполяционных квадратурных формул вытекает следующее утверждение: если $f \in C^2[a, b]$, то для малой формулы трапеций существует точка $\eta \in [a, b]$ такая, что погрешность

$$R_2(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

определяется формулой

$$R_2(f) = \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{f''(\eta)}{12} (b-a)^3.$$

Оценка погрешности

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} \right]$$

большой формулы трапеций дается в следующей теореме.

Теорема 22. Если $f \in C^2[a, b]$, то существует $\eta \in [a, b]$ такая, что погрешность большой формулы трапеций равна

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следующий простой пример явно показывает невозможность дальнейшего повышения порядка погрешности $O(1/n^2)$ для формулы трапеций за счет повышения порядка гладкости интегрируемой функции.

Пример. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ сколь угодно гладкую функцию $f(x) = x^2$, сетку $x_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, n$, с шагом $h = 1/n$. Пользуясь известной формулой

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

легко вычисляем погрешность формулы трапеций для интеграла $\int_0^1 x^2 dx$:

$$\int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right] = -\frac{1}{6n^2}.$$

Можно получить оценки погрешности формулы трапеций и в случае, когда на функцию накладываются менее жесткие ограничения, чем $f \in C^2[a, b]$. Для этого удобнее пользоваться иной трактовкой большой формулы трапеций, а именно, геометрически очевидной формулой

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b S_n^1(f; x) dx,$$

где $S_n^1(f; x)$ – сплайн 1-ой степени. Тогда погрешность формулы трапеций

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) dx,$$

где $r_n(x) = f(x) - S_n^1(f; x)$. Понятно, что оценки погрешности $R_n(f)$ без труда следуют из известных неравенств для $r_n(x)$.

Поскольку в формуле трапеций используется равномерная сетка, то диаметр разбиения равен шагу сетки, т. е. $\delta_n = h = (b-a)/n$. Опишем кратко несколько новых оценок погрешности $R_n(f)$ для формулы трапеций:

1) пусть $f \in C[a, b]$, тогда

$$|r_n(x)| \leq \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right),$$

ПОЭТОМУ

$$|R_n(x)| \leq \omega \left(f, \frac{b-a}{n} \right) \cdot \int_a^b dx \leq (b-a) \omega \left(f, \frac{b-a}{n} \right);$$

в частности, если $f \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) с постоянной M , то

$$|R_n(f)| \leq \frac{M(b-a)^{1+\alpha}}{n^\alpha} = O \left(\frac{1}{n^\alpha} \right);$$

2) пусть $f' \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) с постоянной M_1 . Тогда с учетом неравенства

$$|r_n(x)| \leq \frac{b-a}{4n} \omega \left(f'; \frac{b-a}{n} \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} R_n(f) &\leq \frac{b-a}{4n} \cdot \frac{M_1(b-a)^\alpha}{n^\alpha} \cdot (b-a) = \\ &= \frac{(b-a)^{2+\alpha} M_1}{4n^{1+\alpha}} = O \left(\frac{1}{n^{1+\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Квадратурные формулы прямоугольников

Малая формула прямоугольников для $f \in C[a, b]$ имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Наиболее употребительными являются три частных случая, когда $\xi = a$ или $\xi = b$, т. е. берутся левый или правый концы промежутка интегрирования, или же $\xi = c = (a+b)/2$, т. е. выбирается средняя точка.

Таким образом, принято различать три различных малых формулы прямоугольников. А именно, рассматривают малые формулы левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(a)$$

или правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(b),$$

а также малую формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(c).$$

Пусть

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n \geq 2, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n,$$

и обозначим

$$f(x_k) = f_k, \quad f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = f_{k-\frac{1}{2}}.$$

Большие формулы прямоугольников получаем как составные

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

суммированием малых формул для частичных отрезков. Таким образом возникают большая формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}],$$

большая формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f_1 + f_2 + \dots + f_n],$$

и наконец, большая формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{n-1/2}].$$

Правые части во всех трех формулах прямоугольников представляют собой интегральную сумму, поэтому мы можем утверждать следующее: если f интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a, b]$, то погрешность приближения для всех трех формул прямоугольников стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Зная модуль непрерывности подинтегральной функции, мы можем получить порядковые оценки погрешности $R_n(f)$ для формул прямоугольников.

