



УДК 517.98

## Неравенство для следа на унитарной $C^*$ -алгебре

А. М. Бикчентаев

Установлено новое неравенство для следа на унитарной  $C^*$ -алгебре. Показано, что полученное неравенство характеризует следы в классе всех положительных функционалов на унитарной  $C^*$ -алгебре. Доказан новый критерий коммутативности унитарных  $C^*$ -алгебр.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10779

**Введение.** Пусть  $\mathcal{H}$  – гильбертово пространство над полем  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  – алгебра всех линейных ограниченных операторов в  $\mathcal{H}$ . Оператор  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  называется *проектором*, если  $X = X^2 = X^*$ . *Коммутантом* множества  $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX, X \in \mathcal{X}\}.$$

$*$ -Подалгебра  $\mathcal{M}$  алгебры  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  называется *алгеброй фон Неймана*, действующей в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , если  $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ .  $C^*$ -Алгеброй называется комплексная банахова  $*$ -алгебра  $\mathcal{A}$  такая, что  $\|A^*A\| = \|A\|^2$  для всех  $A \in \mathcal{A}$ . Любую  $C^*$ -алгебру можно реализовать как  $C^*$ -подалгебру в  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  для некоторого гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  (Гельфанд–Наймарк; см. [1; теорема 3.4.1]). Для  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{A}$  через  $\mathcal{A}^{\text{sa}}$ ,  $\mathcal{A}^+$  и  $\mathcal{A}^{\text{pr}}$  будем обозначать ее подмножества эрмитовых элементов, положительных элементов и проекторов соответственно. Для унитарной  $\mathcal{A}$  пусть  $I$  – единица  $\mathcal{A}$ ,  $P^\perp = I - P$  для  $P \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ . Положительный линейный функционал  $\varphi$  на  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$  называется *состоянием*, если  $\|\varphi\| = 1$ ; *следовым*, если  $\varphi(X^*X) = \varphi(XX^*)$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ .

Положительный линейный функционал  $\varphi$  на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$  называется *нормальным*, если

$$X_i \nearrow X, \quad X_i, X \in \mathcal{M}^+, \quad \implies \quad \varphi(X) = \sup \varphi(X_i).$$

Для  $P, Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$  пишем  $P \sim Q$  (эквивалентность *Мюррея–фон Неймана*), если  $P = U^*U$  и  $Q = UU^*$  с некоторым  $U \in \mathcal{M}$ .

*Универсальным представлением*  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{A}$  называется пара

$$\{\pi, \mathfrak{H}\} = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}^{\oplus} \{\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi\},$$

где  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  – множество всех состояний на  $\mathcal{A}$ ,  $(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$  – представление Гельфанда–Наймарка–Сигала  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{A}$ , ассоциированное с  $\varphi$ . В этом случае алгебра фон