

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

*Механико-математический факультет*  
*Кафедра математического анализа*

*Л.А. Аксентьев*, *А.Н. Калимуллина*

**ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ  
ПЛОСКИХ ПОЛЕЙ**

*Методическое пособие к курсу*  
*Теория функций комплексного переменного*  
*Часть I*

КАЗАНЬ – 2022

УДК 517.54

Печатается по решению  
учебно-методической комиссии  
механико-математического факультета  
Казанского (Приволжского) федерального университета  
Рецензент  
доцент Д.Ф. Абзалилов

**Аксентьев Л.А.**, Калимуллина А.Н.

**Примеры расчетов плоских полей.** Учебное пособие к курсу  
“Теория функций комплексного переменного”, часть I. – Казань: КФУ,  
2022 г. – 33с.

Учебно-методическое пособие является переработанным изданием,  
первая версия которого опубликовано в 2007 году.

Методическое пособие основано на курсе лекций, прочитанных на  
протяжении более 30-ти последних лет **Л.А. Аксентьевым**. Предназна-  
чено студентам-механикам II–III курсов механико-математического фа-  
культета.

©Казанский (Приволжский)  
федеральный университет, 2022

## Введение

Опыт проведения практических занятий по теории функций комплексного переменного показал, что расчеты плоских полей усваиваются студентами тяжело. Для лучшего усвоения этого материала в данном учебном пособии приведены решения плановых примеров на плоские поля из §5 задачника [1]. Плановая часть расширена некоторыми проблемными задачами, которые можно использовать при проведении факультативных занятий и при выполнении курсовых работ.

Теоретические сведения по плоским полям можно найти в пособии [2].

По мнению составителей материал будет полезен студентам при самостоятельном изучении теории функций комплексного переменного и вызовет в дальнейшем стремление к постижению более сложных задач и интересных проблем, возникающих в этой области.

## ЧАСТЬ I

Даются формулировки задач и ответы (в квадратных скобках) из задачника [1] (§5 Расчет плоских полей), а после них – решения и указания.

В задачах 1 - 4 найти эквипотенциальные линии, линии тока и скорость, если комплексный потенциал течения задан в виде  $w = f(z)$ .

1.  $w = z^n$ ,  $n$  – целое положительное число

$$[r^n \cos n\varphi = c, r^n \sin n\varphi = c \quad (z = re^{i\varphi}), \vec{v} = n\bar{z}^{n-1}]$$

▷ Для выделения вещественной и мнимой частей комплексного потенциала запишем его в показательной форме

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

и применим формулу Эйлера. Тогда

$$z^n = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi.$$

Вещественная часть  $r^n \cos n\varphi$  – потенциальная функция, мнимая часть  $r^n \sin n\varphi$  – функция тока. Эти функции, приравненные постоянным величинам, определяют семейство эквипотенциалей и семейство линий тока.

Скорость в каждой точке получается по общей формуле

$$\vec{v}(z) = \overline{w'} = n\bar{z}^{n-1}.$$

Дополнить ответ к задаче 1 можно графическим изображением в декартовых координатах найденных семейств при  $n = 1$  и  $n = 2$ . Вычисления при  $n = 1$  и  $n = 2$  проводятся совсем просто.

При  $n = 1$  имеем  $z = x + iy$ , поэтому получим семейство линий тока в виде  $y = c$ , а семейство эквипотенциалей будет  $x = c$ . Скорость в любой точке  $\vec{v}(z) = 1$ .

При  $n = 2$  получим  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ , поэтому семейство гипербол  $xy = c$  — линии тока, семейство  $x^2 - y^2 = c$  — эквипотенциали. Скорость  $\vec{v}(z) = 2\bar{z}$  обращается в 0 при  $z = 0$ . Две центральные струи ( $x = 0, y = 0$ ) сверху и снизу по мнимой оси сталкиваются в 0 и растекаются направо и налево по вещественной оси. Действительно при  $z = a > 0$  скорость  $\vec{v}(a) = 2a > 0$ , т. е. вектор скорости  $\vec{v}$  направлен вправо, при  $z = -a$  скорость  $\vec{v}(-a) = -2a$ , т. е. вектор скорости  $\vec{v}$  направлен влево. Соответственно

$$\text{при } z = ia \text{ и } z = -ia, a > 0, \text{ получим } \vec{v}(ia) = -2ia \text{ и } \vec{v}(-ia) = 2ia,$$

т.е. вдоль мнимой оси скорость направлена к началу координат.

При любом  $n$  представление семейства  $r^n \sin n\varphi = c$  получится следующим образом. Линиями тока  $r^n \sin n\varphi = 0$  будут лучи

$$\varphi = k\pi/n, \quad k = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots, 2n-1,$$

которые составят  $n$  прямых линий, проходящих через начало координат. В каждом секторе между соседними лучами будут расположены линии тока при  $c > 0$  и  $c < 0$ , напоминающие гиперболы. Если каждый такой сектор подвергнуть преобразованию  $\zeta = z^n$ , то эти линии выпрямятся, каждый сектор превратится в полуплоскость и получится картина новых линий тока, как при  $n = 1$ .

При умножении на  $i$  получим комплексный потенциал

$$iz^n = \left( \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right) z \right)^n = -r^n \sin n\varphi + ir^n \cos n\varphi,$$

для которого линии тока будут эквипотенциалами комплексного потенциала  $w = z^n$  и наоборот. Это значит, что при повороте на угол  $\pi/2n$  в плоскости  $z$  происходит поворот на угол  $\pi/2 = \arg i$  в плоскости  $w$ . Поэтому семейство линий тока для комплексного потенциала  $w = z^n$  при повороте на угол  $\pi/2n$  переходят в семейство эквипотенциалей для этого же комплексного потенциала и наоборот.  $\triangleleft$

**2.**  $w = 1/z^n$ .

$$\left[ r^n = c \cos n\varphi, \quad r^n = c \sin n\varphi \quad (z = re^{i\varphi}), \quad \vec{v} = -n\bar{z}^{-(n+1)} \right]$$

$\triangleright$  Уравнения линий тока и эквипотенциалей получаются с помощью показательной формы  $z = re^{i\varphi}$  и формулы Эйлера

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} e^{-in\varphi} = r^{-n} \cos n\varphi - ir^{-n} \sin n\varphi \Rightarrow$$

$\Rightarrow r^{-n} \cos n\varphi = c$  – эквипотенциали,  $r^{-n} \sin n\varphi = c$  – линии тока.

Формула для скорости получится дифференцированием комплексного потенциала с сопряжением.

Дополнительно можно выделить случай  $n = 1$  и записать полученные уравнения в декартовых координатах

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

при  $c = 0$  получим две прямые линии:  $y = 0$  (вещественная ось) – линия тока,  $x = 0$  (мнимая ось) – эквипотенциаль. При  $c \neq 0$ , получим

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2} \text{ – эквипотенциали,}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2} \text{ – линии тока.}$$

Для любого  $n$  нужно также выделить случай  $c = 0$ . Как в примере 1, линиями тока будут  $n$  прямых линий, проходящих через начало координат с углом  $\pi/n$  между соседними прямыми. В каждом секторе

между соседними лучами будут расположены линии тока в форме сплюснутых окружностей. Если к таким линиям применить преобразование  $\zeta = z^n$ , то каждый сектор перейдет в полуплоскость, а линии тока внутри сектора превратятся в окружности.  $\triangleleft$

**3.**  $w = \frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln z.$

$$\left[ \ln r = -\frac{\Gamma}{Q}\varphi + c, \ln r = \frac{Q}{\Gamma}\varphi + c (z = re^{i\varphi}), \vec{v} = -\frac{\Gamma-iQ}{2\pi i} \frac{1}{z} \right]$$

$\triangleright$  Используя представление

$$\ln z = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

и выделяя действительную и мнимую части в произведении

$$2\pi w = (Q - i\Gamma)(\ln r + i\varphi),$$

уравнения эквипотенциалей запишутся в виде  $Q \ln r + \Gamma\varphi = c$ , а уравнения линий тока примут вид  $Q\varphi - \Gamma \ln r = c$ . Это логарифмические спирали. В частности, при  $Q = 0$  эквипотенциалы – лучи, а линии тока – окружности, а при  $\Gamma = 0$  наоборот, эквипотенциалы – окружности, а линии тока – лучи.

