КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Шурыгин В.В.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Казань — 2010

УДК 517.9

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

методической комиссии механико-математического факультета Протокол № 5 от 1 апреля 2010 г.

заседания кафедры дифференциальных уравнений Протокол № 6 от 24 марта 2010 г.

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук, ст. преп. КФУ П.Н. Иваньшин

Шурыгин Вадим Вадимович.

Групповой анализ дифференциальных уравнений: Учебно-методическое пособие / В.В. Шурыгин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2010. – 55 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов IV курса механико-математического факультета КФУ, специализирующихся по кафедре дифференциальных уравнений.

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено изложению основ группового анализа дифференциальных уравнений. Особое внимание уделено разбору конкретных задач и примеров. Кроме того, в пособие включено большое количество задач и упражнений, рассчитанных на самостоятельное решение.

Пособие может быть полезно для студентов старших курсов, специализирующихся по кафедре дифференциальных уравнений, а также при чтении специальных курсов.

1. Однопараметрические группы преобразований

Будем рассматривать однопараметрическое семейство $\{T_a\}$ преобразований пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{x} = f(x, a), \tag{1}$$

где a — вещественный параметр, изменяющийся в некотором интервале $\Delta \subset \mathbb{R}$. Будем также предполагать, что $T_0 = \mathrm{id}$ (тождественное преобразование) и что $T_a \neq \mathrm{id}$ для всех остальных $a \in \Delta$. Если тождественное преобразование получается не при $a = 0$, а при некотором a_0, то сделаем замену параметра: $a' = a - a_0$. Кроме того, будем считать, что семейство $\{T_a\}$ вместе с каждым преобразованием содержит обратное к нему, то есть, для каждого $a \in \Delta$ найдется такое число, которое мы обозначим через a^{-1}, что $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$. Наконец, будем предполагать, что композиция любых двух преобразований T_a и T_b снова принадлежит рассматриваемому семейству, т.е., что

$$T_b \circ T_a = T_{\varphi(a,b)} \tag{2}$$

для некоторой функции $\varphi(a, b)$, которую мы будем считать дифференцируемой.

Такое семейство преобразований называется *однопараметрической группой преобразований.*

Ясно, что функция $\varphi(a, b)$ должна удовлетворять условиям

$$\varphi(a, 0) = a, \quad \varphi(0, b) = b.$$

Пример. Рассмотрим преобразования растяжения $\overline{x} = ax$. Для них тождественное преобразование получается при $a = 1$, поэтому сдвинем параметр и запишем их в виде $\overline{x} = x + ax$. Тогда $a^{-1} = -\dfrac{a}{1+a}$, а $\varphi(a, b) = a + b + ab$.

Возникает естественный вопрос: к какому наиболее простому виду можно привести закон умножения в группе перепараметризацией (невырожденной заменой параметра a)? Ниже мы покажем, что для любой однопараметрической группы функцию φ можно привести к виду $\varphi(a, b) = a + b$, т.е.,

$$f(f(x, a), b) = f(x, a + b). \tag{3}$$

При этом $a^{-1} = -a$.

Разложим функцию $f(x, a)$ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности точки $a = 0$. Поскольку $T_0 = \mathrm{id}$, имеем $f(x, 0) = x$. Обозначим $X(x) = \dfrac{\partial f(x, a)}{\partial a}\Big|_{a=0}$. Тогда

$$\overline{x} = x + X(x) \cdot a + o(a). \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{df}{da} = X(f), \quad f|_{a=0} = x \tag{5}$$

называется *уравнением Ли.*

Векторное поле $X = X^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ называется *инфинитезимальным оператором* (или просто *оператором*) группы преобразований (1). Оно является касательным векторным полем к орбитам группы.

Теорема 1. [2] *Пусть функция $f(x, a)$ удовлетворяет групповому свойству* (3) *и имеет разложение* (4)*. Тогда она является решением уравнения Ли.*

Обратно, для любого гладкого векторного поля $X(x)$ решение уравнения Ли удовлетворяет групповому свойству (3)*.*

Пример. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) векторное поле $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$. Восстановим преобразование (1), имеющее X своим касательным векторным полем. Заметим, что с точностью до $o(a)$ это преобразование можно записать как $\overline{x} \approx x + ax^2$, $\overline{y} \approx y + axy$. Запишем уравнения Ли:

$$\frac{d\overline{x}}{da} = \overline{x}^2, \quad \frac{d\overline{y}}{da} = \overline{xy}.$$

Решением этой системы служат функции $\overline{x} = -\dfrac{1}{a + C_1}$, $\overline{y} = \dfrac{C_2}{a + C_1}$. Из начального условия имеем (подставляя $a = 0$): $C_1 = -1/x$, $C_2 = -y/x$. Отсюда

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1 - ax}. \tag{6}$$

Этот пример удобен для иллюстрации локального характера групп преобразований. Возьмем, к примеру, точку $(x, y) = (1, 1)$ и применим к ней преобразование (6). Получим

$$\overline{x} = \frac{1}{1 - a}, \quad \overline{y} = \frac{1}{1 - a}.$$

Отсюда понятно, что параметр a может принимать значения из интервала $(-\infty, 1)$. Но композиция таких преобразований с произвольными a, b из этого интервала может не иметь смысла. Таковы, например, любые значения a и b такие, что $a + b = 1$ (проверить!). Таким образом, перемножать можно не все такие преобразования, а только те, значения параметра которых принадлежат некоторому подынтервалу. Это говорит о том, что решения уравнения Ли, строго говоря, образуют не группу, а *локальную группу* в том смысле, что композицию преобразований можно брать только для значений параметров

a, b, принадлежащих некоторому подынтервалу $\Delta' \subset \Delta$, содержащему точку $a = 0$. Этот же пример показывает, что интервал Δ, вообще говоря, зависит от преобразуемой точки (x, y).

Покажем теперь, как произвольный закон умножения (2) привести к виду (3). Запишем групповое свойство в виде

$$f(\overline{x}, b) \equiv f(f(x, a), b) = f(x, \varphi(a, b)).$$

Продифференцируем обе части этого равенства по b:

$$\frac{\partial f(\overline{x}, b)}{\partial b} = \frac{\partial f(x, c)}{\partial c}\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b},$$

где мы обозначили $c = \varphi(a, b)$. Подставим теперь $b = 0$ (при этом $c = a$!)

$$\frac{\partial f(\overline{x}, b)}{\partial b}\Big|_{b=0} = \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\Big[\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}\Big]\Big|_{b=0},$$

Второй множитель справа равен 1 при $a = 0$ (почему?), следовательно, он отличен от нуля при малых a. Положим $\dfrac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} = \dfrac{1}{A(a)}$. Обозначив $X(x) = \dfrac{\partial f(\overline{x}, a)}{\partial a}\Big|_{b=0}$, запишем последнее равенство в виде $X(x) = \dfrac{1}{A(a)}\dfrac{d\overline{x}}{da}$ или

$$\frac{d\overline{x}}{d\overline{a}} = X(\overline{x}),$$

где новый параметр $\overline{a}$ определен формулой $\overline{a} = \displaystyle\int_0^a A(a)\, da$. Этот параметр называется *каноническим*. В результате относительно него получилось уравнение Ли (5). По Теореме 1, в этой параметризации закон умножения имеет вид $\varphi(a, b) = a + b$.

Задача. Образуют ли группу преобразования а) $\overline{x} = x - ay$, $\overline{y} = y + ax$; б) $\overline{x} = x + a$, $\overline{y} = \dfrac{xy}{x + a}$?

Задача. Приведите к каноническому параметру группы а) $\overline{x} = x + a + a^2$ на прямой; б) группу вращений $\overline{x} = \sqrt{1 - a^2} \cdot x - ay$, $\overline{y} = ax + \sqrt{1 - a^2} \cdot y$ на плоскости.

Инварианты.

Функция $J(x)$ называется *инвариантом* группы преобразований (1), если для всех допустимых значений x и a выполняется

$$J(\overline{x}) = J(f(x, a)) = J(x). \tag{7}$$

Теорема 2. [2] *Функция $J(x)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению*

$$XJ = X^i(x)\frac{\partial J}{\partial x^i} = 0. \tag{8}$$

Критерий инвариантности (8) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Поэтому любая однопараметрическая группа преобразований в $\mathbb{R}^n$ имеет $n-1$ функционально независимых инвариантов. При этом любой другой инвариант этой группы есть функция от этих $(n-1)$ «базисных» инвариантов. В качестве такого базиса можно выбрать левые части первых интегралов $J_1(x) = C_1, \ldots, J_{n-1}(x) = C_{n-1}$ характеристической системы уравнения (8):

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n}. \tag{9}$$

Для любого инварианта J векторное поле X касается поверхностей $J(x) = C$.

Пример. Рассмотрим следующую группу растяжений в $\mathbb{R}^3$: $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{2a}$, $\overline{z} = ze^{-2a}$. Для нее $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial}{\partial y} - 2z\dfrac{\partial}{\partial z}$ и уравнение (8) принимает вид

$$x\frac{\partial J}{\partial x} + 2y\frac{\partial J}{\partial y} - 2z\frac{\partial J}{\partial z} = 0.$$

Решая характеристическую систему $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} = \dfrac{dz}{-2z}$, находим первые интегралы $y/x^2 = C_1$, $x^2z = C_2$. Поэтому в качестве базиса инвариантов можно взять функции $J_1 = y/x^2$, $J_2 = x^2z$, а произвольный инвариант имеет вид $J = J(y/x^2, x^2z)$.

Теорема 3. *Всякая однопараметрическая группа G преобразований $\overline{x} = f(x,a)$ невырожденной заменой переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ может быть приведена к группе переносов вдоль оси $x^{n'}$.*

Доказательство. Пусть $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — оператор группы. Поскольку при замене переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ векторное поле X преобразуется как $X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i} = X^i\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial x^{j'}}$, то в системе координат $(x^{i'})$ векторное поле X принимает вид $X = X(x^{j'})\dfrac{\partial}{\partial x^{j'}}$.

Теперь для того, чтобы в этой системе координат поле X стало касательным векторным полем к оси $x^{n'}$, то есть, полем $\dfrac{\partial}{\partial x^{n'}}$, необходимо, чтобы $X(x^{1'}) = \ldots = X(x^{(n-1)'}) = 0$, а $X(x^{n'}) = 1$. Поэтому достаточно выбрать в качестве функций $x^{i'}$, $i' = 1, \ldots, n-1$, любые $n-1$ функционально независимых инвариантов $J_1, \ldots, J_{n-1}$, а функцию $x^{n'}$ найти из условия $X(x^{n'}) = 1$.

Система функций $x^{1'} = J_1(x), \ldots, x^{n-1'} = J_{n-1}(x)$, $x^{n'} = x^{n'}(x^i)$ определяет искомую замену переменных. Векторное поле X в этих координатах имеет вид $X = \dfrac{\partial}{\partial x^{n'}}$, то есть, определяет группу переносов вдоль оси $x^{n'}$. $\Box$

Вопрос. Почему построенная в ходе доказательства система функций будет функционально независима?

Пример. Рассмотрим следующую группу растяжений в $\mathbb{R}^2$: $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^a$ с оператором $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Найдем новые переменные t, s, в которых эта группа будет группой переносов вдоль оси t. Уравнение на переменную t имеет вид $X(t) = x\dfrac{\partial t}{\partial x} + y\dfrac{\partial t}{\partial y} = 1$. Поскольку достаточно найти любое частное решение этого уравнения, мы можем искать, например, решение вида $t = t(x)$, зависящее только от x. Тогда это уравнение сведется к обыкновенному уравнению $x\dfrac{dt}{dx} = 1$, откуда $t = \ln|x|$. Уравнение на переменную s имеет вид $X(s) = x\dfrac{\partial s}{\partial x} + y\dfrac{\partial s}{\partial y} = 0$. Решая его, получаем первый интеграл $\dfrac{y}{x} = C$, откуда $s = \dfrac{y}{x}$. В переменных (s,t) групповой закон принимает вид $\overline{s} = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}} = \dfrac{ye^a}{xe^a} = \dfrac{y}{x} = s$, $\overline{t} = \ln|\overline{x}| = \ln|xe^a| = \ln|x| + a = t + a$.

Задача. Приведите к переносам группы с операторами а) $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$; б) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$; в) $X = xy\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Задача. Приведите к переносам группу поворотных гомотетий на плоскости $\overline{x} = e^t(x\cos a + y\sin a)$, $\overline{y} = e^t(-x\sin a + y\cos a)$ с оператором $X = (x+y)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-x)\dfrac{\partial}{\partial y}$. *Подсказка.* Имеет смысл сначала перейти к полярным координатам.

Инвариантные поверхности.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ поверхность M размерности $n-s$, заданную системой уравнений

$$F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0, \ldots,\ F_s(x) = 0, \quad s \leqslant n. \tag{10}$$

Будем считать, что задание поверхности является регулярным, т.е., $\operatorname{rank}\left\|\dfrac{\partial F_k}{\partial x^i}\right\|$ равен s в любой точке поверхности M.

Поверхность M называется *инвариантной относительно действия группы G преобразований $\overline{x} = f(x,a)$*, если из того, что $x \in M$ следует, что $\overline{x} \in M$. В этом случае будем говорить, что эта система *допускает группу G*.

Теорема 4. [2] *Поверхность M инвариантна относительно действия группы G тогда и только тогда, когда $XF_k|_M = 0$ для всех $k = 1, \ldots, s$.*

Теорема 5. [2] *Поверхность M, инвариантная относительно действия группы G, может быть задана системой уравнений вида*

$$\Phi_k(J_1(x), \ldots, J_{n-1}(x)) = 0, \quad k = 1, \ldots, s,$$

где функции $J_1(x)$, $\ldots$, $J_{n-1}(x)$ образуют базис инвариантов группы G, при условии, что инфинитезимальный оператор X группы G не обращается в нуль в точках поверхности M.

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ параболоид вращения M, заданный уравнением $x^1 - \sum\limits_{i=2}^{n}(x^i)^2 = 0$. Он инвариантен относительно группы растяжений с оператором

$$X = 2x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + x^n\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Действительно, $X(x^1 - \sum\limits_{i=2}^{n}(x^i)^2) = 2(x^1 - \sum\limits_{i=2}^{n}(x^i)^2)$. В ограничении на M последнее выражение равно нулю, так что условие Теоремы 4 выполнено. Это же равенство показывает, что функция $x^1 - \sum\limits_{i=2}^{n}(x^i)^2$ не является инвариантом, ибо не выполнено условие (8).

