

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**  
**ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**  
*Кафедра теоретической механики*

**С. А. КУЗНЕЦОВ**

**МЕХАНИКА КОНТАКТНОГО  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

**Конспект лекций**

**Казань – 2014**

УДК 539.3  
ББК 22.2

*Принято на заседании УМК ИММ им. Н. И. Лобачевского  
Протокол № 7 от 7 мая 2020 года*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук,  
доцент кафедры теоретической механики КФУ **Д.В. Бережной**;  
доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой теоретической механики КФУ **Л.У. Султанов**

**Кузнецов С.А.**

**Механика контактного взаимодействия. Конспект лекций. Издание 2-е, исправленное и дополненное / С.А. Кузнецов. – Казань: Казан. ун-т, 2020. – 77 с.**

Для определения прочности и устойчивости элементов конструкций необходимо знать величины и области приложения нагрузок. Их определение и является сутью так называемых контактных задач – задач о взаимодействии твёрдых и (или) деформируемых тел. В учебном пособии рассмотрены некоторые математические проблемы контактных задач теории упругости и теории пластин и оболочек, приведены решения некоторых классических задач, а также оригинальные результаты, основанные на исследованиях автора.

Учебное пособие адресовано студентам и магистрантам, обучающимся по специальностям «Механика», «Механика и математическое моделирование» и «Прикладная механика», а также широкому кругу читателей, интересующихся указанными проблемами.

Во втором издании исправлены замеченные опечатки и добавлены новые результаты решения контактных задач.

© Кузнецов С.А., 2020

© Казанский университет, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ   | 4  |
| ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ   | 8  |
| § 1. Классификация задач теории упругости  | 8  |
| § 2. Дельта-функция Дирака, ее свойства и применение к решению краевых задач   | 8  |
| § 3. Фундаментальное решение дифференциального уравнения. Функция Грина краевых задач. Матрица Грина                 | 11 |
| § 4. Приведение смешанной краевой задачи к системе интегральных уравнений  | 16 |
| ГЛАВА 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  | 18 |
| § 5. Плоская контактная задача   | 18 |
| § 6. Полиномы Чебышева   | 22 |
| § 7. Решение плоской контактной задачи   | 25 |
| § 8. Общий случай решения основного интегрального уравнения плоской контактной задачи                                | 32 |
| § 9. Пространственная осесимметричная контактная задача  | 36 |
| § 10. Полиномы Лежандра  | 40 |
| § 11. Решение осесимметричной пространственной контактной задачи   | 42 |
| ГЛАВА 3. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК   | 45 |
| § 12. Постановка контактных задач теории пластин и оболочек  | 45 |
| § 13. Одномерные контактные задачи теории пластин  | 47 |
| § 14. Двумерные контактные задачи теории пластин и оболочек. Метод сведения интегрального уравнения к краевой задаче | 55 |
| § 15. Построение функции влияния для неосесимметричной деформации круглой пластины, лежащей на упругом основании     | 57 |
| § 16. Контактная задача для круглой пластины при внецентренном положении штампа                                      | 63 |
| § 17. Учёт деформаций поперечного сдвига в контактной задаче для пластины средней толщины                            | 69 |
| Приложение 1. Теорема сложения для функций Кельвина  | 74 |
| Литература   | 76 |

## ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные положения, методы решения и некоторые результаты, полученные в таком разделе механики деформируемого твердого тела как контактные задачи.

Этот курс изучается после знакомства студентов с механикой сплошной среды, с теорией пластин и оболочек, и поэтому автор полагает, что представление о том, как ставятся и решаются задачи механики деформируемого твердого тела, читатель имеет.

В отличие от других разделов механики деформируемого твёрдого тела, хорошо обеспеченных учебниками, курсами лекций и пособиями, механика контактного взаимодействия не может похвастаться разнообразием литературы именно учебного характера. Пособие моего научного руководителя Ю. П. Артюхина [1] давно уже стало библиографической редкостью. Великолепная коллективная монография [2], хотя и даёт всеобъемлющее представление о проблематике контактных взаимодействий, не предназначена для первоначального изучения такого рода задач. В полной мере учебником является «Введение в механику контактных взаимодействий» В. М. Александрова и М. И. Чебакова [3], но в нём совершенно не отражены особенности постановки и решения контактных задач для тонкостенных элементов конструкций. В какой-то мере этот пробел восполняет предлагаемое учебное пособие.

Как обычно поступает инженер, если ему надо рассчитать какую-то конструкцию, узел, деталь? Выбирает теорию, по которой будет производиться расчет (сопротивление материалов, теория упругости, пластичности, теория оболочек – линейная или нелинейная, классическая Кирхгофа-Лява или уточненная, ...), выписывает уравнения соответствующей теории, формулирует граничные условия, задает нагрузку, действующую на деталь. Вот с нагрузкой-то часто и возникают проблемы. Дело в том, что нагрузка редко бывает приложена к телу в «чистом виде». Гораздо чаще нагрузка передается от одного тела к другому в результате их соприкосновения, взаимодействия. И заранее сказать, как именно распределена нагрузка по линии или площадке контакта, не всегда возможно.

Возьмем, к примеру, простую задачу о цилиндрической оболочке, покоящейся на опорах (рис. 1).

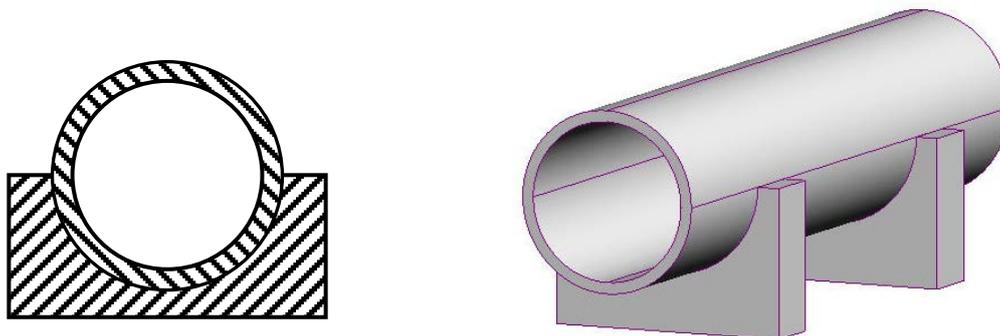


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка на опорах

Как распределена нагрузка? Какой из вариантов, показанных на рис. 2, следует принять и внести в расчетную схему, чтобы получить достоверные результаты?

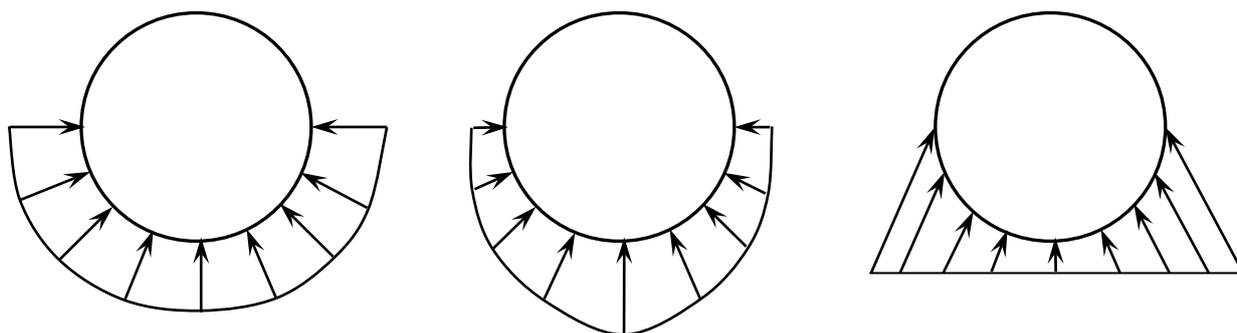


Рис. 2. Как распределена нагрузка?

Можно, конечно, вспомнить про принцип Сен-Венана и считать, что какую бы нагрузку мы ни взяли, на общем напряженно-деформированном состоянии (НДС) нашей оболочки это не отразится, лишь бы главный вектор и главный момент соответствовали истинным. Но что при этом будет в непосредственной окрестности места приложения нагрузки? Не превысят ли там напряжения предела текучести? Не произойдет ли локальной потери устойчивости? Этого мы не знаем и не узнаем до тех пор, пока не определим точно, какая же нагрузка действует на нашу оболочку.

Другой пример. Зубчатая передача (рис. 3).

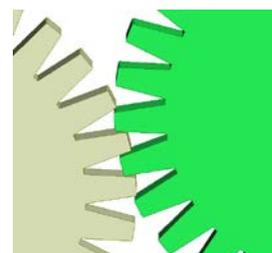


Рис. 3. Зубчатая передача

В соответствии с принципом Сен-Венана НДС вдали от точек контакта зубьев двух колес мы можем определить. А непосредственно в зоне контакта что происходит?

Теперь представьте себе стыковочный узел двух подводных модулей. Он должен обеспечивать полную герметичность. Простейший вариант такого узла – фланцевое соединение (рис. 4).

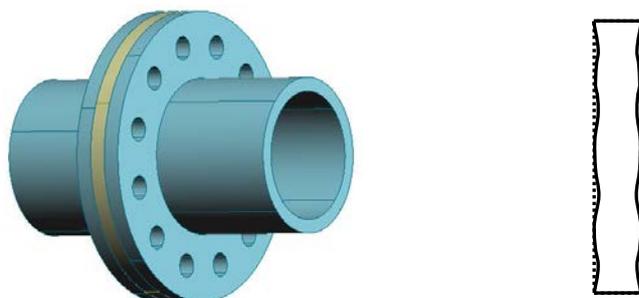


Рис. 4. Фланцевое соединение *a)* и деформированное состояние прокладки *b)*

Сколько должно быть болтов, с каким усилием и в какой последовательности их надо затягивать, чтобы обеспечить равномерное деформирование прокладки, достаточное обжатие и, как следствие, герметичность?

Вернемся еще раз к первой задаче. Схема расположения оболочки и опоры была там дана в предположении, что радиусы оболочки и ложементов одинаковые. А если нет (рис. 5)?

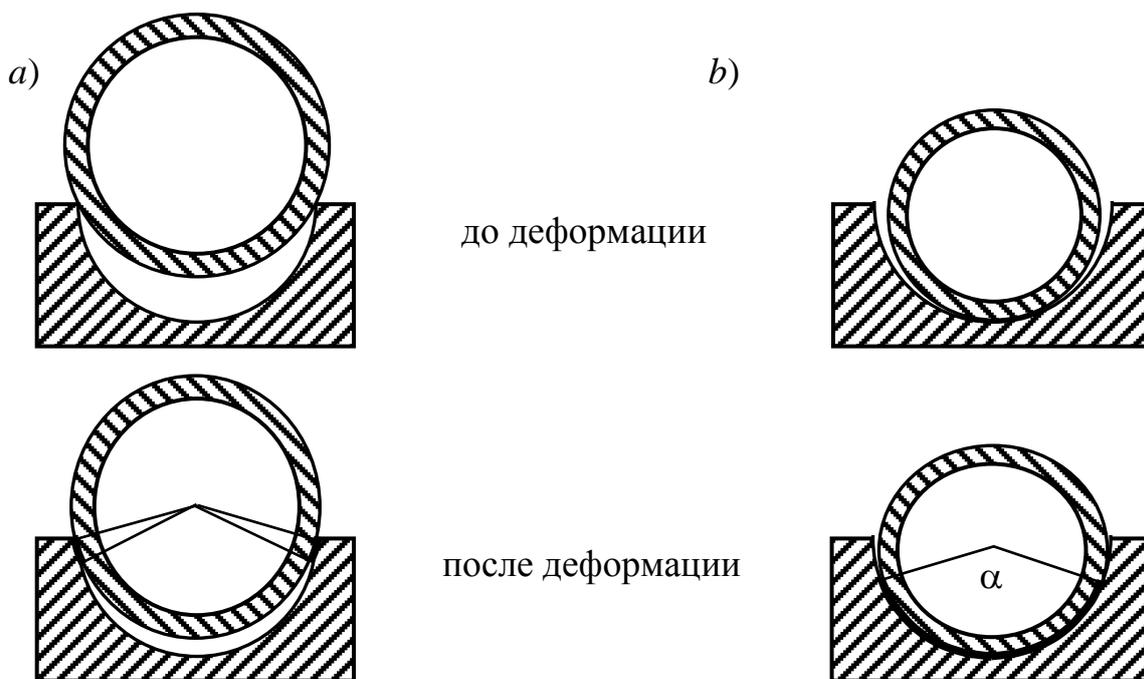


Рис. 5. Контакт оболочки и ложементов с разными начальными радиусами

Неизвестно не только распределение напряжений по области контакта, но и сама эта область.