Физический смысл параметров  $\Gamma$  и  $Q$  лучше всего усвоить, когда один из них обратится в 0. Так, при  $\Gamma = 0$  получим комплексный потенциал  $Q/(2\pi) \ln z$  для источника при  $z = 0$  (и при  $z = \infty$ ) с обильностью  $Q$  (с обильностью  $-Q$ ). При  $Q = 0$  получим  $\Gamma/(2\pi i) \ln z$  – для вихря в  $z = 0$  с циркуляцией  $\Gamma$  и для вихря в  $z = \infty$  с циркуляцией  $-\Gamma$ .

При умножении комплексного потенциала на  $i$  возникает новый комплексный потенциал, в котором функция тока и потенциальная функция поменяются местами. Коэффициент  $\Gamma + iQ$  после умножения на  $i$  запишется в виде  $-Q + i\Gamma$ . Это значит, что роль циркуляции  $\Gamma_1$  в новом течении будет играть величина  $-Q$ , а обильность  $Q_1$  источника будет  $\Gamma$ .  $\triangleleft$

$$4. w = \frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-b}.$$

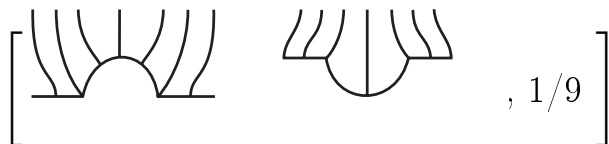
$$\left[ \ln \rho = -\frac{\Gamma}{Q}\theta + c, \ln \rho = \frac{Q}{\Gamma}\theta + c \left( \rho e^{i\theta} = \frac{z-a}{z-b} \right), \vec{v} = \frac{-\Gamma+iQ}{2\pi i} \frac{\bar{a}-\bar{b}}{(z-\bar{a})(z-\bar{b})} \right]$$

▷ Картина течения в этом примере связана с картиной течения в примере 3 с помощью дробно-линейной функции  $\frac{z-a}{z-b} = \zeta$ . Поэтому при такой замене нужно догадаться взять представление  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  и выполнить вычисления, как при решении примера 3. Обратная замена  $z = \frac{b\zeta-a}{\zeta-1}$  будет переносить вихреисточники из 0 и  $\infty$  в вихреисточники, расположенные в  $a$  и  $b$ . Семейства спиралей, дающие эквипотенциалы и линии тока, с фокусами в 0 и  $\infty$  перейдут в семейства спиралей с фокусами в  $a$  и  $b$ .

При вычислении скорости нужно провести дифференцирование по упрощенной схеме (с предварительным логарифмированием)

$$\left( \ln \frac{z-a}{z-b} \right)' = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} = \frac{a-b}{(z-a)(z-b)}. \triangleleft$$

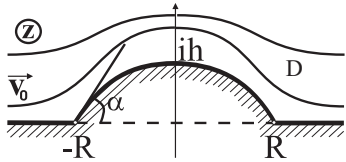
**5. Имеются два потока в областях: область составленная из верхней полуплоскости и полукруга ( $|z| < R, \text{Im } z < 0$ ) и область ( $\text{Im } z > 0, |z| > R$ ) (задачи 13 и 7 (§4) из [1]). При одинаковых скоростях невозмущённых потоков ( $v_1(\infty) = v_2(\infty) = v_0 > 0$ ) найти отношение наименьшей скорости первого потока к наибольшей скорости второго. Отметить линии тока. Построить электростатическую аналогию. Начертить силовые линии.**



▷ Решим задачу в измененной постановке, а затем получим нужный результат.



Пусть границей области  $D = D(\alpha)$  в физической плоскости  $z$  являются два луча:  $(-\infty, -R]$ ,  $[R, \infty)$  и дуга окружности с центром на мнимой оси, соединяющая точки  $\pm R$ . Угол, который образует дуга окружности с положительным направлением действительной оси в точке  $(-R)$ , обозначим через  $\alpha$  (где  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ ), а точку пересечения дуги с мнимой осью обозначим через  $ih$ ,  $h = h(\alpha, R)$ . При фиксированном  $\alpha \in (-\pi, \pi)$  области  $D(\alpha)$  будет принадлежать бесконечная часть мнимой полуоси с  $iy$ ,  $y > 0$ .



Пусть в  $D(\alpha)$  имеется течение идеальной несжимаемой жидкости со скоростью  $v_0 > 0$  на  $\infty$ . Требуется найти величину

$\vec{v}_\alpha(ih) = v_\alpha(ih)$ , которая будет вещественной и положительной.

Для решения задачи 5 нужно будет общую формулу для  $v_\alpha(ih)$  использовать при  $\alpha = -\pi/2$  и  $\alpha = \pi/2$ .

Перейдем к решению задачи с фиксированным  $\alpha$ . Для этого область  $D(\alpha)$  конформно отобразим на верхнюю полуплоскость функцией  $f(z)$  с нормировкой:  $f(\infty) = \infty$ ,  $[f(z)/z]_\infty = v_0$ .

Вначале используем дробно-линейную функцию  $w_1 = (z - R)/(z + R)$  (или  $w_1 = (z + R)/(z - R)$ ), которая переведет область  $D(\alpha)$  в бесконечный сектор с угловой точкой в 0 и с внутренним углом  $\pi - \alpha$  (в силу конформности отображения величины углов при угловых точках сохраняются). Граница сектора состоит из положительной части вещественной оси и луча, наклоненного к вещественной оси под углом  $\pi - \alpha$ . На этом луче будет расположена точка  $e^{i(\pi - \alpha)} = (ih - R)/(ih + R)$  — образ точки  $ih$ . Применим еще два преобразования:

$$w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\pi - \alpha}} \text{ и } w = \frac{A}{1 - w_2},$$

$$0 < \arg w_1 < \pi - \alpha.$$

Так как  $w_1(\infty) = 1$ ,  $w_2(1) = 1$ ,  $w(1) = \infty$ , то  $w(\infty) = \infty$ . Величину  $A$  найдем из условия  $[w(z)/z]_\infty = v_0$ .

Пологая  $z = 1/\zeta$  и воспользовавшись на последнем этапе правилом Лопиталя, найдем

$$\begin{aligned} v_0 &= A \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1/z}{1 - \left(\frac{z-R}{z+R}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}} = A \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{1 - \left(\frac{1-R\zeta}{1+R\zeta}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}} \\ &= A \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{\pi}{\pi-\alpha} \left(\frac{1-R\zeta}{1+R\zeta}\right)^{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}} \left(-\frac{2R}{(1+R\zeta)^2}\right)} = A \frac{\pi - \alpha}{2\pi R}. \end{aligned}$$

Отсюда  $A = \frac{2\pi R v_0}{\pi - \alpha}$ .

По найденному комплексному потенциалу  $w(z)$  вычислим сопряженную скорость

$$\overline{v(z)} = w'(z) = \frac{4\pi^2 R^2 v_0}{(\pi - \alpha)^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{z-R}{z+R}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right]^2} \left(\frac{z-R}{z+R}\right)^{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}} \frac{1}{(z+R)^2}.$$

Как уже было отмечено,  $\frac{ih-R}{ih+R} = e^{i(\pi-\alpha)} = 1 - \frac{2R}{ih+R}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{2R}{ih+R} &= 1 - e^{i(\pi-\alpha)} = 1 + e^{-i\alpha} = 2e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{(ih+R)^2} = R^{-2} e^{-i\alpha} \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Теперь легко вычисляется

$$w'(ih) = \frac{4\pi v_0}{\pi - \alpha} \frac{1}{4} \frac{\pi}{\pi - \alpha} e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = v_0 \left(\frac{\pi \cos \frac{\alpha}{2}}{\pi - \alpha}\right)^2 = v_\alpha(ih).$$

Как и следовало ожидать, скорость в точке  $ih$  является вектором, параллельным положительному направлению вещественной оси. Отметим

частные случаи:  $v_0(ih) = v_0$ ,  $v_{\pi/2}(iR) = 2v_0$ ,  $v_{-\pi/2}(-iR) = 2v_0/9$ . Тем самым получаем ответ к задаче 5:

$$v_{-\pi/2}(-iR)/v_{\pi/2}(iR) = 1/9.$$

Дополнительно проведем анализ функции  $v_\alpha(ih) = v_0 \left( \frac{\pi \cos \frac{\alpha}{2}}{\pi - \alpha} \right)^2$ . При  $-\pi < \alpha < \pi$  эта функция является монотонно возрастающей, так как производная функция  $\omega(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} / (\pi - \alpha)$  будет положительной. Действительно,  $\omega'(\alpha) = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2(\pi - \alpha)} \left( \frac{2}{\pi - \alpha} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$ . Положительность  $\omega'(\alpha)$  при  $-\pi < \alpha \leq 0$  очевидна. Если же  $0 < \alpha < \pi$ , то используем неравенство  $\pi - \alpha < 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  (которое легко обосновать графически), получим положительность выражения в круглых скобках для  $\omega'(\alpha)$  и, следовательно, положительность  $\omega'(\alpha)$ .

