

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.З. ДАУТОВ

**ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ**

Учебное пособие

Казань — 2014

УДК 519.3

Р.З. Даутов. Практикум по курсу численные методы. Решение задачи Коши для системы ОДУ. 100 с.

В пособии описываются методы Рунге – Кутты приближенного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Обсуждаются приемы программной реализации этих методов. Предлагается набор заданий для практических (лабораторных) занятий. Пособие рассчитано на студентов, знакомых с дифференциальными уравнениями и программированием.

Научный редактор:

доктор физико-математических наук М.М. Карчевский

Рецензенты:

доктор физико-математических наук М.Р. Тимербаев

кандидат физико-математических наук Е.В. Стребков

Печатается по рекомендации кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета

Оглавление

Предисловие	4
ГЛАВА 1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ	5
§ 1. Введение	5
§ 2. Методы Рунге – Кутты	8
§ 3. Формулировка задачи Коши с событиями	16
§ 4. Программирование методов Рунге – Кутты	18
§ 5. Решение задачи Коши для системы ОДУ в MatLab	22
§ 6. Численное определение порядка точности метода	26
Литература	30
ГЛАВА 2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	31
1. Структура белых карликов	33
2. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \rightarrow B \rightarrow C$	38
3. Система типа хищник - жертва. Модель Базыкина	41
4. Задача Жуковского о полете планера	44
5. Релаксационные колебания: осциллятор Ван-Дер-Поля	47
6. Ограниченная задача трех тел	50
7. Химические реакции: брюсселятор	52
8. Система типа хищник-жертва. Модель Мак-Артура	55
9. Задача о стабилизации экраноплана	58
10. Задача о форме лежащей капли	61
11. Математическая модель роста опухоли	64
12. Система хищник-жертва. Модель Холлинга – Тернера	67
13. Динамика химического реактора	70
14. Задача о полете ракеты	73
15. Задача о форме висящей капли	75
16. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \rightarrow \text{продукты с рециклом}$	78
17. Задача о полете ракеты	81
18. Оптимизация химической реакции	84
19. Оптимизация вертикального подъема ракеты	87
20. Задача о полете снаряда — 1	89
21. Колебания связанных маятников	92
22. Система типа хищник-жертва. Модель Вольтерра	94
23. Задача о движении двух небесных тел	97
24. Задача о полете снаряда — 2	99

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии описываются методы Рунге – Кутты приближенного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Обсуждаются приемы программной реализации этих методов. Предлагается набор заданий для практических (лабораторных) занятий. Предполагается, что студентом будет проведено самостоятельное мини-исследование при выполнении задания. Пособие рассчитано на студентов, знакомых с дифференциальными уравнениями и программированием.

Рукопись была внимательно прочитана М.М. Карчевским. Автор с благодарностью учел его замечания.

Замеченные ошибки, опечатки, а также комментарии и пожелания, просьба направлять по адресу *rdautov@kpfu.ru*.

ГЛАВА 1
ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ

§ 1. Введение

1. Общие сведения о задаче Коши. К обыкновенным дифференциальным уравнениям сводится изучение многообразных задач в математике и в различных предметных областях (в физике, химии, биологии, медицине, технике и т.д.). Ряд простых, но, тем не менее, содержательных задач подобного рода составляет содержание гл. 2.

Конкретная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнений различных порядков. Но известно, что уравнение n -го порядка

$$u^{(n)}(t) = f(t, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

при введении новых неизвестных $u_i(t) = u^{(i)}(t)$ можно свести к эквивалентной системе n уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u'_i(t) &= u_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \\ u'_{n-1}(t) &= f(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

где $u_0(t) = u(t)$. Аналогично, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить эквивалентной системой уравнений первого порядка

$$u'_i(t) = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

записывая их для краткости в векторной форме

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (2)$$

где u и f вектор-функции

$$u(t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)(t), \quad f(t, u(t)) = (f_1, f_2, \dots, f_n)(t, u(t)).$$

Известно, что общее решение системы (1) зависит от n параметров $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — постоянных интегрирования. Для выделения единственного решения необходимо наложить n дополнительных условий на функции $u_i(t)$.

Различают три типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения. В случае задачи Коши (задачи с начальными условиями) дополнительные условия имеют вид

$$u_i(a) = u_{ai}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

т. е. заданы значения всех функций u_i в одной и той же точке $t = a$. Решение задачи (1), (3), как правило, требуется найти на некотором отрезке $a \leq t \leq b$ (или $b \leq t \leq a$), так что точку $t = a$ можно считать начальной точкой этого отрезка. Условия (3) в векторной записи имеют вид $u(a) = u_a$. Условия (3) можно рассматривать как задание координат начальной точки $(a, u_{a1}, \dots, u_{an})$ интегральной кривой в $n + 1$ -мерном пространстве (t, u_1, \dots, u_n) .

Хорошо известны условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши (см., напр., [1]). Предположим, что $a = 0$, все функции f_i непрерывны по всем аргументам в замкнутой области

$$D = \{ |t| \leq b, \quad |u_i - u_{ai}| \leq c, \quad i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Из непрерывности функций f_i следует их ограниченность, т. е. существование такой постоянной $M > 0$, что всюду в D выполняются неравенства $|f_i| \leq M$, $i = 1, 2, \dots, n$. Предположим, кроме того, что в D функции f_i удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ по аргументам u_1, u_2, \dots, u_n , т. е.

$$\begin{aligned} |f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) - f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| &\leq \\ &\leq \lambda (|u_1 - y_1| + |u_2 - y_2| + \dots + |u_n - y_n|) \end{aligned}$$

для любых точек $(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ области D .

Если выполнены эти предположения, то существует единственное решение системы (1), определенное при $|t| \leq \min\{b, c/M\}$ и принимающее при $t = 0$ заданные значения (3). Это решение непрерывно

зависит от координат начальной точки (т. е. задача корректно поставлена). Если вдобавок правые части f_i имеют непрерывные производные по всем аргументам до порядка m включительно, то решение $u(t)$ имеет $m + 1$ непрерывную производную по t .

2. Методы решения. Методы решения задачи Коши условно разделяются на точные, приближенно-аналитические и численные.

К *точным* относятся методы, позволяющие выразить решение задачи через элементарные или специальные функции, либо представить его при помощи интегралов от них. Эти методы изучаются в курсе ОДУ; по этому поводу можно порекомендовать также справочник [2]. Однако классы уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Например, доказано, что решение первого из уравнений

$$u'(t) = t^2 + u^2(t), \quad u'(t) = \frac{u(t) - t}{u(t) + t}$$

не выражается через элементарные функции, а общее решение второго имеет вид

$$0.5 \ln(t^2 + u^2) + \operatorname{arctg}(u/t) = c.$$

Однако для того, чтобы воспользоваться последней формулой и вычислить $u(t)$ при конкретном t , надо численно решить это трансцендентное уравнение, что несколько не проще, чем численно решить само дифференциальное уравнение.

К *приближенно-аналитическим* относятся методы, в которых решение получается как предел $u(t)$ некоторой последовательности функций $u_k(t)$, причем $u_k(t)$ выражается через элементарные функции или интегралы от них. Ограничиваясь конечным значением k , получаем приближенное выражение для $u(t)$. Примерами могут служить метод разложения решения в обобщенный степенной ряд, метод Пикара, метод малого параметра. Однако эти методы удобны лишь в том случае, когда большую часть промежуточных выкладок удается провести точно. Это выполнимо для сравнительно простых задач, что сильно сужает область применения приближенно-аналитических методов.

Численные методы — это методы вычисления приближенных значений искомого решения $u(t)$ на некотором заданном или генерируемом в ходе решения задачи множестве точек t_1, t_2, \dots, t_N , называемом сеткой узлов. Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общее решение системы (1); они могут дать только какое-то частное решение, например, решение задачи Коши (1), (3), что является основным недостатком этих методов. Он компенсируется тем, что численные методы применимы к различным уравнениям и всем типам задач для них. С появлением ЭВМ численные методы стали одним из основных способов решения конкретных практических задач для ОДУ.

Далее мы кратко рассмотрим одно семейство численных методов решения задачи Коши — методы Рунге – Кутты.¹⁾ Для простоты изложения мы ограничиваемся случаем одного уравнения первого порядка. Векторная запись задачи Коши позволяет без изменения вида формул обобщить методы на системы уравнений.

§ 2. Методы Рунге – Кутты

Пусть требуется найти приближенное решение задачи

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, b], \quad u(a) = u_a, \quad (4)$$

на равномерной с шагом h сетке узлов

$$\omega_h = \{t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}, \quad h = (b - a)/N.$$

Через $u_i = u(t_i)$, y_i будем обозначать соответственно точное и приближенное решение задачи в точке сетки с номером i .

1. Явный метод Эйлера. Этот метод является простейшим представителем семейства методов Рунге – Кутты. Строится метод Эйлера, например, следующими рассуждениями.

¹⁾К. Рунге и М. Кутта — немецкие математики. Согласно грамматическим нормам русского языка, фамилия Кутта склоняется, поэтому говорят: «Метод Рунге – Кутты четвертого порядка». Правила русской грамматики предписывают склонять все мужские и женские фамилии, оканчивающиеся на -а, -я, которым предшествует согласный. Единственное исключение — фамилии французского происхождения с ударением на последнем слоге типа Дюма́, Золя́. Однако иногда (и, вероятно, даже несколько чаще, чем грамматически правильный) на практике встречается и несклоняемый вариант: «Метод Рунге – Кутта».

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для каждого $i = 0, 1, \dots, N - 1$ получим разложение

$$u(t_i + h) = u(t_i) + hu'(t_i) + \frac{h^2}{2} u''(t_i + \xi_i h), \quad \xi_i \in [0, 1]. \quad (5)$$

Поскольку в силу уравнения (4) справедливо равенство $u'(t_i) = f(t_i, u(t_i))$, то соотношение (5) переписывается в виде

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) + h\psi_{i+1}, \quad \psi_{i+1} = \frac{h}{2} u''(t_i + \xi_i h). \quad (6)$$

В этой формуле слагаемое $h\psi_{i+1} = O(h^2)$ является малой величиной, если h достаточно мало. Отбрасывая его, приходим к методу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad y_0 = u_a. \quad (7)$$

Эти соотношения позволяют вычислить приближенное решение в точке сетки t_{i+1} , зная приближенное решение в предыдущей точке t_i . Такие численные методы называются *одношаговыми*.

1.1. Оценка точности метода Эйлера. Оценим точность метода Эйлера, считая, что функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, \xi) - f(t, \eta)| \leq \lambda |\xi - \eta| \quad \forall \xi, \eta \in R, \quad t \in [a, b].$$

Пусть $e_i = u_i - y_i$. Величина $|e_i|$ представляет собой абсолютную погрешность решения в i -той точке сетки. Обозначим через $\|u - y\|$ максимальную погрешность,

$$\|u - y\| = \max_{i=1, \dots, N} |u_i - y_i|.$$

Величина ψ , определяемая согласно (6) формулой

$$\psi_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (8)$$

называется погрешностью аппроксимации метода Эйлера и определяет малость $\|u - y\|$. Чтобы убедиться в этом, получим уравнение для погрешности, вычитая из равенств (6) равенства (7):

$$e_{i+1} = e_i + h(f(t_i, u_i) - f(t_i, y_i)) + h\psi_{i+1}. \quad (9)$$

Воспользуемся условием Липшица и хорошо известной оценкой $1 + x \leq e^x$, $x > 0$. Тогда, из (9) следует, что

$$|e_{i+1}| \leq (1 + Lh) |e_i| + h |\psi_{i+1}| \leq e^{Lh} |e_i| + h |\psi_{i+1}|.$$

Эта оценка справедлива для любого $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Применяя ее рекуррентно для оценки $|e_i|$ в правой части и продолжая этот процесс, будем иметь ($e_0 = 0$):

$$\begin{aligned} |e_{i+1}| &\leq e^{Lh} (e^{Lh} |e_{i-1}| + h |\psi_i|) + h |\psi_{i+1}| \leq \dots \leq \\ &\leq e^{(i+1)Lh} |e_0| + \sum_{k=1}^{i+1} h e^{(i+1-k)Lh} |\psi_k| \leq \\ &\leq e^{ihL} (i + 1) h \max_{i=1, \dots, N} |\psi_i| \leq (b - a) e^{(b-a)\lambda} \|\psi\|. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $i = 1, 2, \dots, N$, справедлива оценка $|e_i| \leq C_0 \|\psi\|$ с постоянной $C_0 = (b - a) e^{(b-a)\lambda}$, не зависящей от h . Следовательно,

$$\|u - y\| \leq C_0 \|\psi\|.$$

Если ввести обозначение $C(u) = 0.5 \max_{t \in [a, b]} |u''(t)|$, то из (6) вытекает, что $\|\psi\| \leq C(u)h$ и, таким образом,

$$\|u - y\| \leq C_0 C(u)h. \quad (10)$$

В оценке (10) величины сомножителей при h , как правило, неизвестны. В силу этого оценка имеет теоретическое значение, но мало пригодна для практической оценки точности метода Эйлера. Тем не менее, из нее следует, что с уменьшением h пропорционально уменьшается максимальная погрешность решения, а также, что погрешность может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе h (или числа точек сетки N). Из оценки (10) следует также, что погрешность решения больше для задач, у которых больше отрезок интегрирования и больше константа Липшица λ ; может потребоваться очень малый шаг сетки для обеспечения точности, если эти числа достаточно велики. Практика вычислений подтверждает эти выводы.

Сделаем еще одно важное замечание. Время, необходимое для вычисления решения, равно примерно $T_f N$, где T_f время, необходимое

для вычисления правой части f уравнения (4). В то же время, согласно (10), справедлива оценка $\|u - y\| \leq c/N$, где $c = C_0 C(u)(b - a)$. Отсюда можно сделать вывод, что если мы хотим, например, в 10 раз увеличить точность полученного решения, то время вычисления решения также увеличится в 10 раз.

1.2. Об устойчивости метода Эйлера. Чтобы пояснить понятие устойчивости метода Эйлера, рассмотрим следующую модельную задачу Коши

$$u'(t) = -\lambda u, \quad t \in (0, T], \quad u(0) = u_0,$$

в случае, когда $u_0 > 0$, $\lambda > 0$. Эта задача соответствует выбору $f(t, u) = -\lambda u$ в (4), а постоянная λ определяет соответствующую f постоянную Липшица.