Запишем уравнение параболоида M в инвариантном виде. Для этого выберем базис инвариантов

$$J_1(x) = \frac{(x^2)^2}{x^1}, \ \ldots, \ J_{n-1}(x) = \frac{(x^n)^2}{x^1}.$$

Сделаем замену переменных $\overline{x}^1 = x^1 - \sum\limits_{i=2}^{n}(x^i)^2$, $y^1 = x^2$, $\ldots$, $y^{n-1} = x^n$. Теперь уравнение параболоида примет вид $\overline{x}^1 = 0$, а инварианты J_i, $i = 1, \ldots, n-1$, запишутся в виде $\widetilde{J}_1(y) = \dfrac{(y^1)^2}{r^2}$, $\ldots$, $\widetilde{J}_{n-1}(y) = \dfrac{(y^{n-1})^2}{r^2}$, где $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(y^i)^2$. Функциональная зависимость между ними выражается соотношением $\widetilde{J}_1(y) + \ldots + \widetilde{J}_{n-1}(y) = 1$. Поэтому инвариантное уравнение параболоида M выглядит следующим образом:

$$J_1(x) + \ldots + J_{n-1}(x) = 1$$

или

$$\frac{1}{x^1}\sum_{i=2}^{n}(x^i)^2 = 1.$$

Задача. Инвариантное представление неоднозначно. Постройте другое такое представление, взяв в качестве базиса инвариантов функции $J_1(x) = x^1/(x^2)^2$, $J_2(x) = x^3/x^2$, $\ldots$, $J_{n-1}(x) = x^n/x^2$.

Задача. Конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ инвариантен относительно группы гомотетий $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^a$, $\overline{z} = ze^a$. Найдите какое-нибудь его инвариантное представление.

2. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{11}$$

Легко видеть, что оно не меняется при переносах временной $\bar{t} = t + a$ и пространственной координат $\overline{x} = x + a$ и при растяжениях $\overline{u} = ue^a$. Кроме того, если $\varphi(t, x)$ — решение уравнения (11), то, в силу линейности и однородности, преобразование $\overline{u} = u + a\varphi(t, x)$ также не меняет его.

Определение. Всякое преобразование, переводящее данное дифференциальное уравнение в равносильное уравнение того же вида, называется *допустимым (допускаемым) преобразованием.*

Менее очевидно, что уравнение (11) допускает также следующее семейство преобразований:

$$\bar{t} = t, \quad \overline{x} = x + 2at, \quad \overline{u} = ue^{-(ax + a^2 t)}. \tag{12}$$

Упражнение. Проверить, что эти преобразования образуют группу.

Проверим, что эти преобразования сохраняют уравнение (11). По формулам преобразования производных имеем

$$\begin{aligned}
\overline{u}_{\bar{t}} &= (u_t + a^2 u - 2au_x)e^{-(ax + a^2 t)}, \\
\overline{u}_{\overline{x}} &= (u_x - au)e^{-(ax + a^2 t)}, \\
\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} &= (u_{xx} + a^2 u - 2au_x)e^{-(ax + a^2 t)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда $\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} - \overline{u}_{\bar{t}} = (u_{xx} - u_t)e^{-(ax + a^2 t)}$.

Одно из применений допустимых преобразований состоит в том, что они переводят любое решение уравнения в другое решение. Например, если $\varphi(t, x)$ — решение уравнения (11), то, записав его в новых переменных $\overline{u} = \varphi(\bar{t}, \overline{x})$, и выразив отсюда u, получим $u = e^{ax + a^2 t}\varphi(t, x + 2at)$.

Упражнение. Проверить, что эта формула действительно задает решение.

Итак, мы знаем несколько однопараметрических групп, допускаемых уравнением (11). Как найти все остальные и показать, что найдены все? Конструктивный подход к решению этого вопроса основывается на Теореме 4 и трактовке дифференциального уравнения как поверхности в продолженном пространстве.

Упражнение. Проверить, что преобразования (12) и (13) образуют группу.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^6$ переменных $(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$. Уравнение (11) определяет в этом пространстве 5-мерную поверхность $M \subset \mathbb{R}^6$ (на самом деле, гиперплоскость). Инвариантность уравнения (11) относительно преобразований (12) означает ни что иное, как инвариантность этой поверхности M относительно преобразований (12) и (13). Так как последние образуют группу, то справедлив инфинитезимальный критерий инвариантности (Теорема 4). Выпишем условия этой теоремы в рассматриваемом случае. Оператор группы (12) равен

$$X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \tag{14}$$

а оператор группы продолженных преобразований (12) и (13) равен

$$X^{(2)} = X - (xu_t + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_t} - (xu_x + u)\frac{\partial}{\partial u_x} - (xu_{xx} + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \tag{15}$$

Значок «(2)» здесь указывает на то, что оператор (15) получен из оператора X продолжением на производные до 2 порядка включительно.

Замечание. Строго говоря, здесь мы допускаем небольшую вольность. На самом деле, чтобы записать продолжение оператора X на вторые производные, мы должны еще указать, как он действует на переменные u_{tt} и u_{tx}. Но, поскольку эти переменные не входят в уравнение (11), мы не будем включать их в рассмотрение.

Оператор $X^{(2)}$ действует на функции от величин t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, рассматриваемых как *независимые переменные*. Имеем:

$$\begin{aligned} X^{(2)}(u_t - u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_t}(u_t - u_{xx}) - (xu_{xx} + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}(u_t - u_{xx}) = \\ = -xu_t - 2u_x + xu_{xx} + 2u_x = -x(u_t - u_{xx}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$X^{(2)}(u_t - u_{xx})|_M = 0 \tag{16}$$

Таким образом, инфинитезимальный критерий инвариантности выполнен. Эта схема, проведенная в обратном порядке от уравнения (16) к уравнению (14), позволяет найти допускаемые группы.

Продолженные преобразования.

При изучении инвариантных свойств дифференциального уравнения k-го порядка с независимыми переменными $x = (x^1, \dots, x^n)$ и зависимыми переменными $u = (u^1, \dots, u^m)$ мы естественным образом приходим к необходимости продолжить преобразование пространства (x, u) до преобразования пространства переменных $(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)$, где $\partial^s u$ обозначает компоненту, состоящую из всех производных s-го порядка. Прямое вычисление этих преобразований с ростом порядка производных становится очень громоздким. Поэтому мы будем поступать по-другому.

Введем следующий набор переменных: $x = (x^i)$, $i = 1, \ldots, n$; $u = (u^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$; $u^{(1)} = (u_i^\alpha)$; $u^{(2)} = (u_{ij}^\alpha)$ и так далее. Эти переменные будем считать алгебраически независимыми, но связанными между собой *дифференциальными соотношениями*

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), \quad u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \ldots \tag{17}$$

с помощью дифференцирований

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \ldots \tag{18}$$

Дифференцирование D_i называется *оператором полной производной по переменной* x^i. Операторы D_i действуют на гладкие функции от конечного числа переменных x, u, $u^{(1)}$, $\ldots$ по формуле

$$D_i F(x, u, u^{(1)}, \ldots) = \frac{\partial F}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial F}{\partial u_j^\alpha} + \ldots$$

Из формул (17) понятно, что переменные $u_{ij}^\alpha, \ldots$ симметричны по нижним индексам: $u_{ij}^\alpha = u_{ji}^\alpha$ и т.д.

Величины x^i будем называть *независимыми переменными*, u^α — *дифференциальными переменными*, а u_i^α, u_{ij}^α, $\ldots$ — первыми, вторыми и т.д. *производными дифференциальных переменных*. Всякую аналитическую функцию F от конечного набора переменных x, u, $u^{(1)}$, $\ldots$ будем называть *дифференциальной функцией*. Максимальный порядок производной, входящей в данную дифференциальную функцию, будем называть ее *порядком*. Множество всех дифференциальных функций будем обозначать символом $\mathcal{F}$.

Пусть $F \in \mathcal{F}$ — дифференциальная функция порядка p. Уравнение

$$F(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}) = 0 \tag{19}$$

задает некоторую поверхность в пространстве переменных x, u, $u^{(1)}$, $\ldots$, $u^{(p)}$. Будем рассматривать это уравнение вместе со всеми его дифференциальными следствиями

$$D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \ldots$$

и говорить, что уравнение (19) задает *дифференциальное многообразие* $[F]$.

Суть перехода от дифференциального уравнения к дифференциальному многообразию состоит в том, что при вычислении допускаемой группы мы забываем про решения уравнения и рассматриваем дифференциальное уравнение как систему обычных уравнений. После этого мы можем использовать критерий инвариантности из Теоремы 4.

Запишем преобразования (1) для вектора (x, u) в виде

$$\overline{x}^i = f^i(x, u, a), \quad f^i|_{a=0} = x^i, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

$$\overline{u}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a), \quad \varphi^\alpha|_{a=0} = u^\alpha, \;\; \alpha = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Такие преобразования переменных называются *точечными* (в отличие от *контактных*, в которых переменные преобразуются не только друг через друга, но и через производные).

Будем считать, что для преобразований (20)–(21) выполнено групповое свойство (3) и запишем инфинитезимальный оператор этой группы в виде

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad \xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a}\Big|_{a=0}, \;\; \eta^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0}. \tag{22}$$

Обычные формулы замены переменных сохраняют дифференциальные соотношения (17). Выведем эти формулы. При переходе от старых переменных x^i к новым $\overline{x}^i$ дифференцирования по x^i и по $\overline{x}^i$ связаны равенствами

$$D_i = D_i(f^j)\overline{D}_j. \tag{23}$$

При этом соотношения (17) удовлетворяются также и в новых переменных:

$$\overline{u}_i^\alpha = \overline{D}_i(\overline{u}^\alpha). \tag{24}$$

Продифференцируем обе части равенства (21), используя (23) и (24):

$$D_i(\varphi^\alpha) = D_i(\overline{u}^\alpha) = D_i(f^j)\overline{D}_j(\overline{u}^\alpha) = D_i(f^j)\overline{u}_j^\alpha = D_i(\overline{x}^j)\overline{u}_j^\alpha. \tag{25}$$

Таким образом, замена первых производных при точечных преобразованиях (20)–(21) имеет вид $\overline{u}_j^\alpha D_i(f^j) = D_i(\varphi^\alpha)$ или, подробнее,

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\right)\overline{u}_j^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}. \tag{26}$$

В матричном виде это означает, что

$$\begin{pmatrix} D_1(\overline{u}^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(\overline{u}^\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(\overline{x}^1) & \ldots & D_1(\overline{x}^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n(\overline{x}^1) & \ldots & D_n(\overline{x}^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u}_1^\alpha \\ \vdots \\ \overline{u}_n^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Обозначим буквой A матрицу $\|D_i(\overline{x}^j)\|$. С точностью до $o(a)$ мы имеем $\overline{x}^i = x^i + a\xi^i$, $\overline{u}^\alpha = u^\alpha + a\eta^\alpha$, поэтому $D_i(\overline{x}^j) = D_i(x^j + a\xi^j) = \delta_i^j + aD_i\xi^j$.

Это означает, что $A = E + aB$, где E — единичная матрица, а B — это матрица $\|D_i\xi^j\|$. При малых a матрица A будет невырожденной, поэтому соотношения (26) можно разрешить относительно $\overline{u}_j^\alpha$:

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1^\alpha \\ \vdots \\ \overline{u}_n^\alpha \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1(\overline{u}^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(\overline{u}^\alpha) \end{pmatrix}.$$

Поскольку с точностью до $o(a)$ мы имеем $A^{-1} = E - aB$, то

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1^\alpha \\ \vdots \\ \overline{u}_n^\alpha \end{pmatrix} = (E - aB) \begin{pmatrix} D_1(u^\alpha + a\eta^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(u^\alpha + a\eta^\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= (E - aB) \begin{pmatrix} D_1(u^\alpha) + aD_1(\eta^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(u^\alpha) + aD_n(\eta^\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_1(u^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(u^\alpha) \end{pmatrix} + a \left(\begin{pmatrix} D_1(\eta^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(\eta^\alpha) \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} D_1(u^\alpha) \\ \vdots \\ D_n(u^\alpha) \end{pmatrix} \right).$$

Подставив $D_i(u^\alpha) = u_i^\alpha$, получим $\overline{u}_i^\alpha = D_i(u^\alpha) + a(D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j))$ с точностью до $o(a)$.

Отсюда легко получается формула продолжения оператора (22) на первые производные. Запишем это продолжение в виде $X^{(1)} = X + \zeta_i^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$, где $\zeta_i^\alpha = \dfrac{\partial \overline{u}_i^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0}$. Тогда из последней формулы получим

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j). \tag{27}$$

Как видим, для построения $X^{(1)}$ достаточно знать лишь сам оператор X.

Формулу (27) можно получить и другим способом. Продифференцируем (25) по a и подставим $a = 0$. При этом учтем, что операторы D_i и $\dfrac{\partial}{\partial a}$ коммутируют. Имеем $\dfrac{\partial}{\partial a} D_i(\varphi^\alpha)\Big|_{a=0} = D_i\Big(\dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0}\Big) = D_i(\eta^\alpha)$. С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial a}(\overline{u}_j^\alpha D_i(f^j))\Big|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a}(\overline{u}_j^\alpha)\Big|_{a=0} \cdot D_i(f^j)\Big|_{a=0} + + \overline{u}_j^\alpha\Big|_{a=0} \cdot \frac{\partial}{\partial a} D_i(f^j)\Big|_{a=0} =$$

$$= \zeta_j^\alpha D_i(x^j) + u_j^\alpha D_i(\xi^j) = \zeta_j^\alpha \delta_i^j + u_j^\alpha D_i(\xi^j) = \zeta_i^\alpha + u_j^\alpha D_i(\xi^j).$$

Выражая отсюда ζ_i^α, получим (27).

Упражнение. Запишем продолжение X на k-е производные как

$$X^{(k)} = X^{(1)} + \zeta^\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ij}} + \ldots + \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_k}}.$$

Показать, что

$$\zeta^\alpha_{ij} = D_j(\zeta^\alpha_i) - u^\alpha_{im}D_j(\xi^m), \qquad \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_k} = D_{i_k}\xi^\alpha_{i_1\ldots i_{k-1}} - u^\alpha_{mi_1\ldots i_{k-1}}D_{i_k}(\xi^m). \quad (28)$$

Пример. Получим продолжение (15) оператора (14), применив формулы (27), (28). Обозначим $t = x^1$, $x = x^2$. Имеем $\xi^1 = 0$, $x^2 = 2t$, $\eta = -xu$. Тогда

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_t(-xu) - u_x D_t(2t) = -xu_t - 2u_x,\\
\zeta_2 &= D_x(-xu) - u_x D_x(2t) = -u - xu_x,\\
\zeta_{22} &= D_x(-u - xu_x) - u_{xx}D_x(2t) = -2u_x - xu_{xx}.
\end{aligned}$$

Определяющие уравнения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$F(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}) = 0, \quad (29)$$

где мы подразумеваем, что F — вектор с компонентами F_1, …, F_s, причем максимальный порядок производных, входящих в нее, равен p. Символ $[F]$ будет обозначать дифференциальное многообразие, определяемое этой системой вместе со всеми ее дифференциальными следствиями.