Крайние значения  $v_\alpha(ih)$  при  $\alpha = \pm\pi$  достигаются для следующих областей.

В случае  $\alpha = -\pi$  получим  $v_{-\pi}(-i\infty) = 0$  для плоскости с двумя разрезами по вещественной оси ( $-\infty < x < -R$ ,  $R < x < \infty$ ) или для полуплоскости с предельным кругом  $|z + i\frac{h}{2}| < \frac{h}{2}$ , который содержит покоящуюся жидкость, так что  $v_{-\pi}(-ih) = 0$ .

В случае  $\alpha = \pi$  получим

$$v_\pi(ih) = v_0 \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \left( \frac{\pi \sin \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2}}{1} \right)^2 = v_0 \frac{\pi^2}{4}$$

для верхней полуплоскости вне круга  $|z - i\frac{h}{2}| \leq \frac{h}{2}$ . Комплексный потенциал для такой области можно построить независимо от предельного комплексного потенциала  $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} f_\alpha(z)$ , где  $f_\alpha(z)$  – комплексный потенциал с физической областью  $D(\alpha)$ . Именно,

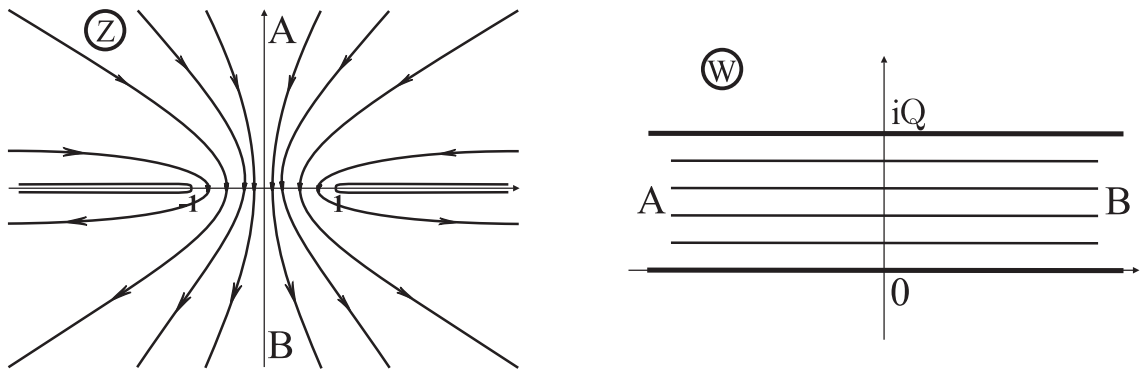
$$w(z) = \frac{\pi h v_0}{e^{\frac{\pi h}{z}} - 1}, \quad v_\pi(ih) = w'(z) \Big|_{z=ih} = \frac{\pi^2 h^2 v_0 e^{\frac{\pi h}{z}}}{\left( e^{\frac{\pi h}{z}} - 1 \right)^2 z^2} \Big|_{z=ih} = v_0 \frac{\pi^2}{4}.$$

Другой путь решения задачи с вычислением  $v_\alpha(ih)$  содержится на страницах 171-172 книги [3].  $\triangleleft$

**6. Найти комплексный потенциал потока жидкости из полуплоскости  $y > 0$  в полуплоскость  $y < 0$  с расходом  $Q$  сквозь отверстие в стенке  $y = 0$  между точками  $x = \pm 1$ .**

$$\left[ f(z) = -\frac{Q}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right]$$

$\triangleright$  К этому течению нужно относиться, как к течению в своеобразной полосе с левым берегом в виде двубережного разреза  $-\infty < x < -1$  и с правым берегом в виде двубережного разреза  $1 < x < \infty$ . Нужный комплексный потенциал должен отображать область из физической плоскости на горизонтальную полосу ширины  $Q$ . При этом нужно проследить, чтобы верхняя далекая точка по мнимой оси переходила в левую далекую точку на полосе, а нижняя далекая точка по мнимой оси переходила в правую далекую точку на полосе.



Поэтому вначале используем функцию, обратную к функции Жуковского,  $z_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$  с условием  $z_1|_{z=0} = i$ , при этом область течения перейдет в верхнюю полуплоскость. Потом

$$z_2 = \frac{Q}{\pi} \ln z_1 \quad (\ln 1 = 0) \quad \text{и} \quad w = -z_2.$$

Поворот на угол  $\pi$  сделан для того, чтобы точка  $0 + i\infty$  из плоскости  $z$  перешла в точку  $-\infty + i0$  в плоскости  $w$ .

Для проверки того, что найденный потенциал соответствует картине течения, вычислим скорость в точке  $z = 0$ . Получим

$$\bar{v}(0) = -\frac{Q}{\pi} \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{Q}{\pi} \frac{1}{i} = i \frac{Q}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}(0) = -i \frac{Q}{\pi} \quad \text{с правильным направлением скорости в } 0. \triangleleft$$

**7. Показать, что функция  $w = v_0 (z + R^2/z) + (\Gamma/(2\pi i)) \ln z$  даёт обтекание круга  $|z| < R$ . Найти  $\vec{v}(\infty)$ , циркуляцию вдоль окружности и точки, в которых скорость равна нулю. Дать электростатическую аналогию.**

$$\left[ \vec{v}(\infty) = v_0, \quad v(Re^{i\beta}) = 0, \quad \sin \beta = \frac{\Gamma}{4\pi v_0 R} \right]$$

▷ Представим точку на окружности  $|z| = R$  в форме  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , и подставим её в формулу для комплексного потенциала. Будем иметь

$$w = \varphi + i\psi = v_0 R (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta =$$

$$= 2v_0 R \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R \Rightarrow \psi = \frac{-\Gamma}{2\pi} \ln R = \text{const}.$$

Это значит, что окружность  $|z| = R$  является линией тока.

Из формулы для сопряженной скорости

$$\overline{\vec{v}(z)} = v_0 \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

следует, что  $\vec{v}(\infty) = v_0$ . Циркуляция вдоль окружности определяется по формуле

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left( -2v_0 R \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \right) d\theta = \Gamma.$$

Приравняв нулю сопряженную скорость, получим квадратное уравнение для отыскания критических точек

$$z^2 - i\frac{\Gamma}{2\pi v_0}z - R^2 = 0.$$

Отсюда

$$z_{1,2} = i\frac{\Gamma}{4\pi v_0} \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2}} = \frac{\pm \sqrt{16\pi^2 R^2 v_0^2 - \Gamma^2} + i\Gamma}{4\pi v_0} = Re^{i\beta^\pm},$$

причем  $\sin \beta^\pm = \frac{\Gamma}{4\pi v_0}$  при условии  $|\Gamma| < 4\pi Rv_0$ .

Желательно сделать схематичные чертежи с обтеканием круга при  $\Gamma = 0$ ,  $0 < \Gamma < 4\pi Rv_0$ ,  $\Gamma = 4\pi Rv_0$  и  $\Gamma > 4\pi Rv_0$ . ◁

**8. Пусть функция  $w = f(z)$  является комплексным потенциалом потока в криволинейной полосе. Известно, что  $f(z)$  будет отображать криволинейную полосу на горизонтальную полосу плоскости  $w$ .**

**Доказать, что ширина полосы равна расходу  $Q$ , т. е. количеству жидкости, протекающей через любую линию, соединяющую границы потока, за единицу времени.**

▷ Соединим берега криволинейной полосы эквипотенциальной линией, которая начинается в точке  $A$  на первом берегу и заканчивается в точке  $B$  на втором берегу. Плотность жидкости положим равной 1. Так как вектор скорости в каждой точке эквипотенциальной линии перпендикулярен этой линии, то количество жидкости, проходящей через элемент  $ds$  эквипотенциали за единицу времени, равно  $v ds = \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$ . Поэтому весь поток жидкости через линию  $AB$ , совпадающий с расходом жидкости в криволинейной полосе, найдем следующим образом:

$$Q = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \left\{ \text{по условию Коши-Римана } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\} =$$

$$= \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \psi(s) \Big|_{s_A}^{s_B} = \psi|_B - \psi|_A.$$

