Лекция 1. Алгебраические уравнения с одним неизвестным. Уравнение первой степени, его решение.

Основными вопросами лекционного занятия являются:

1. Числовые равенства, их свойства.
2. Уравнения с одним неизвестным. Теоремы о равносильных переходах от одного уравнения к другому.
3. Уравнение первой степени.
4. Использование взаимосвязи между компонентами и результатами действий при решении уравнения в начальном курсе математики.

1. Числовые равенства, их свойства.

Если два числа (числовых выражения) соединены знаком равенства, то принято говорить, что задано числовое равенство. Равенство может быть верным и неверным.

Свойства числовых равенств:

1^0. Если числа a, b и c таковы, что $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

2^0. Если числа a, b, c, d таковы, что $a=b$ и $c=d$, то $a+c=b+d$.

3^0. Если числа a, b, c, d таковы, что $a=b$ и $c=d$, то $ac=bd$.

4^0. Для любых действительных чисел a, b и c равенства $a=b$ и $a+c=b+c$ равносильны.

5^0. Для любых действительных чисел a, b и $c\neq 0$ равенства $a=b$ и $ac=bc$ равносильны.

2. Уравнения с одним неизвестным. Теоремы о равносильных переходах от одного уравнения к другому.

Пусть стоит задача решить уравнение $R(x)=Q(x)$ (1), где $R(x)$ и $Q(x)$ – многочлены относительно одной буквы x; тогда букву x называют неизвестным, а уравнение (1) – алгебраическим уравнением с одним неизвестным.

Задача о решении уравнения (1) может быть сформулирована так: найти все числовые значения неизвестного x, каждое из которых обращает уравнение (1) в верное числовое равенство. Каждое такое число называют корнем или решением уравнения (1). Поэтому решить уравнение (1) – это значит найти множество всех его корней.

Если множество всех корней уравнения (1) состоит из k чисел x_1, x_2, …, x_k, то говорят, что уравнение имеет k корней. Если множество всех корней состоит из одного числа x_1, то говорят, что уравнение имеет единственный корень или единственное решение x_1.

В случае, когда множество всех корней уравнения (1) есть пустое множество, то говорят, что уравнение (1) не имеет корней.

Пусть даны два алгебраических с одним неизвестным $R(x)=Q(x)$ и $S(x)=T(x)$. Эти уравнения называются равносильными, если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

В силу этого определения равносильны любые два уравнения, не имеющие корней.

Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется равносильным переходом от одного уравнения к другому.

Запись $R(x)=Q(x) \Leftrightarrow S(x)=T(x)$ означает, что уравнения $R(x)=Q(x)$ и $S(x)=T(x)$ равносильны.

Для нахождения множества всех корней уравнения это уравнение равносильными переходами сводят к одному или совокупности нескольких уравнений, каждое из которых – либо простейшее уравнение с одним неизвестным типа $x=\alpha$, где α – некоторое фиксированное число, либо уравнение, для которого очевидно, что оно не имеет корней.

Рассмотрим некоторые утверждения, при помощи которых и будут совершаться равносильные переходы.

1. Уравнения $R(x)=Q(x)$ и $R(x)–Q(x)=0$ равносильны.
2. Уравнения $R(x)=Q(x)$ и $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ равносильны для любого действительного числа α.
3. Уравнения $R(x)=Q(x)$ и $\alpha R(x)=\alpha Q(x)$ равносильны для любого отличного от нуля действительного числа α.
4. Пусть известно, что для любого действительного числа x справедливо равенство $R(x)=T(x)$, тогда равносильны уравнения $R(x)=Q(x)$ и $T(x)=Q(x)$.

Докажем второе утверждение.

Пусть число x_1 – некоторый корень уравнения $R(x)=Q(x)$. Тогда справедливо числовое равенство $R(x_1)=Q(x_1)$. Согласно одному из свойств числовых равенств (4^0) $R(x_1)+\alpha =Q(x_1)+\alpha$ – верное равенство. Справедливость этого равенства означает, что число x_1 – является корнем уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$.

Такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $R(x)=Q(x)$, поэтому любой корень уравнения $R(x)=Q(x)$ является корнем уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$.

Докажем теперь обратное.