Так вот сутью контактных задач и является определение усилий взаимодействия двух контактирующих тел – контактных реакций и области контакта или зоны контакта, если она неизвестна.

Начало развития теории контактных задач было положено в 1881 г. в работах Г. Герца. Значительный вклад в развитие теории контактных задач теории упругости внесли А. Н. Динник, Н. М. Беляев, И. Я. Штаерман, А. И. Лурье, Л. А. Галин, Н. И. Мусхелешвили, Н. А. Кильчевский, И. И. Ворович, В. М. Александров, Г. Я. Попов, В. И. Моссаковский и многие другие советские учёные. Развитие контактных задач теории пластин и оболочек обязано трудам Э. И. Григолюка, В. М. Толкачёва, Б. Л. Пелеха, Ф. Эссенберга, В. С. Гудрамовича, В. С. Саркисяна и других советских и зарубежных механиков.

## ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

### § 1. Классификация задач теории упругости

Теперь давайте вспомним классификацию задач теории упругости.

Упругое тело (рис. 1.1) занимает некоторый объём  $V$ , ограничивает его поверхность  $S$ . В теории упругости записываются уравнения равновесия, действующие в объёме  $V$  и граничные условия на поверхности  $S$ . В зависимости от вида этих условий краевые задачи теории упругости делятся на три класса:

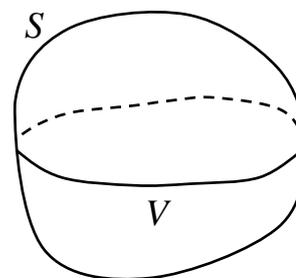


Рис. 1.1. Упругое тело

1. первая основная задача – на  $S$  заданы перемещения;
2. вторая основная задача – на  $S$  заданы напряжения или поверхностные нагрузки;
3. третья основная задача (смешанная) – на части поверхности ( $S_u$ ) заданы перемещения, на другой части ( $S_\sigma$ ) заданы напряжения.

Контактные задачи относятся именно к смешанным задачам, потому что на части поверхности, не участвующей в контактном взаимодействии, задаются напряжения (нулевые), а в области контакта необходимо ставить условия на перемещения, чтобы обеспечить совместность деформаций взаимодействующих тел.

### § 2. Дельта-функция Дирака, ее свойства и применение к решению краевых задач [4]

В различных задачах математической физики возникает необходимость описать сосредоточенные воздействия. Для этого с успехом применяется математический аппарат теории обобщенных функций, а именно  $\delta$ -функция – сингулярная обобщенная функция Дирака.

Рассмотрим (рис. 1.2) нагрузку, равномерно распределенную на отрезке  $-a \leq x \leq a$ .

Запишем ее в виде функции

$$q(x) = \begin{cases} \lambda, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

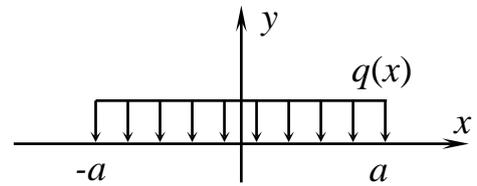


Рис. 1.2. Равномерная нагрузка

Главный вектор этой нагрузки

$$P = \int_{-a}^a q(x) dx = \int_{-a}^a \lambda dx = 2a\lambda$$

Будем сжимать интервал приложения нагрузки при условии  $P = \text{const}$ .

Что при этом будет происходить с  $\lambda$ ?  $\lambda = \frac{P}{2a}$  будет увеличиваться. То есть, вообще говоря, у нас  $q$  зависит не только от  $x$ , но и от  $\lambda$ :  $q = q(x, \lambda)$ , поскольку  $\lambda$  – переменная.

Предел функции  $q(x, \lambda)$  при стремлении  $\lambda$  к бесконечности называют  $\delta$ -функцией и обозначают символом  $\delta$ .

$$q(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(x, \lambda) = P\delta(x)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P\delta(x) dx = P$$

Поэтому можно говорить, что в точке  $x = 0$  приложена сосредоточенная нагрузка величиной  $P$ . Если сила приложена не в точке  $x = 0$ , а в точке  $x = \xi$ , то ее представляет смещенная  $\delta$ -функция:  $\delta(x - \xi)$ . Ценность такого математического представления сосредоточенного воздействия определяется "фильтрующим" свойством  $\delta$ -функции:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - \xi) dx = f(\xi), \quad a < \xi < b$$

$$f(x)\delta(x - \xi) = f(\xi)\delta(x - \xi)$$

Здесь  $f(x)$  – непрерывная функция, имеющая непрерывные производные.

С  $\delta$ -функцией связаны другие обобщенные функции.

1. Единичная функция – функция Хэвисайда

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} y \\ 1 \\ \hline \xrightarrow{x} \end{array} \quad \frac{d}{dx} H(x) = \delta(x)$$

2. Функция знака

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} y \\ 1 \\ \hline \xrightarrow{x} \\ -1 \end{array}$$

И хорошо известная даже школьникам функция  $|x|$ :

$$\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} |x| = \frac{d}{dx} \operatorname{sgn} x = \frac{d}{dx} (2H(x) - 1) = 2\delta(x)$$

При интегрировании единичной функции получаем обобщенную функцию  $x_+$ :

$$x_+ = \int H(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь производную от  $\delta$ -функции

$$\delta'(x) = \frac{\delta(x + \Delta x) - \delta(x)}{\Delta x}$$

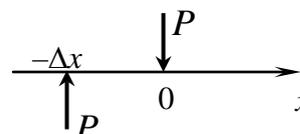
$$P\Delta x \delta'(x) = P\delta(x + \Delta x) - P\delta(x)$$

Выражение справа определяет пару сил с мо-

мен-

мом  $M = P\Delta x$

$$P\Delta x \delta'(x) = M \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$



Производная от  $\delta$ -функции описывает сосредоточенный момент, приложенный в точке  $x = -\Delta x/2$ .

Устремляем  $\Delta x$  к нулю, получаем момент, приложенный в точке  $x = 0$ :  $M\delta'(x)$ .

Обладает ли  $\delta'(x)$  фильтрующим свойством?

$$\int_a^b f(x)\delta'(x-\xi)dx = -f'(\xi), \quad a < \xi < b$$

Проверьте самостоятельно интегрированием по частям.

Дельта-функция двух переменных равна произведению двух  $\delta$ -функций одной переменной разных аргументов

$$\delta(x-\xi, y-\eta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$$

В системе криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2$  сосредоточенная сила записывается в виде

$$q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{P}{A_1 A_2} \delta(\alpha_1 - \xi, \alpha_2 - \eta)$$

где  $A_1, A_2$  – коэффициенты Ляме,  $\xi, \eta$  – координаты точки приложения силы.

### § 3. Фундаментальное решение дифференциального уравнения.

#### Функция Грина краевых задач. Матрица Грина

Рассмотрим уравнение (3.1). Как известно из курса дифференциальных уравнений общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде (3.2) суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения [5].

$$LW(x) \equiv a_0(x)\frac{d^n W(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}W(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_n W(x) = f(x), \quad a < x < b \quad (3.1)$$

$$W(x) = W_0(x) + W_q(x),$$

$$LW_0(x) = 0, \quad (3.2)$$

$$LW_q(x) = f(x)$$

Используем для получения частного решения метод вариации произвольных постоянных.

Пусть  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$  – некоторые решения однородного уравнения (2), непрерывные в  $(a, b)$  вместе со своими производными вплоть до порядка  $n-1$  включительно.

Эти решения называются линейно независимыми в  $(a, b)$ , если  $\sum_{k=1}^n \lambda_k W_k(x) = 0$ , только при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Вронскианом этой системы функций называется определитель

$$\tilde{W}(x) \equiv \begin{vmatrix} W_1(x) & W_2(x) & \dots & W_n(x) \\ W_1'(x) & W_2'(x) & \dots & W_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_1^{(n-1)}(x) & W_2^{(n-1)}(x) & \dots & W_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Любые  $n$  линейно независимых решений составляют фундаментальную систему решений, линейные комбинации которых  $\sum_{k=1}^n \alpha_k W_k(x)$  дают все частные решения уравнения (2).

Итак, если  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$  – линейно независимые решения уравнения (3.2), то общее решение уравнения (3.1) есть

$$W(x) = C_1 W_1(x) + C_2 W_2(x) + \dots + C_n W_n(x) \quad (3.4)$$

где функции  $C_k(x)$  – решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n C_k'(x) W_k^{(j)}(x) = 0, & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ \sum_{k=1}^n C_k'(x) W_k^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \quad (3.5)$$

Решив систему (3.5) относительно  $C_k'(x)$ , простым интегрированием находим

$$C_k(x) = \int C_k'(x) dx + A_k \quad (3.6)$$

$$W(x) = \sum_{k=1}^n A_k W_k(x) + \sum_{k=1}^n \int C_k(x) dx \cdot W_k(x)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{W_0(x)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{W_q(x)}$$

Рассмотрим уравнение (3.1) со специальной правой частью  $f(x) \equiv \delta(x - \xi)$

$$LW(x) = \delta(x - \xi)$$

Предположим, что фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения нам известна  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$

Система уравнений (3.5) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)W_1(x) + C_2'(x)W_2(x) + \dots + C_n'(x)W_n(x) = 0 \\ C_1'(x)W_1'(x) + C_2'(x)W_2'(x) + \dots + C_n'(x)W_n'(x) = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)W_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)W_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)W_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)W_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)W_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)W_n^{(n-1)}(x) = \frac{\delta(x - \xi)}{a_0(x)} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Ее решение

$$C_k'(x) = \frac{\delta(x - \xi) \tilde{W}_k(x)}{a_0(x) \tilde{W}(x)} = \frac{\tilde{W}_k(\xi)}{a_0(\xi) \tilde{W}(\xi)} \delta(x - \xi), \quad k = \overline{1, n}$$

Здесь и далее через  $\tilde{W}_k(x)$  обозначены определители, получающиеся из вронскиана (3.3) удалением  $k$ -го столбца и последней строки (с учётом правила знаков при вычислении определителей разложением по элементам некоторого столбца).

$$\int C_k'(x) dx = \frac{\tilde{W}_k(\xi)}{a_0(\xi) \tilde{W}(\xi)} \cdot \int \delta(x - \xi) dx = \frac{\tilde{W}_k(\xi)}{a_0(\xi) \tilde{W}(\xi)} \cdot H(x - \xi)$$

Теперь частное решение может быть записано в виде

$$W_q(x) = \frac{1}{a_0(\xi) \tilde{W}(\xi)} \sum_{k=1}^n \tilde{W}_k(\xi) \cdot W_k(x) \cdot H(x - \xi)$$

Такое частное решение называется *функцией Грина* или *фундаментальным решением* и обозначается  $G(x, \xi)$ .