Через точки  $i\psi|_B$  и  $i\psi|_A$  проходят граничные прямые линии для горизонтальной полосы в плоскости комплексного потенциала. Поэтому  $Q = \psi|_B - \psi|_A$  является шириной этой полосы.  $\triangleleft$

**9. В плоскости имеется невозмущенный поток жидкости. Найти комплексный потенциал установившегося потока после того, как в некоторой точке начал действовать источник мощности  $Q$ .**

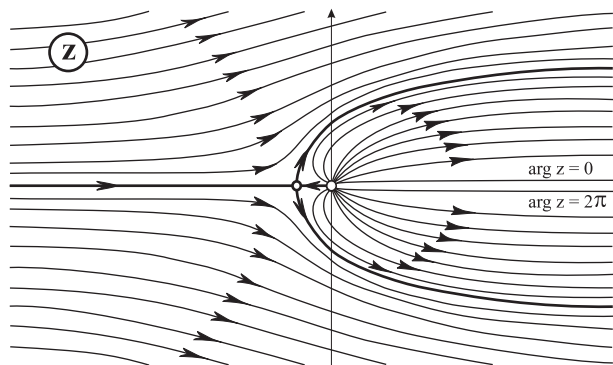
Определить линию раздела жидкости источника и жидкости первоначального потока и критическую точку (где скорость обращается в нуль). Начертить линии тока.

$$\left[ f(z) = v_0 z + \frac{Q}{2\pi} \ln z; \quad z_{kp} = -\frac{Q}{2\pi v_0}; \quad r = \frac{Q(1 - \theta/\pi)}{2v_0 \sin \theta}, \right.$$

$$\left. z = r e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi \right]$$

▷ Если источник поместить в точку  $z = 0$ , то комплексный потенциал такого течения будет  $w = \frac{Q}{2\pi} \ln z$ ,  $Q > 0$ . При сложении этого течения с невозмущенным течением,

имеющим комплексный потенциал  $w = v_0 z$ ,  $\vec{v}(\infty) = v_0 > 0$ , получим искомый комплексный потенциал.



Чтобы найти положение критической точки, необходимо взять производную от комплексного потенциала и посмотреть, при каком  $z$  скорость  $v$  обратится в нуль.

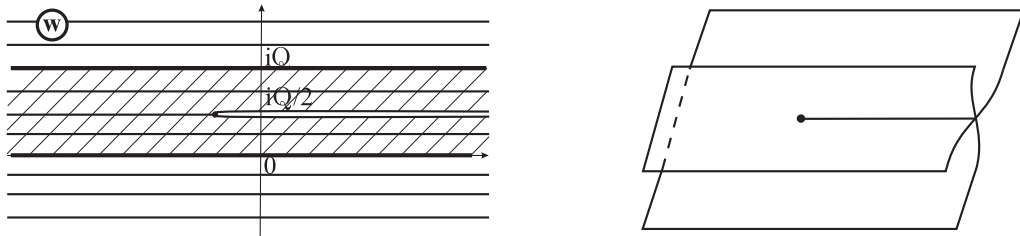
Для определения линии раздела жидкости источника и жидкости первоначального потока выделим линию тока, которая проходит через критическую точку  $z_{kp} = -\frac{Q}{2\pi v_0}$  с  $\arg z_{kp} = \pi$ . Именно, при  $z = re^{i\theta}$  получим

$$\operatorname{Im} w(z) = v_0 r \sin \theta + \frac{Q\theta}{2\pi} = c \Rightarrow \operatorname{Im} w(z_{kp}) = \frac{Q}{2} = c.$$

Поэтому уравнение линии раздела запишется в виде

$$v_0 r \sin \theta = \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right) \text{ при } r \geq \frac{Q}{2\pi v_0} \text{ и } \theta \neq \pi.$$

Это уравнение включает равенство  $\theta = \pi$  для прямолинейных участков линий тока, когда  $|z_{kp}| < r < \infty$  и  $0 < r < |z_{kp}|$ .

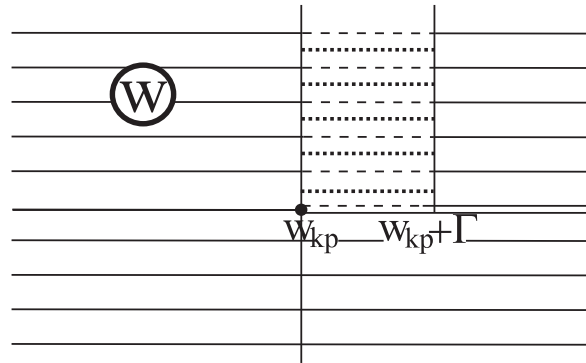
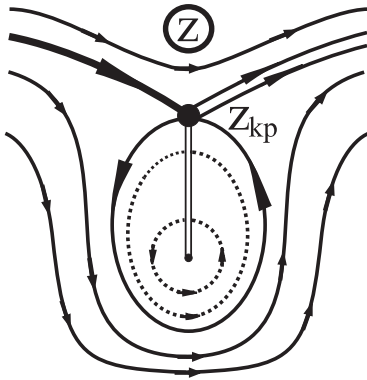


Область комплексного потенциала  $w$  является двулистной поверхностью, состоящей из всей плоскости с разрезом и полосы с разрезом, ширина которой равна  $Q$ . Склейка двух листов происходит крест накрест, как показано на рисунке.  $\triangleleft$



10. В некоторой точке невозмущённого потока начал действовать вихрь интенсивности  $\Gamma$ . Записать комплексный потенциал установившегося течения. Найти критическую точку. Отметить линии тока.

$$\left[ f(z) = v_0 z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad z_{kp} = \frac{i\Gamma}{2\pi v_0} \right]$$



Решение задачи ведется по аналогии с задачей 9. При построении области в плоскости комплексного потенциала проводятся разрезы от критической точки до вихря и от критической точки по линии тока, уходящей в бесконечность направо так, как показано на рисунке. Все линии тока, изображенные сплошной линией, будут переходить в прямые линии на плоскости  $w$ , при этом линия тока, по которой сделан разрез, будет переходить в разрез от точки  $w_{kp} = f(z_{kp})$  до бесконечности. На втором разрезе, который проходит от критической точки до вихря в плоскости  $z$ ,  $\varphi$  изменяется от  $\varphi_{kp}$  до  $\varphi_{kp} + \Gamma$ , при этом  $\psi$  будет изменяться от  $\psi_{kp}$  до бесконечности. Линии тока, изображенные пунктирными линиями в плоскости  $z$ , будут переходить в пунктирные отрезки. Таким образом, получаем полосу, прикрепленную к плоскости с разрезом, как показано на рисунке.

**11. Найти силовое поле между поверхностями двух цилиндров с круглыми основаниями  $|z| = 1$ ,  $|z + 1| = 4$ , если потенциал на первом равен нулю, на втором  $+1$ .**

$$\left[ f(z) = \frac{i}{\ln(2 + \sqrt{3})} \ln \left\{ \frac{z - (7 - \sqrt{48})}{z - (7 + \sqrt{48})} (7 + \sqrt{48}) \right\} \right]$$

▷ Поскольку окружности не концентрические, то, применив функцию  $\zeta = A \frac{z-a}{z-b}$ , где  $a$  и  $b$  – точки, симметричные относительно двух окружностей, конформно переведем область из плоскости  $z$  в область, расположенную между концентрическими окружностями, при этом точка  $a$  перейдет в  $0$ , а  $b$  – в бесконечность.

Комплексный потенциал электростатического поля имеет вид  $w = \frac{v_0 i}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \ln \zeta$ , где  $v_0$  – разность потенциалов на окружностях в плоскости  $z$ , которые являются прообразами окружностей в плоскости  $\zeta$  с радиусами  $\rho_2$  и  $\rho_1$  соответственно. Таким образом, чтобы найти комплексный потенциал, необходимо найти точки  $a$  и  $b$ , а также отношение  $\rho_2/\rho_1$ .