Теорема 23. Если $f \in C^1[a, b]$ или даже $f \in Lip 1$, то

$$R_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

для всех трех формул прямоугольников.

Как показывает следующий пример, для формул левых или правых прямоугольников усилить эту теорему невозможно.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$. Точное значение интеграла $\int_0^1 x dx$ равно $1/2$, приближенное значение по формуле левых прямоугольников

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) = \frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

и по формуле правых прямоугольников

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Для формулы средних прямоугольников справедлив удивительный факт: оценка погрешности по порядку оказывается такой же, какой она является для формулы трапеций.

Теорема 24. Если $f \in C^2[a, b]$, то погрешность для формулы средних прямоугольников можно оценить следующим образом: существует точка η такая, что

$$R_n(f) = \frac{f''(\eta)}{24n^2} (b-a)^3 = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Пример 54. Вычислить сколько узлов необходимо для приближения квадратурной формулой средних прямоугольников интеграла

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение.

Воспользуемся формулой из теоремы 24. Очевидно, что

$$f''(x) = \left(e^{x^2} \right)'' = (2 + 4x^2)e^{x^2}.$$

Следовательно,

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |(2 + 4x^2)e^{x^2}| = 6e.$$

Таким образом,

$$|R_n(f)| \leq \frac{6e}{24n^2} = \frac{e}{4n^2} < 10^{-4}.$$

Отсюда делаем вывод, что необходимо взять 83 узла.

Квадратурная формула Симпсона

Стандартный путь построения формулы Симпсона состоит в замене подинтегральных функций параболическими сплайнами, т. е. сплайнами второй степени.

Малая квадратурная формула Симпсона для функции $f \in C[a, b]$ строится по трем узлам:

$$x_1 = a, \quad x_2 = c := \frac{a+b}{2}, \quad x_3 = b.$$

Пусть $L_3(f; x)$ — интерполяционный полином Лагранжа. Будем искать его в форме Ньютона

$$L_3(f; x) = A + B(x - a) + C(x - a)(x - b).$$

Приближенное равенство

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_3(f; x) dx$$

будем называть малой формулой Симпсона.

Имеем: $A = f(a)$ в силу условия $L_3(f; a) = f(a)$, равенство $L_3(f; b) = f(b)$ дает уравнение $f(b) = f(a) + B(b - a)$ для определения B , а затем из условия $L_3(f; c) = f(c)$ можно найти постоянную C . Непосредственные вычисления (мы их пропускаем) коэффициентов A , B , C и суммы интегралов

$$A \int_a^b dx + B \int_a^b (x - a) dx + C \int_a^b (x - a)(x - b) dx$$

приводят к малой формуле Симпсона в привычной форме:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)].$$

Оценим теперь погрешность малой формулы Симпсона при условии $f \in C^3[a, b]$. Пользуясь оценкой погрешности интерполяционных квадратурных формул, получаем

$$|R_3(x)| \leq \frac{|f'''(\eta)|}{3!} \int_a^b |(x-a)(x-b)(x-c)| dx = \frac{|f'''(\eta)|}{192} (b-a)^4,$$

где $\eta \in [a, b]$.

Большая формула Симпсона составляется из малых. Полагаем

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n \geq 2, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

записываем равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

и применяем малую формулу Симпсона на каждом из частичных отрезков.

Так как $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, то итоговая формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \left[f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right]$$

с учетом обозначений

$$f_k = f(x_k), \quad f_{k-\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$$

имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + 2(f_{1/2} + \dots + f_{n-1/2}) + f_1 + \dots + f_{n-1} \right].$$

Это и есть классическая формула Симпсона.

Суммируя погрешности малых формул для частичных отрезков, получаем погрешность большой формулы Симпсона: существуют точки $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и $\eta \in [a, b]$ такие, что

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &\leq \frac{(b-a)^4}{192n^3} \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f'''(\eta_k)| \right) = \\ &= \frac{(b-a)^4}{192n^3} |f'''(\eta)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Пример 55. Вычислить $\ln 2$ с помощью малой формулы Симпсона и оценить погрешность.

Решение.

Используя малую формулу Симпсона, получим

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{6} \left(1 + \frac{4}{3/2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{36}.$$

Теперь оценим погрешность малой формулы Симпсона в нашем случае.