Пусть преобразования (20) и (21) образуют группу G. Тогда их продолжения до порядка p образуют группу $G^{(p)}$, которая действует на все переменные x, u, $u^{(1)}$, …, $u^{(p)}$. Инфинитезимальным оператором этой группы будет оператор

$$X^{(p)} = X^{(1)} + \zeta^\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ij}} + \ldots + \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_p}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_p}}, \quad (30)$$

полученный путем p-кратного продолжения оператора X группы G.

Будем говорить, что система (29) *допускает группу G точечных преобразований* (20)–(21), *если дифференциальное многообразие $[F]$, определяемое этой системой, инвариантно относительно продолженной группы $G^{(p)}$*. Из Теоремы 4 вытекает следующая

Теорема 6. *Система дифференциальных уравнений* (29) *допускает группу G с инфинитезимальным оператором X тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$X^{(p)}F_k|_{[F]} = 0, \quad k = 1, \ldots, s. \quad (31)$$

Эта теорема сводит задачу отыскания однопараметрических групп, допускаемых системой (29) к решению уравнений (31), называемых *определяющими уравнениями.* Из формул продолжения (27) и (28) следует, что определяющие уравнения образуют систему линейных однородных дифференциальных уравнений относительно компонент ξ^i, η^α оператора X. Но так как эти компоненты ищутся как функции от переменных x, u, а в определяющие уравнения кроме них входят еще переменные $u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}$, полученная система уравнений относительно ξ^i, η^α будет переопределенной, что облегчит ее решение.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u_x u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{32}$$

описывающее околозвуковое установившееся течение газа. Это уравнение в литературе также называется уравнением фон Кармана. Допускаемый оператор будем искать в виде

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

где ξ^1, ξ^2, η — неизвестные пока функции от x, y, u. Запишем второе продолжение оператора X в виде

$$X^{(2)} = X + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_y} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{12} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial u_{yy}}.$$

Тогда $X^{(2)}(u_x u_{xx} + u_{yy}) = u_{xx}\zeta_1 + u_x \zeta_{11} + \zeta_{22}$ и определяющее уравнение запишется в виде

$$(u_{xx}\zeta_1 + u_x\zeta_{11} + \zeta_{22})|_{u_{yy}=-u_x u_{xx}} = 0. \tag{33}$$

В этом случае переход на дифференциальное многообразие $[F]$ состоит в том, что в левой части (33) переменную u_{yy} следует заменить на $-u_x u_{xx}$. После этого надо будет найти коэффициенты ζ_1, ζ_{11}, ζ_{22} и подставить в определяющее уравнение (33). Как видно из этого уравнения, коэффициент ζ_{12} не понадобится.

Имеем

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^1) - u_y D_x(\xi^2) = \\
&\qquad = \eta_x + u_x \eta_u - u_x(\xi^1_x + u_x \xi^1_u) - u_y(\xi^2_x + u_x \xi^2_u), \\
\zeta_2 &= D_y(\eta) - u_x D_y(\xi^1) - u_y D_y(\xi^2) = \\
&\qquad = \eta_y + u_y \eta_u - u_x(\xi^1_y + u_y \xi^1_u) - u_y(\xi^2_y + u_y \xi^2_u).
\end{aligned}$$

Поэтому $\zeta_{11} = D_x(\zeta_1) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xy} D_x(\xi^2) = (\eta_{xx} + u_x \eta_{ux}) + (u_{xx}\eta_u + u_x \eta_{ux} + u_x^2 \eta_{uu}) - u_{xx}(\xi^1_x + u_x \xi^1_u) - u_x(\xi^1_{xx} + u_x \xi^1_{ux} + u_x \xi^1_{ux} + + u_x^2 \xi^1_{ux} + u_{xx}\xi^1_u) - u_{xy}(\xi^2_x +$

$u_x\xi^2_u) - u_y(\xi^2_{xx} + u_x\xi^2_{ux} + u_x\xi^2_{ux} + u_x^2\xi^2_{uu} + u_{xx}\xi^2_u) - u_{xx}(\xi^1_x + u_x\xi^1_u) - u_{xy}(\xi^2_x + u_x\xi^2_u)$.
Приводя подобные слагаемые, получим

$$\begin{aligned}\zeta_{11} = \eta_{xx} + 2u_x\eta_{ux} + u_{xx}\eta_u + u_x^2\eta_{uu} - 2u_{xx}\xi^1_x - u_x\xi^1_{xx} - u_y\xi^2_{xx} - 2u_{xy}\xi^2_x -\\ - 3u_xu_{xx}\xi^1_u - 2u_x^2\xi^1_{ux} - u_x^3\xi^1_{uu} - 2u_xu_{xy}\xi^2_u - 2u_xu_y\xi^2_{ux} - u_x^2u_y\xi^2_{uu} - u_yu_{xx}\xi^2_u.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\zeta_{22} = \eta_{yy} + 2u_y\eta_{uy} + u_{yy}\eta_u + u_y^2\eta_{uu} - 2u_{yy}\xi^2_y - u_y\xi^2_{yy} - u_x\xi^1_{yy} - 2u_{xy}\xi^1_y -\\ - 2u_yu_{xy}\xi^1_u - 2u_xu_y\xi^1_{uy} - u_xu_y^2\xi^1_{uu} - 2u_y^2\xi^1_{uy} - u_y^3\xi^2_{uu} - u_xu_{yy}\xi^1_u - 3u_yu_{yy}\xi^2_u.\end{aligned}$$

Подставим это в (33) и соберем в левой части все слагаемые, содержащие смешанную производную u_{xy}:

$$-2u_{xy}(\xi^1_y + u_y\xi^1_u + u_x\xi^2_x + u_x^2\xi^2_u).$$

Так как в (33) все величины x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} играют роль независимых переменных, а функции ξ^1, ξ^2, η зависят лишь от x, y, u, то необходимо, чтобы коэффициент при u_{xy} обращался в нуль:

$$\xi^1_y + u_y\xi^1_u + u_x\xi^2_x + u_x^2\xi^2_u = 0. \tag{34}$$

Это уравнение — полиномиальное относительно u_x, u_y, поэтому

$$\xi^1_y = 0, \quad \xi^1_u = 0, \quad \xi^2_x = 0, \quad \xi^2_u = 0. \tag{35}$$

Учтем условия (35) и, подставив в (33) $u_{yy} = -u_xu_{xx}$, соберем все слагаемые, содержащие u_{xx}, и приравняем получившийся коэффициент к нулю: $\eta_x + u_x(\eta_u - 3\xi^1_x + 2\xi^2_y) = 0$, откуда

$$\eta_x = 0, \quad \eta_u = 3\xi^1_x - 2\xi^2_y. \tag{36}$$

Из уравнений (36) с учетом (35) имеем

$$\eta_{uu} = 0, \quad \xi^1_{xx} = 0. \tag{37}$$

Вследствие всех этих соотношений уравнение (33) принимает вид $\eta_{yy} + u_y(2\eta_{uy} - \xi^2_{yy}) = 0$, откуда

$$2\eta_{uy} = \xi^2_{yy}, \quad \eta_{yy} = 0. \tag{38}$$

Первое из равенств (38) и второе из равенств (36) дают

$$\eta_{uy} = 0, \quad \xi^2_{yy} = 0. \tag{39}$$

Из уравнений (35)–(39) видно, что ξ^1 и ξ^2 есть линейные функции от x и y соответственно. Также видно, что η есть линейная функция от y и u, причем зависимость ее от u определяется вторым уравнением (36).

Это означает, что $\xi^1 = C_1 + C_2 x$, $\xi^2 = C_3 + C_4 y$, $\eta = C_5 + C_6 y + C_7 u$, причем $C_7 = \eta_u = 3\xi^1_x - 2\xi^2_y = 3C_2 - 2C_4$. Таким образом, общее решение определяющего уравнения (33) зависит от 6 произвольных постоянных и имеет вид

$$\xi^1 = C_1 + C_2 x, \quad \xi^2 = C_3 + C_4 y, \quad \eta = C_5 + C_6 y + (3C_2 - 2C_4)u.$$

В силу линейности определяющих уравнений, их решения образуют векторное пространство L. Это пространство может иметь как конечную размерность, так и бесконечную. В данном примере получилось 6-мерное пространство решений L_6. Базис этого пространства можно получить, полагая одну из постоянных C_i равной 1, а остальные 0. В результате, записывая вместо получаемых значений ξ^1, ξ^2, η соответствующие операторы X, получим операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = y\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{40}$$

образующие базис пространства L_6. Каждый из операторов (40) порождает однопараметрическую группу точечных преобразований, допускаемых уравнением (32). Следовательно, это уравнение допускает 6 однопараметрических групп.

Упражнение. Для каждого из операторов (40) найдите соответствующую однопараметрическую группу.

Упражнение. Постройте таблицу коммутаторов операторов (40), т.е., вычислите все скобки $[X_i, X_j]$.

Задача. Покажите, что допускаемая алгебра уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ имеет базис

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\mu = \mu(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $\mu(t,x)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности. (То есть, $\xi^1 = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$, $\xi^2 = \frac{1}{2}x(2C_1 t + C_2) + C_4 t = C_5$, $\eta = u(-\frac{1}{4}C_1 x^2 - \frac{1}{2}C_4 x - \frac{1}{2}C_1 t + C_6) + \mu(t,x)$.) Обратите внимание, что алгебра оказывается бесконечномерной.

Задача. Вычислите допускаемую алгебру уравнения пограничного слоя $uu_t = u_{xx}$.

Задача. Вычислите допускаемую алгебру нелинейного уравнения теплопроводности $u_t = (u^\alpha u_x)_x$ при $\alpha = 1$, $\alpha = -4/3$.

3. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу

Интегрирующий множитель.

Рассмотрим ОДУ первого порядка относительно функции $y = y(x)$, записанное в виде

$$Q(x,y)\,dx - P(x,y)\,dy = 0. \tag{41}$$

Это уравнение равносильно уравнению в частных производных первого порядка

$$P(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{42}$$

в том смысле, что левая часть всякого интеграла $F(x,y) = C$ уравнения (41) является решением уравнения (42), и наоборот, всякое решение $F(x,y)$ уравнения (42), приравненное константе, дает интеграл уравнения (41).

Предположим, что уравнение (41) допускает однопараметрическую группу преобразований $\overline{x} = \varphi(x,y,a)$, $\overline{y} = \psi(x,y,a)$ с оператором $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$. Под действием этой группы всякое решение уравнения (41) переходит в решение. Но тогда всякий интеграл $F(x,y) = C$ переходит в интеграл $F(\overline{x},\overline{y}) = \overline{C}$. Поэтому интегралом будет также равенство $XF(x,y) = C_1$. Действительно, $F(\overline{x},\overline{y}) = F(x,y) + XF(x,y)\cdot a + o(a)$. Так как первые два выражения в этом равенстве есть решения уравнения, то и XF тоже есть решение. Но так как уравнение (42) может иметь только одно независимое решение, то $F(x,y)$ и $XF(x,y)$ функционально зависимы: $XF = \Phi(F)$. Итак, функция F удовлетворяет двум условиям:

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = \Phi(F).$$

Исключим случай $\xi Q - \eta P \equiv 0$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{Q\Phi}{\xi Q - \eta P}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{P\Phi}{\xi Q - \eta P},$$

откуда

$$\frac{dF}{\Phi(F)} = \frac{1}{\Phi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right) = \frac{Q\,dx - P\,dy}{\xi Q - \eta P}.$$

Выражение $\dfrac{dF}{\Phi(F)}$ является полным дифференциалом, а в числителе выражения справа стоит левая часть $Q\,dx - P\,dy$ уравнения (41). Поскольку все приведенные выше рассуждения можно обратить, мы получаем теорему Ли об интегрирующем множителе: *уравнение* (41) *допускает группу с оператором* $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ *тогда и только тогда, когда функция*

$$\mu = \frac{1}{\xi Q - \eta P} \tag{43}$$

является интегрирующим множителем этого уравнения.

Пример. Рассмотрим следующее уравнение Риккати:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{44}$$

Поскольку это уравнение степенного вида, попробуем найти допустимую группу как группу растяжений $\overline{x} = kx$, $\overline{y} = \ell y$. Тогда $\overline{y}' + \overline{y}^2 - \dfrac{2}{\overline{x}^2} = \dfrac{k}{\ell}y' + \ell^2 y^2 - \dfrac{1}{k^2}\dfrac{2}{x^2}$. Последнее выражение должно быть пропорционально $y' + y^2 - \dfrac{2}{x^2}$. Для этого должны выполняться условия $\dfrac{k}{\ell} = \ell^2 = \dfrac{1}{k^2}$, откуда $\ell = \dfrac{1}{k}$. Можно считать, что $k > 0$, тогда $k = e^a$, $\ell = e^{-a}$ и уравнение (44) допускает группу растяжений $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{-a}$ с оператором

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{45}$$

Перепишем уравнение (44) в виде

$$dy + \Big(y^2 - \frac{2}{x^2}\Big)dx = 0.$$

По формуле (43) получаем интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}.$$

Умножив уравнение на него, получим

$$\frac{x\,dy + \Big(xy^2 - \dfrac{2}{x}\Big)dx}{x^2y^2 - xy - 2} = 0 \iff \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} =$$
$$= d(\ln x) + \frac{d(xy)}{(xy)^2 - xy - 2} = d\Big(\ln x + \frac{1}{3}\ln\frac{xy - 2}{xy + 1}\Big) = 0.$$

Отсюда получаем решение уравнения (44) в виде

$$\frac{xy-2}{xy+1}=\frac{C}{x^3} \qquad \text{или} \qquad y=\frac{2x^3+C}{x(x^3-C)}. \tag{46}$$

Упражнение. Покажите, что все решения (46) можно получить из одного решения (например, $y=\dfrac{2x^3+1}{x(x^3-1)}$) путем растяжений $\overline{x}=kx$, $\overline{y}=y/k$.