Система уравнений для нахождения  $a$  и  $b$  будет иметь вид

$$\begin{cases} ab = 1, \\ (a + 1)(b + 1) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \mp \sqrt{48}, \\ b = 7 \pm \sqrt{48}. \end{cases}$$

Значение  $a$  нужно выбрать по расположению относительно окружностей: в нашем случае  $a = 7 - \sqrt{48}$ ,  $b = 7 + \sqrt{48}$ . Таким образом, комплексный потенциал получился следующим:

$$w = \frac{i}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \ln A \frac{z - 7 + \sqrt{48}}{z - 7 - \sqrt{48}}, \text{ где } v_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = 1. \quad (1)$$

Для определения величины  $A > 0$  рассмотрим комплексный потенциал при  $z = 1$  и учтем, что на первой окружности  $\text{Im } w = 0$ .

$$0 = \operatorname{Im} w|_{z=1} = \frac{1}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \ln \left| \left( A \frac{\sqrt{48} - 6}{-\sqrt{48} - 6} \right) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left| \frac{-\sqrt{48} - 6}{\sqrt{48} - 6} \right| = \left| \frac{-84 - 12\sqrt{48}}{12} \right| = 7 + \sqrt{48}.$$

Для отыскания отношения  $\rho_2/\rho_1$  положим в (1)  $z = 3$  и учтем, что на второй окружности потенциал равен 1. Получим

$$1 = \operatorname{Im} w|_{z=3} =$$

$$= \frac{1}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{48} - 4}{-\sqrt{48} - 4} (7 + \sqrt{48}) \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \ln(2 + \sqrt{3}),$$

так как

$$\left| \frac{64 - 8\sqrt{48}}{-32} \right| (7 + \sqrt{48}) = \left| \frac{1}{-4} (8 - \sqrt{48}) \right| (7 + \sqrt{48}) = 2 + \sqrt{3}.$$

Поэтому  $\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \ln(2 + \sqrt{3})$ . Таким образом, уравнения для силовых линий

$$\arg \left( \frac{z - 7 - \sqrt{48}}{(z - 7 + \sqrt{48})(7 + \sqrt{48})} \right) = c,$$

на рисунке они изображены тонкими сплошными линиями.  $\triangleleft$

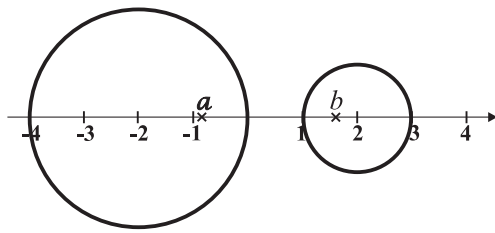
**12. Определить поле между двумя круглыми проводниками с радиусами 1 и 2, расстояние между центрами которых равно 4. Разность потенциалов равна  $v_0$  (см. №16 из §4).**

$$\left[ f(z) = \frac{iv_0}{\ln(11/4 + \sqrt{105}/4)} \ln \frac{8z - 3 + \sqrt{105}}{8z - 3 - \sqrt{105}} \right]$$

▷ Задача решается по аналогии с задачей 11.

Система уравнений для нахождения  $a$  и  $b$  будет выглядеть так:

$$\begin{cases} (a+2)(b+2) = 4, \\ (2-a)(2-b) = 1, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3 - \sqrt{105}}{8}, b = \frac{3 + \sqrt{105}}{8}$$



$$w = \frac{8z - 3 + \sqrt{105}}{8z - 3 - \sqrt{105}}$$

Для определения отношения  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  возьмем  $w(z)$  в граничных точках  $z = 1$  и  $z = 0$ , т.е.

$$w_1 = \frac{3 - \sqrt{105}}{3 + \sqrt{105}} \text{ и } w_2 = \frac{13 + \sqrt{105}}{8}. \text{ Тогда бу-}$$

дем иметь

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(13 + \sqrt{105})16(19 + \sqrt{105})}{8(19 - \sqrt{105})(19 + \sqrt{105})} = \frac{11 + \sqrt{105}}{4}. \triangleleft$$

**13. Проводник представляет собой внешность круга единичного радиуса. В диэлектрическую среду, заполняющую круг, помещается положительный заряд в  $q$  единиц. Найти комплексный потенциал полученного поля.**

$$\left[ f(z) = -i2q \ln \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right]$$

▷ Здесь необходимо вспомнить конформное отображение

$\zeta = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  единичного круга на единичный круг и использовать комплексный потенциал в виде  $w = -i2q \ln \zeta$ .  $\triangleleft$

**14. Диэлектрическая среда заполняет бесконечный сектор раствора  $\alpha$ . Она окружена проводником. Определить комплексный потенциал поля, образованного зарядом, который поме-**

щен в точку  $a$  диэлектрической среды.

$$\left[ f(z) = -i2q \ln \frac{z^{\pi/\alpha} - a^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \overline{a^{\pi/\alpha}}} \right]$$

▷ Для решения данной задачи нужно найти функцию, которая конформно отобразит сектор на верхнюю полуплоскость. Потом с помощью дробно-линейной функции нужно точку  $a^{\pi/\alpha}$  перевести в нуль, а симметричную ей точку – в бесконечность. Для записи комплексного потенциала используется суперпозиция, примененная в решении задачи 13. ◁

**15. Проводником является нижняя полуплоскость. Верхняя полуплоскость-диэлектрик. Туда помещён положительный заряд в  $q$  единиц. Определить комплексный потенциал поля.**

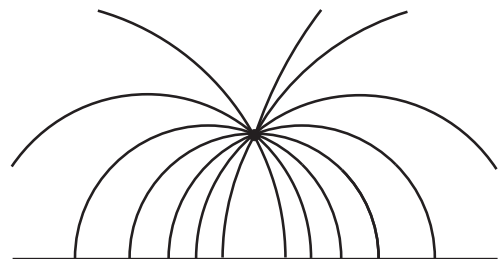
$$\left[ f(z) = -i2q \ln \frac{z - a}{z - \bar{a}} \right]$$

▷ Данная задача решается по аналогии с предыдущей и является её частным случаем при  $\alpha = \pi$ .

Дополнительно приведем уравнения силовых линий

$$\arg \frac{z - a}{z - \bar{a}} = c$$

и изобразим их на чертеже. ◁

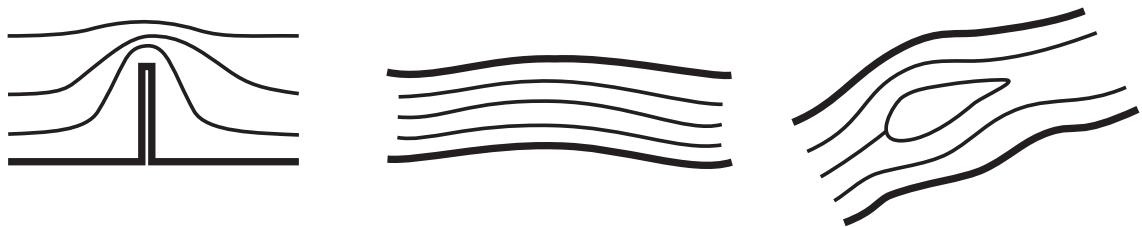


**16. Диэлектрическая среда заполняет полосу ширины  $2h$ . Определить комплексный потенциал поля, которое создаётся зарядом  $+q$ , помещённым в точку  $ih$ .**

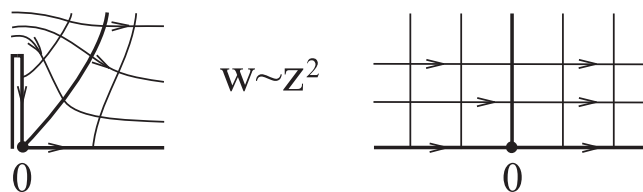
$$\left[ f(z) = -i2q \ln \frac{e^{(\pi/2h)z} - i}{e^{(\pi/2h)z} + i} \right]$$

▷ Следует вспомнить конформное отображение полосы на круг. Функция  $z_1 = z \frac{\pi}{2h}$  данную полосу преобразует в горизонтальную полосу ширины  $\pi$ . Функция  $z_2 = e^{z_1}$  преобразует полученную полосу в верхнюю полуплоскость, при этом точка  $z_1 = i\pi/2$  перейдет в точку  $z_2 = i$ . Теперь осталось применить дробно-линейную функцию, которая переведет точку  $z_2 = i$  в точку  $\zeta = 0$ , а  $z_2 = -i$  – в точку  $\zeta = \infty$ . Запись комплексного потенциала происходит, как в решении задачи 13. ◁

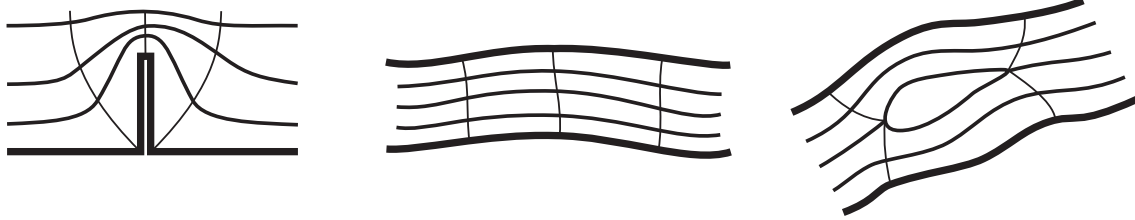
**17. Построить электростатические аналоги для следующих гидромеханических полей:**