Точное решение этой задачи есть $u(t) = u_0 e^{-\lambda t}$. Оно положительно и монотонно убывает с ростом t . Формулы метода Эйлера принимают вид $y_{i+1} = y_i - \lambda h y_i$ или $y_{i+1} = q y_i$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$, где $q = 1 - \lambda h$. Следовательно,

$$y_i = q y_{i-1} = q^2 y_{i-2} = \dots = q^i u_0.$$

Отсюда следует, что, если $h > 2/\lambda$, то $|q| > 1$ и $|y_i|$ возрастает с ростом i , что кардинально расходится с качественным поведением точного решения. К тому же, в этом случае, при $q < 0$ приближенное решение меняет знак в каждой точке сетки. В этом случае говорят, что приближенное решение ведет себя неустойчиво (метод неустойчив). Условие устойчивости метода Эйлера имеет вид $|q| < 1$ или

$$h < h_0, \quad h_0 = 2/\lambda. \quad (11)$$

При выполнении несколько более сильного условия $0 < q < 1$ (при $h < 1/\lambda$) приближенное решение является положительным и монотонно убывающим, т. е. качественно верно воспроизводится как монотонность, так и положительность точного решения. Ясно, что условие (11) практически не является ограничительным, если λ не слишком велико: для обеспечения точности решения должно выбраться достаточно малое h . Условие (11) является ограничительным, а метод практически непригодным, если λ очень большое. В этом случае

необходимо выбирать очень малое h для получения хотя бы качественно правильного решения (например, при $\lambda \sim 10^6$ должно быть $h \lesssim 10^{-6}$).

Отмеченное выше понятие устойчивости метода Эйлера для модельной задачи переносится задачу Коши общего вида. Сформулированное выше условие устойчивости (11), при соответствующем определении λ , является характерным для всего класса явных методов Рунге – Кутты и при их использовании необходимо выбирать шаг h достаточно малым как с целью обеспечения устойчивости метода, так и с целью достижения требуемой точности приближенного решения.

2. Определение семейства методов Рунге – Кутты. Формулы, требующие q вычислений правой части f на одном шаге интегрирования (q -стадийные явные методы Рунге – Кутты), имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_q k_q), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + c_2 h, y_i + a_{21} h k_1), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ k_q &= f(t_i + c_q h, y_i + a_{q1} h k_1 + a_{q2} h k_2 + \dots + a_{q,q-1} h k_{q-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

При фиксированном q конкретный метод определяется выбором коэффициентов b_j, c_j, a_{lj} . Всегда выполняется равенство

$$b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1, \quad (14)$$

так что при $q = 1$ приходим к методу Эйлера. Коэффициенты q -стадийного явного метода Рунге – Кутты принято располагать в виде следующей треугольной таблицы:

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_q	a_{q1}	a_{q2}	\dots	$a_{q,q-1}$	
	b_1	b_2	\dots	b_{q-1}	b_q

Величины k_j , определенные выше, зависят, в частности, от h и y_i ; укажем эту зависимость в виде $k_j = k_j(h, y_i)$. Так, если $u_i = u(t_i)$ есть значение точного решения в узле сетки t_i , то $k_1(h, u_i) = f(t_i, u_i)$, $k_2(h, u_i) = f(t_i + c_2h, u_i + a_{21}hk_1(t_i, u_i))$, и т.д. Величину

$$\psi_{i+1} = \psi_{i+1}(h) = \frac{u(t_i + h) - u_i}{h} - \sum_{j=1}^q b_j k_j(h, u_i) \quad (15)$$

называют *погрешностью аппроксимации* в точке сетки t_{i+1} , и рассматривают ее как функцию шага сетки h .

Разложим $\psi_{i+1}(h)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$\psi_{i+1}(h) = \psi_{i+1}(0) + \psi'_{i+1}(0)h + \dots + \psi_{i+1}^{(m)}(0)\frac{h^m}{m!} + o(h^m),$$

и подберем коэффициенты $b_j, c_j, a_{\ell j}$ так, чтобы при возможно большем m выполнялись равенства

$$\psi_{i+1}(0) = \psi'_{i+1}(0) = \dots = \psi_{i+1}^{(m-1)}(0) = 0. \quad (16)$$

Тогда

$$\psi_{i+1} = \psi_{i+1}^{(m)}(0)\frac{h^m}{m!} + o(h^m), \quad (17)$$

и говорят, что *порядок погрешности аппроксимации* метода равен m ($\psi_{i+1} = O(h^m)$), а первое слагаемое в правой части (17) называют главным членом погрешности аппроксимации.

Нетрудно видеть, что условие первого порядка аппроксимации (первое равенство $\psi_{i+1}(0) = 0$ в (16)) совпадает с условием (14), поскольку, в силу уравнения, $k_j(0, u_i) = f(t_i, u_i) = u'(t_i)$,

$$\psi_{i+1}(0) = u'(t_i) - \sum_{j=1}^q b_j k_j(0, u_i) = \left(1 - \sum_{j=1}^q b_j\right)u'(t_i).$$

Для произвольного метода Рунге – Кутты (12) аналогично методу Эйлера доказывается, что (см., напр., [3, с. 221])

$$\|u - y\| \leq C_0 \|\psi\|,$$

с постоянной C_0 , зависящей от $b - a, \lambda, q$, а также от коэффициентов метода, но не зависящей от h . Из этой оценки следует, что если

порядок погрешности аппроксимации равен m , т. е. $\|\psi\| \leq C(u) h^m$, то

$$\|u - y\| \leq C_0 C(u) h^m.$$

В этом случае говорят, что *порядок точности метода* равен m ; видно, что порядок точности совпадает с порядком погрешности аппроксимации, чем и обусловлен способ выбора коэффициентов метода.

Известно, что всегда $m \leq q$ и не существует m -стадийных методов с порядком точности m при $m \geq 5$. В следующей таблице указано минимальное число стадий (q_{\min}), которое необходимо для обеспечения соответствующего порядка точности метода.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
q_{\min}	1	2	3	4	6	7	9	11

Время работы T_q программы, реализующей методы с q -стадиями, определяется величиной $qT_f N$, где T_f время, необходимое для вычисления правой части f уравнения (4) при заданных аргументах. Максимальная погрешность решения оценивается сверху величиной C/N^m . Увеличивая число узлов, скажем, в 10 раз, мы получаем в 10^m раз более точное решение. Отсюда ясно, в чем выгода от использования методов высокого порядка точности. С другой стороны, если в вычислениях не нужна очень большая точность, то методы со средним показателем m (с $m = 4$), могут оказаться предпочтительными, поскольку они требуют меньшего времени работы программы и имеют достаточную точность.

Рассмотрим, как получаются конкретные методы при небольших значениях q . При больших значениях q рассуждения аналогичны; возрастает лишь сложность проводимых при этом вычислений.

3. Методы Рунге – Кутты при $q = 2$. Формулы имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + c_2 h, y_i + a_{21} h k_1). \end{aligned}$$

Попытаемся удовлетворить соотношениям (16) при возможно большем значении m . В данном случае

$$\psi_{i+1}(h) = \frac{u(t_i + h) - u_i}{h} - (b_1 k_1(h, u_i) + b_2 k_2(h, u_i)). \quad (18)$$

Как мы видели выше, равенство $\psi_{i+1}(0) = 0$ выполняется, если

$$b_1 + b_2 = 1.$$

Разложим $u(t_i + h)$ в ряд Тейлора в точке t_i . Тогда

$$\frac{u(t_i + h) - u_i}{h} = u'_i + \frac{h}{2!} u''_i + \frac{h^2}{3!} u'''_i + \dots \quad (19)$$

Согласно уравнению $u'(t) = f(t, u(t))$; поэтому

$$u''(t) = f'_t(t, u(t)) + f'_u(t, u(t))u'(t) = f'_t(t, u(t)) + f'_u(t, u(t))f(t, u(t)).$$

С учетом этих формул нетрудно видеть, что равенство

$$0 = \psi'_{i+1}(0) = \left\{ (1 - 2c_2 b_2) f'_t + (1 - 2a_{21} b_2) f f'_u \right\} \Big|_{t=t_i, u=u_i}$$

дает еще два уравнения для определения коэффициентов

$$1 - 2c_2 b_2 = 0, \quad 1 - 2a_{21} b_2 = 0.$$

Вычисления показывают, что выбором коэффициентов условию $\psi''_{i+1}(0) = 0$ удовлетворить не удастся. Это легко увидеть на примере уравнения с $f(t, u) = u$. Тогда в выражении (18) второе слагаемое линейно зависит от h и его вторая производная по h равна нулю. Из формулы (19) легко видеть, что вторая производная по h от первого слагаемого в (18) при $h = 0$ равна $1/3 u'''(t_i)$. Поэтому

$$\psi''_{i+1}(0) = 1/3 u'''(t_i).$$

Следовательно, $m = 2$ и четыре коэффициента метода необходимо определить из трех уравнений

$$b_1 + b_2 = 1,$$

$$2c_2 b_2 = 1,$$

$$2a_{21} b_2 = 1.$$

Принимая, например, c_2 за свободный параметр, найдем:

$$a_{21} = c_2, \quad b_2 = \frac{1}{2c_2}, \quad b_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}. \quad (20)$$

Таким образом, мы получили однопараметрическое семейство формул Рунге – Кутты второго порядка точности. В частности, полагая $c_2 = 1; 2/3; 1/2$ в (20), придем к трем конкретным формулам.

4. Методы Рунге – Кутты при $q = 3$. Формулы имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + c_2h, y_i + a_{21}hk_1), \\ k_3 &= f(t_i + c_3h, y_i + a_{31}hk_1 + a_{32}hk_2). \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, получается следующая система из шести уравнений для определения восьми коэффициентов метода при $m = 3$ (см., напр., [3, с. 224]):

$$\begin{aligned} c_2 &= a_{21}, \\ c_3 &= a_{31} + a_{32}, \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 1, \\ 2(c_2b_2 + c_3b_3) &= 1, \\ 3(\alpha_2^2b_2 + \alpha_3^2b_3) &= 1, \\ 6c_2a_{32}b_3 &= 1. \end{aligned}$$

Эта система имеет два семейства решений: двухпараметрическое со свободными параметрами c_2 и c_3 , причем, $c_2 \neq c_3$ и $c_2 \neq 2/3$, и однопараметрическое со свободным параметром a_{32} (при $c_2 = c_3 = 2/3$). В качестве примера укажем коэффициенты при $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1$: $b_1 = b_3 = 1/6$, $b_2 = 4/6$, $a_{21} = 1/2$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$.

§ 3. Формулировка задачи Коши с событиями

Выше мы рассмотрели задачу Коши

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, b], \quad u(a) = u_a,$$

предполагая, что интервал интегрирования (a, b) задан и конечен. В таком виде формулируется большинство задач, встречающихся в приложениях. Однако имеется немало задач, в формулировке которых точка b неизвестна, а, в свою очередь, определяется решением задачи. Такие задачи ставятся следующим образом:

требуется найти функцию $u(t)$ и число t_f такие, что $u(t)$ удовлетворяет условию $u(a) = u_a$ и уравнению

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, t_f], \quad (21)$$

а $t_f > a$ такое минимальное число, при котором

$$\Phi(t, u(t))\big|_{t=t_f} = 0. \quad (22)$$

Здесь Φ — заданная функция двух переменных, которую будем называть событием. Часто эта функция «снабжается направленностью» и интегрирование прекращается, когда выполнено условие (22) и при этом функция $\phi(t) = \Phi(t, u(t))$ была возрастающей (или убывающей). При формулировке задач с событием всегда предполагается, что $\phi(t)$ является непрерывной и меняет знак при $t = t_f$.

В общем случае Φ может быть вектор функцией

$$\Phi(t, u(t)) = (\Phi_1(t, u(t)), \dots, \Phi_m(t, u(t))), \quad m \geq 1.$$

В этом случае интегрирование прекращается, если выполнено хотя бы одно из «направленных» условий $\Phi_i(t, u(t))\big|_{t=t_f} = 0$ (т. е. наступит хотя бы одно событие).

В качестве примера «задачи с событием» рассмотрим задачу баллистики — задачу о полете снаряда (подробнее см. задачу 20 на стр. 89). Система уравнений в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= v \cos(\theta), \\ y' &= v \sin(\theta), \\ v' &= -C\rho S v^2 / (2m) - g \sin(\theta), \\ \theta' &= -g \cos(\theta) / v. \end{aligned}$$

Она дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0.$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$ — координаты центра масс снаряда в момент времени t в системе координат xOy , в которой лежит траектория снаряда, а $y = 0$ есть уровень земли; $v = v(t)$ есть скорость снаряда в момент времени t ; $\theta = \theta(t)$ — угол между касательной к траектории снаряда и осью Ox . В соответствии с начальными условиями, снаряд вылетает из точки с координатами $(0, 0)$ под углом θ_0 к горизонту с начальной скоростью v_0 . В данной задаче интерес представляют время t_f и дальность L полета снаряда. Время полета снаряда можно определить как тот момент времени, когда снаряд упадет на землю (или падая достигнет некоторой высоты h_0 — подрыв снаряда на заданной высоте). Ясно, что интервал интегрирования $(0, t_f]$ в данном случае неизвестен, имеется одно «направленное» событие, которое определяется следующим образом

$$\Phi(t, u(t)) = y(t), \quad \text{функция } t \rightarrow \Phi(t, u(t)) \text{ убывает.}$$

§ 4. Программирование методов Рунге – Кутты

1. Задачи без событий. Рассмотрим вопросы, связанные с программной реализацией q -стадийного метода Рунге – Кутты, предназначенного для решения произвольной задачи Коши для системы ОДУ, имея в виду рассмотренные выше методы с постоянным шагом интегрирования h . Будем предполагать, что число уравнений n и число узлов N таковы, что в памяти ЭВМ можно разместить матрицу размера $(N + 1) \times n$.