При $C=0$ мы получаем решение $y=\dfrac{2}{x}$. Видно, что указанная группа растяжений переводит его в себя. Такие решения называются *инвариантными.* Найдем все инвариантные решения относительно этой группы. Инвариантность решения равносильна инвариантности кривой, описываемой им. Но, как мы видели выше, любая такая кривая может быть задана при помощи инвариантов. Группа растяжений с оператором (45) имеет один независимый инвариант $J=xy$, поэтому всякое инвариантное решение имеет вид $J=\text{const}$, т.е., $y=k/x$. Подставив это решение в (44), получим уравнение k^2-k-2, откуда $k=2$, $k=-1$.

Решение $y=2/x$ содержится в однопараметрическом семействе решений (46) и получается при $C=0$. А решение $y=-1/x$ не содержится в этом семействе, так как при выводе формулы (46) предполагалось, что $xy+1\neq 0$ (хотя это решение и может формально быть получено при $C\to\infty$).

Метод интегрирующего множителя пригоден только для уравнений первого порядка. Другой, универсальный, метод основан на Теореме 3, указывающей упрощающую замену переменных. Этот метод может быть использован как для интегрирования уравнений первого порядка, так и для понижения порядка уравнений высших порядков, если известна допускаемая группа.

Пример. Обратимся снова к уравнению (44). Приведем оператор (45) к оператору группы переносов. Согласно Теореме 3, для этого нужно перейти к новым переменным z, t, взяв в качестве одной из них инвариант группы, например, $z=xy$, а вторую найти из условия $X(t)=1$. Поскольку достаточно найти любое частное решение этого уравнения, мы можем ограничиться, например, поиском решения вида $t=t(x)$, зависящего только от x. Тогда уравнение $X(t)=x\dfrac{\partial t}{\partial x}-y\dfrac{\partial t}{\partial y}=1$ сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению $x\dfrac{dt}{dx}=1$, откуда $t=\ln|x|$. Итак, нужно сделать замену

$$z=xy, \qquad t=\ln|x|.$$

Будем считать, что $z=z(t)$. Имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right)=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}+y^2-\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dt}-\frac{z}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x^2}\Big(\frac{dz}{dt}+z^2-z-2\Big)=0.$$

Таким образом, уравнение (44) переписывается в канонических переменных в виде

$$\frac{dz}{dt}=-(z^2-z-2).$$

Интегрируя это уравнение, получаем $\ln\Big(\dfrac{z+2}{z-1}\Big)=-3t+\ln C$, откуда $z=\dfrac{C+2e^{3t}}{e^{3t}-1}$. Подставляя $t=\ln|x|$, $z=xy$, получаем формулу (46). Заметим, что при вычислениях мы предполагали, что $z\neq 2$, $z\neq -1$. Следовательно, мы должны проверить, что $y=2/x$ и $y=-1/x$ тоже являются решениями нашего уравнения.

Задача. Подберите допускаемый оператор и после этого решите следующие уравнения: а) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^3}$; б) $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{xy}$.

Уравнения, допускающие заданный оператор.

Итак, мы видим, что уравнение первого порядка с известной допускаемой группой может быть приведено к интегрируемому виду. Научимся выписывать общий вид уравнений, допускающих заданную группу (или, что то же самое, заданный инфинитезимальный оператор).

Для этого нам потребуется продолжить действие оператора

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{47}$$

на первую производную $\dot y=\dfrac{dy}{dx}$. Формула продолжения (27) в этом случае принимает вид $\zeta_1=D_x(\eta)-\dot yD_x(\xi)=\eta_x+\dot y\eta_y-\dot y(\xi_x+\dot y\xi_y)$. Итак,

$$\zeta_1=\eta_x+\dot y(\eta_y-\xi_x)-\dot y^2\xi_y, \tag{48}$$

а первое продолжение оператора X есть

$$X^{(1)}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta_1\frac{\partial}{\partial \dot y}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+(\eta_x+\dot y(\eta_y-\xi_x)-\dot y^2\xi_y)\frac{\partial}{\partial \dot y}. \tag{49}$$

Пример. Найдем общий вид уравнений первого порядка, допускающих группу растяжений с оператором

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Продолжим действие оператора X на первую производную. По формуле (49) имеем

$$X^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Запишем систему уравнений (9) для поиска инвариантов: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} = \dfrac{d\dot{y}}{\dot{y}}$. Решая ее, находим базис инвариантов $J_1 = y/x^2$, $J_2 = \dot{y}/x$. Второй из этих инвариантов зависит от производной $\dot{y}$ и поэтому называется *дифференциальным инвариантом первого порядка*. В соответствии с Теоремой 5, всякое инвариантное уравнение первого порядка может быть записано в виде $J_2 = F(J_1)$, или

$$\dot{y} = x\,F\Big(\frac{y}{x^2}\Big).$$

Это и есть общий вид уравнения первого порядка, допускающего группу с оператором X.

Подобно тому как при рассмотрении уравнений первого порядка использовалось первое продолжение (49) оператора (47), в случае уравнений второго порядка нам понадобится его второе продолжение

$$X^{(2)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial \ddot{y}}.$$

По формулам продолжения получаем

$$\begin{aligned}\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - \ddot{y}D_x(\xi) = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\dot{y} +& \\ + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\dot{y}^2 - \xi_{yy}\dot{y}^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\dot{y}\xi_y)\ddot{y},&\end{aligned} \tag{50}$$

откуда

$$\begin{aligned}X^{(2)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2\xi_y)\frac{\partial}{\partial \dot{y}} +& \\ + \Big(\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\dot{y} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\dot{y}^2 - \xi_{yy}\dot{y}^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\dot{y}\xi_y)\ddot{y}\Big)\frac{\partial}{\partial \ddot{y}}.&\end{aligned} \tag{51}$$

Задача. Вычислите первое и второе продолжения операторов а) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} \pm x\dfrac{\partial}{\partial y}$; б) $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$; в) $X = xy\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Упражнение. Докажите формулу (51).

В соответствии с Теоремой 5, уравнения второго порядка, допускающие оператор X, могут быть записаны в терминах *дифференциальных инвариантов второго порядка*, то есть, функций от четырех переменных x, y, $\dot{y}$,

$\ddot{y}$, удовлетворяющих уравнению $X^{(2)}J = 0$. Их отыскание при помощи формулы (51) может вызвать значительные трудности. Софус Ли показал, что есть способ обойти эти прямые вычисления и получить дифференциальные инварианты второго порядка из инвариантов первого и нулевого порядков с помощью дифференцирования. Получается это следующим образом.

Ясно, что оператор $X^{(2)}$ имеет один инвариант нулевого порядка $u(x, y)$ и один инвариант первого порядка $v(x, y, \dot{y})$. Пусть k, ℓ — произвольные постоянные. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$v(x, y, \dot{y}) - ku(x, y) - \ell = 0. \tag{52}$$

Это уравнение допускает оператор X, поскольку его левая часть является инвариантом. Зафиксируем k и будем менять ℓ. Получится бесконечное семейство инвариантных уравнений. Следовательно, совокупность всех интегральных кривых полученного семейства уравнений будет инвариантной относительно преобразований группы G с оператором X. Но эта совокупность кривых совпадает с множеством интегральных кривых уравнения второго порядка, полученного из (52) дифференцированием. Следовательно, каждое решение уравнения $dv - k\,du = 0$ переходит после преобразования группы G в некоторое решение того же уравнения. Обозначим $w = dy/dv$, тогда уравнение $dv - k\,du = 0$ эквивалентно уравнению $w - k = 0$. Последнее уравнение допускает оператор X, поэтому выражение $X^{(2)}(w - k) \equiv X^{(2)}w$ обращается в нуль на всех решениях уравнения $w - k = 0$. Поскольку это справедливо для всех $k \in \mathbb{R}$, а выражение $X^{(2)}w$ от k не зависит, то $X^{(2)}w$ равно нулю тождественно. Это, в свою очередь, означает, что функция w является инвариантом.

Итак, справедлива

Теорема 7. *Пусть для заданного оператора* (47) *известны инвариант нулевого порядка* $u(x, y)$ *и инвариант первого порядка* $v(x, y, \dot{y})$. *Тогда инвариант второго порядка получается при помощи дифференцирования*

$$w = \frac{dv}{du} = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{v_x + \dot{y}v_y + \ddot{y}v_{\dot{y}}}{u_x + \dot{y}u_y} = \frac{Dv}{Du}. \tag{53}$$

Любой другой дифференциальный инвариант порядка не выше второго является функцией от u, v, w.

Согласно Теореме 5, любое дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее оператор X, может быть записано через инварианты u, v, w этого оператора. Разрешив это инвариантное представление относительно w, и использовав (53), мы можем записать исходное уравнение второго порядка в виде уравнения первого порядка

$$\frac{dv}{du} = F(u, v). \tag{54}$$

Тем самым удается понизить порядок уравнения. Если теперь найден интеграл

$$\Phi(u, v, C) = 0 \tag{55}$$

уравнения (54), то решение исходного уравнения второго порядка сводится к квадратурам. Действительно, если подставить $u(x, y)$ и $v(x, y, \dot{y})$ в (55), то получится уравнение первого порядка, допускающее оператор X и, следовательно, интегрируемое вышеизложенными методами.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + P(x)y = 0. \tag{56}$$

Оно однородно, следовательно, не меняется при умножении действии группы растяжений $\overline{y} = ye^a$ с оператором $Y = y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Первое продолжение этого оператора имеет вид $Y^{(1)} = y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}}$. Поэтому система уравнений для поиска инвариантов имеет вид

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{d\dot{y}}{\dot{y}}.$$

Из нее получаем инварианты $u = x$, $v = \dot{y}/y$. По формуле (53) находим инвариант второго порядка

$$w = \frac{dv}{du} = \frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2} = \frac{\ddot{y}}{y} - v^2.$$

Отсюда $\ddot{y}/y = dv/du + v^2$. Подставив это в (56), получим уравнение Риккати

$$\frac{dv}{du} + v^2 + P(u) = 0.$$

Задача. Найдите общий вид уравнений, допускающих операторы а) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} \pm x\dfrac{\partial}{\partial y}$; б) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} \pm y\dfrac{\partial}{\partial y}$; в) $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial}{\partial y}$; г) $X = xy\dfrac{\partial}{\partial x}$; д) $X = p(x)\dfrac{\partial}{\partial x}$; е) $X = q(y)\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Уравнения второго порядка. Примеры.

Перейдем к вопросу о построении группы, допускаемой данным дифференциальным уравнением. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0. \tag{57}$$

Пусть $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ — допускаемый оператор. Определяющее уравнение имеет вид

$$X^{(2)}F|_{F=0} \equiv (\xi F_x + \eta F_y + \zeta_1 F_{\dot y} + \zeta_2 F_{\ddot y})|_{F=0} = 0,$$

где ζ_1 и ζ_2 вычисляются по формулам (48) и (50), соответственно. В дальнейшем мы будем предполагать, что уравнение (57) разрешено относительно второй производной, то есть, имеет вид

$$F(x, y, \dot y, \ddot y) \equiv \ddot y - f(x, y, \dot y) = 0. \tag{58}$$

В таком случае определяющее уравнение примет вид (с заменой $\ddot y = f(x, y, \dot y)$)

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\dot y + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\dot y^2 - \xi_{yy}\dot y^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\dot y\xi_y)f -$$
$$- (\eta_x + \dot y(\eta_y - \xi_x) - \dot y^2\xi_y)f_{\dot y} - \xi f_x - \eta f_y = 0. \tag{59}$$

Здесь функция $f(x, y, \dot y)$ задана, а компоненты ξ и η искомого допускаемого оператора X — неизвестные функции от x и y. Поскольку в левую часть уравнения (59) входит еще и $\dot y$, рассматриваемая как независимая переменная, то определяющее уравнение будет «расщепляться» на несколько независимых уравнений, образуя переопределенную систему дифференциальных уравнений на ξ и η. Решив эту систему, мы найдем все допускаемые операторы данного уравнения.

Пример. Уравнение

$$\ddot y + \frac{1}{x}\dot y - e^y = 0$$

допускает два линейно независимых оператора (см. [3])

$$X_1 = x\ln x\frac{\partial}{\partial x} - 2(1 + \ln x)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Упражнение. Найдите все операторы, допускаемые уравнением $\ddot y = 0$.

Ответ: $X = \big(C_1x^2 + C_2x + C_3 + (C_4x + C_5)y\big)\dfrac{\partial}{\partial x} + \big(C_4y^2 + C_6y + C_7 + (C_1y + C_8)x\big)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Ранее мы отмечали, что уравнения первого порядка $\dot y = F(x, y)$ допускают бесконечно много операторов. Для уравнений второго порядка имеет место следующая

Теорема (Ли). *Множество решений определяющего уравнения для уравнения второго порядка $\ddot y = f(x, y, \dot y)$ образует алгебру Ли L_r размерности $r \leqslant 8$. При этом $r = 8$ тогда и только тогда, когда уравнение линейно или линеаризуется заменой переменных.*

Пример. Уравнение
$$\ddot{y} = e^{\dot{y}} + xy$$
не допускает ни одного оператора. Действительно, подставим $f = e^{\dot{y}} + xy$ в определяющее уравнение и получим

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\dot{y} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\dot{y}^2 - \xi_{yy}\dot{y}^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\dot{y}\xi_y)(e^{\dot{y}} + xy) -$$
$$- (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2\xi_y)e^{\dot{y}} - \xi y - \eta x = 0.$$

Левая часть представляет собой выражение вида $P(\dot{y})e^{\dot{y}} + Q(\dot{y})$, где P и Q — многочлены. Она может равняться нулю лишь когда $P(\dot{y}) \equiv Q(\dot{y}) \equiv 0$. Отсюда получаем

$$(\eta_y - 2\xi_x - 3\dot{y}\xi_y) - (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2\xi_y) = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициенты при различных степенях $\dot{y}$:

$$\begin{aligned} \dot{y}^2: &\quad \xi_y = 0; \\ \dot{y}: &\quad -3\xi_y - (\eta_y - \xi_x) = 0; \\ 1: &\quad \eta_y - 2\xi_x - \eta_x = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений последовательно получаем: $\xi_y = 0$, $\eta_y = \xi_x$, $\eta_x = -\xi_x$. Из первого равенства следует, что $\xi = \xi(x)$. Тогда $\eta_y = \xi'(x)$, что влечет $\eta = y\xi'(x) + g(x)$. Следовательно, $\eta_x = y\xi''(x) + g'(x) = -\xi'(x)$. Отсюда $\xi''(x) = 0$, поэтому $\xi = C_1x + C_2$. Тогда $g'(x) = -C_1$, значит, $g(x) = -C_1x + C_3$. Получаем $\eta = C_1(y - x) + C_3$.