▷ Электростатическая аналогия проявляется в силовых линиях, проходящих перпендикулярно линиям тока. К угловым точкам эти линии будут подходить как биссектрисы углов, поскольку при отображении (физической области на область в плоскости комплексного потенциала) в угловых точках функция  $w(z)$  будет вести себя как степенная функция, например,

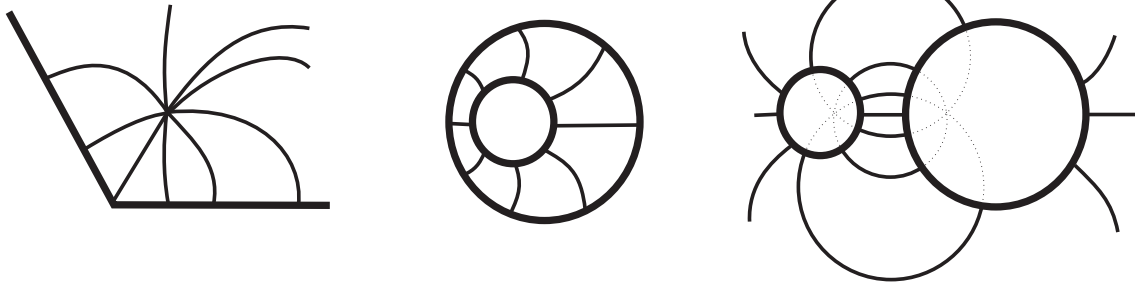


Таким образом, электростатическое силовое поле будет иметь следующий вид (отмечены только некоторые силовые линии, другие линии нужно изобразить самостоятельно).

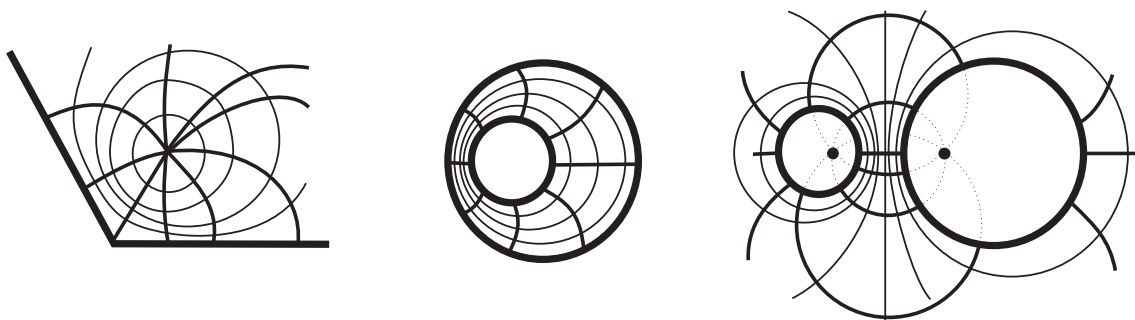


△

18. Построить гидромеханические аналоги для следующих электростатических полей:



▷ Аналогично заданию 17 линии тока проводим перпендикулярно силовым линиям. Например, для последнего рисунка гидродинамическая аналогия проявляется линиями тока в форме окружностей, имеющих общую пару симметричных точек, отмеченных на чертеже. ◁



## ЧАСТЬ II

*Применение метода симметрии к задачам обтекания. Эта часть написана в дополнение к методическому пособию [4].*

В задачах обтекания для определения комплексного потенциала  $w(z)$  нужно выдерживать граничное условие  $\text{Im } w = c$ . Это позволяет в некоторых случаях получать продолжение искомого комплексного потенциала по принципу симметрии. При продолжении для областей, являющихся ячейками симметрии, выявляется вся совокупность особенностей, после чего применяются теорема Лиувилля или ее аналоги.

Разберем некоторые примеры, в которых требуется построить функцию комплексного переменного и уяснить картину течений.

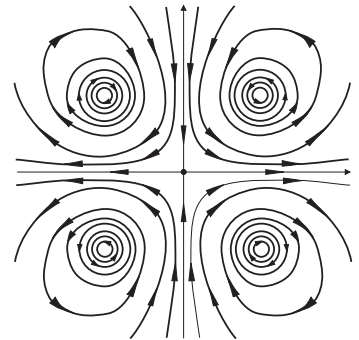
### 1. Течение в первом квадранте $\{z : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0\}$ , образованное вихрем в точке $a$ .

▷ Закон продолжения течения связан с тем, что стороны квадранта являются линиями тока. Если исходный вихрь характеризуется комплексным потенциалом  $\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a)$ , то продолженный по симметрии комплексный потенциал будет иметь новые особенности следующего вида:

$$\overline{\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(\bar{z} - a)}, \quad \overline{\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(-\bar{z} - a)} \Rightarrow -\overline{\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(\bar{z} + \bar{a})},$$

т.е.

$$-\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \bar{a}), \quad -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \bar{a}), \quad \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + a).$$





Поэтому вихри появятся в точках  $\bar{a}$ ,  $-a$ ,  $-\bar{a}$  и потенциал всего течения примет форму

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z-a)(z+a)}{(z-\bar{a})(z+\bar{a})} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z^2 - a^2}{z^2 - \bar{a}^2}. \quad (2)$$

Наоборот, если взять комплексный потенциал в форме (2), то в соответствующем течении линиями тока будут координатные оси. С помощью отвердения этих линий тока получим течения в каждом из четырех квадрантов, которые описываются тем же комплексным потенциалом (2).

Для определения критических точек возьмем производную от комплексного потенциала

$$w' = \frac{\Gamma}{\pi i} z \left[ \frac{a^2 - \bar{a}^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)} \right].$$

Отсюда видно, что критической точкой будет  $z_{kp} = 0^1$ .  $\triangleleft$

## 2. Течение в первом квадранте $\{z : \operatorname{Re} z > 0 \operatorname{Im} z > 0\}$ , образованное источником в точке $a$ .

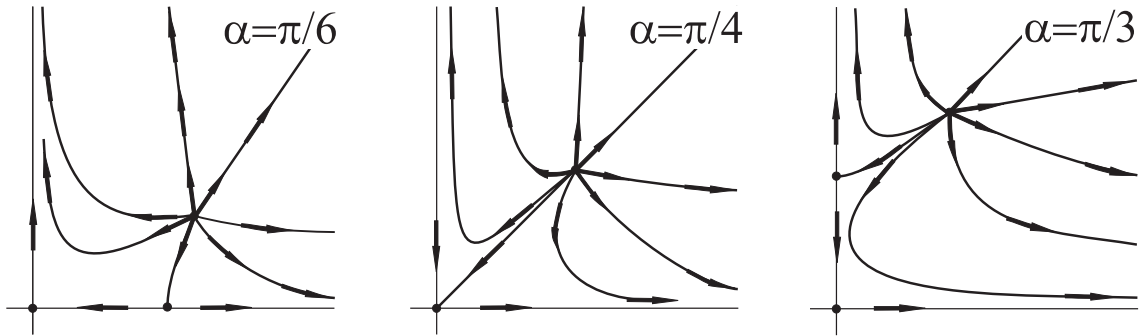
$\triangleright$  Одиночный источник, помещенный в некоторую точку  $a$ , описывается комплексным потенциалом  $w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-a)$ , где  $Q > 0$ , при этом  $z = \infty$  является стоком. С учетом источников в точках  $\bar{a}$ ,  $-a$ ,  $-\bar{a}$  (полученных продолжением по симметрии). Комплексный потенциал всего течения примет следующий вид:  $w = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)]$ . Представим точку  $a$  в виде  $a = re^{i\alpha}$  и определим критические точки:

---

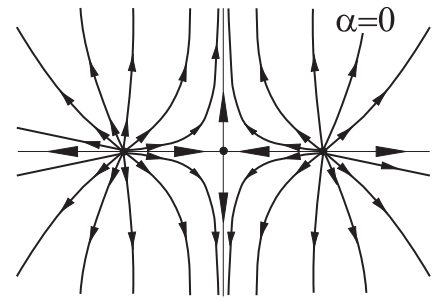
<sup>1</sup>Для визуализации картины течения можно использовать различные пакеты программ. В приложении 1 показаны некоторые примеры.

$$w' = \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{4z^3 - 2za^2 - 2z\bar{a}^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)} \right] \Rightarrow z_{kp}^1 = 0, \quad z_{kp}^{2,3} = \pm r\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Интересно проследить за изменением картины течения, если зафиксировать  $r$ , а угол  $\alpha \in [0, \pi/2]$  изменять.