Частное решение уравнения (3.1) для любой произвольной функции  $f(x)$ :

$$W_{\text{ч}}(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad a < x < b \quad (3.8)$$

Проверьте самостоятельно подстановкой (3.8) в (3.1).

$$\begin{aligned} LW_{\text{ч}}(x) &\equiv a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \\ &+ a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \dots + a_n(x) \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b \left[ a_0 \frac{d^n}{dx^n} G(x, \xi) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x, \xi) + \dots + a_n G(x, \xi) \right] \cdot f(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b LG(x, \xi) \cdot f(\xi) d\xi = \int_a^b \delta(x - \xi) \cdot f(\xi) d\xi = f(x) \end{aligned}$$

Пусть на упругое тело объема  $V$  в некоторой точке  $\bar{\xi}(\xi_i)$  действует единичная нагрузка

$$X_1 = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \quad (3.8)$$

параллельная оси  $x_1$ , а тело свободно от нагрузок и жестко закреплено в точке  $\bar{\eta}(\eta_i)$ . Допустим, что нам удастся построить поле перемещений  $G_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ , возникающее от действия нагрузки (3.8), которое является результатом решения краевой задачи (3.9). Здесь и далее  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\delta_{i1}$  – символ Кронекера.

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 G_i^{(1)} + (\lambda + \mu) G_{j,ji}^{(1)} + \delta_{i1} \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) &= 0, \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad P_i(\bar{y}, \bar{\xi}) = 0, \quad G_i^{(1)}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) &= 0 \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} [G_{i,j}^{(1)}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) - G_{j,i}^{(1)}(\bar{\eta}, \bar{\xi})] = 0.$$

Последнее равенство определяет отсутствие поворота в точке  $\bar{\eta}$ .

Найденная таким путем функция  $\bar{G}^{(1)}(G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_3^{(1)})$  называется функцией Грина. Если направить единичную силу вдоль оси  $x_2$ , то будем иметь функ-

цию Грина  $\bar{G}^{(2)}(G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, G_3^{(2)})$ . Для единичной силы, параллельной оси  $x_3$ , функция Грина  $\bar{G}^{(3)}(G_1^{(3)}, G_2^{(3)}, G_3^{(3)})$ . Составляющие этих векторов можно записать в виде *матрицы Грина*

$$\left\| \begin{array}{ccc} G_1^{(1)} & G_2^{(1)} & G_3^{(1)} \\ G_1^{(2)} & G_2^{(2)} & G_3^{(2)} \\ G_1^{(3)} & G_2^{(3)} & G_3^{(3)} \end{array} \right\| \quad \text{или} \quad \left\| G_i^{(k)} \right\|.$$

Матрица Грина симметрична. Докажем это.

По известной теореме Бетти о взаимности работ, *работа, совершенная в упругом теле первой системой причин (сил) на следствиях (перемещениях) второй системы равна работе, совершенной второй системой причин на следствиях первой системы:*

$$\int_V X_i u_i' dV + \int_S P_i u_i' dS = \int_V X_i' u_i dV + \int_S P_i' u_i dS \quad (3.10)$$

где  $X_i, P_i, u_i$  – нагрузка и перемещение первой системы;  $X_i', P_i', u_i'$  – нагрузка и перемещение второй системы.

Выберем в качестве первой системы сил единичную нагрузку, параллельную оси  $x_k$ .

$$P_i = 0, \quad X_i = \delta_{ik} \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) = \begin{cases} \delta(\bar{x} - \bar{\xi}), & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

Нагрузка (3.11) вызывает перемещения  $G_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})$ . Во второй системе возьмем единичную нагрузку, приложенную в точке  $\bar{\xi}'$  и параллельной оси  $x_j$

$$P_i' = 0, \quad X_i' = \delta_{ij} \delta(\bar{x} - \bar{\xi}'),$$

создающую в упругом теле перемещения  $G_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi}')$ . Согласно теореме (3.10)

$$\int_V \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \delta_{ik} G_i^{(j)}(\bar{x}, \bar{\xi}') dV(\bar{x}) = \int_V \delta(\bar{x} - \bar{\xi}') \delta_{ij} G_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{x}).$$

В силу фильтрующего свойства  $\delta$ - функции и свойств символа Кронекера в правой части остаются слагаемые с индексом  $i = j$ , а в левой части –  $i = k$

$$G_k^{(j)}(\bar{\xi}, \bar{\xi}') = G_j^{(k)}(\bar{\xi}', \bar{\xi}) \quad (3.12)$$

Равенство (3.12) доказывает симметричность матрицы Грина по расположению компонентов относительно главной диагонали и по ее аргументам  $\bar{x}, \bar{\xi}$ .

#### § 4. Приведение смешанной краевой задачи к системе интегральных уравнений [6]

Рассмотрим равновесие упругого тела, занимающего объем  $V$  и ограниченного поверхностью  $S$ , на которое действуют массовые силы  $\bar{X}$  в объеме  $V$ ; на части поверхности  $S_u$  заданы перемещения, а на остальной части  $S_\sigma$  – напряжения. Граничные условия имеют вид

$$P_i(\bar{r}) = \sigma_{ij}(\bar{r})n_j(\bar{r}), \quad \bar{r} \in S_\sigma,$$

$$u_i(\bar{r}) = f_i(\bar{r}), \quad \bar{r} \in S_u \quad (i, j=1, 2, 3),$$

$n_j$  – проекции внешней нормали  $\bar{n}$  к поверхности  $S$  на соответствующие оси координат.

Задание смещений на поверхности  $S_u$  равносильно наложению связей, препятствующих свободному перемещению граничных точек. Заменяем действие связи действием неизвестной реакции  $\bar{R}(R_i)$ . Пусть нам известна матрица Грина для данного упругого тела, закрепленного в некоторой точке. Пользуясь теоремой Бетти, запишем

$$\int_V X_i(\bar{x})G_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})dV(\bar{x}) + \int_{S_\sigma} P_i(\bar{y})G_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi})ds(\bar{y}) +$$

$$+ \int_{S_u} R_i(\bar{y})G_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi})ds(\bar{y}) = \int_V \delta_{ik} \delta(\bar{x} - \bar{\xi})u_i(\bar{x})dV(\bar{x}) \quad (4.1)$$

Обозначим

$$u_k^0(\bar{\xi}) = \int_V X_i(\bar{x})G_i^{(k)}(\bar{x}, \bar{\xi})dV(\bar{x}) + \int_{S_\sigma} P_i(\bar{y})G_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi})dS(\bar{y}).$$

Равенство (4.1) примет вид

$$u_k(\bar{\xi}) = u_k^0(\bar{\xi}) + \int_{S_u} R_i(\bar{y}) G_i^{(k)}(\bar{y}, \bar{\xi}) dS(\bar{y}). \quad (4.2)$$

$$\bar{x}, \bar{\xi} \in V, \quad \bar{y} \in S, \quad S_u + S_\sigma = S.$$

В выражении (4.2) неизвестными являются реакции  $R_i$  и перемещения  $u_k$ . Величины реакций не могут быть произвольными, а подчиняются условию

$$u_k(\bar{y}') = f_k(\bar{y}'), \quad \bar{x} = \bar{y}' \in S_u \quad (4.3)$$

Меняя в (4.2)  $\bar{\xi}$  на  $\bar{x}$  и пользуясь свойством симметрии функции Грина  $G_k^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{\xi}') = G_i^{(k)}(\bar{\xi}', \bar{\xi})$ , получим

$$u_k(\bar{x}) = u_k^0(\bar{x}) + \int_{S_u} R_i(\bar{y}) G_k^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}) dS(\bar{y}). \quad (4.4)$$

Достаточно теперь в (4.4) положить  $\bar{x} = \bar{y}' \in S_u$  для того, чтобы выполнить условие (4.3):

$$\int_{S_u} R_i(\bar{y}) G_k^{(i)}(\bar{y}', \bar{y}) dS(\bar{y}) = f_k(\bar{y}') - u_k^0(\bar{y}'). \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) представляют собой систему из трех интегральных уравнений, где неизвестными являются три проекции реакции  $R_i$ , являющихся функциями точек поверхности  $S_u$ . Реакции  $R_i$  по сути дела являются контактными напряжениями, возникающими в результате стеснения упругого тела  $V$  по поверхности  $S_u$ .

Таким образом, существует общий прием для решения контактных (смешанных) задач теории упругости, который приводит задачу к решению интегральных уравнений. Для выполнения этого приема необходимо одно условие – наличие функции Грина.

## ГЛАВА 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### § 5. Плоская контактная задача

Рассмотрим взаимодействие двух упругих тел в случае плоской деформации, то есть будем предполагать, что картина деформации в плоскости  $yOx$  повторяется в любом сечении  $z = const$ . Будем считать, что взаимодействие тел происходит только по нормали к поверхности тела, и области контакта являются малыми по сравнению с размерами самих тел.

Пусть форма первого тела описывается радиус-вектором  $\bar{r}_1[x(t), y_1(t)]$ , второго –  $\bar{r}_2[x(t), y_2(t)]$  или, в скалярной форме,  $y_1 = f_1(x)$  для первого тела,  $y_2 = f_2(x)$  для второго тела (рис. 2.1).

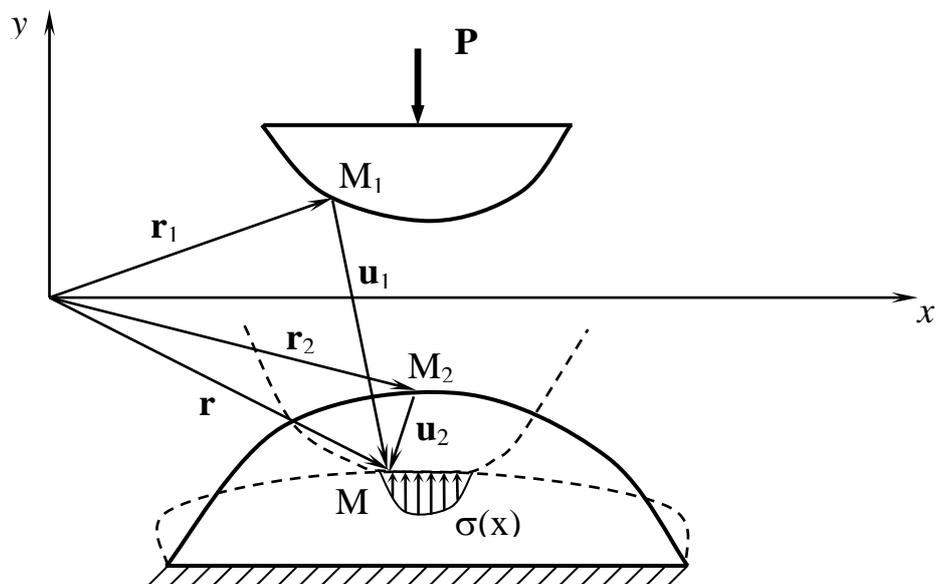


Рис. 2.1. Плоская контактная задача

В результате прижатия одного тела к другому точки упругих тел получают перемещения, вектора которых будем обозначать через  $\bar{u}_1(u_1, v_1)$ ,  $\bar{u}_2(u_2, v_2)$ . Запишем условия контакта, заключающиеся в том, что точки тел, находящиеся до деформации на некотором расстоянии между собой, после деформации совпадают