Выберем идентификатор RKq для обозначения имени этой программы (функции). Какие параметры необходимо передать этой программе, а какие получить в качестве результата ее выполнения? Поскольку мы ведем речь о задаче вида

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, b], \quad u(a) = y_0,$$

где $f : R \times R^n \rightarrow R^n$ — заданная функция, $y_0 \in R^n$ — заданный вектор, а a, b — заданные числа, то задача определяется только исходными данными

$$f, \quad a, \quad b, \quad y_0,$$

или тремя данными, если a, b поместить, например, в массив $tspan$, длины два. Ясно, что эти данные надо передать RKq . Кроме того метод Рунге – Кутты определяется параметром N ($h = (b-a)/N$); его тоже необходимо передать RKq . Будем считать (это общепринято), что f в свою очередь реализуется в виде программы (функции); она должна иметь два входных параметра (t, y) , $y \in R^n$, $t \in R$, и один выходной — значение вектор-функции f — массив длины n .¹⁾

Метод Рунге – Кутты генерирует векторы y_i длины n , которые являются приближениями к $u(t_i) = (u_1(t_i), \dots, u_n(t_i))$, $i = 0, 1, \dots, N$. Будем считать, что эти векторы сохраняются в матрице Y , размера $(N + 1) \times n$, i -тая строка которого равна y_i .²⁾ Будем считать также, что массив $T = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ используется для хранения сетки.

Схематически заголовок программы RKq можно определить в виде

$$\text{function } [T, Y] = RKq(f, tspan, y0, N).$$

Здесь в квадратных скобках указываются выходные параметры, а в круглых — входные.³⁾ Вместо параметра N в функцию можно передавать шаг сетки h .

Для заданной матрицы Y под $Y(i, :)$ будем понимать i -тую строку Y , а для заданных одномерных массивов x, y , длины n , и чисел c, d , под $x = y, z = c * x + d * y, y = 0$ будем понимать реализацию покомпонентных операций

$$x_i = y_i, \quad z_i = c * x_i + d * y_i, \quad y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем считать также, что команда $Y = zeros(m, n)$ определяет матрицу размера $m \times n$, состоящую из нулей; под $x(i)$ будем понимать i -тый элемент массива (вектора). Ниже приведена в схематической форме реализация трех стадийного метода (для примера); числа типа $alpha2, beta21$ и т.д. должны быть заменены на конкретные значения.

function [T,Y]=RK3(f,tspan,y0,N)

¹⁾В зависимости от выбранного языка программирования, возможно как RKq , так и f , необходимо передавать также параметр n — размерность задачи. Далее мы будем предполагать, что имеется функция $numel()$, которая для одномерного массива возвращает число его элементов.

²⁾Тогда j -тый столбец Y содержит приближение к j -той компоненте решения $u_j(t)$ во всех точках сетки.

³⁾Такой синтаксис языка программирования принят в MatLab.

```

T=zeros(N+1,1);
Y=zeros(N+1,n);

t=tspan(1);
y=y0(:); % y column vector
h=(tspan(2)-tspan(1))/N;

T(1)=t;
Y(1,:)=y';
for i=1:N
    k1=f(t,y);

    yp=y+(beta21*h)*k1;
    k2=f(t+alpha2*h,yp);

    yp=y+(beta31*h)*k1+(beta32*h)*k2;
    k3=f(t+alpha3*h,yp);

    y=y+h*(p1*k1+p2*k2+p3*k3);

    t=t+h;
    T(i+1)=t;
    Y(i+1,:)=y';
end

```

Для каждой задачи Коши должна быть написана своя программа вычисления правой части; шаблон этой программы с именем *fct* выглядит следующим образом:

```

function dy=fct(t,y)
n=numel(y);
dy=zeros(n,1);

dy(1)=...;
dy(2)=...;
...
dy(n)=...;

```

Здесь вместо многоточия в $dy(i) = \dots$; нужно записать выражение функции $f_i(t, y)$ в терминах переменных $t, y(1), \dots, y(n)$.

2. Задачи с событиями. В этом случае задача определяется как данными f, a, b, y_0 , которые мы обсудили выше, так и функцией Φ , определяющей события. Для упрощения изложения будем считать, что Φ есть скалярная функция. Предположим также, что она определяется функцией *events*, имеющей описание

```

function [val, dir]=events(t,y)

```

Эта функция возвращает величину $\text{val} = \Phi(t, y)$ и направленность Φ в переменной dir : $\text{dir} = 1$, если событие наступает при возрастании функции Φ ; $\text{dir} = -1$, если событие наступает при убывании Φ ; наконец, $\text{dir} = 0$, если Φ не снабжено направленностью (событие фиксируется при $\text{val} = 0$ как при убывании, так и возрастании Φ). Например, в задаче о полете снаряда, описанной выше, эта функция определяется следующим образом, если y есть вектор $(x(t), y(t), v(t), \theta(t))$:

```
function [val, dir]=events(t, y)
val=y(2);
dir=-1;
```

При написании аналога функции *RK3* информация об этой функции должна быть передана в качестве входного параметра. При этом потребуются внести также следующие очевидные изменения в *RK3*.

1) Вместо параметра N в функцию необходимо передавать параметр h , поскольку значение N до решения задачи не известно.

2) Заранее неизвестно сколько памяти необходимо выделить для хранения выходного параметра Y . При программировании в MatLab эта трудность преодолевается, если убрать в *RK3* следующие строки: $T = \text{zeros}(1, N + 1)$; и $Y = \text{zeros}(N + 1, n)$;, а строки $T(i + 1) = t$; $Y(i + 1, :) = y'$; заменить на $T = [T; t]$; $Y = [Y; y']$;

3) Основной цикл с перечислением *for* $i = 1 : N$ необходимо заменить на цикл типа *while*, условие выхода из которого зависит от наступления события.

4) Функция *events*, определяющая событие, должна быть вычислена как до основного цикла, так и внутри него после определения y_{i+1} . В этом случае можно считать, что внутри цикла известны значения $\Phi_i = \Phi(t_i, y_i)$ и $\Phi_{i+1} = \Phi(t_{i+1}, y_{i+1})$.

Пусть на i -том шаге известны $\Phi_i = \Phi(t_i, y_i)$, $\Phi_{i+1} = \Phi(t_{i+1}, y_{i+1})$ и $\Phi_i \Phi_{i+1} < 0$. В этом случае при некотором $t_{fh} \in [t_i, t_{i+1}]$ функция Φ обращается в нуль. Обсудим вопрос о том, как экономично определить точку t_{fh} — приближение к t_f .

Можно принять $t_{fh} = (t_i + t_{i+1})/2$. В этом случае время наступления события будет определено с точностью $O(h)$. На порядок по h точнее время t_f можно определить, используя линейную (лагранжеву) интерполяцию функции Φ (методом секущих). Точнее, пусть

$L(\Phi, t)$ есть линейная на $[t_i, t_{i+1}]$ функция, определяемая условиями интерполяции $L(\Phi, t_i) = \Phi_i$, $L(\Phi, t_{i+1}) = \Phi_{i+1}$:

$$L(\Phi, t) = \Phi_i + (\Phi_{i+1} - \Phi_i)(t - t_i)/h.$$

Определим t_{fh} так, что $L(\Phi, t_{fh}) = 0$. Получим

$$t_{fh} = t_i - h \Phi_i / (\Phi_{i+1} - \Phi_i).$$

Приближенное решение y_f в этой точке определим как $y_f = L(y, t_{fh})$, т. е. положим

$$y_f = y_i + (y_{i+1} - y_i)(t_{fh} - t_i)/h.$$

Можно использовать также квадратичную или кубическую эрмитову интерполяцию Φ и y (в точке t_i известны значения y_i , $y'_i = f(t_i, y_i)$; аналогично в точке t_{i+1} известны значения y_{i+1} , $y'_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1})$). Отметим, что применение того или иного способа определения t_f должна быть согласована, по-возможности, с точностью реализуемого метода Рунге – Кутты. Приближенное решение y_f в точке t_{fh} определяется как значение соответствующего интерполяционного полинома в точке t_{fh} .

Для облегчения программирования при выполнении заданий студент может ограничиться лишь линейной интерполяцией.

§ 5. Решение задачи Коши для системы ОДУ в MatLab

Для решения задачи Коши для системы ОДУ в MatLab имеются две функции `ode23` и `ode45`, основанные на явных методах Рунге – Кутты. Эти функции хорошо документированы в Help системе MatLab и их использование для решения как задач без событий, так и с событиями, не вызывает трудностей.

В `ode45` реализован один из так называемых вложенных методов Рунге – Кутты. Эти методы позволяют экономично и автоматически выбирать шаг интегрирования с целью обеспечения требуемой точности приближенного решения задачи.

1. О вложенных методах Рунге – Кутты. Рассмотрим q -стадийный явный метод Рунге – Кутты, определяемый следующей таблицей:

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_q	a_{q1}	a_{q2}	\dots	$a_{q,q-1}$	
	b_1	b_2	\dots	b_{q-1}	b_q
	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\dots	\hat{b}_{q-1}	\hat{b}_q

Эта таблица имеет два набора коэффициентов $b : \{b_i\}$ и $\{\hat{b}_i\}$. Предположим, что приближенное решение y_i в точке t_i найдено с требуемой точностью и решение в точке $t_{i+1} = t_i + h$ находится по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_q k_q), \quad (23)$$

имеющей порядок погрешности аппроксимации равный m . Здесь k_i вычисляются согласно формулам (13). Предположим также, что коэффициенты $\{\hat{b}_i\}$ таковы, что формула

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h(\hat{b}_1 k_1 + \hat{b}_2 k_2 + \dots + \hat{b}_q k_q)$$

с теми же коэффициентами k_i , что и в (23), имеет порядок погрешности аппроксимации равный $m + 1$. При этих предположениях за q вычислений правой части одновременно получают два приближенных решения, точность которых отличается на порядок по h .

Пусть $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ есть некоторые нормы в R^n . В силу малости h , величину $err_{i+1} = \|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|_1 / \|\hat{y}_{i+1}\|_2$ можно принять за меру локальной относительной погрешности решения y_{i+1} в точке t_{i+1} ; второе значение \hat{y}_{i+1} используется при этом лишь для определения локальной погрешности.

Вложенные методы обычно называют по фамилии автора с указанием порядка основного и вспомогательного метода; например, метод Мерсона 4(5). На практике широко используются различные вложенные методы, среди которых выделяются методы Дормана–Принса, известные при различных m . В функции `ode45` реализованы формулы Дормана–Принса 4(5), которые определяются следующей таблицей

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$						
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
y	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
\hat{y}	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

Этот метод имеет семь стадий, однако практически — шесть (как отмечалось ранее, метод пятого порядка не может иметь меньше, чем шесть стадий). Действительно, поскольку $a_{7,i} = b_i$ для всех i , то нетрудно видеть, что коэффициент k_7 на предыдущем шаге совпадает с коэффициентом k_1 на следующем шаге. Этот факт используется при программировании метода.

2. Об автоматическом выборе шага. Процедура интегрирования с автоматическим выбором шага определяется следующим образом. Пусть решение в точке t_i найдено с некоторым шагом h . Выполняется следующий цикл.

1) С использованием вложенных формул вычисляется y_{i+1} и величина погрешности $err = \|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|_1 / \|\hat{y}_{i+1}\|_2$.

2) Если $err \leq tol$, т. е. погрешность меньше или равна заданной допустимой погрешности, то решение в точке t_{i+1} считается найденным, а шаг интегрирования — выполненным успешно. Решение y_{i+1} каким-либо образом сохраняется (например, в массиве Y). Далее вычисляется новый шаг интегрирования $h = \min(\gamma h, hmax)$, где $\gamma \geq 1$, и h принимается в качестве текущего для следующего шага и интегрирование продолжается. Здесь $hmax$ — максимальный шаг (задается пользователем);

3) Если $err > tol$, т. е. погрешность оказывается больше желаемой, то полученное решение в точке t_{i+1} отбрасывается как неточное, а шаг интегрирования считается неудачным. Вычисляется новый шаг интегрирования, равный γh , где теперь $\gamma < 1$, и вычисления повторяются с шага 1).

Для выбора γ , как правило, используют формулу

$$\gamma = \min(\text{facmax}, \max(\text{facmin}, \text{fac} (\text{tol}/\text{err})^{1/(m+1)})).$$

Здесь facmax (facmin) — максимальный коэффициент увеличения (уменьшения) шага ($\text{facmax} = 1.5, \dots, 5$). Эти коэффициенты страхуют от резкого увеличения или уменьшения шага. Для шагов, выполняемых непосредственно после отбрасывания решения, рекомендуется выбирать $\text{facmax} = 1$; fac — страховочный коэффициент ($\text{facmax} = 0.8, \dots, 0.9$).

Приведем шаблон основного цикла описанной выше процедуры интегрирования.

```

while (t<tfinal) && (h>=hmin) % The main loop
  if (t+h)>tfinal
    h = tfinal - t;
  end;

  % Compute two solution
  .....

  y1=y+h*(...);
  y2=y+h*(...);

  err = norm(y1-y2)/norm(y2); % Truncation error

  % Update the solution only if the error is acceptable
  if err <= tol
    t = t + h;
    y = y1;
    T = [T; t];
    Y = [Y; y'];
  end
  .....

  % Step control
  if err == 0.0, err = 10*eps; end
  gamma = min(facmax, max(facmin, fac*(tol/err)^(1/(m+1))));
  h      = min(gamma*h, hmax);
  .....
end

```

Более подробно о вложенных методах Рунге – Кутты и проблеме автоматического выбора шага можно прочитать, например, в книге [4].

§ 6. Численное определение порядка точности метода

При выполнении одного из пунктов самостоятельного задания требуется на основе вычислений подтвердить, что реализованный метод Рунге – Кутты имеет требуемый порядок точности.

Опишем как это можно сделать. Пусть имеется некоторая задача Коши для системы из n уравнений с известным точным решением $u(t)$, $t \in [a, b]$ (тестовая задача). Пусть также имеется программа, которая позволяет найти ее приближенное решение $Y = Y(h)$ на равномерной сетке t с N узлами и с шагом h . Пусть $U = \{U_{ij} = u_j(t_i)\}$ есть точное решение на той же сетке. Обозначим через

$$e(h) = \|U - Y(h)\| = \max_{j=1, \dots, n} \left(\max_{i=1, \dots, N} |U_{ij} - Y_{ij}(h)| \right)$$

максимальную погрешность решения в равномерной сеточной норме. Она является функцией шага сетки h . Нас интересует характер зависимости погрешности e от h . Пусть

$$C(h) = e(h)/h^\alpha, \quad h > 0.$$

Если при всех допустимых h при некоторых постоянных c и C справедливы оценки $0 < c \leq C(h) \leq C$, то

$$c h^\alpha \leq e(h) \leq C h^\alpha, \quad h > 0. \quad (24)$$

В этом случае α определяет порядок точности метода, полученный в результате вычислений.

