Корни многочленов

НОД многочленов и корни многочлена

Некоторые соглашения

$$f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \ldots + f_1 x + f_0 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i x^i,$$

$$f_i \in F, \quad i = 0, \ldots, n; \quad F - поле.$$

Это многочлен над полем *F*

Множество многочленов над полем *F* обозначим *F[X]*

Делимость многочленов

- Определение. Многочлен *g(x)* делит многочлен *f(x)* без остатка:

$$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow \exists q(x): \quad f(x) = q(x) \cdot g(x)$$

Теорема 1. (свойства делимости многочленов)

1. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$.

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $h(x)$, то $f(x)+g(x)$ делится на $h(x)$.

3. Если $f(x)$ делится на $\phi(x)$, то $\forall g(x)$ произведение $f(x)\cdot g(x)$ делится на $\phi(x)$.

4. Если $f_k(x), k=\overline{1,n}$ делится на $\phi(x)$, то $\forall g_k(x), k=\overline{1,n}$ сумма $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x)$ делится на $\phi(x)$.

5. Любой многочлен $f(x)$ делится на многочлен нулевой степени.

Следствия

Если $f(x)$ делится на $\phi(x)$, то $f(x)$ делится на $C\phi(x)$, где $C=const$.

Если $Cf(x), C\neq 0$ – делители многочлена $f(x)$, то они имеют такую же степень, что и $f(x)$.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ делятся друг на друга, если существует $C\in K, C\neq 0$ такое, что $g(x)=Cf(x)$.

Если $C\neq 0$, то делитель одного из многочленов $f(x)$ и $Cf(x)$ будет делителем и другого многочлена.

Деление с остатком

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3-5x^2+10x-3 & 3x+1 \\
\underline{3x^3+x^2} & x^2-2x+4+\frac{-7}{3x+1} \\
\quad -6x^2+10x & \\
\quad \underline{-6x^2-2x} & \\
\qquad 12x-3 & \\
\qquad \underline{12x+4} & \\
\qquad\quad -7 &
\end{array}
$$

частное

остаток

Деление с остатком

$$3x^3 - 5x^2 + 10x - 3 =$$

$$= (3x+1)\cdot\ (x^2 - 2x + 4) + \ (-7)$$

остаток

частное

Теорема 2(деление с остатком)

- Для любых двух многочленов *f* и *g* найдется, причем единственная, пара многочленов *q* и *r* , так что

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$$f(x) - \textit{делимое}$$

$$g(x) - \textit{делитель}$$

$$q(x) - \textit{частное}$$

$$r(x) - \textit{остаток}$$

$$r(x) = 0 \qquad \textit{или} \qquad \deg r(x) < \deg g(x)$$

Наибольший общий делитель

- Среди всех делителей данных многочленов *f* и *g* могут существовать общие делители.
- Ясно что степень таких делителей не превышает минимальной из степеней *f* и *g* .
- Среди всех общих делителей *f* и *g* существует многочлен наивысшей степени.
- Он называется наибольшим общим делителем (НОД) многочленов *f* и *g* .
- Обозначим его НОД(*f* , *g*).

Теорема 3.(Алгоритм Евклида)

- Для любых двух многочленов *f* и *g* найдется *приведенный* многочлен

$$d(x) = НОД(g(x),\ f(x)),$$

причем этот многочлен определяется единственным образом.

Теорема 3.(Алгоритм Евклида)

$$\begin{cases} f = g \cdot q_1 + r_1, & \deg r_1 < \deg g, \\ g = r_1 \cdot q_2 + r_2, & \deg r_2 < \deg r_1, \\ r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, & \deg r_3 < \deg r_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}, & \deg r_{k-1} < \deg r_{k-2}, \\ r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k, & \deg r_k < \deg r_{k-1}, \\ r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1}. \end{cases}$$

Пример 1. Найти НОД двух многочленов:

$$A = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ и } B = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\
\underline{x^3 + 2x^2 + 2x + 2} & \underline{1} \\
x^2 + x + 1 & \\
\underline{x + 1} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\
\underline{x^3 + x^2 + x} \\
x^2 + x + 1 \\
\underline{x^2 + x + 1} \\
0
\end{array}$$

$$\text{НОД}\,(A,\ B) = x^2 + x + 1$$

Пример 2. Найти НОД двух многочленов:

$$A = x^2 - x - 3 \text{ и } B = x + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - x - 3 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 + x} & x - 2 \\
-2x - 3 & \\
\underline{-2x - 2} & \\
x + 1 & -1 \\ \cline{2-2}
\underline{x + 1} & -x - 1 \\
0 &
\end{array}$$

Мы получили, что НОД $(A, B) = -1$, но тогда наибольший общий делитель многочленов A и B есть любое действительное отличное от нуля число. Принято писать, что НОД $(A, B) = 1$.