Вернемся теперь к определяющему уравнению. Поскольку ξ и η — линейные функции, все вторые производные от них равны нулю. Определяющее уравнение тогда перепишется в виде

$$(C_1 - 2C_1)xy - (C_1x + C_2)y - (C_1(y - x) + C_3)x = 0 \iff$$
$$\iff -3C_1xy + C_1x^2 - C_2y - C_3x = 0.$$

Отсюда $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $\xi \equiv \eta \equiv 0$.

Задача. Найдите все операторы, допускаемые уравнениями а) $\ddot{y} = \dot{y}^2 + xy$; б) $\ddot{y} = y\ln\dot{y} + x\dot{y}^3$; в) $\ddot{y} + e^{3y}\dot{y}^4 + \dot{y}^2 = 0$; г) $\ddot{y} = \dfrac{2\dot{y}^2}{y} + \dfrac{y^3x}{\sqrt{\dot{y}}}$.

Один важный пример.

Рассмотрим линейное уравнение

$$\ddot{y} + \dot{y} - \frac{y}{x} = 0. \tag{60}$$

Оно имеет решение $y = x$ и поэтому допускает оператор $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial y}$ (принцип суперпозиции для линейных уравнений). Кроме того, в силу своей однородности оно допускает группу растяжений вдоль оси y с оператором $X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Итак, для уравнения (60) мы знаем два допустимых оператора. Их коммутатор равен $[X_1, X_2] = X_1$. Поэтому векторное пространство, натянутое на X_1 и X_2, является алгеброй Ли.

Поскольку с помощью одного оператора можно понизить порядок уравнения, естественно ожидать, что знание двух операторов позволит понизить порядок два раза, т.е., проинтегрировать уравнение.

Приведем группу с оператором X_1 к переносам. Замена переменных, осуществляющая это, выглядит следующим образом:

$$t = x, \quad u = \frac{y}{x}.$$

После этой замены операторы X_1 и X_2 принимают вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

а уравнение (60) перепишется в виде

$$t\ddot{u} + (t+2)\dot{u} = 0.$$

Отсюда, например,

$$\frac{d\dot{u}}{\dot{u}} = -\Big(1 + \frac{2}{t}\Big)dt, \qquad \dot{u} = C_1 t^{-2} e^{-t}, \qquad u = C_2 + C_1 \int \frac{dt}{t^2 e^t}.$$

Возвращаясь к исходным переменным x, y, получаем решение уравнения (60):

$$y = C_2 x + C_1 x \int \frac{dx}{x^2 e^x}. \tag{61}$$

Мы видим, что уравнение удалось решить в квадратурах, но при этом оператор X_2 вообще не использовался! Чтобы выяснить его роль, воспользуемся инвариантным способом понижения порядка. Вычислим первое продолжение оператора X_1

$$X_1^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}}$$

и найдем его инварианты:

$$u = x, \quad v = \dot{y} - \frac{y}{x}.$$

Дифференциальный инвариант второго порядка вычисляем по Теореме 5

$$w = \frac{dv}{du} = \ddot{y} - \frac{\dot{y}}{x} + \frac{y}{x^2} = \ddot{y} - \frac{v}{u},$$

откуда $\ddot{y} = \dfrac{dv}{du} + \dfrac{v}{u}$. Таким образом, уравнение (60) перепишется в виде

$$\frac{dv}{du} + \frac{v}{u} + v = 0. \tag{62}$$

Найдем, как действует оператор X_2 в плоскости (u, v). Для этого найдем его продолжение $X_2^{(1)} = y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}}$ и перейдем к переменным (u, v):

$$X_2^{(1)} = y\frac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \longmapsto Y = X_2^{(1)}(u)\frac{\partial}{\partial u} + X_2^{(1)}(v)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Имеем $X_2^{(1)}(u) = X_2^{(1)}(x) = 0$, $X_2^{(1)}(v) = X_2^{(1)}\Big(\dot{y} - \dfrac{y}{x}\Big) = \dot{y} - \dfrac{y}{x} = v$. Получается оператор растяжения $Y = v\dfrac{\partial}{\partial v}$, допускаемый уравнением (62). Таким образом, оператор X_1 позволяет понизить порядок уравнения (60), а оператор X_2 обеспечивает возможность проинтегрировать полученное уравнение первого порядка! Построение решения исходного уравнения производится в обратном порядке: сначала решаем уравнение (62): $v = C_1 u^{-1} e^{-u}$, откуда $\dot{y} - \dfrac{y}{x} = C_1 x^{-1} e^{-x}$. Это — линейное уравнение, оно при интегрировании дает формулу (61).

Тот факт, что мы начали понижение порядка с помощью оператора X_1, был случайным. Попробуем начать понижение порядка с оператора X_2. Запишем его дифференциальные инварианты:

$$u = x, \quad v = \frac{\dot{y}}{y}, \quad w = \frac{dv}{du} = \frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2}.$$

С их помощью уравнение (60) перепишется в виде

$$\frac{dv}{du} + v^2 + v - \frac{1}{u} = 0. \tag{63}$$

Мы получили уравнение Риккати, которое не имеет явно интегрируемого вида. Посмотрим, не укажет ли оператор X_1 упрощающую замену переменных. Найдем его действие в плоскости (u, v). Как и выше, имеем

$$X_1^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \longmapsto Y = X_1^{(1)}(u)\frac{\partial}{\partial u} + X_1^{(1)}(v)\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{y}(1 - uv)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Выразим y через u и v: $y = \exp(\int v\,dx) = \exp(\int v\,du)$. Таким образом,

$$Y = \exp\left(-\int v\,du\right)(1-uv)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{64}$$

Но этот оператор не является оператором группы точечных преобразований, так как содержит интеграл, не предусмотренный определением. Тем не менее, можно проверить, что он удовлетворяет определяющему уравнению для (63). Становится понятно, что идея начать понижение порядка с оператора X_2 была неудачной. Попробуем разобраться, почему.

Разрешимые алгебры Ли.

Пусть L_r — алгебра Ли размерности r и пусть N — векторное подпространство в L_r.

Определение. Подпространство N называется *подалгеброй*, если $[X,Y] \in N$ для всех $X, Y \in N$. Подпространство N называется *идеалом*, если $[X,Y] \in N$ для всех $X \in N$, $Y \in L_r$.

Если N является идеалом, то в алгебре L_r можно ввести отношение эквивалентности: $X \sim Y \iff X - Y \in N$. Множество смежных классов по N образует алгебру Ли, которая называется *фактор-алгеброй* алгебры L_r по идеалу N и обозначается L_r/N.

Если проводить все вычисления в комплексных числах, то справедлива следующая

Теорема. *В любой алгебре Ли L_r размерности выше 2 можно выделить двумерную подалгебру. Более того, любой вектор X можно заключить в двумерную подалгебру.*

Определение. Алгебра Ли L_r называется *разрешимой*, если существует ряд подалгебр $L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_1$ размерностей r, $r-1$, $\ldots$, 1 соответственно, в котором каждая подалгебра L_{s-1} есть идеал в L_s, $s = 2, \ldots, r$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис в алгебре L_r. Рассмотрим коммутатор $[Y,Z]$ любых двух элементов Y и Z. Имеем $[Y,Z] = [Y^i X_i, Z^j X_j] = Y^i Z^j [X_i, X_j]$. Обозначим символом $L_r^{(1)} = [L_r, L_r]$ подпространство, натянутое на все коммутаторы $[X_i, X_j]$, $i, j = 1, \ldots, r$. Ясно, что тогда $[Y,Z] \in L_r^{(1)}$ для любых $Y, Z \in L_r$. Пространство $L_r^{(1)}$ образует идеал в алгебре Ли L_r.

Определение. Пространство $L_r^{(1)} = [L_r, L_r]$ называется *производной алгеброй*. Производные алгебры высших порядков определяются по индукции: $L_r^{(n+1)} := (L_r^{(n)})^{(1)} = [L_r^{(n)}, L_r^{(n)}]$.

Справедлива следующая

Теорема. *Алгебра Ли L_r разрешима тогда и только тогда, когда ее производная алгебра некоторого порядка обращается в нуль.*

Следствие. *Всякая двумерная алгебра Ли разрешима.*

В случае двумерной алгебры L_2 для построения ряда $L_2 \supset L_1 \supset 0$ нужно выбрать базис X_1, X_2 так, чтобы $[X_1, X_2] = \alpha X_1$ для некоторого α. Тогда подпространство $L_1 = \mathcal{L}(X_1)$ будет идеалом в L_2 и фактор-алгебру L_2/L_1 можно отождествить с одномерной алгеброй $\mathcal{L}(X_2)$.

Теперь мы можем объяснить, почему при решении уравнения (60) надо было понижать порядок при помощи оператора X_1. Поскольку коммутатор операторов $[X_1, X_2] = X_1$, то $L_1 = \mathcal{L}(X_1)$ — идеал в алгебре L_2 с базисом X_1, X_2. Понизив порядок с помощью этого идеала, мы получили уравнение первого порядка, которое допускает алгебру $\mathcal{L}(X_2) = L_2/L_1$. А когда мы попытались понизить порядок с помощью $\mathcal{L}(X_2)$, то эту дополнительную симметрию мы потеряли. При попытке восстановить ее мы пришли к оператору (64). Поэтому, если мы хотим иметь дело только с точечными симметриями, понижение порядка следует проводить при помощи идеала.

Об одном уравнении.

Найдем все уравнения вида

$$y'' = y' + f(y), \tag{65}$$

имеющие двумерную алгебру точечных симметрий. Все такие уравнения будут интегрироваться в квадратурах. Заранее исключим случай линейной функции $f(y)$, так как он дает линейное уравнение с постоянными коэффициентами, которое интегрируется стандартным методом.

Так как уравнение (65) не содержит x, одна симметрия очевидна — это оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Переписав уравнение в виде $\ddot{y} = \dot{y} + f(y)$, запишем определяющее уравнение (59) для оператора $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} -\xi_{yy}\dot{y}^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - 2\xi_y)\dot{y}^2 + (2\eta_{xy} - \xi_{xx} - \xi_x - 3f\xi_y)\dot{y} +& \\ + (\eta_{xx} + f\eta_y - 2f\xi_x - \eta_x - f'\eta) = 0.& \end{aligned} \tag{66}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях $\dot{y}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\xi_{yy} = 0; \\ &2\xi_{xy} + 2\xi_y - \eta_{yy} = 0; \\ &3f\xi_y + \xi_{xx} + \xi_x - 2\eta_{xy} = 0; \\ &2f\xi_x - f\eta_y - \eta_{xx} + \eta_x + f'\eta = 0. \end{aligned} \tag{67}$$

Из первого уравнения получаем

$$\xi = \gamma(x)y + \delta(x). \tag{68}$$

Подставим это во второе уравнение системы и получим $2\gamma' + 2\gamma = \eta_{yy}$. Левая часть не зависит от y, поэтому

$$\eta = (\gamma' + \gamma)y^2 + \varepsilon(x)y + \zeta(x). \tag{69}$$

Теперь подставим (68) и (69) в третье уравнение системы: $3\gamma f + \gamma'' y + \delta'' + \gamma' y + \delta' - 2\frac{d}{dx}(2(\gamma' + \gamma)y + \varepsilon) = 0$, откуда

$$3\gamma'' y + 3\gamma' y - \delta'' - \delta' + 2\varepsilon' = 3f\gamma.$$

Поскольку мы предполагаем, что функция $f(y)$ не является линейной, отсюда следует, что необходимо $\gamma = 0$. Остается соотношение

$$\delta'' + \delta' = 2\varepsilon', \tag{70}$$

из которого получаем, что

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\kappa + \delta' + \delta), \quad \kappa = \text{const}, \tag{71}$$

и

$$\xi = \delta(x), \quad \eta = \varepsilon(x)y + \zeta(x). \tag{72}$$

Наконец, подставим ξ и η в четвертое уравнение $2f\delta' - f\varepsilon - \varepsilon'' y - \zeta'' + \varepsilon' y + \zeta' + (\varepsilon y + \zeta)f' = 0$. Отсюда $(\varepsilon y + \zeta)f' + (2\delta' - \varepsilon)f = \varepsilon'' y + \zeta'' - \varepsilon' y - \zeta'$ или

$$(\varepsilon y + \zeta)f' - \varphi f = \theta y + \lambda, \tag{73}$$

где обозначено

$$\varphi = \varepsilon - 2\delta', \quad \theta = \varepsilon'' - \varepsilon', \quad \lambda = \zeta'' - \zeta'.$$

Соотношение (73) есть уравнение на f и y, коэффициенты которого φ, ε, ζ, θ, λ есть функции от x, поэтому мы считаем их постоянными по отношению к y.