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

Следовательно,

$$\max_{x \in [1,2]} f^{(4)}(x) = 24.$$

Таким образом,

$$|R_3(f)| \leq \frac{24}{2880} < 0.01.$$

9. Квадратурные формулы Гаусса

До сих пор мы рассматривали квадратурные формулы с произвольными узлами. При любом выборе узлов интерполяционная квадратурная формула

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (9.1)$$

с коэффициентами

$$A_k = p_k := \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x) dx}{(x - x_k) \omega'_n(x_k)} \quad (9.2)$$

является точной для полиномов степени не выше $n - 1$. Гаусс предложил выбирать узлы x_k специальным образом, чтобы эта формула оказалась точной на полиномах наибольшей степени. Он доказал, что интерполяционная квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

будет точной для любого полинома степени не выше $2n - 1$, если узлы $x_k \in [-1, 1]$ являются нулями полинома Лежандра степени n . Оказалось, что идея

Гаусса легко распространяется и на общий случай, т. е. узлы можно выбрать таким образом, что

$$\int_a^b \rho(x)x^m dx = \sum_{k=1}^n p_k x_k^m \quad (9.3)$$

для любого $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

Интерполяционные квадратурные формулы вида (9.1), точные на полиномах степени не выше $2n - 1$, называются квадратурными формулами Гаусса или **квадратурными формулами наивысшего алгебраического порядка точности**. Слово "наивысшего" здесь не является случайным, так как справедливо следующее утверждение: *ни при каком выборе узлов $x_1, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$ и коэффициентов A_k квадратурная формула вида (9.1) не может быть точной для всех полиномов степени $2n$.*

Доказательство от противного: если существует квадратурная формула вида (9.1), точная на полиномах степени $2n$, то для функции

$$f(x) = \omega_n^2(x), \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k),$$

являющейся полиномом степени $2n$, мы получаем противоречивое соотношение

$$0 < \int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_n^2(x_k) = 0.$$

Пример 56. Вычислить $\int_0^1 e^x dx$ по квадратурной формуле Гаусса с одним узлом.

Решение.

По условию задачи количество узлов $n = 1$. Нам необходимо построить формулу вида

$$\int_0^1 f(x) \approx A_1 f(x_1).$$

Для этого определим x_1 и A_1 . Наивысшая алгебраическая степень $m = 2n - 1 = 2 - 1 = 1$. Следовательно, по определению квадратурной формулы Гаусса, имеем

$$\int_0^1 1 dx = A_1; \quad \int_0^1 x dx = A_1 x_1.$$

Решая эту систему, имеем

$$A_1 = 1 \text{ и } x_1 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, квадратурная формула Гаусса с одним узлом на интервале $[0, 1]$ имеет вид

$$\int_0^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Подставляя в эту формулу конкретную функцию e^x получим

$$\int_0^1 e^x dx \approx e^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 57. Найти узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2). \quad (9.4)$$

Решение.

По условию задачи $n = 2$. Следовательно, квадратурная формула Гаусса (9.4) точна на всех полиномах степени не выше $m = 2n - 1 = 3$. Таким образом,

$$\begin{cases} \int_0^1 1 dx = A_1 + A_2, \\ \int_0^1 x dx = A_1 x_1 + A_2 x_2, \\ \int_0^1 x^2 dx = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2, \\ \int_0^1 x^3 dx = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3. \end{cases}$$

Посчитав интегралы в правых частях равенств, получим

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2, \\ \frac{1}{2} = A_1 x_1 + A_2 x_2, \\ \frac{1}{3} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2, \\ \frac{1}{4} = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3. \end{cases}$$

Решение этой системы дадут значения A_1 , A_2 , x_1 и x_2 .

9.1 Структура квадратурных формул Гаусса

Полиномы P и Q будем называть ортогональными с весом $\rho(x)$, если

$$\int_a^b \rho(x)P(x)Q(x)dx = 0.$$

Напомним: всюду в дальнейшем предполагаем, что весовая функция является интегрируемой и удовлетворяет условиям

$$\rho(x) \geq 0, \quad \int_a^b \rho(x) dx > 0.$$

Теорема 25. *Квадратурная формула (9.1) точна для любого полинома степени $\leq 2n - 1$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) полином $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ ортогонален с весом $\rho(x)$ любому полиному $q(x)$ степени $\leq n - 1$, т. е.