При численном определении величин c , C и α мы вынуждены рассматривать функцию $C(h)$ лишь при $h_1 \leq h \leq h_K$, причем значения h_1 и h_K свои для каждого метода. Порядок h_1 зависит от точности метода, а h_K — от его устойчивости. Например, если $\alpha = 5$, то при $h \approx 10^{-4}$ ожидается, что $e(h) \approx 10^{-20}$. Но такая точность недостижима при вычислениях с двойной точностью, поскольку максимально достижимая точность при этом имеет порядок 10^{-16} . В данном случае подходящим является выбор $h_1 \approx 10^{-2.5}$.

Полезно построить график функции $e = e(h)$. Для этого выберем некоторую совокупность шагов $h = [h_1, h_2, \dots, h_K]$ и при каждом h_i , решая задачу Коши, определим $e_i = e(h_i)$. Таким образом получим вектор значений функции $e = [e_1, e_2, \dots, e_K]$. Для дальнейших

иллюстраций предположим, что при решении тестовой задачи рассматриваемым методом получена следующая таблица:

h	e
0.001	9.9349e-011
0.0016681	5.9561e-010
0.0027826	3.5709e-009
0.0046416	2.1411e-008
0.0077426	1.2841e-007
0.012915	7.7049e-007
0.021544	4.6279e-006
0.035938	2.7859e-005
0.059948	0.00016851
0.1	0.0010295

График этой таблично-заданной функции $e = e(h)$ в обычных координатах (h, e) приведен на левом рисунке 1. На правом рисунке 1 представлен график этой же функции в двойных логарифмических координатах (т. е. зависимость $\log_{10}(e)$ от $\log_{10}(h)$).

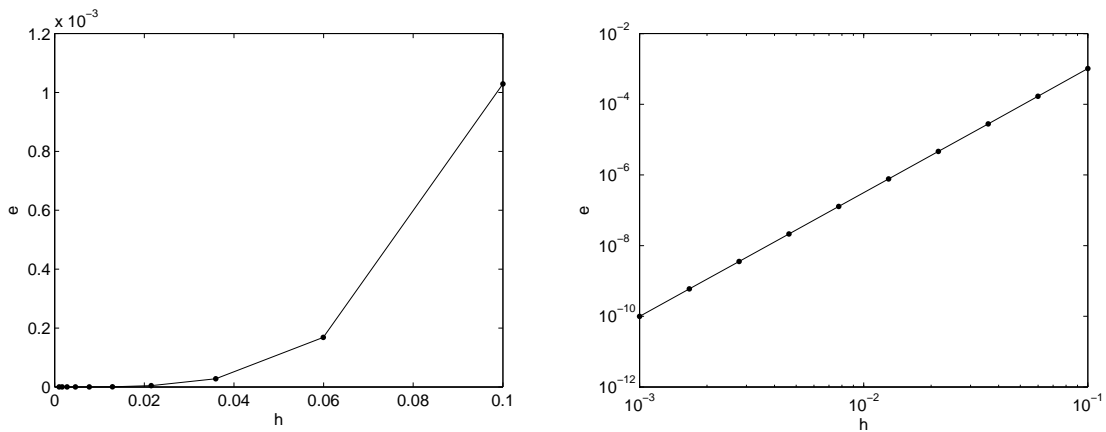


Рис. 1. Графики функции $e = e(h)$ в обычных координатах (слева) и в двойных логарифмических координатах (справа)

Из левого рис. 1 можно заключить, что, по-видимому, зависимость e от h является степенной, а правый рис. 1 подтверждает это, т. к. график степенной функции в двойных логарифмических координатах есть отрезок прямой. Действительно, если $e = ch^\alpha$, то

$$\log_{10}(e) = C + \alpha \log_{10}(h), \quad C = \log_{10}(c).$$

В рассматриваемом нами случае мы не знаем показатель α . Вычислить его можно как тангенс угла наклона прямой на правом рис. 1. Вычисляя наклон прямой в точке h_i , получим значение

$$\alpha_i = \log_{10}(e_{i+1}/e_i)/\log_{10}(h_{i+1}/h_i), \quad i = 1, \dots, K - 1.$$

Для нашего примера вычисления приводят к следующей таблице, из которой мы можем заключить, что $\alpha = 3.5$.

h	α
0.001	3.5001
0.0016681	3.5002
0.0027826	3.5004
0.0046416	3.5008
0.0077426	3.5018
0.012915	3.5038
0.021544	3.5081
0.035938	3.5174
0.059948	3.537

Вычислим значения функции $C(h) = e(h)/h^\alpha$ при $\alpha = 3.5$. Получим таблицу

h	$C(h)$
0.001	3.1417
0.0016681	3.1418
0.0027826	3.1421
0.0046416	3.1427
0.0077426	3.144
0.012915	3.1469
0.021544	3.153
0.035938	3.1661
0.059948	3.1944
0.1	3.2554

Из нее следует, что $C(h)$ есть практически постоянная функция и $C(h) \approx 3.14$ при малых h . Таким образом, вычислениями мы определили, что для рассматриваемой тестовой задачи для погрешности

метода справедлива оценка (24) с постоянными $c = 3.14$, $C = 3.26$ при $\alpha = 3.5$ и $10^{-3} \leq h \leq 10^{-1}$. Чтобы с определенной уверенностью утверждать, что метод имеет порядок точности равный 3.5, необходимо повторить вычисления для других тестовых задачах. Если известен теоретический порядок точности метода и при вычислениях получается тот же порядок, то каждый единичный расчет служит подтверждением теории.

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения — 2-е изд. — М.: Наука, 1985.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1971.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М., Мир, 1990.
5. Глазырина Л. Л., Карчевский М. М. Введение в численные методы. — Казань, КГУ, 2012.

ГЛАВА 2

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

В данной главе приводятся варианты заданий для практических занятий. Задания построены по одному и тому же образцу и подразумевают, что студентом будут выполнены следующие подзадания.

1) Написание программы решения задачи Коши для произвольной системы ОДУ заданным методом Рунге – Кутты.

2) Решение тестовой задачи с целью отладки написанной программы и экспериментального подтверждения теоретического порядка точности реализованного метода Рунге – Кутты.

3) Решение основной задачи — заданной задачи Коши, содержащей один или несколько параметров. Изучение влияния одного из параметров на качественные и количественные свойства решения.

Результатом выполнения задания является письменный отчет. Он должен содержать: а) описание задания; б) описание хода выполнения задания; в) описание и анализ полученных результатов. Графики, таблицы и небольшие фрагменты программ рекомендуется вставлять в текст отчета по ходу изложения. Графики и таблицы должны быть пронумерованы, подписаны и прокомментированы в тексте отчета.

Большая часть основных задач формулируется в виде задачи Коши для системы ОДУ на заданном интервале $(0, T)$. Величина T , как правило, должна быть определена студентом экспериментально так, чтобы выявить характерные особенности решения задачи (как правило $T \approx 50, \dots, 100$). Другая часть основных задач формулируется в виде задачи Коши с событием. Функция, описывающая событие, должна быть определена студентом самостоятельно.

Для выполнения задания студент может выбрать любой язык программирования, которым он хорошо владеет (если конкретный язык программирования не предусмотрен учебным планом). Если студент имеет доступ к таким системам математических вычислений, как

MatLab или Mathematica, рекомендуем использовать один из них. Это упростит как программирование, так и графическое представление результатов вычислений. Прежде чем приступить к выполнению задания, рекомендуем решить основную задачу с использованием соответствующей программы, имеющейся в системе программирования (в MatLab это функция `ode45`).

Основная задача каждого задания представляет собой математическую модель из некоторой предметной области (физики, химии, биологии, медицины, астрономии, техники и т. д.) В первом пункте задания дается краткое описание предмета моделирования, основных предположений и законов, положенных в основу модели. Нередко, и по вполне понятным причинам, эти описания расплывчаты, встречающиеся термины и зависимости не совсем ясны и понятны и т. д. Этот пункт написан для того, чтобы дать студенту некоторые представления о том, каким примерно образом была получена соответствующая математическая модель. Более точные описания предмета моделирования и самой модели содержатся в рекомендованной к пункту литературе. Немало заданий содержит *второй пункт*. В нем описывается «обезразмеривание» модели. Это означает следующее. Как правило исходная модель записывается в терминах размерных зависимых и независимых переменных. Простым масштабированием (с математической точки зрения) от размерных переменных и уравнений осуществляется переход к безразмерным переменным и уравнениям (основной задаче), которые и решаются. После «правильного обезразмеривания», как правило: а) новые переменные имеют одинаковый диапазон значений; б) количество параметров, входящих в уравнения, сокращается (иногда значительно). Новые параметры часто обозначаются двумя-тремя буквами (напр., *Re*, *Pe*, *Da* и т. д.)

Наконец, отметим, что числовые данные основных задач, за редким исключением, не имеют другого смысла, кроме математического: они подобраны так, чтобы обеспечить необходимые свойства решений.

Задача 1. Структура белых карликов.

Белые карлики — это холодные астрофизические объекты, состоящие в основном из тяжелых ядер и электронов. Звезды такого типа являются одним из возможных конечных результатов течения обычных ядерных процессов, в ходе которых синтезируются элементы путем связывания нуклонов в ядра. Карлики часто состоят из наиболее стабильных ядер ${}^{56}\text{Fe}$ с 26 протонами и 30 нейтронами. Однако если процесс нуклеосинтеза прерывается преждевременно, то могут преобладать ядра ${}^{12}\text{C}$. Структура такой звезды определяется балансом силы тяжести, которая ее сжимает, и давлением вырожденных электронов, которое противодействует сжатию. В этом задании вам предлагается исследовать структуру белого карлика, решая уравнения, которыми определяется его равновесие. В частности, вы должны получить соотношение между массой звезды и ее радиусом, величину которого можно определить из астрономических наблюдений.

1. Уравнения равновесия [1,2]. Предположим, что звезда сферически-симметрична (т. е. ее параметры в любой точке зависят только от расстояния между этой точкой и центром звезды). Допустим далее, что вращение отсутствует и можно пренебречь влиянием магнитного поля. Если звезда находится в механическом (гидростатическом) равновесии, то гравитационная сила, приложенная к некоторому объему вещества, уравновешивается градиентом давления P . Сила тяжести, действующая на единичный объем вещества на расстоянии r от центра, равна

$$F_{grav} = -\frac{Gm}{r^2}\rho, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, $\rho(r)$ — массовая плотность, а $m(r)$ — масса звезды, заключенная внутри сферы радиуса r :

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s)s^2 ds. \quad (2)$$

Сила, связанная с градиентом давления и действующая на единицу объема, равна $-dP/dr$. Когда звезда находится в равновесии, результирующая этих сил (гравитации и давления), приложенная к любому

пробному объему вещества, должна быть равна нулю. Так что, используя (1), получаем

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r). \quad (3)$$

Соотношение между плотностью и массой получим, продифференцировав (2):

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r). \quad (4)$$

Чтобы описание системы было полным, необходимо знать уравнение состояния вещества, связывающее его плотность с величиной давления, необходимого для поддержания этой плотности. Используя тождество

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d\rho}{dr} \frac{dP}{d\rho},$$

уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{dr} = -\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{-1} \frac{Gm}{r^2}\rho. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) являются системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые определяют структуру звезды совместно с заданным уравнением $P = P(\rho)$ состояния ее вещества, которое имеет следующий вид:

$$\frac{dP}{d\rho} = Y_e \frac{m_e}{M_p} \gamma \left((\rho/\rho_0)^{1/3} \right), \quad \gamma(x) = \frac{x^2}{3(1+x^2)^{1/2}}, \quad (6)$$

где Y_e — среднее число электронов, приходящихся на одно ядро, M_p и m_e — масса протона и электрона соответственно, $\rho_0 = 9.79 \cdot 10^5 Y_e^{-1} \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$.¹⁾

Начальные условия задаются в виде

$$\rho(0) = \rho_c, \quad m(0) = 0. \quad (7)$$

Радиус R звезды определяется как расстояние, на котором плотность ρ падает до нуля (при вычислениях $\approx 10^{-5}$). Общая масса звезды тогда определяется как $M = m(R)$. Так как обе величины R и M

¹⁾Все величины предполагаются заданными в системе СГС.

зависят от ρ_c , изменяя этот параметр, можно изучать структуру звезд разной массы, вычисляя функцию

$$R = R(\rho_c), \quad M = M(\rho_c), \quad \rho_c \in [\rho_A, \rho_B], \quad (8)$$

в координатах (R, M) .

2. Безразмерная форма уравнений. Введем безразмерные переменные для радиуса, плотности и массы:

$$r = R_0 \bar{r}, \quad \rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad m = M_0 \bar{m}. \quad (9)$$

Сделав подстановки в (4) и (5) и используя (6), после некоторой перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} &= \left[\frac{4\pi R_0^3 \rho_0}{M_0} \right] \bar{r}^2 \bar{\rho}, \\ \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} &= - \left[\frac{GM_0 M_p}{R_0 Y_e m_e} \right] \frac{\bar{m} \bar{\rho}}{\gamma(\bar{\rho}^{1/3}) \bar{r}^2}. \end{aligned}$$

Если выбрать R_0 и M_0 так, чтобы множители в скобках стали равными единице, тогда получим

$$R_0 = \left[\frac{Y_e m_e}{4\pi G M_p \rho_0} \right]^{1/2} = 7.72 \cdot 10^8 Y_e \text{ см}, \quad M_0 = 4\pi R_0^3 \rho_0 = 5.67 \cdot 10^{33} Y_e^2 \text{ г},$$

а безразмерные уравнения запишутся в виде

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = - \frac{\bar{m} \bar{\rho}}{\gamma(\bar{\rho}^{1/3}) \bar{r}^2}, \quad \frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = \bar{r}^2 \bar{\rho}, \quad (10)$$

$$\bar{\rho}(0) = \bar{\rho}_c, \quad \bar{m}(0) = 0. \quad (11)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя классический метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Покажите, что при выборе $\gamma(x) = x^{3\sigma-3}$ задача (10), (11) имеет точное решение

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_c(\sin \bar{r}/\bar{r}) \text{ при } \sigma = 2, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_c(1 + \bar{r}^2/a)^{-5/2} \text{ при } \sigma = 6/5,$$

где $a = 15\bar{r}_c^{-4/5}$. Используйте эти решения в качестве тестового для отладки метода и ориентировочного выбора шага h .