Пусть число x_2 есть некоторый корень уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$, тогда справедливо числовое равенство $R(x_2)+\alpha=Q(x_2)+\alpha$. Прибавим к обеим частям этого равенства число $(-\alpha)$, получим справедливость равенства $R(x_2)=Q(x_2)$. Следовательно, x_2 – корень уравнения $R(x)=Q(x)$. Так как такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$, то можно сделать вывод, что любой корень уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ является корнем уравнения $R(x)=Q(x)$.

Таким образом, уравнения $R(x)=Q(x)$ и $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ равносильны и второе утверждение доказано полностью.

Пусть дан многочлен $P(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+ a_{n-1}x + a_n$ $(a_0\neq0)$, где a_0 , a_1 , …, a_{n-1} , a_n – некоторые действительные числа, называемые коэффициентами многочлена $P(x)$.

Любое алгебраическое уравнение с одним неизвестным можно привести к виду $P(x)=0$. Всякое такое уравнение называется алгебраическим уравнением степени n.

3. Уравнение первой степени.

Рассмотрим случай, когда $P(x)$ есть многочлен первой степени, то есть рассмотрим уравнение $a_0x + a_1 = 0$ $(a_0\neq0)$.

$a_0x + a_1 = 0$ $(a_0\neq0)$ <=> $a_0x = -a_1$ $(a_0\neq0)$ <=> $x = -a_1 : a_0$ $(a_0\neq0)$.

Таким образом, уравнение $a_0x + a_1 = 0$ $(a_0\neq0)$ имеет единственный корень $x = -a_1 : a_0$ $(a_0\neq0)$.

4. Использование взаимосвязи между компонентами и результатами действий при решении уравнения в начальном курсе математики.

В начальном курсе математики рассматриваются уравнения первой степени с одним неизвестным вида:

7+x=10, x–3=10+5, x•(17-10)=70, x:2+10=30.

Неизвестное число при решении простых уравнений сначала находят подбором, а позднее на основе знания связи между результатом и компонентами арифметических действий, т.е. знания способов нахождения неизвестных компонентов.

В 3 классе вводятся в речевую практику термины «уравнение», «корень уравнения», «решить уравнение». Рассмотрим определения этих понятий, представленные в учебнике 3 класса.

Уравнением называют равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти.

Значение переменной, при котором из уравнения получается верное равенство, называют корнем уравнения.

Решить уравнение – значит найти все его корни (или убедиться, что их нет).

У младших школьников формируется умение комментировать решения уравнений по компонентам действий.

x+28=53 x=53–28 x=25	Неизвестно слагаемое. Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.
y–34=26 y=26+34 y=60	Неизвестно уменьшаемое. Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое.

35–z=19 z=35–19 z=16	Неизвестно вычитаемое. Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность.
7•a=56 a=56:7 a=8	Неизвестен множитель. Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель.
b:23=4 b=23•4 b=92	Неизвестно делимое. Чтобы найти неизвестное делимое, надо делитель умножить на частное.
90:c=5 c=90:5 c=18	Неизвестен делитель. Чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное.

Рассмотрим на примерах решение уравнения с одним неизвестным с помощью равносильных переходов, а также используя взаимосвязи между компонентами и результатами действий, то есть способом, который рассматривается в начальной школе.

Например, предлагается следующее задание.

Решите уравнение (x+3):8=5, используя:

а) теоремы о равносильности уравнений;

б) взаимосвязь между компонентами и результатами действий.

Сравните способы записи и результаты решения.

Решение:

а) $(x+3):8=5$

Умножим на 8 обе части уравнения (теорема 3), получим уравнение, равносильное данному.

$x+3=40$

Прибавим к обеим частям уравнения число –3 (теорема 2), получим уравнение, равносильное данному.

$x=37$

б) Решение уравнения $(x+3):8=5$ можно прокомментировать так:

Слева записано частное (последнее действие – деление). Неизвестно делимое $x+3$. Чтобы найти неизвестное делимое, надо делитель умножить на частное.

$x+3=8\bullet5$

Упростим правую часть уравнения.

$x+3=40$

Неизвестно слагаемое. Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.

$x=40–3$

$x=37$

Итак, уравнение $(x+3):8=5$ имеет единственный корень 37.