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)q(x)dx = 0;$$

2) квадратурная формула является интерполяционной, т. е. ее коэффициенты A_k выражаются формулой (9.2).

Следующая теорема показывает, что существует единственная сетка узлов x_1, x_2, \dots, x_n , для которой $\omega_n(x)$ удовлетворяет условию 1) этой теоремы. Окончательное утверждение вытекает из двух последующих теорем.

Теорема 26. *Для любого натурального числа n существует полином $P_n(x)$ степени n , ортогональный с весом $\rho(x)$ любому полиному степени $\leq n - 1$.*

Отметим, что процесс ортогонализации Грама-Шмидта приводит к полиному $P_n(x)$ со старшим членом вида cx^n , $c \neq 0$. Поэтому в дальнейшем полагаем

$$P_n(x) = c\omega_n(x) = c(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Следующая теорема показывает, что имеем возможность использовать нули ортогонального полинома $P_n(x)$ в качестве узлов квадратурной формулы.

Теорема 27. *Все нули ортогонального полинома P_n вещественны, просты (т. е. нет кратных корней) и лежат в интервале (a, b) .*

9.2 Оценки погрешности

Приведем две различных оценки погрешности квадратурной формулы

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

в предположении, что эта формула точна на полиномах степени $\leq 2n - 1$, т. е. является квадратурной формулой Гаусса. Как мы уже знаем, это предположение равносильно следующим условиям:

полином $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ ортогонален с весом $\rho(x)$ любому полиному степени $\leq n - 1$, а коэффициенты p_k вычисляются по формулам

$$p_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x) dx}{(x - x_k) \omega_n'(x_k)}.$$

Напомним, что при любой сетке узлов для любой интерполяционной квадратурной формулы

$$\sum_{k=0}^n p_k = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Дополнительным свойством формулы Гаусса является положительность всех коэффициентов p_k ($k = 1, \dots, n$). Убедиться в этом можно так: для любого индекса k функция

$$f_k(x) = \left(\frac{\omega_n(x)}{x - x_k} \right)^2 \quad (f_k(x_k) := \omega_n'^2(x_k) > 0)$$

является полиномом степени $2n - 2$, поэтому формула Гаусса для нее точна:

$$\int_a^b \rho(x) f_k(x) dx = \sum_{j=1}^n p_j f_k(x_j) = p_k f_k(x_k).$$

Отсюда следует

$$p_k = \frac{\int_a^b \rho(x) f_k(x) dx}{f_k(x_k)} > 0.$$

Таким образом, при любом числе узлов сетки

$$0 < p_k \leq \int_a^b \rho(x) dx,$$

т. е. коэффициенты ограничены числом, не зависящим от n , и вычисления по квадратурной формуле наивысшего алгебраического порядка точности

оказываются устойчивыми при повышении числа узлов. Эксперты по вычислениям отмечают, что на практике квадратурные формулы Гаусса применяются с числом узлов до 100.

В двух следующих теоремах через

$$\psi_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

мы будем обозначать погрешность квадратурной формулы Гаусса.

Теорема 28. Для любой функции $f \in C[a, b]$

$$|\psi_n(f)| \leq 2(E_{2n-1}f) \int_a^b \rho(x) dx,$$

где $E_{2n-1}f$ — наилучшее равномерное приближение f полиномами степени $\leq 2n - 1$.

Теорема 29. Для любой функции $f \in C^{2n}[a, b]$ справедливо представление

$$\psi_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx,$$

где $\eta \in [a, b]$.

9.3 Явный вид формул для специальных весов

Лишь при малых значениях числа узлов n мы можем построить явно ортогональные полиномы $P_n(x)$ для произвольного промежутка и допустимого веса, пользуясь, например, процессом ортогонализации Грама-Шмидта. Явные выражения для $P_n(x)$ при любом числе узлов получены лишь в специальных случаях. Мы дадим краткое описание наиболее употребительных ортогональных полиномов и соответствующих им квадратурных формул Гаусса.

1) Полиномы Лежандра

$$\Lambda_n(x) = \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$$

ортогональны с весом $\rho(x) \equiv 1$ на отрезке $[-1, 1]$. Нули P_n еще "вручную", были табулированы до значений $n = 512$. Соответствующая квадратурная

формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n p_k f(x_k), \quad p_k = \int_{-1}^1 \frac{\Lambda_n(x) dx}{(x - x_k) \Lambda_n'(x_k)} dx,$$

первая среди квадратурных формул наивысшего алгебраического порядка точности, была получена Гауссом.