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{u}_1 = \bar{r}_2 + \bar{u}_2 \quad (5.1)$$

Допустим, что второе тело жестко закреплено в пространстве, тогда первое тело относительно второго получает как упругие перемещения, так и перемещения твердого тела. Следовательно,

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_1^{ynp} + \bar{\alpha} + [\bar{r}_1 \bar{\omega}], \quad (5.2)$$

где  $\bar{\alpha}(0, \alpha, 0)$ ,  $\bar{\omega}(0, 0, \omega)$  – вектора жесткого смещения и поворота первого тела относительно второго, в скобках представлено векторное произведение векторов  $\bar{r}_1$  и  $\bar{\omega}$ . Учитывая (5.2) и проецируя (5.1) на ось  $y$ , получим:

$$f_1(x) + v_1^{ynp} + \alpha - \omega x = v_2 + f_2(x) \quad (5.3)$$

На основании результатов предыдущего параграфа известно, что задача определения контактных напряжений может быть сведена к решению интегральных уравнений с ядром, представляющими собой функции Грина контактирующих объектов. Построение функции Грина для тел конечных размеров является трудной задачей. Поэтому часто действительную функцию Грина заменяют на другую, полученную для более простой конфигурации тела. Такая замена делается с условием, чтобы тип интегрального уравнения сохранялся, т.е. сохранялась особенность функции Грина в точке действия единичной сосредоточенной силы. Впервые такой прием был предложен Г. Герцем, который использовал известные функции Грина для упругой полуплоскости (в пространственном случае – для полупространства). Так при действии единичной нагрузки на расстоянии  $\xi$  от начала координат (рис. 2.2) вертикальные перемещения границы полуплоскости равны [7]

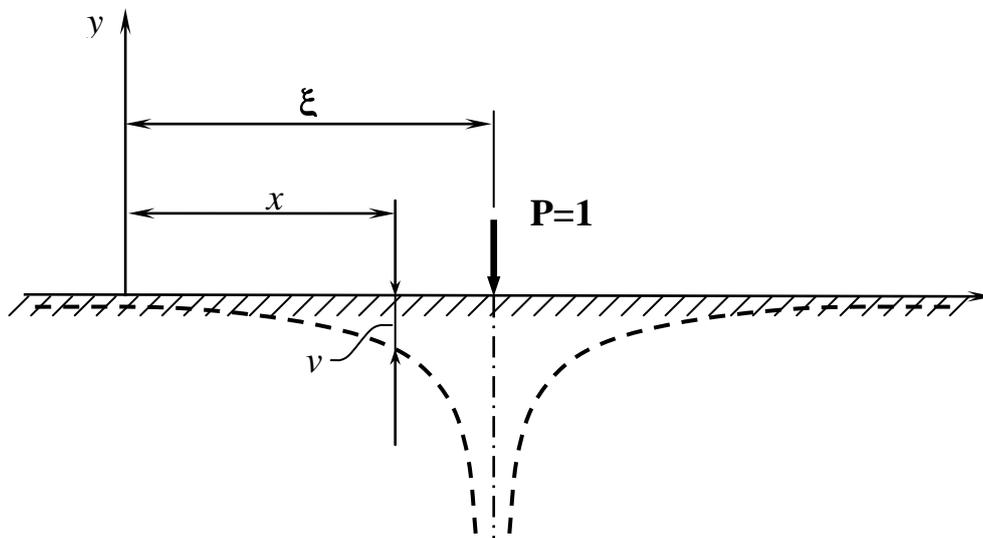


Рис. 2.2. Вертикальные перемещения  $G(x, \xi)$

$$v = G(x, \xi) = -\theta \ln \frac{1}{|x - \xi|} + const, \quad \theta = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E}$$

Пусть (рис. 2.3) на отрезке  $(-a, a)$  действует известная распределенная нагрузка  $\sigma(x)$ , тогда нетрудно вычислить вертикальное перемещение границы полуплоскости  $v(x)$ .

Определяя перемещения в результате действия нагрузки на малой элементарной площадке  $G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi$  и суммируя прогибы при передвижении единичной нагрузки в пределах отрезка, получим:

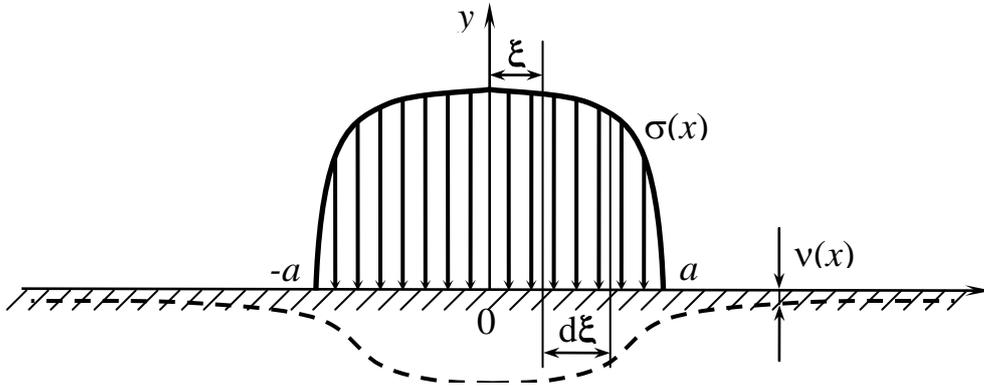


Рис. 2.3. Перемещение границы полуплоскости  $v(x)$

$$v(x) = \int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = -\theta \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi)d\xi + const.$$

Здесь интеграл является особым, так как при  $x = \xi$  подынтегральное выражение обладает особенностью. Интеграл понимается в смысле Коши–Римана

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x - \xi|} \sigma(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^a \right] \ln \frac{1}{|x - \xi|} \sigma(\xi)d\xi$$

в силу того, что элемент нагрузки, расположенный над рассматриваемой точкой, не дает вклада при определении перемещения

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \sigma(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi = \sigma(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi = -2\sigma(x)\varepsilon(\ln \varepsilon - 1) \rightarrow 0$$

Как показано на рис. 2.2, функция Грина при  $x = \xi$  (в точке действия единичной нагрузки) принимает бесконечно большие значения. Функция Грина для тела конечных размеров имеет такой же порядок возрастания прогиба в точке  $x = \xi$  и содержит слагаемое, представляющее собой непрерывную функцию. Поэтому замена, предложенная Герцем, не изменяет тип интегрального уравнения. Такая замена является удовлетворительной лишь для малых областей контакта, размеры которых намного меньше самих размеров тела. В силу локализации напряжения контакта и быстрого затухания напряжений при удалении от места приложения местных нагрузок, искривление поверхности контакта не играет роли и поэтому возможна указанная замена. Если же размеры области контакта сравнимы с размерами тела, то такой прием использовать нельзя.

Используя гипотезу Герца о применимости функции Грина для полуплоскости, получим

$$v_1^{ymp}(x) = \theta_1 \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi) d\xi$$

$$v_2(x) = -\theta_2 \int_a^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi) d\xi + const$$
(5.4)

где  $\theta_i = \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i}$ ,  $i=1, 2$ ,  $\sigma(\xi)$  – неизвестное контактное напряжение. Подстав-

ляя (5.4) в (5.3), находим [7]

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi) d\xi = f(x), \quad f(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x) - \alpha + \omega x}{\theta_1 + \theta_2}$$
(5.5)

Уравнение (5.5) – *основное уравнение плоской контактной задачи теории упругости.*

## § 6. Полиномы Чебышева

Для решения интегрального уравнения плоской контактной задачи, выведенного в предыдущем параграфе, нам понадобятся некоторые сведения из теории полиномов Чебышева [8].

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad |x| \leq 1 \quad (6.1)$$

$n$  – целое число.

Сделаем замену переменной  $x = \cos \theta$ ,  $\theta = \arccos x$  и приведем (6.1) к виду

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0$$

Очевидно, что его решение

$$y(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta \quad (6.2)$$

Введем  $T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n \arccos x)$  и  $P_n(x) = \sin n\theta = \sin(n \arccos x)$ .

Составим комплексную комбинацию

$$T_n(x) + iP_n(x) = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n \quad (6.3)$$

Сопряженное выражение имеет вид

$$T_n(x) - iP_n(x) = \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n \quad (6.4)$$

Складывая и вычитая эти два равенства, получим

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2} \left[ \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n \right] \\ P_n(x) &= \frac{1}{2} \left[ \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n - \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Подставляя различные значения  $n$ , найдем:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad P_2(x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad P_3(x) = (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} \dots$$

Функция  $T_n(x)$  – полином  $n$ -ой степени – полином Чебышева первого рода.

Очевидно, что  $P_n(x)$  – не полином, но

$$P_n(x) = \sqrt{1-x^2} u_{n-1}(x), \quad u_{-1}(x) = 0$$

где  $u_{n-1}(x)$  – полином степени  $n-1$  – полином Чебышева второго рода.

Возьмем интегралы:

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & m = n = 0 \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & m = n = 0 \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Что это означает? Функции  $T_n(x)$  и  $P_n(x)$  образуют на отрезке  $[-1,1]$  ортогональную с весом  $(1-x^2)^{-1/2}$  систему функций.

Раз функции ортогональны, то любую непрерывную функцию  $f(x)$  можно разложить по полиномам Чебышева в сходящийся ряд.

Разложим, например, функцию  $\ln \frac{d}{|x-\xi|}$   $|x| \leq 1, |\xi| \leq 1$

$$\ln \frac{d}{|x-\xi|} = T_0(x) T_0(\xi) \ln 2d + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(x) T_n(\xi)}{n} \quad (6.7)$$

Как это сделать?

Раскладываем в ряд Фурье по  $\cos \theta$ , находим коэффициенты ряда, а потом заменяем  $\cos n\theta = T_n(x)$ .

Умножим левые и правые части разложения (6.7) на  $\frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$  и проинтегрируем от  $-1$  до  $+1$ .

С учетом условий ортогональности (6.6) получим [9]:

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|x-\xi|} \frac{T_n(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} \pi \ln(2d) T_0(x), & n = 0 \\ \frac{\pi}{n} T_n(x), & n \neq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Что это означает? Полиномы Чебышева 1-го рода  $T_n(x)$  являются собственными функциями интегрального уравнения с логарифмическим ядром.