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Поясните результаты вычислений.

4. При помощи разработанной программы рассчитайте профили плотности, полную массу и радиус звезды для ряда значений ρ_c (например, 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 10 , 10^2 , 10^3 , 10^4) при $Y_e = 26/56$ (это соответствует ${}^{56}F$) и $Y_e = 1/2$ (это соответствует ${}^{12}C$). Вы должны обнаружить, что масса карлика стремится к некоторому пределу M_{ch} , называемому массой Чандрасекара. Определите M_{ch} .

5. Повторите шаг 4, меняя теперь ρ_c на интервале $[10^{-3}, 10^6]$. Постройте графики зависимости массы карлика M от его радиуса R при указанных Y_e (выбирая p_i равномерно на отрезке показателей $[-3, 6]$ и полагая $\rho_c = 10^{p_i}$). Из астрономических наблюдений [2] известны массы и радиусы белых карликов Сириус Б и 40 Эйри Б в единицах солнечных (\odot) массы и радиуса. Они соответственно равны

$$(1.053 \pm 0.028, 0.0074 \pm 0.0006) \text{ и } (0.48 \pm 0.02, 0.0124 \pm 0.0005).$$

Что можно сказать о составе вещества этих звезд исходя из анализа построенных на этапе 5 графиков? Можно принять, что

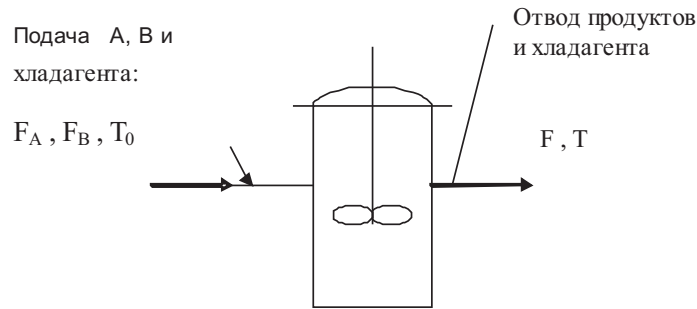
$$M_{\odot} = 1.98 \cdot 10^{33} \text{Г}, R_{\odot} = 6.95 \cdot 10^{10} \text{ см.}$$

Литература

1. Кунин С. Вычислительная физика. — М.: Мир, 1992.
2. Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron stars. — J. Wiley and Sons, Inc.: New York, 1983, chap. 3.
3. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М. : Наука, 1987.

Задача 2. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \rightarrow B \rightarrow C$

1. Постановка задачи [1]. Рассматриваемый реактор (цилиндрический сосуд объемом V , снабженный охлаждающим кожухом) схематически представлен на рисунке. Будем предполагать, что ре-



акционная смесь полностью перемешивается и что в реакторе происходит практически необратимая реакция. Объемные расходы F_A , F_B и входные концентрации компонентов A_0 и B_0 реакционной смеси, температура на входе T_0 , коэффициент теплопередачи, площадь поверхности теплообмена и теплота реакции считаются постоянными; молярные концентрации A и B , а также температура смеси и охлаждающей среды не зависят от координат и могут быть только функциями времени t . С учетом этих предположений модель проточного реактора, в котором происходят последовательные экзотермические реакции первого порядка типа $A \rightarrow B \rightarrow C$, можно описать с помощью следующих трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X' &= 1 - X - DaXa(\theta), \\ Y' &= -Y + DaXa(\theta) - DaSYa^k(\theta), \\ \theta' &= -\theta + DaBXa(\theta) - \beta(\theta - \theta_C) + DaB\alpha SYa^k(\theta), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$a(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{1 + \theta/\gamma}\right),$$

θ — безразмерная температура, X и Y — безразмерные концентрации компонентов A и B . Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$X(0) = x_0, \quad Y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Поясните результаты вычислений.

4. Решите исходную систему уравнений при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовых координатах (x, θ) , (y, θ) и графики $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях Da из отрезка $[0.2, 0.7]$ при следующих исходных данных

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.4, \quad y_0 = 0.5, \quad \theta_0 = 1.3, \quad k = 1, \quad \gamma = 20000, \\ \alpha &= S = 0.03, \quad \beta = 4, \quad \theta_C = 0, \quad B = 13. \end{aligned}$$

Найдите те значения Da при которых в системе существует предельный цикл (автоколебательный режим работы реактора).

Литература

1. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 3. Система типа хищник-жертва. Модель Базыкина

1. Постановка задачи [1,2]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограниченные ресурсы и учете фактора нелинейности размножения жертв при малых плотностях популяции. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{ax^2}{N+x} \frac{K-x}{K} - bxy, \\ y' &= -cy + dx, \end{aligned} \quad (1)$$

где a, b, c, d, N, K — неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Величина $ax^2/(N+x)(K-x)/K$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников. При малых x скорость определяется величиной ax/N и является малой (гиперболический закон). При больших плотностях (до величины K) популяция растет, при $x > K$ — уменьшается в размерах (скорость отрицательна). Таким образом, это слагаемое описывает ограниченность ресурсов: окружающая среда может обеспечивать существование только популяции плотности меньшей K .
- Слагаемое bxy описывает влияние хищников на популяцию жертв. Функция bx характеризует количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени (реакция хищника на плотность популяции жертвы). Как видим, в данной модели хищники чрезвычайно кровожадны.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная c определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое (функция dx) характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв (в данной модели хищники еще к тому же и чрезвычайно плодовиты).

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = x/K, Y = \left(\frac{b}{a}\right) y, \quad \tau = at, \quad n = \frac{N}{K}, \quad m = \frac{c}{dK}, \quad \gamma = \frac{dK}{a},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= \frac{(1-X)X^2}{n+X} - XY, \\ Y' &= \gamma(X-m)Y, \end{aligned} \quad (2)$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \quad (3)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/4, y_n + h/4k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - 2hk_2 + 2hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Поясните

результаты вычислений.

4. Найдите стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметров задачи?
5. Для ряда значений параметра m из интервала $[0.1, 0.35]$ решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных

$$n = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad X_0 = 0.3, \quad Y_0 = 0.3.$$

При каких значениях параметра m в системе появляются и исчезают автоколебания? Постройте графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 4. Задача Жуковского о полете планера

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет планера в вертикальной плоскости xOz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета;
- угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета.

При сделанных допущениях аэродинамические коэффициенты силы сопротивления воздуха C и подъемной силы крыльев планера P будут постоянными. Уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории запишутся в виде

$$\begin{aligned} m v' &= -mg \sin(\theta) - \rho S C v^2 / 2, \\ m v \theta' &= -mg \cos(\theta) + \rho S P v^2 / 2, \\ z' &= v \sin(\theta), \\ x' &= v \cos(\theta). \end{aligned}$$

Здесь m — масса планера, v — скорость движения, θ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь крыльев планера, ρ — плотность воздуха.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$\begin{aligned} V &= v \left(\frac{\rho S P}{2mg} \right)^{1/2}, \quad X = x \left(\frac{\rho S P}{2m} \right), \quad Z = z \left(\frac{\rho S P}{2m} \right), \\ \tau &= t \left(\frac{\rho g S P}{2m} \right)^{1/2}, \quad \sigma = \frac{C}{P}, \end{aligned}$$

преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned} V' &= -\sin(\theta) - \sigma V^2, \\ \theta' &= (V^2 - \cos(\theta)) / V, \\ Z' &= V \sin(\theta), \\ X' &= V \cos(\theta), \end{aligned} \tag{1}$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0, \quad X(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad V(0) = V_0. \quad (2)$$

Из вида уравнений (1) следует, что динамика полета планера характеризуется одним положительным параметром σ .

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2)/4. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 10.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

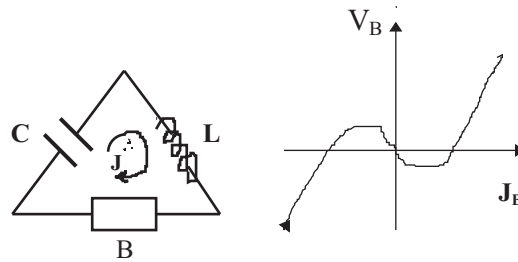
4. Решите систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий (2) и нескольких значений параметра σ покажите, что если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершит сначала несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет приближаться к траектории прямолинейного полета. Постройте графики наиболее характерных траекторий полета в координатах (X, Z) и графики функций $X(t), Z(t), \theta(t), V(t)$ на отрезке интегрирования.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 5. Релаксационные колебания: осциллятор Ван-Дер-Поля

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим модификацию последовательной LCR цепи, показанную на рисунке. Предположим, что «черный ящик» B является элементом цепи (или объединением нескольких элементов цепи) с вольт-амперной характеристикой, изображенной на рисунке справа. Такой черный ящик называется нели-



нейным резистором с кубической вольт-амперной характеристикой: $V_B = f(J_B) = J_B(J_B^2/3 - 1)$.

Пусть V_L , V_C и V_B — разности потенциалов на элементах цепи в направлении тока J . Динамические уравнения цепи имеют вид

$$\begin{aligned} L \frac{dJ}{dt} &= V_C - f(J), \\ C \frac{dV_C}{dt} &= -J. \end{aligned}$$

Здесь был использован закон Кирхгофа для напряжений и было исключено V_L . Сделаем замену $t/L \rightarrow t$, $y_1 = J$, $y_2 = V_C$, $L/C = \eta$, и получим искомую систему уравнений:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - f(y_1), \quad \frac{dy_2}{dt} = -\eta y_1. \quad (1)$$

Она дополняется начальными условиями

$$y_1(0) = j_0, \quad y_2(0) = V_0. \quad (2)$$

Уравнения (1) зависят от единственного параметра η .

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + t^2 + 6t + 1, \\ y_2' &= y_1 - 3t^2 + 3t + 1, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 3]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 3t^2 - t - 1 + \cos(t) + \sin(t), \quad y_2 = t^2 + 2 - \cos(t) + \sin(t).$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найдите стационарные решения (особые точки) уравнения (1). Как они зависят от параметра η ?

5. Решите систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (y_1, y_2) и графики $y_1(t)$, $y_2(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях η из отрезка $[0.001, 0.2]$ для следующих начальных условий

$$j_0 = 2, \quad V_0 = 2.$$

Какие метаморфозы претерпевают фазовые траектории при изменении параметра η ? При каком его значении появляются (исчезают) автоколебания (предельный цикл)?

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 6. Ограниченная задача трех тел

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим два тела с массами m и $M = 1 - m$ (например, Луна и Земля), участвующие в совместном круговом движении в плоскости xOy и расположенные в точках с координатами $(1, 0)$ и $(0, 0)$ соответственно. Пусть далее вблизи этих тел в той же плоскости движется третье тело пренебрежимо малой массы и $x(t), y(t)$ — его координаты в момент времени t . Траектория движения этого тела описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - M \frac{x+m}{R_1} - m \frac{x-M}{R_2}, \\ y'' &= y - 2x' - M \frac{y}{R_1} - m \frac{y}{R_2}, \\ R_1 &= \left((x+m)^2 + y^2 \right)^{3/2}, \quad R_2 = \left((x-M)^2 + y^2 \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0.994, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = -2.031732629557337. \quad (2)$$

При начальных условиях (2) и $m = 0.012277471$ орбита будет периодической с периодом обращения равным $T = 11.124340337$ (такие орбиты называют «орбитами Аренсторфа»).

Введением дополнительных неизвестных $v_1 = x', v_2 = y'$ система (1) сводится к системе из четырех уравнений первого порядка.

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/3), \\ k_3 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/6 + hk_2/6), \\ k_4 &= f(t_n + h/2, y_n + h/8k_1 + 3/8hk_3), \\ k_5 &= f(t_n + h, y_n + h/2k_1 - 3/2hk_3 + 2hk_4), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_4 + k_5)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned}y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1),\end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^5 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

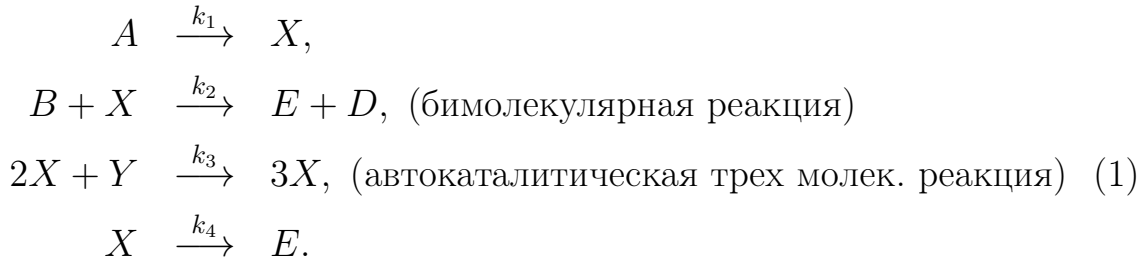
4. Решите систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Рассчитайте орбиту Аренсторфа. Учтите, что решения задачи бесконечно дифференцируемы всюду за исключением двух точек $(-m, 0)$, $(M, 0)$. Поэтому в окрестности начала и конца отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h , чем в другие моменты времени. Постройте график орбиты в координатах (x, y) , а также график скорости движения в координатах (x', y') .