2) Ортогональными полиномами на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

оказываются уже знакомые нам полиномы Чебышева I рода:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

с нулями

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Легко вычисляются коэффициенты: $p_k = \pi/n$ для любого k . Соответствующая квадратурная формула наивысшего алгебраического порядка точности – формула Эрмита – имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right).$$

3) Для случая $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$ ортогональные полиномы – полиномы Чебышева II рода – определены формулами

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos x.$$

Полином $U_n(x)$ обращается в нуль в точках

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, \dots, n),$$

а квадратурная формула также имеет явный вид:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

4) Пусть $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ на отрезке $[-1, 1]$. Фиксированные параметры удовлетворяют неравенствам $\alpha > -1$, $\beta > -1$, вытекающим

из условия интегрируемости весовой функции. Соответствующие ортогональные полиномы

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \cdot \frac{d^n[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]}{dx^n}$$

называются полиномами Якоби. Можно показать, что коэффициенты p_k выражаются в явном виде в терминах Γ -функции Эйлера.

5) Для построения квадратурных формул можно также использовать полиномы Лагерра

$$P_n(x) = \frac{1}{x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n[x^{n+\alpha} e^{-x}]}{dx^n}.$$

Система полиномов Лагерра ортогональна с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ на полуоси $(0, +\infty)$. Имеется естественное условие для параметра: $\alpha > -1$.

6) На числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ положительная функция $\rho(x) = e^{-x^2}$ является весовой, поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx < \infty$. Ортогональные полиномы, соответствующие этому случаю, называются полиномами Эрмита и выражаются формулой $H_n(x) = e^{x^2} \left(e^{-x^2} \right)^{(n)}$.

Пример 58. Вычислить $\int_0^1 e^x dx$ с помощью квадратурной формулы Гаусса с двумя узлами.

Решение.

Весовая функция $\rho(x) = 1$. Ортогональную систему с таким весом образуют полиномы Лежандра. Так как $n = 2$, мы должны найти вид $\Lambda_2(t)$. Имеем $\Lambda_2(t) = \frac{d^2}{dx^2}(1-t^2)^2 = (t^4 - 2t^2 + 1)'' = 4(3t^2 - 1)$. Найдем корни полином Лежандра:

$$\Lambda_2(t) = 0.$$

Следовательно,

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как корни t_1 и t_2 лежат на отрезке $[-1, 1]$, необходимо их перевести на отрезок $[0, 1]$. Воспользуемся отображением

$$x(t) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

который переводит отрезок $[-1, 1]$ на произвольный интервал $[a, b]$. Поэтому, получим корни полинома Лежандра на $[0, 1]$:

$$x_1 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

и

$$x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Воспользуемся интерполяционностью квадратурной формулы Гаусса и найдем коэффициенты A_1 и A_2 .

Имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \frac{x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}{-1/\sqrt{3}} dx = -\sqrt{3} \left[\frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)x \right] \Big|_0^1 = \\ &= -\sqrt{3} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем фактом, что $\int_0^1 1 dx = A_1 + A_2 = 1$, получим

$$A_2 = 1 - A_1 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2}e^{x_1} + \frac{1}{2}e^{x_2}.$$

Пример 59. Вычислить $\int_0^1 xf(x)dx$ по квадратурной формуле Гаусса с двумя узлами.

Решение.

Известно, что узлы Гаусса являются корнями многочлена n -ой степени, который ортогонален всем полиномам степени не выше $n-1$. В нашем случае $n=2$.

Не ограничивая общности можем взять полином

$$p_2(x) = (x-x_1)(x-x_2) = x^2 + bx + c.$$

Требуем, чтобы $p_2(x)$ был ортогонален 1 и x .