Проинтегрируем (6.8) по частям при  $n \neq 0$

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|x-\xi|} \frac{\cos(n \arccos \xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = - \left[ \frac{\sin n\theta}{n} \ln \frac{d}{|x-\xi|} \right]_{\substack{\theta=0 \\ \xi=1}}^{\substack{\theta=\pi \\ \xi=-1}} - \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi)}{\xi-x} d\xi$$

Отсюда следует, что:

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi)}{\xi-x} d\xi = -\pi T_n(x), \quad n \neq 0 \quad (6.9)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \\ P_{n+1}(x) &= 2xP_n(x) - P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.10)$$

И, кроме того,

$$P_n(x) = \frac{T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad (6.11)$$

С помощью соотношения (6.11) вычисляется интеграл

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|x-\xi|} P_n(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \ln 2d - \frac{1}{2} T_2(x), & n = 1 \\ \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} - \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}, & n \neq 1 \end{cases} \quad (6.12)$$

Производная от функции Чебышева первого рода

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} P_n(x) = nu_{n-1}(x) \quad (6.13)$$

Продифференцируем (6.8) с учетом (6.13)

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{n-1}(\xi) d\xi}{(\xi-x)\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \pi u_{n-1}(x), & n \neq 0 \end{cases}$$

Замечательное свойство полиномов Чебышева 1-го рода: *среди всех полиномов  $n$ -ой степени с единичным старшим коэффициентом полином  $T_n(x)/2^{n-1}$  меньше всего уклоняется от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ .*

## § 7. Решение плоской контактной задачи

Основное уравнение плоской контактной задачи

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi) d\xi = f(x) \quad (7.1)$$

может быть решено при известной правой части  $f(x)$ , т.е. необходимо знать форму контактирующих тел, осадку  $\alpha$  и жесткий поворот  $\omega$  одного тела относительно другого. Существует и другая постановка задачи. Часто известны внешние силы, действующие на незакрепленное тело, которые можно привести к главному вектору  $P$  и моменту  $M$ . Но тогда постоянные  $\alpha$ ,  $\omega$  будут неизвестными величинами, которые определяются из дополнительных соотношений статики

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P, \quad \int_{-a}^a \sigma(x) x dx = M \quad (7.2)$$

Если контактирующие тела имеют одинаковую форму ( $f_1(x) = f_2(x)$ ), то длина  $2a$  области контакта является величиной известной и не меняется в процессе деформаций. При  $f_1(x) \neq f_2(x)$  размеры области контакта будут зависеть от величин  $P$  и  $M$ . Для определения границ этой области необходимо поставить условия

$$\sigma(\pm a) = 0 \quad (7.3)$$

Условия (7.3) являются физическими условиями, выражающими отсутствие давления на граничном контуре области контакта в силу плавного отхода поверхностей упругих тел. В случае совпадения форм тел и неизменяемой области контакта поверхность одного из тел имеет срез, дающий на границе угловую точку. Известно, что угловые точки являются концентраторами напряжений. Причем, как показывают исследования, порядок возрастания нормальных контактных напряжений имеет корневую особенность  $(a^2 - x^2)^{-1/2}$ .

Переходя в уравнениях (7.1) – (7.3) к безмерным переменным  $x_* = x/a$ ,  $\xi_* = \xi/a$ , запишем

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|\xi_* - x_*|} \sigma(\xi_*) d\xi_* = f_*(x_*) \quad (7.4)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(x_*) dx_* = P_*, \quad \int_{-1}^1 \sigma(x_*) x_* dx_* = M_*, \quad \sigma(\pm 1) = 0 \quad (7.5)$$

где

$$d = 1/a, \quad f_* = f/a, \quad P_* = P/a, \quad M_* = M/a^2 \quad (7.6)$$

Свойства функций Чебышева (6.9), (6.10):

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|x - \xi|} \frac{T_n(\xi) d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \begin{cases} \pi \ln(2d) T_0(x), & n = 0 \\ \frac{\pi}{n} T_n(x), & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\pi T_n(x), \quad n \neq 0$$

позволяют получить решение уравнений (7.4) – (7.6).

**I.** Рассмотрим случай  $f_1(x) = f_2(x)$ , когда имеется угловая точка на границе  $x_* = \pm 1$  (рис. 2.4).

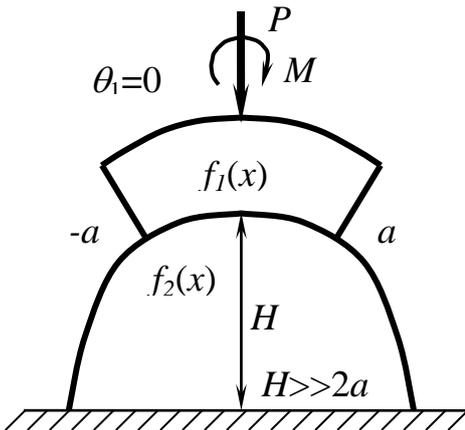


Рис. 2.4. Контакт при  $f_1(x) = f_2(x)$

Правая часть уравнения (7.4) будет равна

$$f_*(x_*) = \omega_* x_* - \alpha_*, \quad (7.7)$$

$$\omega_* = \omega/\theta, \quad \alpha_* = \alpha/(\theta a), \quad \theta = \theta_1 + \theta_2$$

Будем искать неизвестную функцию  $\sigma(\xi_*)$  в виде разложения по полиномам Чебышева первого рода, выделяя особенность на границе

$$\sigma(\xi_*) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_*^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k T_k(\xi_*) \quad (7.8)$$

Здесь  $\sigma_k$  – коэффициенты, подлежащие определению. Представляя  $f_*(x_*)$  через полиномы Чебышева  $f_*(x_*) = -\alpha_* T_0(x_*) + \omega_* T_1(x_*)$  и подставляя (7.8) в (7.4) с учетом (6.9), получим

$$\sigma_0 \pi \ln(2d) T_0(x_*) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k k^{-1} T_k(x_*) = -\alpha_* T_0(x_*) + \omega_* T_1(x_*) \quad (7.9)$$

Для того чтобы выражение (7.9) выполнялось, необходимо потребовать

$$\sigma_0 \pi \ln(2d) = -\alpha_*, \quad \pi \sigma_1 = \omega_*, \quad \sigma_k = 0, \quad k \geq 2 \quad (7.10)$$

Равенства (7.5) можно выполнить, если учесть условия ортогональности полиномов Чебышева (6.6). Получим

$$\sigma_0 \int_{-1}^1 \frac{T_0^2(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = P_*, \quad \sigma_1 \int_{-1}^1 \frac{T_1^2(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = M_*$$

Следовательно,

$$\sigma_0 = \frac{P_*}{\pi} = \frac{P}{\pi a}, \quad \sigma_1 = \frac{2M_*}{\pi} = \frac{2M}{\pi a^2},$$

$$\alpha = -\pi\sigma_0\theta a \ln(2d) = -\theta P \ln \frac{2}{a}, \quad \omega = \frac{2M\theta}{a^2}$$
(7.11)

Распределение контактных напряжений имеет [10] вид

$$\sigma(x) = \frac{P + 2Mxa^2}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$
(7.12)

Формулы (7.11) определяют жесткий угол поворота и осадку одного тела относительно другого. Следует заметить, что осадка здесь понимается условно, так как в эту постоянную входит неопределенная константа для границы полуплоскости. В формуле (7.12) положительные напряжения являются сжимающими. Правая часть области контакта более напряжена за счет разгрузки левой части моментом  $M$  (рис. 2.5).

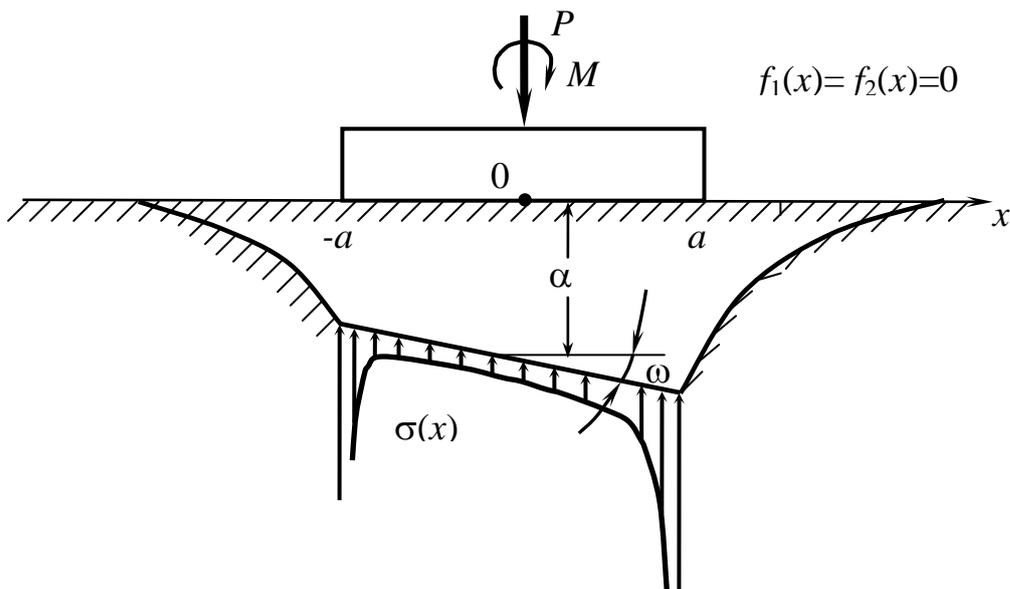


Рис. 2.5. Напряжения под плоским штампом

Можно подобрать такое значение момента, что при  $x = -a$  давление обратится в нуль и левая часть будет на грани отрыва. Приравнявая нулю  $\sigma(-a)$ , получим

$$M_{\text{пр.}} = Pa/2 \quad (7.13)$$

Если момент  $M_{\text{пр.}}$  создается силой  $P$  с эксцентриситетом  $e$ , то  $M_{\text{пр.}} = Pe$  и предельная длина эксцентриситета равна

$$e = a/2 \quad (7.14)$$

Таким образом, сила  $P$ , приложенная на четверти длины тела, вызывает в области контакта напряжения

$$\sigma(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{P}{\pi a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad (7.15)$$

При дальнейшем перемещении силы точка контакта будет смещаться вправо (рис. 2.6а, б, в).

Определим зону контакта в случае, когда момент  $M$  превзошел свою предельную величину  $M_{\text{пр.}}$ . Обозначим через  $b$  размер приподнятой части штампа,  $c$  – расстояние от правого края штампа до точки приложения силы  $P$ . Удаляя мысленно нависшую часть штампа длиной  $b$ , как не играющую никакой роли при создании давления на основание, приходем к расчетной схеме, показанной на рис. 1.6в,

на которой новая длина штампа будет равна  $2f = 2a - b$  и давление в точке  $(-f)$  равно нулю. Следовательно, эта расчетная схема приводит к задаче о вдавливании штампа силой  $P$  в упругое основание, когда сила приложена с предельным эксцентриситетом (7.14). Приравнявая величину эксцентриситета четверти длины  $2f$ , найдем размер приподнятой области штампа

$$b = 2a - 4c, \quad f = 2c \quad (7.16)$$

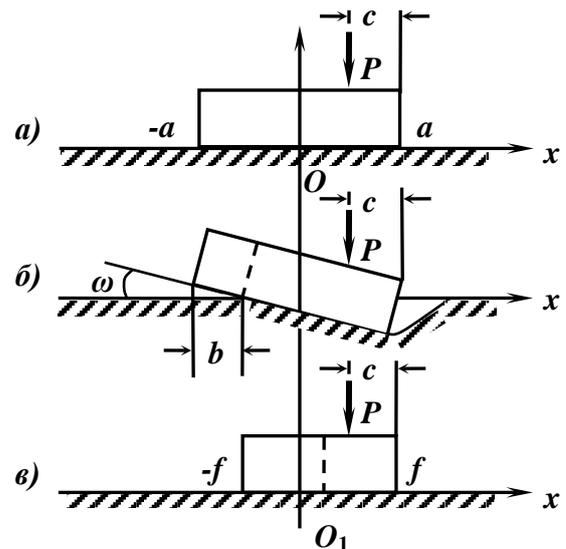


Рис. 2.6. Отрыв штампа от плоскости

Таким образом, если  $c < a/2$ , размер области контакта находится по формулам (7.16) и не зависит от величины нагружающей силы  $P$ . Продвижение точки с нулевым контактным напряжением (границы  $b$ ) при деформации происходит мгновенно, скачком. Малой осадке штампа будет отвечать малый угол поворота штампа  $\omega$ , но конечное значение  $b$ . При дальнейшем увеличении силы величина  $b$  не меняется. Контактные напряжения при  $c < a/2$  будут

$$\sigma(x) = \frac{P}{2\pi c} \sqrt{\frac{2c+x}{2c-x}}, \quad |x| \leq 2c$$

**II.** Рассмотрим (рис. 2.7) случай нагружения силой  $P$  при  $M = 0$  тел с различными формами поверхности, симметричными относительно оси  $y$ .