Литература

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 7. Химические реакции: брюсселятор

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим модель Лефевра и Николиса (1971), так называемый «брюсселятор»: предположим, что шесть веществ, A, B, D, E, X, Y , участвуют в следующих реакциях:



Если обозначить через $A(t), B(t), \dots$, концентрации веществ A, B, \dots как функции времени t , то реакции (1), согласно закону действующих масс, описываются следующими уравнениями в предположении, что B добавляется к смеси с постоянной скоростью α :

$$\begin{aligned} A' &= -k_1 A, \\ B' &= -k_2 B X + \alpha, \\ D' &= k_2 B X, \\ E' &= k_4 X, \\ X' &= k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X, \\ Y' &= k_2 B X - k_3 X^2 Y. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь упростим эту систему: исключим из рассмотрения уравнения для D и E , так как они не влияют на остальные; предположим также, что A поддерживается постоянным ($A = 1$) и возьмем все скорости реакций k_i равными единице. Далее, введем обозначения $y_1 = X$, $y_2 = Y$, $y_3 = B$ и в результате получим систему:

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 + y_1^2 y_2 - (y_3 + 1) y_1, \\ y_2' &= y_1 y_3 - y_1^2 y_2, \\ y_3' &= -y_1 y_3 + \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

которая зависит лишь от одного параметра α . Уравнения (3) дополняются начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1 + \alpha, \quad y_3(0) = 1 + \alpha. \quad (4)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n - h/3k_1 + hk_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1^2(1 - 4t^2y_1),$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 1/(1 + t^2), \quad y_2 = -2t/(1 + t^2)^2.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решите систему уравнений (3), (4) при помощи разработанной программы. Покажите, что стационарное решение (особая точка) уравнения (3) единственно и имеет вид $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = \alpha$ с производной

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & -1 \\ -\alpha & -1 & 1 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы равен $\lambda^3 + (3 - \alpha)\lambda^2 + (3 - 2\alpha)\lambda + 1 = 0$ и удовлетворяет условию устойчивости (т. е. действительные части корней многочлена строго меньше нуля) тогда и только тогда, когда $\alpha < (9 - \sqrt{17})/4 = 1.21922$. Поэтому если α больше этого значения, появляется предельный цикл, который существует

вплоть до значений α , приблизительно равного 1.5. Если α продолжает расти, то предельный цикл «взрывается» и $y_1 \rightarrow 0$, $y_2, y_3 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (y_1, y_2, y_3) в проекциях на плоскости (y_1, y_2) , (y_2, y_3) , (y_1, y_3) при разных значениях α .

Замечание. Раусс (1877): многочлен $z^3 + pz^2 + qz + r$ устойчив, если $r > 0$ и $pq > r$.

Литература

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 8. Система типа хищник-жертва. Модель Мак-Артура

1. Постановка задачи [1,2]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограниченные ресурсы и при учете фактора насыщения хищника. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= a(1 - x/K)x - \frac{bxy}{1 + Ax}, \\ y' &= -cy + \frac{d}{1 + Ax}xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, c, d, A, K — неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Слагаемое $a(1 - x/K)x$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников. При малых x скорость определяется величиной a и, таким образом, a характеризует норму рождаемости при малой плотности популяции. При большей плотности (до величины K) популяция растет, при $x > K$ — уменьшается в размерах (скорость отрицательна). Таким образом, это слагаемое описывает ограниченность ресурсов: окружающая среда может обеспечивать существование только популяции плотности меньшей K .
- Слагаемое $bxy/(1 + Ax)$ описывает влияние хищников на популяцию жертв. Функция $bxy/(1 + Ax)$ характеризует количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени (реакция хищника на плотность популяции жертвы). Здесь учтено, что при большой плотности жертв хищник убивает лишь b/A жертв в единицу времени; т. е., перестает убивать, когда насыщается.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная c определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв (функция $dx/(1 + Ax)$). При

большой плотности жертв скорость прироста хищников определяется величиной d/A и, таким образом, d/A характеризует норму рождаемости при благоприятных для хищников условиях.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = \left(\frac{d}{c}\right) x, \quad Y = \left(\frac{b}{a}\right) y, \quad \tau = at, \quad \alpha = \frac{Ac}{d}, \quad \varepsilon = \frac{c}{Kd}, \quad \gamma = \frac{c}{a},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= (1 - \varepsilon X) X - \frac{XY}{1 + \alpha X}, \\ Y' &= \gamma \left(\frac{X}{1 + \alpha X} - 1 \right) Y, \end{aligned} \quad (2)$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \quad (3)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_3)/4. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
4. Найдите стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметров задачи?
5. Решите систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для значений параметра α из интервала $[0.1, 0.9]$ рассчитайте динамику популяции при следующих исходных данных

$$\varepsilon = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad X_0 = 3, \quad Y_0 = 1.$$

Определите те значения параметра α при которых в системе появляются и исчезают устойчивые автоколебания (предельный цикл). Постройте графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 9. Задача о стабилизации экраноплана

Экраноплан — летательный аппарат, использующий эффект существенного увеличения подъемной силы при движении вблизи экрана (поверхности суши или воды). При этом возникает опасность возникновения сильных колебаний по высоте полета. Таким образом, необходимо выбрать конструктивные параметры, обеспечивающие устойчивость аппарата. Уравнения движения экраноплана в вертикальной плоскости при определенных допущениях могут быть записаны в виде [1]:

$$\begin{aligned} V' &= g(n_x - \sin \theta), \\ \theta' &= \frac{g}{V}(n_y - \cos \theta), \\ \vartheta'' &= \frac{M_z}{I_z}, \\ H' &= V \sin \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, V — модуль скорости полета, θ — угол наклона траектории, ϑ — угол между продольной осью экраноплана и экраном (угол тангажа), H — отклонение высоты полета от заданной, n_x — продольная перегрузка, n_y — вертикальная перегрузка, M_z — продольный момент внешних сил, I_z — продольный момент инерции аппарата.

Для n_x , n_y , M_z принимают следующие зависимости:

$$\begin{aligned} n_x &= -a_V \frac{\rho S V^2}{2P}, \\ n_y &= (a_\alpha \alpha - a_H H) \frac{\rho V^2 S}{2P}, \\ M_z &= a_m l \alpha \frac{\rho V^2 S}{2}, \end{aligned}$$

где ρ — плотность воздуха, S — площадь крыла, P — вес аппарата, a_V — коэффициент лобового сопротивления, $\alpha = \vartheta - \theta$ — угол атаки, a_α , a_H , a_m — коэффициенты, характеризующие взаимодействие аппарата с потоком воздуха, l — плечо горизонтального оперения.

Введением новой неизвестной $V_\vartheta = \vartheta'$, система (1) сводится к системе из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_3)/4. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от шага h . Что следует из полученных графиков?

4. Решая систему уравнений движения экраноплана при помощи разработанной программы, рассчитайте зависимость высоты полета от времени на интервале $t \in (0, 20]$. Результаты расчетов оформить в виде графиков $H = H(t)$. Параметры аппарата и другие исходные данные (система единиц измерения — СИ):

$$P = 5000, \quad S = 20, \quad I_z = 125000, \quad a_m = -1, \quad l = 2,$$

$$g = 9.81, \quad \rho = 1.25, \quad a_\alpha = 5, \quad a_H = 2.05, \quad a_V = 0.005.$$

Начальные условия:

$$V(0) = 50, \quad \theta(0) = 0.1, \quad \vartheta(0) = 0.2, \quad \vartheta'(0) = 0, \quad H(0) = 0.$$

Обратите внимание на то, что $H(t)$ быстро меняется в начальные моменты времени. Поэтому в окрестности начала отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h , чем в другие моменты времени.

5. Исследуйте влияние конструктивных параметров и начальных условий полета на характер устойчивости аппарата, изменяя l — плечо горизонтального оперения — в пределах $[2, 10]$, начальную скорость в интервале $[50, 100]$.

Литература

1. Иродов Р.Д. Критерии продольной устойчивости экраноплана // Ученые записки ЦАГИ, т. 1, N 4. С. 63-72.
2. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 10. Задача о форме лежащей капли

1. Постановка задачи [1]. Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой поверхностным давлением) используется условие термодинамического равновесия сред, известное как уравнение Лапласа

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности. Используем это условие для определения формы капли несжимаемой жидкости объема V_0 , лежащей на плоскости и находящейся в поле тяжести, предполагая что вторая среда есть атмосфера, давление которой в окрестности капли постоянно. Введем цилиндрические координаты (r, z) с нача-

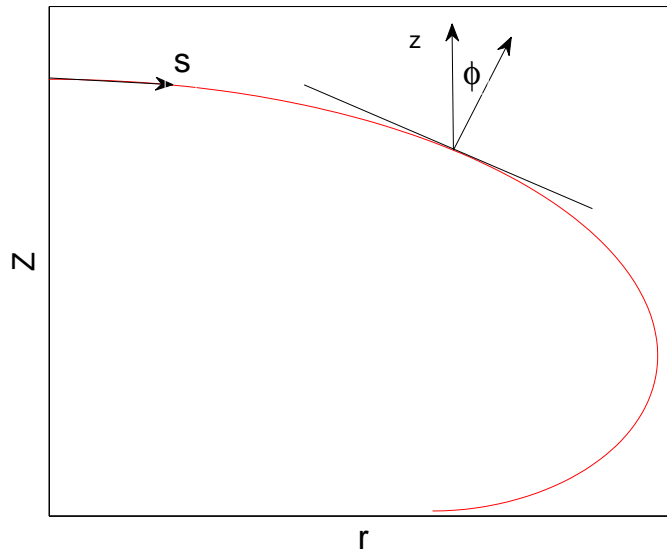


Рис. 1. Параметризация поверхности лежащей капли.

лом в вершине капли Тогда $p_2 = \text{const}$, $p_1 = \text{const} - \rho g z$, (ось Oz направлена вверх). Таким образом, условие равновесия приобретает вид:

$$-Z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \quad Z = z - z_0, \quad z_0 = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Предположим также, что капля образует с плоскостью угол ϕ_0 . Учитывая цилиндрическую симметрию капли, ее форму будем искать в виде кривой вращения вокруг оси Oz , параметрический вид которой $(r(s), Z(s), \phi(s))$, где s — длина дуги, через $\phi(s)$ обозначен угол между нормалью к кривой и осью Oz . Если учесть, что в этом случае

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{d\phi}{ds},$$

тогда из (1) получим

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{\sin(\phi)}{r} - \frac{Z}{\alpha^2}. \quad (2)$$

Добавив уравнения

$$\frac{dr}{ds} = \cos(\phi), \quad \frac{dZ}{ds} = -\sin(\phi), \quad (3)$$

для определения формы капли получим систему из трех уравнений (2), (3), которые дополним начальными условиями

$$r(0) = 0, \quad Z(0) = -z_0, \quad \phi(0) = \phi_0. \quad (4)$$

Из вида уравнений (2), (3) следует, что форма поверхности жидкости определяется постоянной α , называемой капиллярной постоянной. Она имеет размерность длины. Для воды $\alpha = 0.39$ см. (при 20°C). Величина z_0 определяется из условия, что капля имеет заданный объем V_0 .

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h, y_n + hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + k_2)/2. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_1/(2 + 2t) - 2ty_2, \quad y_2' = y_2/(2 + 2t) + 2ty_1,$$

на отрезке $[0, 2]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решите систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для нескольких значений z_0 и ϕ_0 рассчитайте форму капли. Приведите их графики в координатах (r, Z) и графики функций $r(t)$, $Z(t)$, $\phi(t)$ на отрезке интегрирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. 1. Обратите внимание на особенность при $s = 0$. При малых s имеем $r \approx s$, $\phi \approx ks$, $Z \approx -z_0$; из уравнения (2) получим $k = z_0/(2\alpha^2)$. Поэтому $\sin(\phi)/r \rightarrow k$ при $s \rightarrow 0$.

2. Интегрирование, очевидно, ведется до тех пор, пока функция $\phi(s)$ не станет равной $\pi - \phi_0$.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 11. Математическая модель роста опухоли

Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного. Эта реакция состоит в том, что производятся клетки — лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли. Модель оперирует следующими переменными (имеется в виду плотность названной популяции клеток):

- L — свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- C — опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- C_S — опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- C_N — опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- C_F — опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;

Ясно, что $C = C_F - C_N + C_S$. Предполагается, что опухоль всегда имеет форму шара, так что $C_S = K_1 C^{2/3}$, где K_1 — постоянная, и что взаимодействие опухолевых клеток с лимфоцитами происходит только на поверхности опухоли. Будем считать, что между количеством свободных и связанных лимфоцитами клеток опухоли выполняется соотношение $C_S - C_N = K_2 C_N L$ (правдоподобно ли это предположение?). Из приведенных соотношений следует, что

$$C_F = C - K_1 K_2 L C^{2/3} / (1 + K_2 L), \quad C_N = K_1 C^{2/3} / (1 + K_2 L),$$

т. е. переменные L и C можно взять за основные переменные модели, которая сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} L' &= (-\lambda_1 + \alpha_1 C_N (1 - L/L_M)) L, \\ C' &= \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N L. \end{aligned}$$

Здесь λ_1 характеризует уровень естественной смертности лимфоцитов, следующее слагаемое — их стимуляцию: когда L мало, стимуляция свободных лимфоцитов возрастает линейно с ростом C_N и что существует максимальный размер популяции L_M , при котором стимуляция обращается в нуль. Первое слагаемое во втором уравнении

описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения C_N и C_F , можно переписать их в виде

$$\begin{aligned} x' &= (-\lambda_1 + \beta_1 y^{2/3}(1 - x/c)/(1 + x))x, \\ y' &= \lambda_2 y - \beta_2 x y^{2/3}/(1 + x), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = K_2 L$, $c = K_2 L_M$, $y = K_1 C$, а λ_1 , λ_2 , β_1 , β_2 — положительные параметры. Так как x и y — размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c , поскольку L ограничено сверху величиной L_M . Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 3/4h, y_n + 3/4hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)/9. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Для значений параметра $\beta_2 = 3; 3.48; 5$ при помощи разработанной процедуры рассчитайте динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$. Постройте графики наиболее характерных решений в координатах (x, y) и дайте их интерпретацию. Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1, c = 3, t \in [0, 20]$.