Перепишем это уравнение в виде

$$f' - \frac{\varphi}{\varepsilon y + \zeta} f = \frac{\theta y + \lambda}{\varepsilon y + \zeta}.$$

Решением этого линейного уравнения служит функция

$$f(y) = \mu(x)\left(y + \frac{\zeta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varphi}{\varepsilon}} + \frac{\theta}{\varepsilon - \varphi}\left(y + \frac{\zeta}{\varepsilon}\right) + \frac{\theta\zeta - \lambda\varepsilon}{\varphi\varepsilon}, \tag{74}$$

в предположении, что $\varepsilon \neq 0$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \varepsilon$. Поскольку функция f не должна зависеть от x, это означает, что функции

$$\mu(x) = a, \quad \frac{\zeta}{\varepsilon} = b, \quad \frac{\varphi}{\varepsilon} = c, \quad \frac{\theta}{\varepsilon - \varphi} = d, \quad \frac{\theta\zeta - \lambda\varepsilon}{\varphi\varepsilon} = e$$

есть константы. (Строго говоря, это так при условии, что $c \neq 2$. Этот случай разберите самостоятельно!) Отсюда получаем $\lambda = \zeta'' - \zeta' = b(\varepsilon'' - \varepsilon') = b\theta$, поэтому $\varepsilon\varphi e = \theta\zeta - \lambda\varepsilon = 0$, откуда $e = 0$. Далее, функция φ с одной стороны равна $c\varepsilon$, а с другой $\varepsilon - 2\delta'$, откуда $2\delta' = (1-c)\varepsilon$. Продифференцировав это равенство и подставив δ'', приходим к уравнению

$$(c+3)\varepsilon' + (c-1)\varepsilon = 0,$$

решением которого служит функция

$$\varepsilon = h\exp(kx), \quad k = \frac{1-c}{c+3}, \quad h = \mathrm{const}, \quad c \neq 1,\ c \neq 3.$$

Отсюда получаем $\theta = (k^2 - k)\varepsilon$, и, окончательно,

$$f(y) = a(y+b)^c - \frac{2c+2}{(c+3)^2}(y+b), \quad c \neq 1,\ c \neq 3. \tag{75}$$

Вычислим оператор X, допускаемый уравнением в этом случае. Имеем $\xi = \delta(x)$, $\eta = \varepsilon(x)y + \zeta(x)$. Как мы выяснили, $\varepsilon = h\exp\left(\frac{1-c}{c+3}\cdot x\right)$, а $\zeta = b\varepsilon$, $\delta' = \frac{1-c}{2}\varepsilon$. Поэтому постоянный множитель h можно отбросить. Интегрируя, получаем

$$\delta = \frac{1-c}{2}\int \varepsilon(x)\,dx = \frac{c+3}{2}\exp\left(\frac{1-c}{c+3}\cdot x\right).$$

Поскольку $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ — симметрия рассматриваемого уравнения, постоянную интегрирования в $\delta(x)$ можно опустить. В итоге получаем, что вторая симметрия уравнения имеет вид

$$X_2 = \frac{c+3}{2}\exp\left(\frac{1-c}{c+3}\cdot x\right)\frac{\partial}{\partial x} + \exp\left(\frac{1-c}{c+3}\cdot x\right)(y+b)\frac{\partial}{\partial y} =$$
$$= \exp\left(\frac{1-c}{c+3}\cdot x\right)\left(\frac{c+3}{2}\frac{\partial}{\partial x} + (y+b)\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Упражнение. Покажите, что в случаях $\varphi = 0$, $\varphi = \varepsilon$ функция $f(y)$ оказывается линейной.

Разберем вырожденный случай $\varepsilon = 0$. Имеем $\theta = \varepsilon'' - \varepsilon' = 0$, поэтому уравнение (73) принимает вид

$$f' - \frac{\varphi}{\zeta}f = \frac{\lambda}{\zeta}.$$

Его решением является функция

$$f(y) = \mu \exp\Big(\frac{\varphi y}{\zeta}\Big) - \frac{\lambda}{\varphi}. \tag{76}$$

Поскольку функция f не должна зависеть от x, это означает, что функции $\varphi/\zeta = a$, $\lambda/\varphi = b$ и μ суть константы. Докажем, что $ab = 2$. Обозначим $\tau = \delta'$. Тогда $\varphi = -2\tau$ и $\tau' + \tau = 0$. Поэтому $\tau = me^{-x}$, $\varphi = -2me^{-x}$ и $\zeta = \dfrac{\varphi}{a} = -\dfrac{2m}{a}e^{-x}$. Но $\zeta'' - \zeta' = \lambda = b\varphi = ab\zeta$. Подставив сюда $\zeta = -\dfrac{2m}{a}e^{-x}$ при $m \neq 0$, получим $ab = 2$. Если же $m = 0$, то $\delta = \mathrm{const}$ и $\varphi = 0$, что уже рассматривалось. Подставив это в (76), получаем еще одно решение

$$f(y) = \mu e^{ay} - \frac{2}{a}, \quad \mu = \mathrm{const},\ a = \mathrm{const}.$$

В рассматриваемом случае $\varepsilon = 0$, поэтому $X = \delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \zeta(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$. Имеем $\delta' = me^{-x}$, $\zeta = -\dfrac{2m}{a}e^{-x}$. Постоянный множитель m и постоянную интегрирования у δ опять можно отбросить, поэтому $\delta(x) = -e^{-x}$, $\zeta = -\dfrac{2}{a}e^{-x}$. Убрав знак «$-$», получаем, что второй допускаемый оператор в этом случае имеет вид

$$X_2 = e^{-x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{a}e^{-x}\frac{\partial}{\partial y} = e^{-x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Интегрирование уравнений с помощью двумерной алгебры.

Приведем общую схему интегрирования в квадратурах уравнений второго порядка, допускающих двумерную алгебру Ли.

Для начала выясним структурные особенности двумерных алгебр Ли L_2. Одно из свойств — разрешимость — мы уже отмечали. Очевидно, что это свойство не зависит от выбора базиса в L_2, и, кроме того, инвариантно относительно замены переменных в плоскости (x, y). Отметим еще два свойства.

1. Закон преобразования коммутатора. Напомним, что коммутатор двух векторных полей (операторов) $X_1 = \xi_1\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_1\dfrac{\partial}{\partial y}$ и $X_2 = \xi_2\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_2\dfrac{\partial}{\partial y}$ равен

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1))\frac{\partial}{\partial x} + (X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть заданы преобразование базиса в L_2

$$Y_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \quad Y_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2, \quad \Delta := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \tag{77}$$

и невырожденная замена переменных

$$t = t(x, y), \quad u = u(x, y), \quad \frac{D(t, u)}{D(x, y)} := t_x u_y - t_y u_x \neq 0. \tag{78}$$

Напомним, что при замене переменных (78) операторы X_k преобразуются по формуле

$$\overline{X}_k = \left(\xi_k \frac{\partial t}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\xi_k \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial u}, \quad k = 1, 2.$$

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$[Y_1, Y_2] = \Delta[X_1, X_2], \quad [\overline{X}_1, \overline{X}_2] = \overline{[X_1, X_2]}.$$

Следствие. *Во всякой двумерной алгебре Ли можно выбрать базис X_1, X_2 такой, что либо $[X_1, X_2] = 0$, либо $[X_1, X_2] = X_1$. При этом каждое из этих соотношений инвариантно относительно замены переменных.*

Доказательство. Пусть $[X_1, X_2] = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $[X_1, X_2] = 0$ и это соотношение инвариантно по Лемме 1. Если же хотя бы одно из чисел $\alpha_k \neq 0$, то сделаем замену базиса (77), где числа β_k ищем из условия $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1$ (например, если $\alpha_2 \neq 0$, то возьмем $\beta_1 = -1/\alpha_2$, $\beta_2 = 0$). Тогда получим $[Y_1, Y_2] = Y_1$. Это соотношение также инвариантно по Лемме 1.

2. Закон преобразования косого произведения. Напомним, что косое произведение векторных полей (операторов) X_1 и X_2 определяется как функция

$$X_1 \vee X_2 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$Y_1 \vee Y_2 = \Delta(X_1 \vee X_2), \quad \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 = \frac{D(t, u)}{D(x, y)}(X_1 \vee X_2).$$

Следствие. *Уравнение*

$$X_1 \vee X_2 = 0 \tag{79}$$

инвариантно относительно преобразований (77) *и* (78).

Замечание. Уравнение (79) есть необходимое и достаточное условие того, что $\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 = 0$ для некоторых функций φ_1, φ_2.

Теорема 8. *Всякая двумерная алгебра Ли путем выбора подходящего базиса X_1, X_2 приводится к одному из типов, определяемых следующими каноническими структурными соотношениями:*

I. $[X_1, X_2] = 0, \ \ X_1 \vee X_2 \neq 0.$

II. $[X_1, X_2] = 0, \ \ X_1 \vee X_2 = 0.$

III. $[X_1, X_2] = X_1, \ \ X_1 \vee X_2 \neq 0.$

IV. $[X_1, X_2] = X_1, \ \ X_1 \vee X_2 = 0.$

Эти структурные соотношения инвариантны относительно замены переменных.

Пользуясь инвариантностью соотношений I–IV относительно замены переменных, можно упростить вид базисных операторов для каждого из четырех типов.

Теорема 9. *Базис алгебры* L_2 *подходящей заменой переменных может быть приведен к одному из следующих видов:*

I. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \ \ X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}.$

II. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \ \ X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial y}.$

III. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \ \ X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}.$

IV. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \ \ X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}.$

Соответствующие замены переменных называются *каноническими.*

Доказательство.

I. Приведем X_1 к оператору переноса: $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Тогда второй оператор $X_2 = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ и равенство $[X_1, X_2] = 0$ влечет соотношение

$$\xi_x\frac{\partial}{\partial x} + \eta_x\frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

откуда $\xi_x = \eta_x = 0$. Поэтому $X_2 = \xi(y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\dfrac{\partial}{\partial y}$. Косое произведение $X_1 \vee X_2 = \eta$, поэтому $\eta \neq 0$. Теперь найдем общую замену переменных (78), сохраняющую вид оператора X_1. После такой замены X_1 примет вид $\overline{X}_1 = t_x\dfrac{\partial}{\partial t} + u_x\dfrac{\partial}{\partial u}$, и из условия $\overline{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ получаем, что $t_x = 1$, $u_x = 0$. Таким образом, X_1 переходит в $\overline{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ при заменах вида

$$t = x + f(y), \quad u = g(y). \tag{80}$$

При этом X_2 переходит в оператор $\overline{X}_2 = (\xi+\eta f')\dfrac{\partial}{\partial t}+\eta g'\dfrac{\partial}{\partial u}$ и будет иметь вид $\overline{X}_2 = \dfrac{\partial}{\partial u}$ (самый простой из возможных, поскольку $\eta g' \neq 0!$), если функции f и g определить из уравнений $\eta(y)f' + \xi(y) = 0$, $\eta(y)g' = 1$. Отсюда $f(y) = -\displaystyle\int \frac{\xi(y)}{\eta(y)}dy$, $g(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{\eta(y)}$. Итак, после замены

$$t = x - \int \frac{\xi(y)}{\eta(y)}dy, \quad u = \int \frac{dy}{\eta(y)}$$

операторы X_1 и X_2 переходят в $\overline{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\overline{X}_2 = \dfrac{\partial}{\partial u}$ соответственно.

II. Приведем X_1 в переносам: $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Если $X_2 = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$, то $\xi_y = \eta_y = 0$, как и выше, а соотношение $X_1 \vee X_2 = 0$ влечет $\xi = 0$. Таким образом, $X_2 = \eta(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$. Из (80), поменяв местами x и y, получим замену, сохраняющую оператор $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$:

$$t = f(x), \quad u = y + g(x). \tag{81}$$

Взяв здесь $f(x) = \eta(x)$ и $g(x) = 0$, получим замену

$$t = \eta(x), \quad u = y,$$

переводящую X_1 и X_2 в $\overline{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}$ и $\overline{X}_2 = t\dfrac{\partial}{\partial u}$ соответственно. (Более простой вид операторов невозможен, ибо $\eta(x) \neq \mathrm{const}$).

III. Приведем X_1 к переносам: $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Условия $[X_1, X_2] = X_1$ и $X_1 \vee X_2 \neq 0$ для оператора $X_2 = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ означают, что $\xi \neq 0$, $\xi_y = 0$ и $\eta_y = 1$, откуда $\xi = \xi(x)$, $\eta = y + \alpha(x)$. Замена переменных (81), сохраняющая оператор X_1, переводит X_2 в $\overline{X}_2 = \xi f'\dfrac{\partial}{\partial t} + (\xi g' + y + \alpha(x))\dfrac{\partial}{\partial u}$. Первая координата $\xi f' \neq \mathrm{const}$, поэтому самый простой вид для нее — это $\xi f' = t = f(x)$. Вторая координата $\xi g' + y + \alpha(x)$ содержит y, поэтому самый простой вид для нее — это $\xi g' + y + \alpha(x) = u = y + g(x)$. Таким образом, функции f и g должны удовлетворять уравнениям $\xi f' = f$, $\xi g' + \alpha(x) = g(x)$. Отсюда

$$f(x) = \exp\left(\int \frac{dx}{\xi(x)}\right),$$

а функция $g(x)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$g' - \frac{g}{\xi(x)} = \frac{\alpha(x)}{\xi(x)}.$$

Найдя любое решение этого уравнения и подставив f и g в (81), получим замену переменных, после которой операторы X_1 и X_2 переходят в $\overline{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}$ и $\overline{X}_2 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$ соответственно.

IV. Приведем X_1 к переносам: $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Как и выше, для оператора $X_2 = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ получаем $\xi = 0$, $\eta_y = 1$, откуда $\eta = y + \alpha(x)$. Учитывая изложенное в доказательстве части III, легко видеть, что замена переменных

$$t = x, \quad u = y + \alpha(x)$$

переводит операторы X_1 и X_2 в $\overline{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}$ и $\overline{X}_2 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$ соответственно.

Теперь найдем все ОДУ второго порядка, допускающие двумерные алгебры Ли указанных четырех типов и проинтегрируем их.

Тип I. Нужно найти базис инвариантов второго порядка дифференциальных операторов $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Их вторые продолжения совпадают с самими операторами: $X_1^{(2)} = X_1$, $X_2^{(2)} = X_2$, поэтому искомыми инвариантами будут $\dot{y}$ и $\ddot{y}$. Следовательно, общее уравнение второго порядка, допускающее алгебру Ли первого типа, имеет вид

$$y'' = f(y').$$

Оно легко интегрируется в квадратурах: $\displaystyle\int \frac{dy'}{f(y')} = x + C_1$, или $y' = \varphi(x + C_1)$, откуда

$$y = \int \varphi(x + C_1)\, dx + C_2.$$

Тип II. Как и в предыдущем пункте, дифференциальные инварианты оператора $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, имеют вид $J = J(x, \dot{y}, \ddot{y})$. Запишем второе продолжение оператора $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial y}$. Оно имеет вид $X_2^{(2)} = x\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \dot{y}}$. Узнаем, когда инварианты J первого оператора инвариантны относительно второго. Для этого запишем уравнение $X_2^{(2)}J = 0$. Из него имеем $\dfrac{\partial J}{\partial \dot{y}} = 0$, следовательно, общий дифференциальный инвариант второго порядка операторов X_1 и X_2 имеет вид $J = J(x, \ddot{y})$, а базис инвариантов алгебры Ли второго типа образуют x и $\ddot{y}$. Инвариантное ОДУ тогда имеет вид

$$y'' = f(x),$$

откуда

$$y = \int \left(\int f(x)\, dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Тип III. Оператор X_1 здесь тот же, и его инвариант есть $J = J(x, \dot{y}, \ddot{y})$. Второе продолжение оператора X_2 имеет вид $X_2^{(2)} = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} - \ddot{y}\dfrac{\partial}{\partial \ddot{y}}$. Уравнение $X_2^{(2)}J = x\dfrac{\partial J}{\partial x} - \ddot{y}\dfrac{\partial J}{\partial \ddot{y}} = 0$ имеет два интеграла $J_1 = \dot{y}$, $J_2 = x\ddot{y}$, а соответствующее инвариантное уравнение есть

$$y'' = \frac{1}{x} f(y').$$

Решая его, находим $\displaystyle\int \frac{dy'}{f(y')} = \ln x + C_1$, откуда $y' = \varphi(\ln C_1 x)$ и

$$y = \int \varphi(\ln C_1 x)\, dx + C_2.$$

Тип IV. Второе продолжение оператора X_2 имеет вид $X_2^{(2)} = y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}} + \ddot{y}\dfrac{\partial}{\partial \ddot{y}}$. Из уравнения $X_2^{(2)} J = \dot{y}\dfrac{\partial J}{\partial \dot{y}} + \ddot{y}\dfrac{\partial J}{\partial \ddot{y}} = 0$ находим инварианты $J_1 = x$, $J_2 = \ddot{y}/\dot{y}$. Поэтому инвариантное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x) y',$$

а его общее решение есть

$$y = C_1 \int \exp\left(\int f(x)\, dx\right) dx + C_2.$$

Таким образом, мы получили универсальный алгоритм интегрирования ОДУ второго порядка, допускающего алгебру Ли L_r размерности $r \geqslant 2$. Важно отметить, что если допускаемая алгебра известна, то решение уравнения находится в квадратурах.