Будем считать область контакта малой по сравнению с характерными размерами тел и разложим функции  $f_i(x)$  в ряд Тейлора в окрестности  $x = 0$

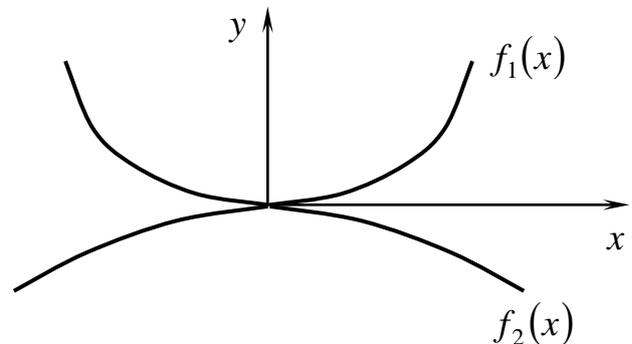


Рис. 2.7. Контакт при  $f_1(x) \neq f_2(x)$

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{x}{1!} f_i'(0) + \frac{x^2}{2!} f_i''(0) + \dots \quad (i = 1, 2) \quad (7.17)$$

Пусть тела в начальный момент касаются в точке  $x = 0$  и касательная к каждому телу направлена вдоль оси  $x$ :  $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$ . Тогда, ограничиваясь величинами второго порядка малости, представим форму тел параболоми с радиусами кривизны  $R_i$

$$f_i(x) = \pm \frac{x^2}{2R_i}, \quad \frac{1}{R_i} = f_i''(0).$$

Тогда в основном интегральном уравнении плоской контактной задачи

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi) d\xi = f(x)$$

в правой части будем иметь:

$$f(x) = -\frac{\alpha}{\theta} - A x^2, \quad A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\theta}.$$

Как и ранее, перейдем к безразмерным координатам. Получим

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|\xi_* - x_*|} \sigma(\xi_*) d\xi_* = -\alpha_* - A_* x_*^2, \quad A_* = Aa, \quad (7.18)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(x_*) dx_* = P_*, \quad \sigma(\pm 1) = 0. \quad (7.19)$$

Решение уравнения (7.18) будем искать в виде разложения по функциям Чебышева  $P_n(\xi)$ , так как их значение на границе  $\xi = \pm 1$  обращается в нуль

$$\sigma(\xi_*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n P_n(\xi_*). \quad (7.20)$$

Прежде чем подставлять (7.20) в уравнение (7.18) продифференцируем (7.18) по  $x_*$  с учетом

$$\frac{d}{dx_*} \ln \frac{d}{|\xi_* - x_*|} = -\frac{1}{|\xi_* - x_*|} \text{sign}(\xi_* - x_*) (-1) = \frac{1}{\xi_* - x_*}$$

и разложим правую часть по полиномам Чебышева первого рода  $T_n(x)$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi_*) d\xi_*}{\xi_* - x_*} = -2A_* T_1(x_*). \quad (7.21)$$

Подставляя (7.20) в (7.21) и используя свойство функций Чебышева (6.9)

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{\xi - x} = -\pi T_n(x), \quad n \neq 0, \quad \text{получим } -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n T_n(x) = -2A_* T_1(x).$$

Отсюда  $\sigma_1 = -\frac{2A_*}{\pi}$ ,  $\sigma_n = 0$  при  $n \neq 1$  и  $\sigma(x_*) = \sigma_1 P_1(x_*) = \sigma_1 \sqrt{1 - x_*^2}$ .

Подставляем в первое уравнение из (7.19)

$$\sigma_1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x_*^2} dx_* = P_* \Rightarrow \sigma_1 \frac{\pi}{2} = P_* \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2P_*}{\pi} = \frac{2P}{\pi a}.$$

Итак, распределение контактных напряжений имеет вид

$$\sigma(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (7.22)$$

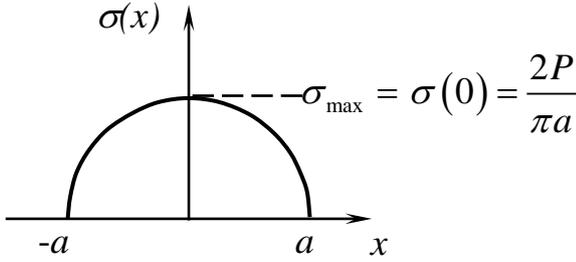


Рис 2.8. Контактные напряжения

Если предположить, что нагрузка распределена равномерно по области контакта, то  $\sigma_{cp} = P/(2a)$ , а  $\sigma_{max} = 4\sigma_{cp} / \pi \approx 1,27\sigma_{cp}$ , что на 27% больше среднего напряжения (рис. 2.8).

Для определения жесткого смещения  $\alpha$  и границы  $a$  вернемся к уравнению (7.18).

Решение (7.22) обращает его в тождество:

$$\sigma_1 \int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|\xi_* - x_*|} P_1(\xi_*) d\xi_* = -\left(\alpha_* + \frac{A_*}{2}\right) T_0(x_*) - \frac{A_*}{2} T_2(x_*).$$

Правая часть преобразована с учетом

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}[T_2(x) + T_0(x)].$$

Интеграл нам известен:

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{d}{|\xi - x|} P_1(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} \left[ \ln 2d T_0(x) - \frac{1}{2} T_2(x) \right].$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{2} \sigma_1 \left[ \ln 2d T_0(x) - \frac{1}{2} T_2(x_*) \right] = -\left(\alpha_* + \frac{A_*}{2}\right) T_0(x_*) - \frac{A_*}{2} T_2(x_*).$$

Отсюда

$$\frac{\pi \sigma_1}{2} \ln 2d = -\left(\alpha_* + \frac{A_*}{2}\right), \quad \frac{\pi \sigma_1}{4} = \frac{A_*}{2}.$$

Переходя к размерным величинам, получаем величину области контакта  $2a$  и осадку  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{P}{a} = Aa, \quad \frac{P}{a} \ln 2d = -\frac{\alpha}{\theta a} - \frac{Aa}{2} &\rightarrow \frac{\alpha}{\theta a} = -\frac{P}{a} \ln 2d - \frac{P}{2a} \\ \boxed{a = \sqrt{\frac{P}{A}} = \sqrt{\frac{2\theta P}{(R_1^{-1} + R_2^{-1})}}} &\quad \boxed{\alpha = -P\theta \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{a} \right)} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Из формул (7.22) видно, что размер области контакта тем больше, чем меньше сумма кривизн взаимодействующих тел. В частности, отсюда можно получить, как частный случай, решение задачи о контакте цилиндра радиуса  $R = R_1$  с плоскостью ( $1/R_2 = 0$ ):  $a = \sqrt{2PR\theta}$ .

## § 8. Общий случай решения основного интегрального уравнения плоской контактной задачи

Из теории интегральных уравнений известно, что уравнение

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sigma(\xi) d\xi = f(x)$$

с произвольной правой частью имеет общим решением

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ P - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi}{\xi - x} \right], \quad (8.1)$$

где

$$P = \left( \pi \ln \frac{2}{a} \right)^{-1} \int_{-a}^a \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \quad (8.2)$$

Относительно функции  $f(x)$  предполагается, что она непрерывная, а производная  $f'(x)$  может иметь точки разрыва внутри интервала  $[-a, a]$ . Решение (8.1), (8.2) годится для случая взаимодействия тел с неизменяемой областью контакта и предполагает наличие угловых точек при  $x = \pm a$ . Поэтому решение содержит множитель  $(a^2 - x^2)^{-1/2}$ , показывающий порядок возрастания напряжений в окрестности угловых точек. Равенство (8.2) служит связью между осадкой и величиной главного вектора контактных напряжений.

Потребуем, чтобы решение (8.1) обратилось в нуль на границе контакта  $x = -a$ , как это имеет место в случае предельного эксцентриситета приложения силы  $P$ . Для выполнения этого условия необходимо потребовать

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi}{\xi + a}. \quad (8.3)$$

Подставим (8.3) в (8.1), получим

$$\sigma(x) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2} (a+x)}{(\xi+a)(\xi-x)} d\xi. \quad (8.4)$$

Пользуясь тождеством  $-\frac{a+x}{(\xi+a)(\xi-x)} = \frac{1}{a^2 - \xi^2} (a+x - \frac{a^2 - x^2}{\xi-x})$ , преобразуем

(8.4) к виду

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} - \frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi-x)}. \quad (8.5)$$

Таким образом, соотношения (8.2), (8.3), (8.5) дают общее решение контактной задачи в случае достижения главным моментом предельной величины. Равенство (8.3), являющееся связью между приложенной нагрузкой  $P$  и предельным углом поворота  $\omega$ , может быть преобразовано с использованием тождества  $\sqrt{a^2 - \xi^2} / (\xi + a) = (a - \xi) / \sqrt{a^2 - \xi^2}$  к виду

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)(a-\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}. \quad (8.6)$$

Если в процессе деформации зона контакта зависит от величины  $P$ , то решение (8.1) должно обращаться в нуль на концах интервала контакта. Для того, чтобы  $\sigma(a) = 0$ , должно быть

$$\int_{-a}^a \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = 0. \quad (8.7)$$

Контактные напряжения в этом случае следует находить по формуле:

$$\sigma(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi-x)}, \quad (8.8)$$

а условие (8.6) с учетом (8.7) примет вид

$$P = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}. \quad (8.9)$$

Следовательно, общее решение контактной задачи взаимодействия двух тел, не имеющих угловых точек, дается формулами (8.2), (8.8), (8.9) при ограничении (8.7) на функцию  $f(x)$ . Соотношение (8.9) дает связь между прижимающей силой  $P$  и границей  $a$ . Условие (8.7) автоматически выполняется, если  $f(x)$  является четной (симметричной относительно оси  $y$ ) функцией. В противном случае условие (8.7) позволяет определить дополнительный параметр смещения участка контакта по отношению к началу координат (несимметричность контакта).

Приведенные в этом параграфе общие формулы показывают, что если функция  $f(x)$  является полиномом, т. е. представима полиномами Чебышева (§ 6), то записанные интегралы берутся точно. О чем свидетельствуют решения предыдущего параграфа.

Так, например, пусть  $f'(x)$  является полиномом степени  $n$ , который выразим через следующий ряд:

$$f'(\xi) = \sum_{k=1}^n c_k u_{k-1}(\xi/a).$$

Произведение  $f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}$  есть  $f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2} = \sum_{k=1}^n c_k P_k(\xi/a)$ , а интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi)d\xi}{\xi - x} = -\pi T_n(x).$$

Поэтому интеграл в формуле (8.1) равен

$$\int_{-a}^a \frac{f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi = -\pi \sum_{k=1}^n c_k T_k(x/a).$$

Интеграл вида (8.8) берется по формуле (6.15)

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi)d\xi}{(\xi - x)\sqrt{1 - \xi^2}} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \pi u_{n-1}(x), & n \neq 0 \end{cases}$$

а интегралы вида (8.2) – по формулам (8.5). В том случае, когда функция  $f(x)$  не является рациональной функцией  $x$ , указанные выше интегралы могут быть вычислены численно с помощью [7, 8] квадратурных формул

$$\int_{-a}^a \frac{w(t)u(t)dt}{t-x_k} = \sum_{m=1}^M \frac{a_m u(t_m)}{t_m - x_k}, \quad (8.10)$$

где  $u(t)$  – регулярная функция,  $w(t)$  – нерегулярная весовая функция типа  $(1-x^2)^{\pm 1/2}$ . Точки разбиения интервала интегрирования  $t = t_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) являются нулями полинома  $Q_M(t)$  степени  $M$  системы ортогональных полиномов с весом  $w(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $x = x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, R$ ) – нули функции

$$\Omega(x) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{w(t)Q_M(t)dt}{t-x}. \quad (8.11)$$

Коэффициенты квадратурной формулы определяются соотношением

$$a_m = -2 \frac{\Omega_M(t_m)}{Q_M'(t_m)}. \quad (8.12)$$

Квадратурная формула с весовой функцией  $w(t)$  для несингулярных интегралов является формулой Гаусса

$$\int_{-1}^1 w(t)u(t)dt = \sum_{m=1}^M a_m u(t_m) \quad (8.13)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{u(t)dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x_k)}.$$

Взяв в качестве полиномов  $Q_M(t)$  полином Чебышева  $T_M(t)$ , согласно (8.11), (8.12) с учетом (6.15), получим

$$I_1 = \sum_{m=1}^M \frac{u(t_m)}{M(t_m - x_k)}, \quad \Omega_M(x) = -\frac{\pi}{2} u_{M-1}(x), \quad a_m = \frac{\pi}{M}.$$

Здесь  $x_k$  – нули функции  $u_{M-1}(x)$ :  $x_k = \cos(\pi k / M)$  ( $k=1, 2, \dots, M-1$ ), а  $t_m$  – нули функции  $T_M(t)$ :  $t_m = \cos((m-0.5)\pi / (M))$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ).