Следовательно,

$$\begin{cases} (x^2 + bx + c, 1) = 0 \\ (x^2 + bx + c, x) = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} b(x, 1) + c(1, 1) = -(x^2, 1) \\ b(x, x) + c(1, x) = -(x^2, x). \end{cases}$$

Используя определение скалярного произведения с весом x , получим

$$(1, 1) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot 1 dx = \frac{1}{2},$$

$$(x, 1) = \int_0^1 x \cdot x \cdot 1 dx = \frac{1}{3},$$

$$(x, x) = \int_0^1 x \cdot x \cdot x dx = \frac{1}{4},$$

$$(x^2, 1) = (x, x) = \int_0^1 x \cdot x \cdot x dx = \frac{1}{4},$$

$$(x^2, x) = (x, x) = \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot x dx = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, получим следующую систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = -\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Имеем

$$b = -\frac{6}{5}, \quad c = \frac{3}{10}.$$

Получим, что $p_2(x) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}$. Осталось найти корни уравнения

$$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} = 0.$$

В итоге

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}, \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}.$$

Пример 60. Вычислить

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

по квадратурной формуле Гаусса с двумя узлами и оценить погрешность.

Решение.

Ортогональную систему с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ образуют полиномы Чебышева первого рода. Имеем

$$T_2(x) = 2x^2 + 1.$$

Следовательно, узлы Гаусса

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Используя определение квадратурной формулы Гаусса, т.е. тот факт, что она является точной на всех полиномах степени не выше 3, получим

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi, \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2} e^{x_1} + \frac{\pi}{2} e^{x_2}.$$

Оценим теперь погрешность квадратурной формулы.

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &\leq \frac{\|f^{(4)}\|}{4!} \int_{-1}^1 \frac{\omega_2^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{e}{24} \int_{-1}^1 \frac{(T_2(x)/2)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \\ &\leq \frac{e}{96} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi e}{96} < 0.09. \end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения.

Вычислить

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}} dx$$

с помощью квадратурной формулы Гаусса при $n = 1$.

10. Задания для самостоятельного решения

Задания

1. Для $f(x)$, $x \in [a, b]$ построить $L_5(f, x)$ по узлам

$$(a) \quad x_k = a + k \frac{b-a}{4}, \quad k = \overline{0, 4};$$

$$(b) \quad x_k = \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{10} + \frac{b+a}{2}, \quad k = \overline{1, 5}.$$

Вычислить $L_5(f, x)$ в контрольных точках $x^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$ и сравнить со значениями $f(x^{(i)})$. Дать оценку приближения $|f(x) - L_5(f, x)|$, для обоих выборов узлов.

2. Для $f(x)$, $x \in [a, b]$ построить интерполяционный полином в форме Ньютона по узлам

$$x_k = a + k \frac{b-a}{4}, \quad k = \overline{0, 4};$$

3. Для функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, построить интерполяционный сплайн первой степени по следующим узлам:

$$(a) \quad x_k = a + k \frac{b-a}{4}, \quad k = \overline{0, 4};$$

$$(b) \quad x_k = \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{10} + \frac{b+a}{2}, \quad k = \overline{1, 5}.$$

Вычислить $S_5^1(f, x)$ в контрольных точках $x^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$ и сравнить со значениями $f(x^{(i)})$. Дать оценку приближения $|f(x) - S_5^1(f, x)|$, для обоих выборов узлов.

4. Для функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, построить естественный сплайн с помощью определения и через метод моментов, по следующим узлам:

$$(a) \quad x_k = a + k \frac{b-a}{4}, \quad k = \overline{0, 4};$$

$$(b) \quad x_k = \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{10} + \frac{b+a}{2}, \quad k = \overline{1, 5}.$$

Вычислить $S_5^3(f, x)$ в контрольных точках $x^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$ и сравнить со значениями $f(x^{(i)})$. Дать оценку приближения $|f(x) - S_5^3(f, x)|$, для обоих выборов узлов.

Конкретные функции f , значения a и b и значения $x^{(i)}$, $i = \overline{1,3}$, взять из следующего списка:

1.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{5}) \sinh x, \quad a = 1, b = 3,$$
$$x^{(1)} = 1.24, x^{(2)} = 1.97, x^{(3)} = 2.54$$

2.

$$f(x) = 2^x \cosh x, \quad a = 0, b = 2,$$
$$x^{(1)} = 0.49, x^{(2)} = 1.12, x^{(3)} = 1.76$$

3.