Расширенный алгоритм Евклида

- Рассмотрим уравнение

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = h(x),$$

- $f, g, h \in F[x]$,
- u, v – *неизвестные многочлены*

Расширенный алгоритм Евклида

- Т е о р е м а 4. Уравнение $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = h(x)$ имеет решение тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель многочленов f и g делит h.

- Следствие. Пусть $d=(f,g)$, тогда найдется пара многочленов u и v, так что $f \cdot u + g \cdot v = d$, причем $\deg u < \deg g$ и $\deg v < \deg f$.

Взаимно-простые многочлены

- Определение. Если НОД(f, g) = 1, т. е. приведенный наибольший общий делитель многочленов f и g равен 1, то говорим, что f и g взаимно просты.

- Т е о р е м а 5. Справедливы следующие утверждения:
- а) $(f, g) = 1$ тогда и только тогда, когда существуют u и v такие, что $f \cdot u + g \cdot v = 1$;
- б) если $(f, \phi) = 1$ и $(f, \psi) = 1$, то $(f, \phi \cdot \psi) = 1$;
- в) если $d \mid (fg)$ и $(d, f) = 1$, то $d \mid g$;
- г) если $d1 \mid f$, $d2 \mid f$ и при этом $(d1, d2) = 1$, то $(d1d2) \mid f$.

Корни многочлена

Элемент $c \in S$ называется *корнем многочлена* $f \in F[X]$, если $f(c) = 0$.

Найти такое число c, что $f(c) = 0$?

Пример: корни квадратичного многочлена

Запишем в виде уравнения:

$$x^2 + 2x = 15 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

Находим корни:

$$x = -5 \qquad\qquad x = 3$$

Разложим на линейные множители:

$$(x+5)(x-3) = 0$$

История вопроса

François Viète, seigneur de la Bigotière;
(1540 — 1603)

Scipione del Ferro
(1465 -1526)

Niccolò Tartaglia
(1499--1557)

Girolamo Cardano

(1501-1576)

Теорема об остатке

- Теорема 6. При делении многочлена f с комплексными коэффициентами на многочлен $x - c$, остаток равен $f(c)$:

Доказательство.

Разделим $f(x)$ на $(x-c)$:

$$f(x) = q(x)(x-c) + r,$$

r – либо ненулевое число (степень остатка <1), либо 0.

Тогда $f(c) = (c-c)q(x) + r \Longrightarrow f(c)=r$

Теорема о линейном множителе

- Теорема 7. Число с – корень многочлена *f*, т.и т.т.к. линейный многочлен *x - c* делит *f* (является множителем *f*).
- Доказательство.
- Из доказательства Теоремы 3 следует, что

$$f(x) = (x-c)q(x) \Longrightarrow (x-c)|f(x)$$

Алгебраический метод

- Разделить многочлен f на x-c.

  Если остаток равен нулю, то $x = c$ есть корень многочлена.

Вычисление значения многочлена

Вывод формул для схемы Горнера

Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - c)$ значит найти такой многочлен $q(x)$ и такое число r, что

$$f(x) = (x - c)q(x) + r.$$

Горнер Вильямс Джордж - английский математик, работал в области алгебры. В 1819 опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который назвал способом Руффини — Горнера. Этот способ был известен китайцам еще в 13 в. Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен x — a.