В случае, когда весовая функция имеет вид  $\sqrt{1-x^2}$ , интеграл

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}u(t)dt}{t-x_k}$$

будет вычисляться с помощью полиномов Чебышева  $u_M(t)$ , корни которых равны  $t_m = \cos(\pi m / (M + 1))$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ).

Многочлен  $\Omega_M(x)$ , согласно (8.11) и (6.10):

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\pi T_n(x), \quad n \neq 0,$$

будет

$$\Omega_M(x) = \frac{\pi}{2} T_{M+1}(x),$$

а его корни

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2(M+1)} \pi, \quad (k=1, 2, \dots, M+1).$$

Тогда из (8.12) следует

$$a_m = \frac{\pi}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1}.$$

Поэтому

$$I_2 = \sum_{m=1}^M \frac{u(t_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \cdot \frac{1}{t_m - x_k}.$$

## § 9. Пространственная осесимметричная контактная задача

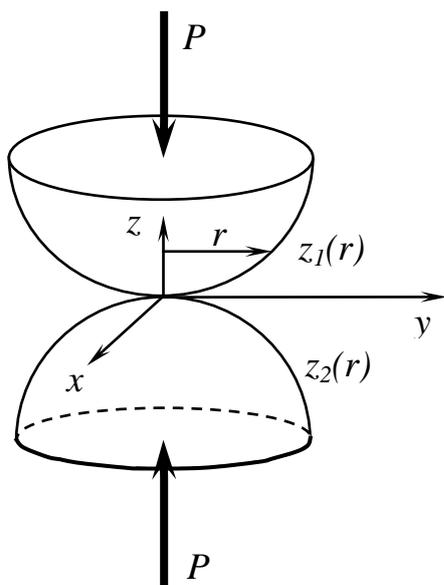


Рис. 2.9. Осесимметричная контактная задача

Рассмотрим взаимодействие двух упругих тел, имеющих ось симметрии, при деформации их вдоль этой оси (рис. 2.9).

Условиями контакта являются соотношения

$$\bar{u}_1 + \bar{r}_1 = \bar{u}_2 + \bar{r}_2, \quad r \in S \quad (9.1)$$

Проектируя это векторное равенство на ось  $z$ , получим

$$w_1 + z_1(r) = w_2 + z_2(r) + \alpha \quad (9.2)$$

где  $\alpha$  – взаимное жесткое сближение тел,

$w_i$  – перемещение точек тел вдоль оси  $z$ .

По-прежнему будем предполагать, что область контакта  $S$  мала по сравнению с размерами тел, и можно пользоваться гипотезой Герца и определять смещения  $w_i(r)$  с помощью функции Грина для полупространства [7]:

$$w_i(r) = \pm \frac{\theta_i}{R(r, r')}, \quad \theta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}, \quad (i = 1, 2), \quad R(r, r') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (9.3)$$

Здесь  $r'$  – точка приложения единичной нагрузки,  $r$  – произвольная точка области.

В случае осесимметричного контакта область контакта будет круговой, а граница под действием напряжений  $\sigma(r')$  получит вид

$$w_i(r) = \pm \theta_i \iint_S \frac{\sigma(r')}{R(r, r')} dS, \quad i = 1, 2. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.4) в (9.2), получим интегральное уравнение для решения осесимметричной пространственной контактной задачи

$$\theta \iint_S \frac{\sigma(r') dS}{R(r, r')} = f(r), \quad r \in S, \quad (9.5)$$

где  $f(r) = \alpha - z_1(r) + z_2(r)$ ,  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ .

Если постоянная  $\alpha$  неизвестна, то необходимо задать величину силы  $P$ , прижимающей тела друг к другу

$$P = \iint_S \sigma(r') dS. \quad (9.6)$$

При переменной области контакта радиус круга  $a$  определяется из условия

$$\sigma(a) = 0 \quad (9.7)$$

Введем безразмерные переменные

$$r_* = r/a, \quad r'_* = r'/a, \quad R_* = R/a, \quad P_* = P/a, \\ \alpha_* = \alpha/a, \quad f(r_*) = \alpha_* - (z_1(ar_*) - z_2(ar_*))/a$$

Тогда (9.5) и (9.6) приводятся к виду

$$\theta \iint_S \frac{\sigma(r'_*) dS}{R_*(r_*, r'_*)} = f(r_*), \quad (9.8)$$

$$\iint_S \sigma(r_*) dS = P_*, \quad 0 \leq r_* \leq 1. \quad (9.9)$$

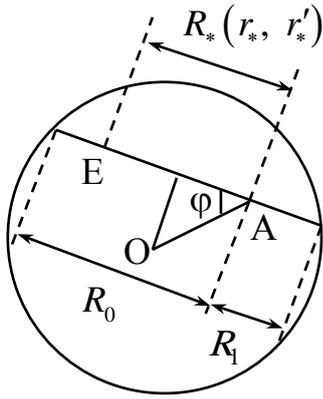


Рис. 2.10. Область интегрирования

Следуя И. Я. Штаерману [7], займемся преобразованием интеграла из уравнения (9.8).

Интегрирование здесь ведется по площади круга единичного радиуса (рис. 1.7). В точке E круга на расстоянии  $r'_*$  от центра, расположена единичная нагрузка, а в точке A, отстоящей от O на расстояние  $r_*$ , отыскивается смещение тела.  $AE = R_*(r_*, r'_*)$ . Угол  $OAE$  обозначим через  $\varphi$ .

Перейдем в интеграле к полярной системе координат  $R, \varphi$ . Так как  $dS = R_* dR_* d\varphi$ , то интеграл примет вид

$$J = \iint_S \frac{\sigma(r'_*) dS}{R_*(r_*, r'_*)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0(\varphi)} \sigma(r'_*) dR_* d\varphi. \quad (9.10)$$

Введем новую переменную  $\psi$ , связанную с  $R_*$  соотношением

$$\cos \psi = \frac{R_* - r_* \cos \varphi}{\sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Числитель этого выражения принимает значения

$$R_0 - r_* \cos \varphi = \sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi}, \quad R_1 - r_* \cos \varphi = -\sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi}.$$

Следовательно,  $-1 \leq \cos \psi \leq 1$  и  $0 \leq \psi \leq \pi$ .

При  $R_* = 0$  введем обозначение  $\cos \psi(\varphi) = -\frac{r_* \cos \varphi}{\sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi}}$ .

Найдем дифференциал  $dR_* = -\sin \psi \cdot \sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi} d\psi$ .

Получим

$$J = -\int_0^{2\pi} \int_{\psi(\varphi)}^0 \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi(\varphi)} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi,$$

$$\Phi(\varphi, \psi) = \sigma(r'_*) \sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi} \cdot \sin \psi.$$

Разобьем пределы интегрирования по  $\varphi$  пополам:

$$J = \int_0^{\pi} \int_0^{\psi(\varphi)} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\psi(\varphi)} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi = J_1 + J_2.$$

Заменяем во втором интеграле  $\psi$  на  $\pi - \psi$ , получим

$$J_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi-\psi(\varphi)}^{\pi} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi.$$

Теперь вместо  $\varphi$  возьмем  $\varphi + \pi$ . Тогда

$$J_2 = \int_0^{\pi} \int_{\pi-\psi(\varphi+\pi)}^{\psi(\varphi)} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi.$$

Во всех этих преобразованиях функция  $\Phi(\varphi, \psi)$  остается без изменений.

Теперь посмотрим снова на определение функции  $\psi(\varphi)$ :

$$\cos \psi(\varphi + \pi) = -\frac{r_* \cos(\varphi + \pi)}{\sqrt{1 - r_*^2 \sin^2(\varphi + \pi)}} = -\cos \psi(\varphi).$$

Значит  $\psi(\varphi + \pi) = \pi - \psi(\varphi)$ . Поэтому

$$J_2 = \int_0^{\pi} \int_{\psi(\varphi)}^{\pi} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi \Rightarrow J = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\varphi, \psi) d\psi d\varphi.$$

Выразим расстояние  $r'_*$  через переменные  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $r_*$ :

$$\begin{aligned} r'_* &= \sqrt{r_*^2 \sin^2 \varphi + (R_* - r_* \cos \varphi)^2} = \sqrt{r_*^2 \sin^2 \varphi + (1 - r_*^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \psi} = \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \psi (1 - r_*^2 \sin^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Получим

$$J = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sigma \left( \sqrt{1 - \sin^2 \psi (1 - r_*^2 \sin^2 \varphi)} \right) \cdot \sqrt{1 - r_*^2 \sin^2 \varphi} \cdot \sin \psi d\psi d\varphi. \quad (9.11)$$

## § 10. Полиномы Лежандра

Интегральное уравнение (9.8) будем решать методом ортогональных многочленов [9, 11], в качестве которых возьмем полиномы Лежандра.

Познакомимся с некоторыми их свойствами. Полиномы Лежандра являются решениями дифференциального уравнения [8]:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad |x| < 1$$

и имеют вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (10.1)$$

Например, первые три полинома таковы:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}. \quad (10.2)$$

Полиномы Лежандра ортогональны между собой

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1}, & m = n \end{cases}. \quad (10.3)$$

Рассмотрим чётные полиномы Лежандра  $P_{2m}(x)$ . В силу четности условия (10.3) становятся следующими:

$$\int_0^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{4m+1}, & m = n \end{cases}$$

Делая замену переменной  $x = \sqrt{1-r^2}$ ,  $0 < r < 1$ , преобразуем условия ортогональности к виду

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{P_{2m}(r) P_{2n}(r) r dr d\varphi}{\sqrt{1-r^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2\pi}{4m+1}, & m = n. \end{cases} \quad (10.4)$$

Соответственно, полиномы (10.2) будут равны  $P_0(r) = 1$ ,  $P_2(r) = (2 - 3r^2)/2$ .

Итак, введенные полиномы Лежандра  $P_{2n}(r)$  будут ортогональны между собой с весом  $(1-r^2)^{-1/2}$ . Можно показать, что эти полиномы являются собственными функциями интегрального уравнения (9.8).