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{\frac{x}{3}} \cos 4x}, \quad a = 0, b = \frac{2\pi}{3},$$
$$x^{(1)} = 0.095\pi, x^{(2)} = 0.18\pi, x^{(3)} = 0.42\pi$$

4.

$$f(x) = 2^{\frac{x}{5}}, \quad a = 3, b = 4,$$
$$x^{(1)} = 15/4, x^{(2)} = 15/6, x^{(3)} = 16/7\pi$$

5.

$$f(x) = e^{x/2} + \cosh \frac{x+1}{2}, \quad a = -1, b = 1,$$
$$x^{(1)} = -\frac{5}{8}, x^{(2)} = \frac{5}{7}, x^{(3)} = 2/7$$

6.

$$f(x) = e^{x/2} + 2^{\frac{2x+1}{3}}, \quad a = -1, b = 1,$$
$$x^{(1)} = -\frac{5}{8}, x^{(2)} = \frac{5}{7}, x^{(3)} = 2/7$$

7.

$$f(x) = 2^x \cosh \frac{x}{5}, \quad a = 0, b = 2,$$
$$x^{(1)} = 0.49, x^{(2)} = 1.12, x^{(3)} = 1.76$$

8.

$$f(x) = e^{\frac{2x+3}{4}}, \quad a = 0, b = 1,$$
$$x^{(1)} = 0.29, x^{(2)} = 0.42, x^{(3)} = 0.76$$

9.

$$f(x) = e^x + \sin \frac{x+2}{2}, \quad a = -1, b = 0,$$
$$x^{(1)} = -0.29, x^{(2)} = -0.42, x^{(3)} = -0.76$$

10.

$$f(x) = 3^{\frac{4x}{5}}, \quad a = 0, b = 2,$$
$$x^{(1)} = 0.29, x^{(2)} = 1.42, x^{(3)} = 1.76$$

11.

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2} \right)^{20}, \quad a = 0, b = 1,$$
$$x^{(1)} = 0.29, x^{(2)} = 0.42, x^{(3)} = 0.76$$

12.

$$f(x) = e^{-x^3}, \quad a = -2, b = -1,$$
$$x^{(1)} = -1.29, x^{(2)} = -1.42, x^{(3)} = -1.76$$

13.

$$f(x) = e^{x^2} \cos x, \quad a = -1, b = 0,$$
$$x^{(1)} = -0.89, x^{(2)} = -0.42, x^{(3)} = -0.26$$

14.

$$f(x) = e^{x^4} \sin x, \quad a = -1, b = 0,$$
$$x^{(1)} = -0.89, x^{(2)} = -0.42, x^{(3)} = -0.26$$

Рекомендуемая литература

- [1] Авхадиев Ф. Г. *Численные методы анализа*. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013.
- [2] Бабенко К. И. *Основы численного анализа*. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986.
- [3] Бадриев И. Б., Волошановская С. Н. *Численные методы. Приближение функций и численное интегрирование*. Учебное пособие. Под ред. Р. З. Даутова. Казань: изд-во Казанского университета, 1990.
- [4] Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Учебное пособие. Под ред. В. А. Садовниченко. Москва: Высшая школа, 2000.
- [5] Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений*. Ч. 1, Москва: Наука, 1966. То же. Ч. 2. Физматгиз, 1962.
- [6] Богачев К. Ю. *Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций*. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2002.
- [7] Бут Э. Д. *Численные методы*. Москва: ГИФМЛ, 1959.
- [8] Дробышев В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С. *Задачи по вычислительной математике*. Учебное пособие. Под ред. Г. И. Марчука. Москва: Наука, 1980.
- [9] Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа*. Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1949.

- [10] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. *Вычислительные методы*. Т.1, Москва: Наука, 1976. То же. Т. 2. Москва: Наука, 1977.
- [11] Натансон И. П. *Конструктивная теория функций*. Москва: Гостехиздат. 1949.
- [12] Рябенский В. С. *Введение в вычислительную математику*. Серия "Физтехковский учебник". Москва: Физматлит, 2008.
- [13] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. Учебное пособие для вузов. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
- [14] Срочко В. А. *Численные методы. Курс лекций*. Учебное пособие для вузов. Санкт-Петербург: Изд-во ЛАНЬ, 2010.
- [15] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике*. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.
- [16] Тихомиров В. М. *Теория приближений*. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.14 (Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР)" Москва, 1987.
- [17] Тыртышников Е. Е. *Методы численного анализа*. Москва, 2006.