Вычисление значения многочлена

Вывод формул для схемы Горнера

Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на двучлен $(x-c)$ значит найти такой многочлен $q(x)$ и такое число r, что

$$f(x) = (x-c)q(x) + r.$$

Запишем подробнее

$$f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \ldots + f_1 x + f_0 =$$

$$= (x-c)(q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0) + r$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях

Вычисление значения многочлена

$$f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \ldots + f_1 x + f_0 =$$

$$= (x - c)(q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях

$$x^n: \qquad f_n = q_{n-1}$$

$$x^{n-1}: \qquad f_{n-1} = q_{n-2} - c \cdot q_{n-1}$$

$$x^{n-2}: \qquad f_{n-2} = q_{n-3} - c \cdot q_{n-2}$$

…

Вычисление значения многочлена

x^n: $f_n = q_{n-1}$

x^{n-1}: $f_{n-1} = q_{n-2} - c \cdot q_{n-1}$

x^{n-2}: $f_{n-2} = q_{n-3} - c \cdot q_{n-2}$

$\dots$

x^1: $f_1 = q_0 - c \cdot q_1$

x^0: $f_0 = r - c \cdot q_0$

Формулы для нахождения *r=f(c)*:

$$q_{n-1} = f_n$$

$$q_{n-2} = f_{n-1} + c \cdot q_{n-1}$$

$$q_{n-3} = f_{n-2} + c \cdot q_{n-2}$$

$$\dots$$

$$q_0 = f_1 + c \cdot q_1$$

$$f(c) = r = f_0 + c \cdot q_0$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x,$$

$$c = -2$$

	3	−2	−1	0
−2	3	−8	15	−30

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x = (x+2)(3x^2 - 8x + 15) - 30$$

Пример $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$, определить, является ли $x - 4$ делителем.

	1	-5	2	8
4	1	-1	-2	0

другой делитель

остаток 0, ответ - ***<u>да</u>***

$$(x-4)\left(x^2 - x - 2\right) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

Теорема о рациональных корнях приведенного целочисленного многочлена

- Теорема 8. Пусть *f* – многочлен с целыми коэффициентами, причем старший коэффициент равен 1, тогда возможные рациональные корни - только целые числа - делители свободного коэффициента.
- Доказательство. От противного.

1. Пусть

$$f(x) = x^n + f_{n-1}x^{n-1} + f_{n-2}x^{n-2} + \ldots + f_2x^2 + f_1x^1 + f_0$$

и $x = p/q$ – *рациональный корень*, p и q взаимно простые целые числа, $|q|>1$

Теорема о рациональных корнях приведенного целочисленного многочлена (продолжение доказ.)

2. Тогда $f(p/q) = 0$ дает

$$(p/q)^n + f_{n-1}(p/q)^{n-1} \ldots + f_2(p/q)^2 + f_1(p/q)^1 + f_0 = 0.$$

Домножим на q^n .

3. Получим

$$p^n + f_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + f_1pq^{n-1} + f_0q^n = 0$$

или

$$f_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + f_1pq^{n-1} + f_0q^n = -p^n$$

Теорема о рациональных корнях приведенного целочисленного многочлена (продолжение доказ.)

4. Вынесем q в левой части
   $q\,[f_{n-1}p^{n-1} + \ldots + f_1 p\, q^{n-2} + f_0\, q^{n-1}] = -p^n$
5. Левая часть делится на q, поэтому

$q \mid p^n$ - противоречит тому, что p и q взаимно простые целые числа.

Получаем $q=1$, то есть корень – целое число.

Теорема о рациональных корнях приведенного целочисленного многочлена (продолжение доказ.)

Докажем, что $p| f_0$.

1. Так как $f(p) = 0$, то

$$(p)^n + f_{n-1}(p)^{n-1} \ldots + f_2(p)^2 + f_1(p)^1 + f_0 = 0.$$

2. Перенесем f_0 в правую часть

$$p^n + f_{n-1}p^{n-1} + \ldots + f_1 p = - f_0$$

3. Левая часть делится на p, поэтому и правая часть должна делиться на p.

Теорема о рациональных корнях целочисленного многочлена

- Теорема 9. Пусть f – многочлен с целыми коэффициентами, тогда возможные рациональные корни вида p / q :

1. p и q взаимно простые целые.
2. p делит свободный коэффициент f_0.
3. q делит старший коэффициент f_n.

Доказательство

1. Пусть $f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + f_{n-2} x^{n-2} + \ldots + f_2 x^2 + f_1 x^1 + f_0$

   и $x = p/q$ - корень.