При изменении  $\alpha \in (0, \pi/4)$  точки  $z_{kp}^{2,3}$  будут двигаться по вещественной оси от  $\pm r$  до нуля. При изменении  $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$  точки  $z_{kp}^{2,3}$  будут двигаться по мнимой оси от нуля до  $\pm ir$ . При этом, когда  $\alpha = 0$  (на рисунке изображена комплексная плоскость  $z$ ),



$\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/2$ , точка, в которой скорость обращается в нуль, будет всего одна  $z_{kp}^1 = 0$ , а две другие  $z_{kp}^{2,3} = \pm r$  совпадут с положением источника в случае  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$  и обратятся в нуль при  $\alpha = \pi/4$ .  $\triangleleft$

**3. Течение в полуплоскости  $\{z : -\infty < \operatorname{Re} z < \infty, \operatorname{Im} z > 0\}$ , образованное источником и стоком интенсивностей  $\pm N$ , которые расположены в точках  $z = a$  и  $z = a + \varepsilon$ .**

$\triangleright$  Комплексный потенциал этой системы особенностей найдем сложением потенциалов источника и стока

$$w(z) = \frac{N}{2\pi} \ln(z - a) - \frac{N}{2\pi} \ln(z - a - \varepsilon).$$

Рассмотрим предельное образование, которое получается из нашей системы, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$  и одновременно  $N \rightarrow \infty$  так, что  $N\varepsilon \rightarrow P$ . В противном случае при сложении источника и стока равных расходов имело бы место исчезновение течения. Совершая предельный переход, можно записать:

$$w(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N}{2\pi} [\ln(z - a) - \ln(z - a - \varepsilon)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N\varepsilon}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(z - a) - \ln(z - a - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{p}{2\pi} \frac{d \ln(z - a)}{d(z - a)} = \frac{p}{2\pi(z - a)}.$$

Таким образом, получили комплексный потенциал точечного диполя, находящегося в точке  $z = a$ ,  $p$  называется также моментом диполя.

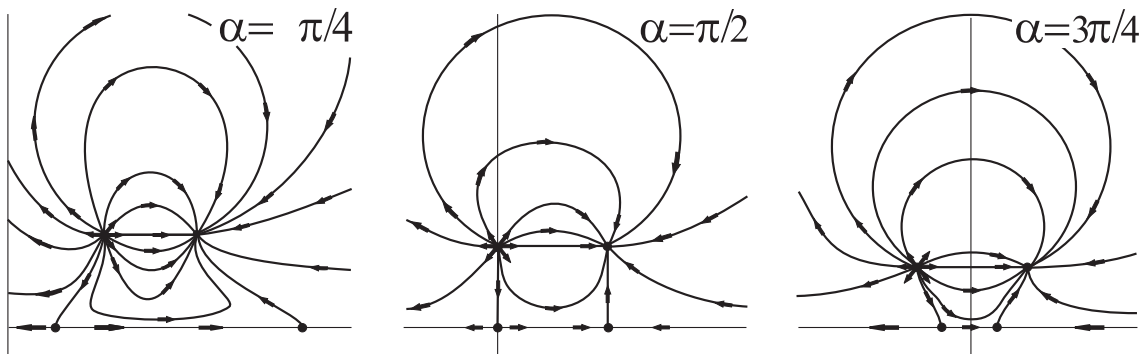
Если вещественная ось является линией тока, то для всей плоскости  $z$  комплексный потенциал примет вид

$$w = \frac{N}{2\pi} [\ln(z - a) - \ln(z - a - \varepsilon) + \ln(z + \bar{a}) - \ln(z + \bar{a} + \bar{\varepsilon})].$$

Тогда критические точки

$$z_{kp}^{1,2} = \frac{\varepsilon + 2r \cos \alpha \pm \sqrt{4r^2 \sin^2 \alpha + 2\varepsilon r \cos \alpha}}{2}, \quad a = r e^{i\alpha}.$$

◁



**4. Течение в первом квадранте  $\{z : \operatorname{Re} z > 0 \operatorname{Im} z > 0\}$ , образованное диполем в точке  $a$ .**

▷ Комплексный потенциал в первом квадранте будет иметь вид  $w = \frac{p}{z-a}$ , где момент точечного диполя  $p$  будем считать вещественным. Используя принцип симметрии и теорему Лиувилля, запишем комплексный потенциал для всей плоскости  $z$  в виде

$$w = P \left[ \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-\bar{a}} - \frac{1}{z+a} - \frac{1}{z+\bar{a}} \right].$$

Взяв производную от  $w$ , приравняв ее нулю и положив  $a = re^{i\alpha}$ , определим критические точки. Их всего будет пять, а именно:

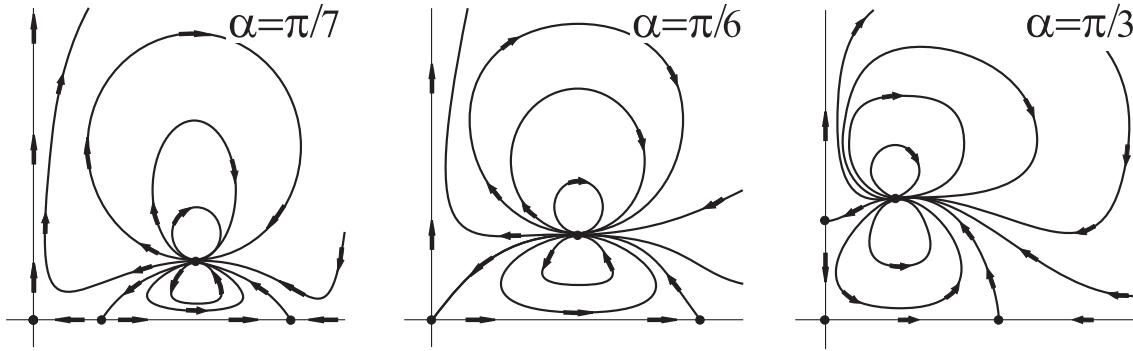
$$z_{kp}^1 = 0, \quad z_{kp}^{2,3,4,5} = \pm \sqrt{r^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 - r^4 \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}} \right)}.$$

Для удобства возьмем  $r = 1$ , тогда  $z_{kp}^{2,3,4,5} = \pm \sqrt{1 \pm 2 \sin \alpha}$ .

При  $0 < \alpha < 90^\circ$  величина  $\sin \alpha$  возрастает, положительна и меньше единицы. При этом

1.  $z_{kp}^{2,3} = \pm 1$ , когда  $\alpha = 0$ ;
2. если  $0 < \alpha < 30^\circ$ , то величина  $2 \sin \alpha < 1$ , а  $z_{kp}^{2,3,4,5}$  пробегают по вещественной оси от точек  $\pm 1$  в разные стороны при увеличении  $\alpha$ ;
3. если  $\alpha = 30^\circ$ , то картина течения будет аналогичной первому случаю,  $z_{kp}^{2,3} = \pm \sqrt{2}$ ;
4. если  $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ , то с увеличением  $\alpha$  точки  $z_{kp}^{2,4}$  будут перемещаться по вещественной оси от  $\pm \sqrt{2}$  к  $\pm \sqrt{3}$ , а  $z_{kp}^{3,5}$  — от нуля к  $\pm i$ ;
5. если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $z_{kp}^{2,4} = \pm \sqrt{3}$ , а точки  $z_{kp}^{3,5}$  совпадают с положением

диполя. ◁



5. Течение в полосе  $\{z : -\infty < \operatorname{Re} z < \infty, 0 < \operatorname{Im} z < H\}$ , образованное вихрем в точке  $a$ .

▷ Используя закон  $\overline{f(\bar{z})}$  продолжения по симметрии относительно вещественной оси, получим особенность в точке  $\bar{a}$ . Далее применим закон периодичности

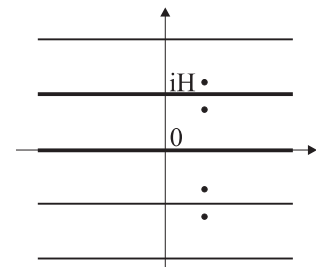
$$f(\bar{z} \pm i2Hk) = f(\bar{z}) \text{ и } f(z \pm i2Hk) = f(z),$$

где  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , и получим особенности в точках  $x \pm i(2Hk \pm y)$ .