Пример реализации алгоритма.

Рассмотрим уравнение

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}. \tag{82}$$

I. Нахождение допускаемой алгебры.

Подставим в определяющее уравнение (59) правую часть (82) $f = \dot{y}/y^2 - 1/xy$ и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях $\dot{y}$. Получим следующие 4 уравнения:

$$\begin{aligned}
\dot{y}^3 :&\quad \xi_{yy} = 0;\\
\dot{y}^2 :&\quad y^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - 2\xi_y = 0;\\
\dot{y}^1 :&\quad y^3(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) - y\xi_x + 2\eta + \frac{3y^2\xi_y}{x} = 0;\\
\dot{y}^0 :&\quad x^2y^2\eta_{xx} - x^2\eta_x + xy(2\xi_x - \eta_y) - \eta x - \xi y = 0.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем

$$\xi = p(x)y + q(x),$$

откуда $y^2(\eta_{yy} - 2p'(x)) - 2p(x) = 0$. Следовательно,

$$\eta_{yy} = \frac{2p(x)}{y^2} + 2p'(x) \quad \Rightarrow \eta_y = -\frac{2p(x)}{y} + 2p'(x)y + q(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \eta = -p(x)\ln(y^2) + p'(x)y^2 + q(x)y + b(x).$$

Подставим полученные выражения в третье и четвертое уравнения. При этом их левые части помимо степеней y будут содержать слагаемые с $\ln(y^2)$. Приравняв нулю эти последние слагаемые, получим $p = 0$. После этого уравнения легко решаются (проделайте вычисления самостоятельно!) и дают

$$\xi = C_1x^2 + C_2x, \quad \eta = (C_1x + \frac{1}{2}C_2)y.$$

Полагая сначала $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, а потом $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, получаем операторы

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{83}$$

Таким образом, уравнение (82) допускает двумерную алгебру L_2 с базисом (83).

II. Выделение двумерной подалгебры.

Алгебра уже двумерна, подалгебру выделять не требуется.

III. Определение типа алгебры.

Имеем (проверьте!)

$$[X_1, X_2] = -X_1, \quad X_1 \vee X_2 = -\frac{1}{2}x^2y,$$

следовательно, алгебра L_2 принадлежит к III типу. Для полноты соответствия нужно сменить знак у оператора X_2.

IV. Нахождение интегрирующей замены переменных.

Приведем оператор $X_1 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$ к переносам. Для этого сделаем замену (вычислите сами!)

$$t = \frac{y}{x}, \quad u = -\frac{1}{x}. \tag{84}$$

Операторы (83) после это принимают вид (проверьте!)

$$\overline{X}_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \overline{X}_2 = \frac{1}{2}t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} \tag{85}$$

(множитель $1/2$ существенной роли не играет). Вычислим

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{Du}{Dt} = \frac{1/x^2}{(xy' - y)/x^2} = \frac{1}{xy' - y}.$$

Отсюда $y' = \dfrac{1}{xu'} + \dfrac{y}{x}$, или, по (84),

$$y' = -\frac{u}{u'} + t. \tag{86}$$

При этом исключается случай $t = \mathrm{const}$, приводящий к решениям $y = Cx$ уравнения (82).

Далее, вычисляем вторую производную (проверьте!)

$$y'' = \left(\frac{u}{u'}\right)^2 u''. \tag{87}$$

Подставляем (86) и (87) в исходное уравнение, после чего оно переписывается в виде

$$\frac{u''}{u'^2} + \frac{1}{t^2} = 0.$$

Интегрируя его первый раз как уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u' = \dfrac{t}{C_1 t - 1}$. Если здесь $C_1 = 0$, то

$$u = -\frac{t^2}{2} + C, \tag{88}$$

а если $C_1 \neq 0$, то

$$u = \frac{t}{C_1} + \frac{1}{C_1^2}\ln|C_1 t - 1| + C_2. \tag{89}$$

V. Решение в исходных переменных. Подставляя значения t и u из (84) в (88) и (89), находим

$$C_1 y + C_2 x + x\ln\left|C_1\frac{y}{x} - 1\right| + C_1^2 = 0, \qquad y = \pm\sqrt{2x + Cx^2}.$$

Задача. Проинтегрируйте уравнения, допускающие данную алгебру Ли.

а) $y'' = yy'^2 - xy'^3$, $X_1 = y\dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x}$;

б) $y'' = \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy}$, $X_1 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}$;

в) $y'' = -xy^2 + \dfrac{2y'^2}{y}$, $X_1 = xy^2\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$;

г) $y'' = \dfrac{y'^2}{y} + x^2 y$, $X_1 = xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

д) $y'' + 2\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)^3 = 0$, $X_1 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = xy\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Пример уравнения, не допускающего группу, но интегрируемого в квадратурах.

Рассмотрим уравнение

$$(y' - (x + x^2)e^y)' = 0$$

или, после вычисления производной

$$y'' = e^y\big((x + x^2)y' + (1 + 2x)\big). \tag{90}$$

Подставив правую часть в определяющее уравнение и решив его, найдем $\xi = \eta = 0$. Это означает, что уравнение (90) не допускает алгебру точечных преобразований.

Тем не менее, это уравнение легко интегрируется. Сначала имеем

$$y' = (x + x^2)e^y + C_1.$$

Замена $z = e^{-y}$ приводит последнее уравнение к линейному:

$$z' + C_1 z + (x + x^2) = 0.$$

Отсюда $z = e^{-C_1 x}\left(C_2 - \displaystyle\int (x + x^2)e^{C_1 x}\,dx\right)$ и

$$y = C_1 x - \ln\left|C_2 - \int (x + x^2)e^{C_1 x}\,dx\right|.$$

Уравнения, допускающие трехмерную алгебру Ли. Софус Ли показал, что для ОДУ второго порядка размерность допускаемой алгебры может принимать только значения 0, 1, 2, 3 и 8. Размерности 0, 1, 2 нами уже рассмотрены. Результат классификации для случая размерности 3 приведен в таблице 7 книги [3]. Каждой алгебре соответствует свое инвариантное уравнение. Его вывод в каждом случае единообразен. Поэтому проследим процесс вывода на примере.

Рассмотрим алгебру L_3, имеющую базис

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}. \tag{91}$$

Коммутационные соотношения для этой алгебры имеют вид

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3.$$

Для оператора X_1 имеем $\xi = \eta = 1$. Подставив эти функции в определяющее уравнение (59), получим

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

откуда
$$f = f(x - y, y'). \tag{92}$$
Теперь подставим в (59) координаты $\xi = x$, $\eta = y$ оператора X_2. В результате получим для функции f вида (92) уравнение
$$z\frac{\partial f}{\partial z} + f = 0,$$
где $z = x - y$. Решение этого уравнения имеет вид
$$f = \frac{g(y')}{x - y}, \tag{93}$$
где g — произвольная функция.

Наконец, подставив в определяющее уравнение (59) координаты $\xi = x^2$, $\eta = y^2$ оператора X_3, придем к уравнению
$$2y'\frac{dg}{dy'} - 3g + 2(y'^2 - y') = 0$$
для функции $g(y')$ из (93). Решив это уравнение, получим
$$g(y') = -2(y' + y'^2 + Cy'^{3/2}), \quad C = \mathrm{const}. \tag{94}$$
Формулы (93) и (94) дают искомую правую часть инвариантного уравнения для алгебры L_3 с базисом (91):
$$y'' + 2\frac{y' + Cy'\sqrt{y'} + y'^2}{x - y}.$$

Заметим еще, что если уравнение второго порядка допускает алгебру размерности $\geqslant 4$, то на самом деле оно допускает 8-мерную алгебру. Тогда оно линеаризуется и эквивалентно уравнению
$$y'' = 0.$$

4. Признаки линеаризуемости

Теорема 10. *Для линеаризуемости уравнения*
$$y'' = f(x, y, y') \tag{95}$$
точечной заменой переменных
$$\overline{x} = \varphi(x, y), \quad \overline{y} = \psi(x, y) \tag{96}$$

необходимо, чтобы функция f была многочленом от y' степени не выше 3, т.е., чтобы уравнение (95) *имело вид*

$$y'' + F_3(x,y)y'^3 + F_2(x,y)y'^2 + F_1(x,y)y' + F(x,y) = 0. \tag{97}$$

Класс таких уравнений инвариантен относительно замены (96).

Доказательство. Запишем преобразования первой и второй производных при замене переменных:

$$\overline{y}' = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{D\psi(x,y)}{D\varphi(x,y)} = P(x,y,y'), \quad y'' = \frac{DP}{D\varphi}. \tag{98}$$

Линейное уравнение, к которому по предположению приводится уравнение (95), можно взять в виде $\overline{y}'' = 0$. Это означает, что $DP = (D\varphi)^{-2}(D\varphi \cdot D^2\psi - D\psi \cdot D^2\varphi) = 0$, откуда

$$D\varphi \cdot D^2\psi - D\psi \cdot D^2\varphi = 0.$$

Распишем последнее уравнение подробнее. Имеем

$$\begin{aligned} D\varphi \cdot D^2\psi - D\psi \cdot D^2\varphi &= (\varphi_x + y'\varphi_y)(\psi_{xx} + 2y'\psi_{xy} + y'^2\psi_{yy} + y''\psi_y) - \\ &- (\psi_x + y'\psi_y)(\varphi_{xx} + 2y'\varphi_{xy} + y'^2\varphi_{yy} + y''\varphi_y) = y''(\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y) + \\ &+ y'^3(\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy}) + y'^2(\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2\varphi_y\psi_{xy} - 2\psi_y\varphi_{xy}) + \\ &+ y'(\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2\varphi_x\psi_{xy} - 2\psi_x\varphi_{xy}) + (\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx}) = 0. \end{aligned} \tag{99}$$

Якобиан $\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y$ замены переменных (96) не равен нулю. Поделив на него, получим правую часть уравнения (97), где обозначено

$$\begin{aligned} F_3(x,y) &= \frac{\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy}}{\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y}, \\ F_2(x,y) &= \frac{\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \psi_y\varphi_{xy})}{\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y}, \\ F_1(x,y) &= \frac{\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \psi_x\varphi_{xy})}{\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y}, \\ F(x,y) &= \frac{\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx}}{\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y}. \end{aligned} \tag{100}$$

Это доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение следует из формул (98).

В качестве применения этой теоремы рассмотрим задачу приведения однородного уравнения

$$y'' + a(x)y' + b(x) = 0 \tag{101}$$

к виду $y'' = 0$. Замену переменных будем выбирать среди преобразований

$$\overline{x} = \varphi(x), \quad \overline{y} = \frac{1}{f(x)} y, \tag{102}$$

сохраняющих линейный вид уравнения (101). (Мы не случайно занесли функцию f в знаменатель! Причины этого будут вскоре понятны). Для такой замены выражение (99) равно

$$\frac{1}{f}\left[\varphi' y'' - \left(\varphi'' + 2\frac{f'}{f}\varphi'\right) y' + \left(\frac{f'}{f}\varphi'' + 2\frac{f'^2}{f^2}\varphi' - \frac{f''}{f}\varphi'\right) y\right]$$

и пропорционально выражению $y'' + a(x)y' + b(x)$, если

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\frac{f'}{f} = -a(x), \qquad \frac{\varphi''}{\varphi'} \cdot \frac{f'}{f} + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} = b(x). \tag{103}$$

Первое из этих уравнений дает

$$\varphi(x) = \int \frac{\exp(-\int a(x)\,dx)}{f^2(x)}\,dx,$$

а второе после подстановки

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -2\frac{f'}{f} - a(x)$$

принимает вид

$$f'' + af' + bf = 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ должна быть решением уравнения (101). Таким образом, замена переменных вида

$$\overline{x} = \int \frac{\exp(-\int a(x)\,dx)}{f^2(x)}\,dx, \qquad \overline{y} = \frac{1}{f(x)} y,$$

где f — решение (101), приводит уравнение (101) к простейшему виду $\overline{y}'' = 0$.

Однако не любое уравнение вида (97) с произвольными коэффициентами $F_3(x, y)$, …, $F(x, y)$ линеаризуемо точечной заменой переменных. Линеаризация возможна только если переопределенная система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (100) для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ с заданными $F_3(x, y)$, …, $F(x, y)$ интегрируема. Софус Ли нашел условия совместимости этой системы.

Теорема 11. *Уравнение второго порядка вида* (97) *линеаризуется заменой переменных* (96) *тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетво-*

ряют следующим уравнениям:

$$3\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3F_1F_3 - F_2^2) - 3\frac{\partial}{\partial y}(FF_3) - 3F_3\frac{\partial F}{\partial y} + F_2\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 3\frac{\partial}{\partial x}(FF_3) + \frac{\partial}{\partial y}(F_1^2 - 3FF_2) + 3F\frac{\partial F_3}{\partial x} - F_1\frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{104}$$

Пример. Уравнение

$$y'' + F(x, y) = 0$$

имеет вид (97) с $F_3 = F_2 = F_1 = 0$. Тест линеаризации дает $F_{yy} = 0$. Это означает, что $F(x, y)$ линейна по y. Следовательно, уравнение $y''+F(x, y) = 0$ либо уже линейное, либо не линеаризуется.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = 0. \tag{105}$$

Здесь $F_3 = F_2 = 0$, $F_1 = -1/y^2$, $F = 1/xy$. Подставляя эти значения в первое из уравнений (104), получаем $-6/y^4 = 0$, что невозможно. Таким образом, уравнение (105) не линеаризуется.