Литература

1. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 12. Система типа хищник-жертва. Модель Холлинга – Тернера

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограниченные ресурсы и учете фактора насыщения хищника. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= r(1 - x/K)x - \frac{wxy}{D + x}, \\ y' &= s(1 - J\frac{y}{x})y, \end{aligned} \tag{1}$$

где r, s, w, K, D, J — неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Слагаемое $r(1 - x/K)x$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников. При малых x скорость определяется величиной r и, таким образом, r характеризует норму рождаемости при малой плотности популяции. При большей плотности (до величины K) популяция растет, при $x > K$ — уменьшается в размерах (скорость отрицательна). Таким образом, это слагаемое описывает ограниченность ресурсов: окружающая среда может обеспечивать существование только популяции плотности меньшей K .
- Слагаемое $wxy/(D + x)$ описывает влияние хищников на популяцию жертв. Функция $wx/(D + x)$ характеризует количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени (реакция хищника на плотность популяции жертвы). Здесь учтено, что при большой плотности жертв хищник убивает лишь w жертв в единицу времени; т. е., перестает убивать, когда насыщается.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. При большой плотности жертв и достаточно малой плотности хищников (величина Jy/x — мала) скорость прироста хищников определяется величиной s и, таким образом, s характеризует

норму рождаемости при благоприятных для хищников условиях. Величина J определяется количеством жертв, необходимых для поддержания жизни одного хищника. Поскольку популяция из x жертв может поддерживать не более чем x/J хищников, то при $y > x/J$ численность хищников должна уменьшиться. Модель, таким образом, ограничивает численность хищников критической величиной x/J .

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = x/K, \quad Y = \left(\frac{J}{K}\right)y, \quad \tau = st, \quad \alpha = \frac{w}{Js}, \quad \beta = \frac{D}{K}, \quad \gamma = \frac{r}{s},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= \gamma(1 - X)X - \frac{\alpha XY}{\beta + X}, \\ Y' &= \left(1 - \frac{Y}{X}\right)Y, \end{aligned} \tag{2}$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \tag{3}$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 3/4h, y_n + 3/4hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)/9. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найдите стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметров задачи?

5. Решите систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий (3) в окрестности состояния равновесия и значений параметра α из интервала $[1, 30]$ рассчитайте динамику популяции при следующих исходных данных

$$\beta = 0.13, \quad \gamma = 5, \quad X_0 = 0.5, \quad Y_0 = 0.5.$$

Определите те значения параметра α при которых в системе появляются и исчезают устойчивые автоколебания (предельный цикл). Постройте графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 13. Динамика химического реактора

Рассмотрим модель химического реактора, которая представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания [1]. В такой системе происходит непрерывный тепло — и массообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что рассматриваемый химический реактор — это емкость (цилиндрический сосуд с кожухом), в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией c_0 и температурой T_B .¹⁾ Пусть в результате химической реакции $A \rightarrow B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q , а смесь продукта и реагента выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ . Тепло, образующееся во время реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Последнее характеризуется температурой стенки T_{st} и коэффициентом теплообмена ω . Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы, а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора).

В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} c' &= -ce^{-1/T} + \lambda(c_0 - c), \\ T' &= ce^{-1/T} + \beta(T_0 - T), \end{aligned}$$

где c — концентрация, T — температура реагента, а параметры T_0 , β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$T_0 = \frac{\lambda T_B + \omega T_{st}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

Уравнения дополняются начальными условиями

$$c(0) = c_0, \quad T(0) = T_0.$$

¹⁾Все величины предполагаются заданными в безразмерном виде.

Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: c_0 , T_0 , λ , β , которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом неизвестные $c(t)$, $T(t)$ также положительны.

Время окончания химической реакции полагается равным $T = 15$.

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/3), \\ k_3 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/6 + hk_2/6), \\ k_4 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/8 + 3hk_3/8), \\ k_5 &= f(t_n + h, y_n + hk_1/2 - 3hk_3/2 + 2hk_4), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_4 + k_5)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений,

$$y_1' = y_1/(2 + 2t) - 2ty_2, \quad y_2' = y_2/(2 + 2t) + 2ty_1,$$

имеющей точное решение (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t}$$

на отрезке $[0, 2]$.

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^5 от выбранного шага h . Дать интерпретацию полученных графиков.

4. Решите исходную систему уравнений при помощи разработанной процедуры для следующих данных

$$c_0 = 120, \quad T_0 = 0.23, \quad \lambda = 0.45, \quad \beta = 45.$$

Постройте график решения в фазовом пространстве (c, T) . Вы должны обнаружить устойчивый предельный цикл в решении, что свидетельствует об автоколебательном режиме работы реактора.

5. Изменяя c_0 на интервале (100, 135) определите те значения начальной концентрации c_0 , при которых в системе происходит бифуркация: устойчивый фокус \rightarrow предельный цикл \rightarrow устойчивый фокус.

Результаты расчетов представьте в виде графиков в фазовой плоскости (T, c) , а также характерные расчеты в виде графиков зависимости T и c от t .

Литература

1. Вольтер В.В., Сальников И.Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. — М.: Химия, 1972.
2. Розенброк Х., Стори С. Вычислительные методы для инженеров химиков. — М.: Мир, 1968.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М. : Наука, 1987.

Задача 14. Задача о полете ракеты — 1

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет ракеты, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости ракеты;
- дальность полета ракеты не превышает 100 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория ракеты лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned} x'' &= (T - C\rho S v^2/2) \cos(\theta)/m - m'x'/m, \\ y'' &= (T - C\rho S v^2/2) \sin(\theta)/m - m'y'/m - g, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $m = m(t)$ — масса ракеты, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения ракеты, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления ракеты, $T = T(t)$ — сила тяги двигателя ракеты.

Система (1) дополняется начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2)$$

Введением новых неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ уравнения (1) сводятся к четырем уравнениям первого порядка.

Задание

1. Проверьте правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на ракету сил.
2. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6. \end{aligned}$$

3. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y_1' = e^{2t}y_2, \quad y_2' = -e^{-2t}y_1,$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}.$$

4. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

5. Решите систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Рассчитайте траектории полета ракеты при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m(0) &= 30 \text{ кг}, \quad C = 0.2, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.25 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 50 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 \in [30^\circ, 80^\circ]$. Начальная масса топлива равна 15 кг. Двигатель работает в течение первых четырех сек. до полного выгорания топлива, $T = 5$, топливо выгорает с постоянной скоростью. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Постройте графики траекторий полета в координатах (x, y) и график $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 15. Задача о форме висящей капли

1. Постановка задачи [1]. Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой поверхностным давлением) используется условие термодинамического равновесия сред, известное как уравнение Лапласа

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности. Используем это условие для определения формы капли несжимаемой жидкости объема V_0 , висящей на плоскости и находящейся в поле тяжести, предполагая что вторая среда есть атмосфера, давление которой в окрестности капли постоянно. Введем цилиндрические координаты (r, z) с началом в вершине капли. Тогда $p_2 = \text{const}$, $p_1 = \text{const} - \rho g z$, (ось Oz направлена вниз). Таким образом, условие равновесия приобретает вид:

$$-Z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \quad Z = z - z_0, \quad z_0 = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Предположим также, что капля образует с плоскостью угол $\phi_0 = 0$. Учитывая цилиндрическую симметрию капли, ее форму будем искать в виде кривой вращения вокруг оси Oz , параметрический вид которой $(r(s), Z(s), \phi(s))$, где s — длина дуги, через $\phi(s)$ обозначен угол между нормалью к кривой и осью Oz . Если учесть, что в этом случае

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{d\phi}{ds},$$

то из (1) получим

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{\sin(\phi)}{r} - \frac{Z}{\alpha^2}. \quad (2)$$

Добавив уравнения

$$\frac{dr}{ds} = \cos(\phi), \quad \frac{dZ}{ds} = \sin(\phi), \quad (3)$$

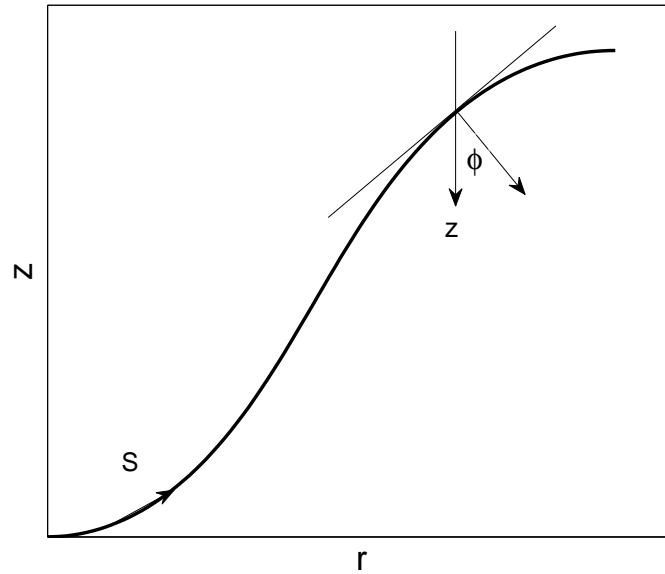


Рис. 2. Параметризация поверхности висящей капли.

для определения формы капли получим систему из трех уравнений (2), (3), которые дополним начальными условиями

$$r(0) = 0, \quad Z(0) = -z_0, \quad \phi(0) = 0. \quad (4)$$

Из вида уравнений (2),(3) следует, что форма поверхности жидкости определяется постоянной α , называемой капиллярной постоянной. Она имеет размерность длины. Для воды $\alpha = 0.39$ см. (при 20°C). Величина z_0 определяется из условия, что капля имеет заданный объем V_0 .

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned}y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1),\end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решите систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для нескольких значений z_0 рассчитайте форму капель. Приведите их графики в координатах (r, Z) и графики функций $r(t)$, $Z(t)$, $\phi(t)$ на отрезке интегрирования

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. 1. Обратите внимание на особенность при $s = 0$. При малых s имеем $r \approx s$, $\phi \approx ks$, $Z \approx -z_0$; из уравнения (2) получим $k = z_0/(2\alpha^2)$. Поэтому $\sin(\phi)/r \rightarrow k$ при $s \rightarrow 0$.

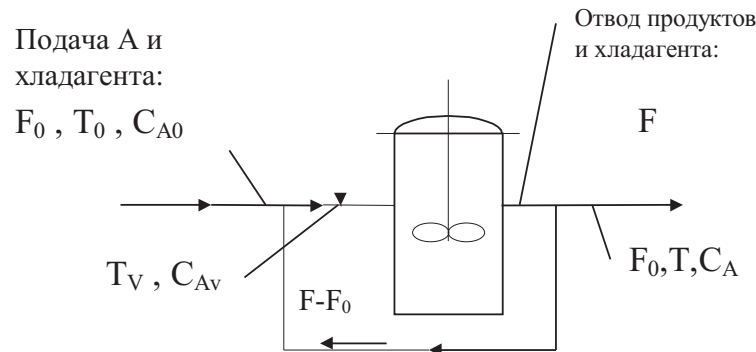
2. Интегрирование, очевидно, ведется до тех пор, пока $\phi(s)$ не станет равной нулю.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 16. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \longrightarrow$ продукты с рециклом

1. Постановка задачи [1]. Рассматриваемый реактор (цилиндрический сосуд объемом V , снабженный охлаждающим кожухом) схематически представлен на рисунке. Будем предполагать, что ре-



акционная смесь полностью перемешивается и что в реакторе происходит практически необратимая реакция. Объемный расход F_0 , входная концентрация C_{A0} , температура на входе T_0 , коэффициент теплопередачи U , площадь поверхности теплообмена S , теплоемкость на единицу объема C_p и теплота реакции H_r считаются постоянными; молярная концентрация C_A , температура смеси и охлаждающей среды T не зависят от координат и могут быть только функциями времени t . С учетом этих предположений уравнения баланса массы и энтальпии можно представить в виде

$$\begin{aligned} VC'_A &= F(C_{AV} - C_A) - r(C_A, T)V, \\ VC_P T' &= FC_P(T_V - T) + r(C_A, T)(-H_r)V - US(T - T_c), \end{aligned} \quad (1)$$

где $T_V = \Lambda T_0 + (1 - \Lambda)T$, $C_{AV} = \Lambda C_{A0} + (1 - \Lambda)C_A$, $\Lambda = F_0/F$. При этом реактор без рецикла соответствует случаю $\Lambda = 1$. Рассмотрим реакцию первого порядка, для которой $r = kC_A = k_\infty C_A \exp(-E/RT)$.

2. Безразмерная форма уравнений. Определим безразмерные величины:

$$x = \frac{C_{A0} - C_A}{C_{A0}}, \quad \theta = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0), \quad Da = k(T_0)V/F, \quad \tau = \frac{tF}{V},$$

$$\gamma = E/RT_0, \quad \theta_C = \frac{E}{RT_0^2} (T_C - T_0), \quad \beta = \frac{US}{FC_P}, \quad B = \frac{-H_r C_{A0}}{C_P T_0} \frac{E}{RT_0}.$$

Тогда уравнения (1) в новых переменных переписутся в виде

$$x' = -\Lambda x + Da (1 - x) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \theta/\gamma}\right),$$

$$\theta' = -\Lambda \theta + Da B (1 - x) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \theta/\gamma}\right) - \beta (\theta - \theta_C). \quad (2)$$

Уравнения (2) дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (3)$$

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + h/4, y_n + h/4k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_1 - 2hk_2 + 2hk_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 4k_3 + k_4)/6.$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y_1' = -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t},$$

$$y_2' = \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t},$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решите систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (x, θ) и графики $x(t), \theta(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях Da из отрезка $[0.05, 0.11]$ при следующих исходных данных

$$x_0 = 0.6, \quad \theta_0 = 0.25, \quad \gamma = 10000, \quad \beta = 0.8, \quad \Lambda = 0.5, \quad \theta_C = 0, \quad B = 10.$$

Дайте их интерпретацию. Найдите те значения Da при которых появляется и исчезает предельный цикл, свидетельствующий об автоколебательном режиме работы реактора.

Литература

1. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 17. Задача о полете ракеты — 2

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет ракеты, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости ракеты;
- дальность полета ракеты не превышает 100 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория ракеты лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned} x'' &= (T - C\rho S v^2/2) \cos(\theta)/m - m'x'/m, \\ y'' &= (T - C\rho S v^2/2) \sin(\theta)/m - m'y'/m - g, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $m = m(t)$ — масса ракеты, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения ракеты, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления ракеты, $T = T(t)$ — сила тяги двигателя ракеты.