Окончательно построим комплексный потенциал в виде

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z-a) \prod_{k=1}^{\infty} (z-a+i2Hk) \prod_{k=1}^{\infty} (z-a-i2Hk)}{(z-\bar{a}) \prod_{k=1}^{\infty} (z-\bar{a}+i2Hk) \prod_{k=1}^{\infty} (z-\bar{a}-i2Hk)} =$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{e^{\frac{\pi z}{H}} - e^{\frac{\pi a}{H}}}{e^{\frac{\pi z}{H}} - e^{\frac{\pi \bar{a}}{H}}}. \triangleleft$$



## 6. Течение между единичным кругом

$|z - iH| < 1$  и прямолинейным экраном, образованное вихрем в точке  $p_1 = ih$ .

▷ Для определения комплексного потенциала необходимо найти все его особенности в плоскости. Для этого применяется  $\overline{f(\bar{z})}$  – закон симметрии относительно вещественной оси и  $z\bar{z} = r^2$  – симметрия относительно

окружности. Итак, вихрь расположенный в точке  $p_1$ , описывается как  $\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - p_1)$ . Для удобства обозначим  $G = \Gamma/2\pi i$ ,  $c = ih$

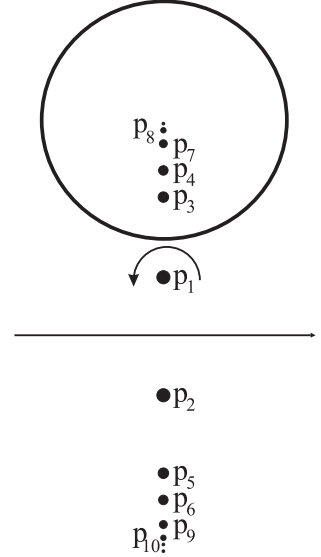
и определим все особенности, находящиеся в плоскости. Для того чтобы экран был линией тока, применим принцип симметрии относительно оси и получим особенность в точке  $p_2 = -ih$ , при этом знак циркуляции поменяется, т.е. мы будем иметь  $\bar{G}$ . Теперь нужно удовлетворить условие, что окружность является линией тока.

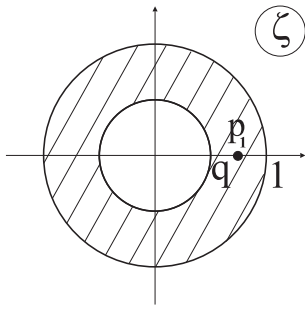
Для этого нужно построить две точки, симметричные для  $p_1$  и  $p_2$  относительно окружности.

Этими точками будут  $p_3 = c - \frac{1}{\bar{c}+ih}$  (циркуляция отрицательная) и  $p_4 = c - \frac{1}{c-ih}$  (циркуляция положительная), при этом окружность стала линией тока, а экран теперь не является линией тока. Для того чтобы экран стал линией тока, отобразим точки  $p_3$  и  $p_4$  относительно прямой и получим точки  $p_5 = \bar{c} - \frac{1}{c-ih}$  (циркуляция положительная) и  $p_6 = \bar{c} - \frac{1}{c+ih}$  (циркуляция отрицательная), при этом окружность перестала быть линией тока. Поэтому нужно построить симметрично относительно окружности точки  $p_7 = c - \frac{1}{\bar{c}+p_5}$  (циркуляция отрицательная) и  $p_8 = c - \frac{1}{\bar{c}+p_6}$  (циркуляция положительная), но при этом экран перестал быть линией тока. Далее получим  $p_9 = \bar{c} - \frac{1}{c+p_7}$  (циркуляция положительная) и  $p_{10} = \bar{c} - \frac{1}{c+p_8}$  (циркуляция отрицательная). И так далее, т.е. этот процесс построения особенностей будет продолжаться до бесконечности.

Поэтому комплексный потенциал запишется в следующем виде

$$w = G \sum_{k=1}^{\infty} [\ln(z - p_{4k-3}) + \ln(z - p_{4k})] + \bar{G} \sum_{k=1}^{\infty} [\ln(z - p_{4k-2}) + \ln(z - p_{4k-1})].$$





Эту задачу можно решать иным образом. Для этого отобразим заданную область на кольцо, при этом особенности  $(1/\bar{p}_1)$  и  $1/(\bar{p}_1 q^2)$  будут расположены во внешности кольца и с учетом бесконечной симметрии, комплексный потенциал

а) запишется в следующем виде

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \prod_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{\zeta - p_1 q^{2k}}{\zeta - \frac{q^{2k}}{\bar{p}_1}}. \triangleleft$$

Для лучшего усвоения принципа симметрии рекомендуем дополнительно прорешать следующие задачи из[5].

**7. Течение в угле  $0 < \arg z < \pi/3$ , с источником обильности  $Q$  в точке  $a e^{i\pi/6}$ , где  $a > 0$ .**

**8. Течение в области  $|z| > 1, \text{Im } z > 0$ , с вихрем в точке  $ia$  с циркуляцией  $\Gamma$ , где  $a > 0$ .**

**Построить схематические линии тока и эквипотенциальные линии и определить скорость на  $\infty$  в полосе периодов для периодических течений с заданными комплексными потенциалами:**

**9.**  $w = \frac{Q}{2\pi} \ln \sin z;$

**10.**  $w = \frac{p}{2\pi} \text{ctg } z \quad (0 \leq \arg p \leq \frac{\pi}{2}).$

## Приложение.

В пакете Mathematica 5.1 для визуализации течения существует пакет << **Graphics'PlotField'**. Чтобы им воспользоваться, нужно сделать следующие шаги. После того как запускается этот пакет,

считаем, что переменные  $x$ ,  $y$  и  $G$  вещественные

$x$  /:  $\text{Im}[x] = 0$ ;  $y$  /:  $\text{Im}[y] = 0$ ;  $G$  /:  $\text{Im}[G] = 0$ ;

положим  $G=1$  и  $a=1+I$

Выясним, какому течению соответствует комплексный потенциал

$w = G/(2 \text{ Pi } I) \text{ Log}[(z - a) (z + a)] / ((z - \text{Conjugate}[a]) (z + \text{Conjugate}[a]))$ ;

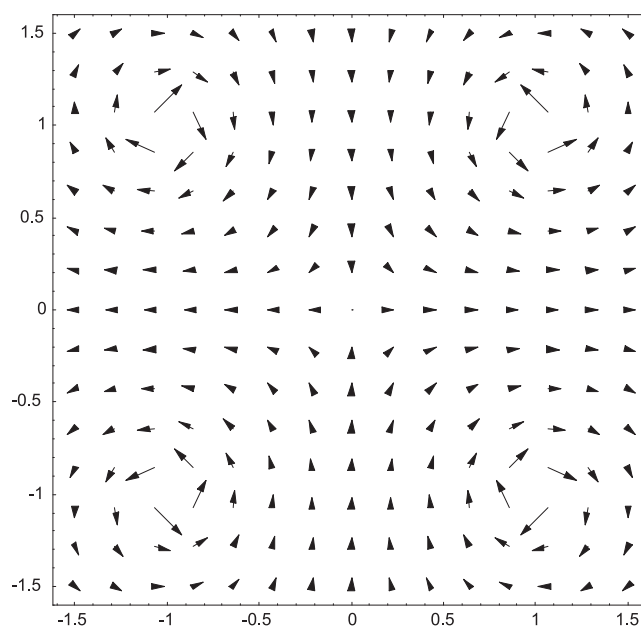
$dw = D[w, z] // \text{Simplify}$

Проекции вектора скорости такого течения имеют вид

$z = x + I y$ ;  $v = \{\text{Re}[dw], -\text{Im}[dw]\} // \text{Simplify}$

Для изображения такого поля по его комплексному потенциалу служит функция

$\text{PlotPolyaField}[dw, \{x, -1.5, 1.5\}, \{y, -1.5, 1.5\}]$





## Литература

1. Аксентьев Л.А. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1969. – 56 с.; 1984. – 90 с; 2005. – 122с.
2. Аксентьев Л.А. Комплексный потенциал плоского поля. – Казань. – 1989. – 44с.
3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – Москва: Изд-во Мир, 1964. – 655с.
4. Аксентьев Л.А. Применение метода симметрии в конформных отображениях и в краевых задачах. – Казань: Лаборатория оперативной полиграфии КГУ, 1993. – 48 с.
5. Волковыский Л.И., Г.Л. Лунц, Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – Москва: Изд-во Наука, 1975, 320с.