Если коэффициенты $F_3(x, y)$, $\ldots$, $F(x, y)$ уравнения (97) удовлетворяют условиям Теоремы 11, то замена переменных

$$\overline{x} = \varphi(x, y), \quad \overline{y} = \psi(x, y),$$

приводящая уравнение (97) к линейному виду $\overline{y}'' = 0$ может быть найдена с помощью решения переопределенной системы дифференциальных уравнений (100) (см. пример ниже).

Замечание. Любые два ОДУ первого порядка

$$y' = f(x, y), \qquad \overline{y}' = g(\overline{x}, \overline{y}) \tag{106}$$

можно перевести друг в друга заменой переменных (96). Действительно, в силу (98) условие перехода одного из уравнений (106) в другое записывается в виде

$$\overline{y}' = \frac{D\psi}{D\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\psi_x + f(x, y)\psi_y}{\varphi_x + f(x, y)\varphi_y} = g(\varphi, \psi).$$

При заданных функциях f и g это — уравнение в частных производных первого порядка. Можно даже выбрать $\varphi = x$, тогда функция ψ ищется из уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial \psi}{\partial y} = g(x, \psi),$$

которое разрешимо согласно общей теории УЧП.

Рассмотрим вопрос о линеаризуемости уравнений типов I–IV.

Тип I. Уравнения первого типа приводятся к виду

$$y'' = f(y').$$

Согласно Теореме 10, необходимо, чтобы оно имело вид

$$y'' + A_3 y'^3 + A_2 y'^2 + A_1 y' + A_0 = 0, \tag{107}$$

где $A_i = \text{const}$, $i = 0, \ldots, 3$. Подставляя эти значения в уравнения (104), получаем тождества $0 = 0$. Таким образом, уравнение первого типа линеаризуется тогда и только тогда, когда оно имеет вид (107).

Тип II. Уравнения приводятся к виду

$$y'' = f(x),$$

следовательно линеаризуются.

Тип III. Уравнения третьего типа приводятся к виду

$$y'' = \frac{1}{x} f(y').$$

Так как f есть функция только от y', и не зависит от y, по Теореме 3.1, необходимо, чтобы уравнение имело вид

$$y'' + \frac{1}{x}(A_3 y'^3 + A_2 y'^2 + A_1 y' + A_0) = 0, \tag{108}$$

где $A_i = \text{const}$, $i = 0, \ldots, 3$. Подставим $F_i = A_i / x$ в условия (104). Получим (домножая на x^3) следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 3A_3 = A_2^2 - 3A_1 A_3 \\ 6A_2 = -3A_0 A_3 + A_1 A_2. \end{cases}$$

Если $A_3 = 0$, то из первого уравнения получаем $A_2 = 0$ и тогда уравнение (108) линейно. Поэтому считаем $A_3 \neq 0$. Обозначим $A_3 = -a$, $A_2 = -b$. Тогда находим

$$A_1 = -\left(1 + \frac{b^2}{3a}\right), \qquad A_0 = -\left(\frac{b}{3a} + \frac{b^3}{27a^2}\right).$$

Таким образом, уравнение третьего типа линеаризуется тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$y'' = \frac{1}{x}\left(a y'^3 + b y'^2 + \left(1 + \frac{b^2}{3a}\right) y' + \frac{b}{3a} + \frac{b^3}{27a^2}\right). \tag{109}$$

Тип IV. Уравнения приводятся к виду

$$y'' = f(x)y',$$

следовательно линеаризуются.

Пример. Рассмотрим уравнение (109) при $a = 1$, $b = 0$, то есть, уравнение

$$y'' = \frac{1}{x}(y' + y'^3). \tag{110}$$

Найдем 8-мерную алгебру Ли, допускаемую этим уравнением. Подставим его правую часть $f(x) = \dfrac{1}{x}(y' + y'^3)$ в определяющее уравнение (59). После разложения по степеням y' определяющее уравнение дает систему

$$\begin{aligned}
&\xi_{yy} = \frac{1}{x}\xi_x + \frac{\xi}{x^2} - \frac{2}{x}\eta_y,\\
&\xi_{xy} = -\frac{1}{x}\xi_y + \frac{1}{2}\eta_{yy} - \frac{3}{x}\eta_x,\\
&\xi_{xx} = \frac{\xi}{x^2} - \frac{1}{x}\xi_x + 2\eta_{xy},\\
&\eta_{xx} - \frac{1}{x}\eta_x = 0.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение легко интегрируется и дает

$$\eta = p(y)x^2 + q(y).$$

После этого остальные уравнения легко решаются (проделайте это!) и приводят к следующему ответу:

$$\begin{aligned}
\eta &= 2\big((C_1y + C_2)x^2 + C_1y^3 + C_3y^2\big) + C_4y + C_5,\\
\xi &= \big(C_1x^2 + (C_3 - 3C_2)y + C_6\big)x -\\
&\qquad -\frac{1}{x}\big(C_1y^4 + (C_2 + C_3)y^3 + (C_4 - C_6)y^2 + C_7y + C_8\big).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение (110) допускает алгебру L_8 с базисом

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \left(3xy + \frac{y^3}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x} - 2x^2\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_4 = \left(x^3 - \frac{y^4}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2(x^2y + y^3)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_6 = \left(x + \frac{y^2}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_7 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_8 = \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$X_6 \vee X_7 = X_7 \vee X_8 = X_6 \vee X_8 = 0$$

и что

$$[X_6, X_7] = -2X_7, \quad [X_6, X_8] = -2X_8, \quad [X_7, X_8] = 0.$$

Поэтому любые два из операторов X_6, X_7, X_8 определяют подалгебру $L_2 \subset L_8$. Выберем подалгебру, натянутую на X_7 и X_8 (потому что их скобка равна 0). Эта подалгебра принадлежит к типу II. Канонические переменные имеют вид

$$\overline{x} = y, \quad \overline{y} = \frac{x^2}{2}, \tag{111}$$

а операторы X_7 и X_8 принимают вид

$$X_7 = \frac{\partial}{\partial \overline{y}}, \quad X_8 = \overline{x}\frac{\partial}{\partial \overline{y}}.$$

При этом имеем (исключив особое решение $y = \mathrm{const}$)

$$\overline{y}' = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{x}{y'}, \quad \overline{y}'' = \frac{d\overline{y}'}{d\overline{x}} = \frac{1}{y'^2} - \frac{xy''}{y'^3},$$

откуда $xy'' - y' = -y'^3\overline{y}''$, так что $xy'' - y' - y'^3 = -y'^3(\overline{y}'' + 1)$. Следовательно, замена переменных (111) приводит уравнение (110) к виду

$$\overline{y}'' + 1 = 0$$

с общим решением

$$\overline{y} = -\frac{1}{2}(\overline{x}^2 + C_1\overline{x} + C_2).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем ответ в неявной форме

$$x^2 + y^2 + C_1 y + C_2 = 0. \tag{112}$$

Решим это же уравнение по-другому. Коэффициенты этого уравнения

$$F_3 = F_1 = -\frac{1}{x}, \quad F_2 = F = 0$$

удовлетворяют условиям Теоремы 11. Покажем, что уравнение (110) может быть приведено к простейшему виду $u'' = 0$ и найдем линеаризующую замену переменных

$$t = \varphi(x, y), \quad u = \psi(x, y)$$

(чтобы не загромождать обозначения, мы написали t и u вместо $\overline{x}$ и $\overline{y}$). Уравнения (100) для нахождения φ и ψ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy} = -\frac{1}{x}(\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y),\\
&\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \psi_y\varphi_{xy}) = 0,\\
&\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \psi_x\varphi_{xy}) = -\frac{1}{x}(\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y),\\
&\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{113}$$

Нам достаточно найти *любую* пару функций φ и ψ, которые будут являться решением системы уравнений (113) и будут функционально независимы, то есть, их якобиан отличен от нуля

$$\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y \neq 0. \tag{114}$$

Поэтому мы положим $\varphi = \varphi(y)$, так что $\varphi_x = 0$ и последнее уравнение системы (113) удовлетворится автоматически. Тогда условие (114) требует, чтобы $\psi_x \neq 0$ и $\varphi_y \neq 0$. Для простоты вычислений вообще возьмем $\varphi = y$. После этого второе уравнение системы (113) дает $\psi_{xy} = 0$, откуда

$$\psi(x, y) = a(x) + b(y).$$

Подставим это в первое уравнение (113), и оно станет уравнением с разделяющимися переменными:

$$b''(y) = \frac{1}{x}a'(x).$$

Отсюда имеем

$$b''(y) = \frac{1}{x}a'(x) = \lambda, \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{\lambda}{2}x^2 + C_1x + C_2, \quad b = \frac{\lambda}{2}y^2 + K_1y + K_2.$$

Заметим, что при этом третье уравнение (113) удовлетворяется тождественно. Поэтому мы возьмем $\lambda = 2$, $C_1 = C_2 = K_1 = K_2 = 0$ и получим $\psi = x^2 + y^2$. Таким образом, замена

$$t = y, \quad u = x^2 + y^2 \tag{115}$$

приводит уравнение (110) к виду $u'' = 0$. Запишем общее решение последнего уравнения в виде $u + At + B = 0$, откуда получим решение (112) исходного уравнения

$$x^2 + y^2 + Ay + B = 0, \quad A, B = \mathrm{const}.$$

При этом замена (115) невозможна при $y = \mathrm{const}$, которое является сингулярным решением уравнения (110).

5. Обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие фундаментальной системой решений

Говорят, что система ОДУ

$$\frac{dx^i}{dt} = F^i(t, x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n \tag{116}$$

обладает фундаментальной системой решений (ФСР), если общее решение этой системы выражается через конечное число m произвольно выбранных частных решений

$$x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n), \quad k = 1, \ldots, m \tag{117}$$

по формулам

$$x^i = \varphi^i(x_1, \ldots, x_m, C_1, \ldots, C_n), \tag{118}$$

в которые входят n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Частные решения (117) при этом предполагаются функционально независимыми. Их совокупность называют *фундаментальной системой решений* уравнений (116). Вид функций (118) не должен зависеть от конкретных частных решений (117), но не исключается возможность, когда данная система уравнений (116) допускает несколько различных представлений (118) общего решения и *разное* число m необходимых частных решений.

Теорема 12. *Уравнения* (116) *обладают фундаментальной системой решений, если они представимы в следующем специальном виде*

$$\frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \ldots + T_r(t)\xi_r^i(x) \tag{119}$$

так, что операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \ldots, r \tag{120}$$

образуют r-мерную алгебру Ли. При этом число m необходимых частных решений удовлетворяет условию

$$mn \geqslant r. \tag{121}$$

Пример 1. Линейное однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Для него имеем $n = 1$, $r = 1$, $m = 1$. Оператор (120) здесь всего один и имеет вид $X_1 = \dfrac{d}{dx}$. Общее решение (формула (117)) этого уравнения имеет вид $x = Cx_1$, где x_1 есть любое ненулевое частное решение.

Пример 2. Линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t).$$

Здесь $n = 1$, $r = 2$, $m = 2$, так что условие (121) выполняется в виде равенства. Операторы (120) здесь имеют вид $X_1 = \dfrac{d}{dx}$, $X_2 = x\dfrac{d}{dx}$, их коммутатор равен $[X_1, X_2] = X_1$, так что они образуют двумерную алгебру Ли. Формула (117) в этом случае принимает вид $x = x_1 + C(x_2 - x_1)$, поскольку общее решение неоднородного линейного уравнения есть комбинация частного решения x_1 и общего решения однородного уравнения $C(x_2 - x_1)$.

Пример 3. Линейная неоднородная система двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + b_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + b_2(t).$$

В этом случае имеется 6 операторов (120), а именно:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial y},\ X_5 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_6 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Следовательно, $n = 2$, $r = 6$, поэтому для записи общего решения необходимо знать три частных решения (x_k, y_k), $k = 1, 2, 3$. Соответствующая формула общего решения имеет вид

$$x = x_1 + C_1(x_2 - x_1) + C_2(x_3 - x_1), \quad y = y_1 + C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1).$$

Пример 4. (Ли) Рассмотрим следующий частный случай линейной неоднородной система двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a_{12}(t)y + b_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = -a_{12}(t)x + b_2(t). \tag{122}$$

В данном случае можно обойтись двумя частными решениями. Этой системе сопоставляются операторы $X_1 = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, порождающие группу движений (вращений и переносов) в плоскости (x, y). Поскольку движения сохраняют расстояние между двумя точками, любые три решения (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) связаны соотношениями

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = C_1, \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = C_2. \tag{123}$$

Поэтому для получения представления общего решения через два частных решения (x_1, y_1), (x_2, y_2) и две произвольные постоянные достаточно разрешить (123) относительно x и y. Таким образом, система (122) допускает два представления общего решения: в виде линейной суперпозиции трех решений (Пример 3) и в виде «нелинейной суперпозиции», если разрешить равенства (123) относительно x и y.

Теорема 13. *Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, обладающее фундаментальной системой решений, линеаризуется преобразованием зависимой переменной x в том и только в том случае, когда оно может быть записано в виде*

$$\frac{dx}{dt} = T_1(t)\xi_1(x) + T_2(t)\xi_2(x)$$

так, что операторы

$$X_1 = \xi_1(x)\frac{d}{dx}, \quad X_2 = \xi_2(x)\frac{d}{dx}$$

образуют алгебру Ли размерности $r = 1$ или $r = 2$, т.е., $X_2 = \alpha X_1$ или

$$[X_1, X_2] = \alpha X_1 + \beta X_2$$

с постоянными коэффициентами α, β.

Литература

[1] А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики* / Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. – М.: «Факториал». – 1997. – 464 с.

[2] Н.Х. Ибрагимов. *Азбука группового анализа.* – М.: Знание. – 1989. – 48 с.

[3] Н.Х. Ибрагимов. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Знание. – 1991. – 48 с.

[4] Н.Х. Ибрагимов. *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – Н.Новгород: Изд-во ННГУ – 2007. – 421 с.

[5] G.W. Bluman, S.C. Anco. *Symmetry and integration methods for differential equations.* – New York: Springer. – 2002. – 419 p.

[6] A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov. *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations.* – Cambridge University Press. – 2007. – 496 p.

Содержание