Система (1) дополняется начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2)$$

2. Преобразование уравнений. Для численного решения удобно преобразовать два уравнения второго порядка (1) к системе четырех уравнений первого порядка. Дифференцируя соотношения

$$x' = v \cos(\theta), \quad y' = v \sin(\theta), \quad (3)$$

получим

$$x'' = v' \cos(\theta) - v \sin(\theta)\theta', \quad y'' = v' \sin(\theta) + v \cos(\theta)\theta'.$$

Подставляя теперь эти производные в уравнения (1) и разрешая полученные соотношения относительно v' и θ' получим

$$\begin{aligned} v' &= (T - C\rho S v^2/2)/m - m'v/m - g \sin(\theta), \\ \theta' &= -g \cos(\theta)/v. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3), (4), вместе с начальными условиями (2), полностью описывают траекторию полета ракеты.

Задание

1. Проверьте правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на ракету сил.
2. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2)/4. \end{aligned}$$

3. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 10.$$

4. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
5. Решите систему уравнений (3), (4) при помощи разработанной программы. Рассчитайте траектории полета ракеты при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m(0) &= 50 \text{ кг.}, \quad C = 0.25, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.35 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 60 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 = [10^\circ, 80^\circ]$. Начальная масса топлива равна 15 кг. Двигатель работает в течение первых трех сек. до

полного выгорания топлива, $T = 8$, топливо выгорает с постоянной скоростью. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Постройте графики траекторий полета в координатах (x, y) , графики $v(t)$, $\theta(t)$, $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 18. Оптимизация химической реакции

Уравнения, описывающие поведение концентрации химических веществ в смеси, где происходит химическая реакция, имеют вид

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y), \quad i = 1, 2 \dots n, \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

где $f_i(y)$ — однородные многочлены от y_1, \dots, y_n . Стационарные решения системы уравнений определяют равновесные концентрации компонентов смеси. Коэффициенты многочленов $f_i(y)$ связаны с константами скоростей химических реакций и могут в некоторой естественной системе единиц иметь огромные значения. Если в уравнении (1) y_1, \dots, y_{n-1} — концентрации, а y_n — температура смеси, то функции $f_i(y)$ — многочлены только от y_1, \dots, y_{n-1} , коэффициенты которых — функции от y_n , которые могут изменяться на много порядков.

Постановка задачи. Рассматривается химическая реакция, протекающая в смеси трех веществ и описываемая системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -(k_1(T) + k_2(T) + k_3(T))y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= k_1(T)y_1 - k_4(T)y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} &= k_4(T)y_2 - k_5(T)y_3, \end{aligned}$$

где y_1 — концентрация исходного вещества (сырья), y_2 — концентрация промежуточного вещества, y_3 — концентрация окончательного продукта, $T = T(t)$ — температура, $k_i = k_i(T)$, $i = 1, 2 \dots 5$, — функции, определяемые кинетикой данной реакции, имеют следующий вид (согласно закону Аррениуса):

$$k_i(T) = C_i \exp \left(\frac{E_i}{R} \left(\frac{1}{658} - \frac{1}{T} \right) \right).$$

Параметры, определяющие функции k_i заданы:

$$C_1 = 1.02, \quad C_2 = 0.93, \quad C_3 = 0.386, \quad C_4 = 3.28, \quad C_5 = 0.084,$$

$$E_1 = 16000, E_2 = 14000, E_3 = 15000, E_4 = 10000, E_5 = 15000,$$

$$R = 1.9865.$$

Заданы начальные условия

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0.$$

Время окончания химической реакции полагается равным $T = 1$.
Температура меняется во времени по закону

$$T(t) = \begin{cases} 823 & 0 \leq t \leq t_0, \\ 673 & t_0 \leq t \leq t_1, \\ 580 & t_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$.

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/3), \\ k_3 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/6 + hk_2/6), \\ k_4 &= f(t_n + h/2, y_n + h/8k_1 + 3/8hk_3), \\ k_5 &= f(t_n + h, y_n + h/2k_1 - 3/2hk_3 + 2hk_4), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_4 + k_5)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^5 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
4. Решите исходную систему уравнений при $t_0 = 0.14$, $t_1 = 0.5$ при помощи разработанной процедуры. Результаты расчетов представьте в виде графиков $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ на отрезке $[0, T]$.
5. Полагая $t_1 = 0.5$ и изменяя t_0 на интервале $(0.05, 0.5)$ максимизировать выход продукта при $T = 1$.

Литература

1. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
2. Розенброк Х., Стори С. Вычислительные методы для инженеров химиков. — М.: Мир, 1968.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М. : Наука, 1987.

Задача 19. Оптимизация вертикального подъема ракеты

Уравнения вертикального подъема ракеты могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} m' &= -q(t), \\ z' &= v, \\ v' &= -g + \frac{1}{m}(\alpha q(t) - C\rho v^2). \end{aligned}$$

Здесь t — время, m — масса ракеты, q — расход топлива, z — вертикальная координата (высота), v — скорость ракеты, g — ускорение силы тяготения, α — постоянная, характеризующая зависимость силы тяги от расхода топлива, $C\rho v^2$ — лобовое сопротивление, $C = \text{const}$ характеризует взаимодействие ракеты с обтекающим потоком, $\rho = \exp(-\gamma z^2)$ — плотность воздуха, $\gamma = \text{const}$ характеризует убывание плотности атмосферы с увеличением высоты.

Начальные условия

$$m(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Предполагается выполненной следующая зависимость расхода топлива от времени:

$$q(t) = \begin{cases} m_T/t_s, & t \leq t_s, \\ 0, & t > t_s, \end{cases}$$

где m_T — масса топлива в начальный момент времени, t_s — время полного выгорания топлива.

Задание.

1. Проверьте правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на ракету сил.
2. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f(t_n + h, y_n + hk_1), \\y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + k_2)/2.\end{aligned}$$

3. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y'_1 = y_1/(2 + 2t) - 2ty_2, \quad y'_2 = y_2/(2 + 2t) + 2ty_1,$$

на отрезке $[0, 2]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t}.$$

4. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

5. Решая систему уравнений движения ракеты при помощи разработанной процедуры, исследуйте зависимость высоты полета от времени на интервале $(0, T)$, $T = 100$, при различном выборе шага сетки h . Результаты расчетов оформить в виде графиков $z = z(t)$.

Исходные данные [1,2]:

$$g = 0.01, \quad \alpha = 2, \quad C = 0.05, \quad \gamma = 0.01, \quad m_T = 0.8, \quad t_s = 20.$$

6. Найдите величину $t_s \in [3, 30]$ так, чтобы максимизировать высоту подъема ракеты за время $T = 100$.

Литература

1. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
2. Энеев Т.М. О применении градиентного метода в задачах оптимального управления // Космические исследования, 1966, IV, № 5, с. 651.
3. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 20. Задача о полете снаряда — 1

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет снаряда, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости снаряда;
- дальность полета снаряда не превышает 10 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория снаряда лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс снаряда в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned} x'' &= -C\rho S v^2 \cos(\theta)/2m, \\ y'' &= -C\rho S v^2 \sin(\theta)/2m - g, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m — масса снаряда, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения снаряда, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления снаряда.

Система (1) дополняется начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2)$$

2. Преобразование уравнений. Для численного решения удобно преобразовать два уравнения второго порядка (1) к системе четырех уравнений первого порядка. Дифференцируя соотношения

$$x' = v \cos(\theta), \quad y' = v \sin(\theta), \quad (3)$$

получим

$$x'' = v' \cos(\theta) - v \sin(\theta)\theta', \quad y'' = v' \sin(\theta) + v \cos(\theta)\theta'.$$

Подставляя теперь эти производные в уравнения (1) и разрешая полученные соотношения относительно v' и θ' получим

$$\begin{aligned} v' &= -C\rho S v^2/(2m) - g \sin(\theta), \\ \theta' &= -g \cos(\theta)/v. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3), (4), вместе с начальными условиями (2), полностью описывают траекторию полета снаряда.

Задание

1. Проверьте правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на снаряд сил.
2. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n - h/3k_1 + hk_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8. \end{aligned}$$

3. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = 2y_1^2(1 - 4t^2y_1),$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 1/(1 + t^2), \quad y_2 = -2t/(1 + t^2)^2.$$

4. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
5. Решите систему уравнений (3), (4) при помощи разработанной программы. Рассчитайте траектории полета снаряда при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m &= 45 \text{ кг.}, \quad C = 0.25, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.35 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 60 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 \in [20^\circ, 70^\circ]$. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Приведите характерные графики траекторий полета в координатах (x, y) , соответствующие им графики $v(t)$, $\theta(t)$, а также $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 21. Колебания связанных маятников

Колебания двух маятников, связанных пружиной, в среде, которая оказывает сопротивление, прямо пропорциональное квадрату скорости движения, могут быть описаны системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned}x_1'' &= -\omega_1^2 x_1 - \alpha(x_1 - x_2) - C_1 v_1 |v_1|, \\x_2'' &= -\omega_2^2 x_2 - \alpha(x_2 - x_1) - C_2 v_2 |v_2|,\end{aligned}$$

где x_1 — смещение от положения равновесия первого маятника, x_2 — смещение от положения равновесия второго маятника, ω_1 — частота собственных колебаний первого маятника, ω_2 — частота собственных колебаний второго маятника, α — жесткость пружины связывающей маятники, C_1 , C_2 — постоянные, характеризующие сопротивление среды для первого и второго маятников соответственно.

Введением новых неизвестных $v_1 = x_1'$, $v_2 = x_2'$ уравнения сводятся к четырём уравнениям первого порядка.

Задание.

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n - h/3k_1 + hk_2), \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3), \\y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8.\end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1^2(1 - 4t^2y_1),$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 1/(1 + t^2), \quad y_2 = -2t/(1 + t^2)^2.$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h .
4. Решая исходную систему уравнений при помощи разработанной программы, изучите колебания маятников. Результаты расчетов представьте в виде графиков (x_1, x_2) , а также $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $t \in [0, T]$. Начальные условия:

$$x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0.$$

Исходные данные:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1, \quad \alpha = 0.05, \quad C_1 = C_2 = 0, \quad T = 120.$$

5. Исследуйте влияние на характер колебательного процесса жесткости пружины и сопротивления среды, меняя α в пределах $[0.05, 100]$, C_1 в пределах $[0, 1]$. Дайте комментарий полученным решениям.

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
2. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 22. Система типа хищник-жертва. Модель Вольтерра

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Предположим, что

- жертва может найти достаточно пищи для пропитания;
- при каждой встрече с хищником последний убивает жертву;
- норма рождаемости жертв x_b , нормы естественной смертности жертв x_d и хищников c являются постоянными, $a = x_b - x_d > 0$.
- число случаев, когда хищник убивает жертву, зависит от вероятности их встречи и, следовательно, пропорционально произведению xy ; в результате встреч с жертвами число хищников увеличивается.

При сделанных допущениях динамика популяции описывается следующей моделью

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy, \\ y' &= -cy + dxy, \end{aligned} \tag{1}$$

известной как уравнения Лотки-Вольтерра (1925 г.).

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = \left(\frac{d}{a}\right)x, \quad Y = \left(\frac{b}{a}\right)y, \quad \tau = at, \quad \sigma = \frac{c}{a},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= X - XY, \\ Y' &= -\sigma Y + XY. \end{aligned} \tag{2}$$

Дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \tag{3}$$

Из вида уравнений (2) следует, что динамика популяции характеризуется только одним положительным параметром σ (равным отношению прироста жертв к естественной смертности хищников).

Задание

1. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + t^2 + 6t + 1, \\ y_2' &= y_1 - 3t^2 + 3t + 1, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 3]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 3t^2 - t - 1 + \cos(t) + \sin(t), \quad y_2 = t^2 + 2 - \cos(t) + \sin(t).$$

3. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найдите стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметра σ ?

5. Решите систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий (3) в окрестности состояния равновесия и нескольких значений параметра σ рассчитайте динамику популяции. Какие типы решений наблюдаются? Постройте графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений . — М.: Наука, 1986
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 23. Задача о движении двух небесных тел

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение двух тел под действием взаимного гравитационного притяжения. Пусть тело массой M находится в начале координатной системы xOy , радиус вектор $r = (x(t), y(t))$ определяет координаты второго тела массы m . Поскольку скорость движения $v = r' = (x', y')$, то в силу законов Ньютона

$$mv' = F, \quad F = \gamma \frac{mM}{|r|^3} r,$$

или в координатном виде

$$\begin{aligned} x'' &= -\alpha^2 \frac{x}{r^3}, \\ y'' &= -\alpha^2 \frac{y}{r^3}, \quad \alpha^2 = \gamma M, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — гравитационная постоянная. Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 1 - \varepsilon, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}. \quad (2)$$

Задание

1. Проверьте правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием сил, действующих на тело массой m .
2. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений второго порядка вида

$$y'' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Ньюстрема 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2y'_n + h^2/8k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n + hy'_n + h^2/2k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + hy'_n + h^2(k_1 + 2k_2)/6, \\ y'_{n+1} &= y'_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6. \end{aligned}$$

3. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned}y_1'' &= 0.5/(y_1 y_2^2) + 0.5e^x, \\ y_2'' &= 0.5/(y_2 y_1^2) + 0.5e^{-x},\end{aligned}$$

на отрезке $[0, 3]$ с точным решением

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}.$$

4. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Пояснить результаты расчетов.

5. Решите систему уравнений (1) при помощи разработанной программы. Рассчитайте орбиты для нескольких значений $\varepsilon \in (0, 1)$, $\alpha = \pi/4$. Постройте графики орбит в координатах (x, y) .

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задача 24. Задача о полете снаряда — 2

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет снаряда, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости снаряда;
- дальность полета снаряда не превышает 10 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория снаряда лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс снаряда в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned} x'' &= -C\rho S v^2 \cos(\theta)/2m, \\ y'' &= -C\rho S v^2 \sin(\theta)/2m - g, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m — масса снаряда, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения снаряда, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления снаряда.

Система (1) дополняется начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2)$$

Введением новых неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ уравнения (1) сводятся к четырем уравнениям первого порядка.

Задание

1. Проверьте правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на снаряд сил.
2. Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\y_{n+1} &= y_n + hk_2.\end{aligned}$$

3. Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned}y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1),\end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

4. Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h .

5. Решите систему уравнений (1) при помощи разработанной программы. Рассчитайте траектории полета снаряда при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned}m &= 15 \text{ кг.}, \quad C = 0.2, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\S &= 0.25 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 50 \text{ м/сек.}\end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 = [25^\circ, 75^\circ]$. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Постройте графики траекторий полета в координатах (x, y) , и график $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.