2. Тогда $f(p/q) = 0$ дает

$$f_n (p/q)^n + f_{n-1} (p/q)^{n-1} \ldots + f_2 (p/q)^2 + f_1 (p/q)^1 + f_0 = 0$$

3. $f_n p^n + f_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + f_1 p q^{n-1} + f_0 q^n = 0$
4. $f_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p\, q^{n-1} + a_0 q^n = -f_n p^n$
5. $q\,[f_{n-1} p^{n-1} + \ldots + f_1 p\, q^{n-2} + f_0 q^{n-1}] = -f_n p^n$
6. *То есть* $q \mid (-f_n p^n)$
7. Из взаимной простоты q *и* p^n
8. $q \mid f_n$

Доказать самостоятельно, что p делит f_0

Найти рациональные корни (если есть):

$$3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

p: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
q: $\pm 1, \pm 3$

Возможные рац.корни: $\pm 1, 2, 4, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

	3	**-5**	**-4**	**4**
-1	3	-8	4	0

$$3x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$(3x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x = \frac{2}{3}, 2$$

Чтобы найти оставшиеся корни можно продолжить использовать метод (или разложить и решить квадратное уравнение)

$$\boxed{x = -1, \frac{2}{3}, 2}$$

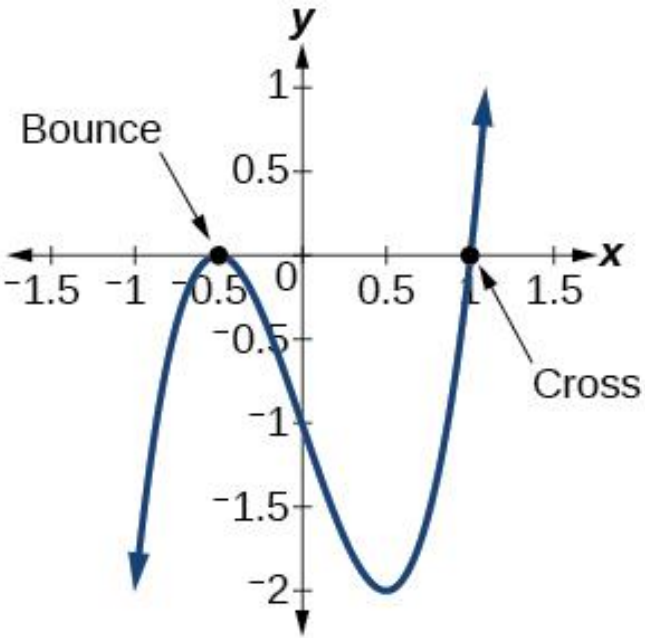
Вопрос

- Всегда ли можно разложить многочлен на линейные множители??

Кратные корни

Определение

Количество повторяющихся линейных множителей в разложении многочлена называется кратностью множителя (кратностью соответствующего корня).



Корень кратности 1 называется простым корнем

Примеры кратных корней

$$f(x) = (x-3)(x+2)^3$$

3 – корень кратности 1

-2 – корень кратности 3

Фундаментальная теорема алгебры (Гаусс)

Всякий многочлен f степени $n \geq 1$ имеет хотя бы один корень, возможно комплексный.

Следствие:

Алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ степени ‘n’ с комплексными коэффициентами имеет ровно ‘n’ корней в поле комплексных чисел.

Теорема о разложении многочлена

Теорема 10. Всякий многочлен степени n

$$f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \ldots + f_1 x + f_0$$

с комплексными коэффициентами f_i можно полностью разложить на линейные множители:

$$f(x) = f_n (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n),$$

где a_i являются корнями многочлена f, включающими комплексные и повторяющиеся корни.

Теорема о комплексных корнях действительного многочлена

- Теорема 11. Пусть *f(x)* – многочлен с действительными коэффициентами и *z* – его комплексный корень, тогда и сопряженное число $\bar{z}$ является корнем этого многочлена.
- Доказательство. *Подставим z :*

$$f(z) = f_n z^n + f_{n-1} z^{n-1} + \ldots + f_1 z + f_0 = 0.$$

Найдем сопряженные для обеих частей,

$$\overline{f_n z^n + f_{n-1} z^{n-1} + \cdots + f_1 z + f_0} = \bar{0},$$

коэффициенты многочлена - действительные числа,

$$f_n \bar{z}^n + f_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + f_1 \bar{z} + f_0 = 0, \quad f(\bar{z}) = 0$$