Если искомая функция  $\sigma(r')$  представима рядом

$$\sigma(r') = \frac{1}{\sqrt{1-(r')^2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(r'). \quad (10.5)$$

и имеет корневую особенность на границе круга, то [9]:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\sigma(r') ds}{R(r, r')} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(\sqrt{1-\sin^2 \psi(1-r^2 \sin^2 \varphi)}) \sqrt{1-r^2 \sin^2 \varphi} \sin \psi d\psi d\varphi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} P_{2n}(\sqrt{1-\sin^2 \psi(1-r^2 \sin^2 \varphi)}) d\psi d\varphi = \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} A_{2n} P_{2n}(r) \end{aligned} \quad (10.6)$$

где  $\alpha_{2n}$  – некоторые постоянные коэффициенты,  $\sqrt{1-(r')^2} = \sin \psi \sqrt{1-r^2 \sin^2 \varphi}$ .

Проверим равенство (10.6) при  $n = 0$ ,  $n = 1$ . Выполняя интегрирование, получаем

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} P_0(r') d\psi d\varphi = \pi^2 \alpha_0 P_0(r), \quad \alpha_0 = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} P_2[\sqrt{1-(1-r^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \psi}] d\psi d\varphi &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 1 - \frac{3}{2} [1 - (1-r^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \psi] \right\} d\psi d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} (1 - 3r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{\pi^2 (2 - 3r^2)}{4} = \pi^2 \alpha_2 P_2(r), \quad \alpha_2 = 1/4 \end{aligned}$$

Коэффициент  $\alpha_{2n}$  с ростом  $n$  быстро уменьшается. Первые четыре значения этого коэффициента даны в следующей таблице [9]:

|               |   |     |      |        |
|---------------|---|-----|------|--------|
| $n$           | 0 | 1   | 2    | 3      |
| $\alpha_{2n}$ | 1 | 1/4 | 9/64 | 25/256 |

## § 11. Решение осесимметричной пространственной контактной задачи

а) Задача о взаимодействии тел с неизменяемой областью контакта (рис. 2.11).

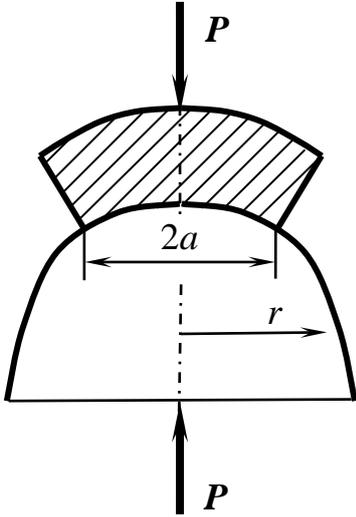


Рис. 2.11. Задача при  $z_1(r) = z_2(r)$

В этой задаче известно, что  $f(r_*) = \alpha_* = const$ .

Но само значение  $\alpha_*$  необходимо найти по заданному  $P_*$ . Задача сводится к решению уравнений

$$\theta \iint_S \frac{\sigma(r'_*) dS}{R_*(r_*, r'_*)} = \alpha_* P_0(r_*), \quad \iint_S \sigma(r_*) dS = P_*. \quad (11.1)$$

Отыскивая решение в виде (10.5) и используя свойство (10.6), получаем

$$\theta \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} A_{2n} P_{2n}(r_*) = \alpha_* P_0(r_*), \quad (11.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{P_{2n}(r_*) r_* dr_* d\varphi}{\sqrt{1-r_*^2}} = P_*. \quad (11.3)$$

Из (11.3) в силу условий ортогональности (10.4) следует

$$2\pi A_0 \int_0^1 \frac{r_* dr_*}{\sqrt{1-r_*^2}} = P_*, \quad A_0 = \frac{P_*}{2\pi}. \quad (11.4)$$

В равенстве (11.2) коэффициенты должны быть следующими:

$$A_{2n} = 0, \quad n \neq 0, \quad \theta \pi^2 A_0 = \alpha_*.$$

Переходя к размерным величинам, находим окончательный результат [7]

$$\sigma(r) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{\sigma_{cp}}{2\sqrt{1-r_*^2}}, \quad \alpha = \frac{P}{2a} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right).$$

Напряжения в центре круга оказываются в 2 раза меньшими средних напряжений, а на краю – неограниченно возрастают. Высокая интенсивность контактных напряжений на краю получена в результате математической идеализации описания геометрии объекта (наличие угловой точки). Учет малого закругления углов тела приводит к большим, но конечным значениям напряжений вблизи края области контакта [7].

б) Задача взаимодействия тел с переменной областью контакта (рис. 2.12).

Для малых областей контакта функция  $f(r_*)$  может быть аппроксимирована следующим образом:  $f(r_*) = \alpha_* - A_* r_*^2$ , где  $A_* = Aa$ ,  $A = 0,5(z_1''(0) - z_2''(0)) = 0,5(R_1^{-1} + R_2^{-1})$  и представима через полиномы Лежандра

$$f(r_*) = (\alpha_* - \frac{2}{3} A_*) P_0(r_*) + \frac{2}{3} A_* P_2(r_*). \quad (11.5)$$

Решая уравнения (9.8), (9.9) с помощью разложения (10.5), находим

$$\theta \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} A_{2n} P_{2n}(r_*) = (\alpha_* - \frac{2}{3} A_*) P_0(r_*) + \frac{2}{3} A_* P_2(r_*), \quad 2\pi A_0 = P_*$$

Отсюда

$$\theta \pi^2 A_0 = \alpha_* - \frac{2}{3} A_*, \quad \theta \frac{\pi^2}{4} A_2 = \frac{2}{3} A_*, \quad A_0 = \frac{P_*}{2\pi}, \quad A_{2n} = 0, \quad n > 2. \quad (11.6)$$

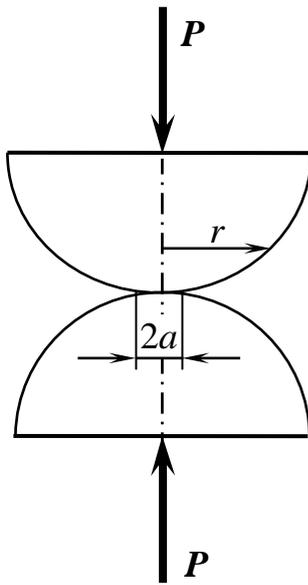


Рис. 2.12. Задача при  $z_1(r) \neq z_2(r)$

Контактные напряжения выражаются формулой

$$\sigma(r_*) = \frac{1}{\sqrt{1-r_*^2}} \left[ \frac{P_*}{2\pi} + \frac{8A_*}{3\pi^2\theta} (1 - \frac{3}{2} r_*^2) \right]. \quad (11.7)$$

Потребуем, чтобы напряжения обращались в нуль на границе круга  $r_* = 1$  (физическое условие при отсутствии угловых точек):

$$\sigma(1) = \frac{P_*}{2\pi} - \frac{8A_*}{6\pi^2\theta} = 0. \quad (11.8)$$

Переходя в (11.8) к размерным величинам, получим величину радиуса области контакта  $a = 0,5\sqrt[3]{3\pi\theta P/A}$ .

Формула для напряжений (11.7) при условии (11.8) принимает вид

$$\sigma(r) = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}. \quad (11.9)$$

Из (11.6) находим

$$\alpha = a^2 (R_1^{-1} + R_2^{-1}). \quad (11.10)$$

Формулы (11.8)–(11.10) дают полное решение задачи. Кривизны здесь считаются положительными при изображении тел согласно рис. 2.12. В противном случае знаки кривизны необходимо изменить на обратные. В частном случае контакта тела с плоскостью следует положить  $R_2^{-1} = 0$ .

Контактные напряжения максимальны в центре круга и в 1,5 раза больше средних напряжений.

### ГЛАВА 3. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

#### § 12. Постановка контактных задач теории пластин и оболочек

Пусть два тонкостенных элемента под действием приложенных к ним нагрузок  $\bar{q}^1(q_1^1, q_2^1, q_3^1)$  и  $\bar{q}^2(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$  вступают в контакт на некоторой части поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $\Gamma$  (рис. 3.1).

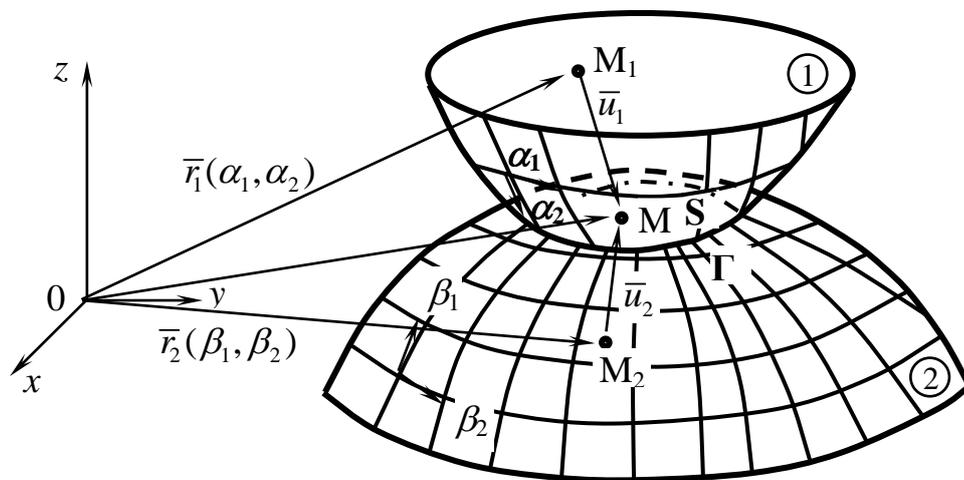


Рис. 3.1. Контакт оболочек

Форма элементов до деформации задается уравнениями срединных поверхностей

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_2(\beta_1, \beta_2) \quad (12.1)$$

Условие контакта: точки  $M_1$  и  $M_2$  после деформации элементов вошли в соприкосновение и находятся в т.  $M$  – общей для обоих элементов.

$$\bar{r}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \bar{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, -\frac{h_1}{2}) - \frac{h_1}{2} \bar{n}_1 = \bar{r}_2(\beta_1, \beta_2) + \bar{u}_2(\beta_1, \beta_2, \frac{h_2}{2}) + \frac{h_2}{2} \bar{n}_2 \quad (12.2)$$

$h_1, h_2$  – толщины,  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  – единичные векторы нормалей к срединным поверхностям,  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  – векторы смещения поверхностных точек оболочек.

Требуется удовлетворить уравнениям равновесия каждой оболочки, граничным условиям и условиям контакта, определив при этом вектор контактных напряжений  $\bar{\sigma}$  и область контакта  $S$ , если она заранее неизвестна. В области

контакта  $S$  каждая точка поверхности имеет координаты  $(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $(\beta_1, \beta_2)$ . Необходимо знать формулы перехода от одной системы координат к другой. Такую связь нетрудно найти, например, при взаимодействии цилиндрической оболочки с плоскостью, приравнивая длины координатных линий  $x_1 = x_2, y_1 = y_2 = R\varphi$ . Если считать, что область контакта  $S$  является пологой относительно плоскости, то можно ввести для всех величин уравнения (12.2) метрику плоскости: декартовы  $x, y$  или полярные координаты  $R, \varphi$ .

Существует два пути решения контактных задач.

1. Первый путь заключается в интегрировании уравнений равновесия каждой оболочки в области контакта  $S$  и вне ее и „склеивании“ полученных решений на границе и поверхности контакта. Этот прием наталкивается на значительные математические трудности и даже для одномерных задач приводит к большому числу уравнений.

2. Второй способ основан на использовании функций влияния. Если удастся построить функцию влияния для каждого объекта, то решение контактной задачи сводится к решению интегральных уравнений относительно контактного давления. Наличие функции влияния значительно сокращает объем вычислительной работы, поскольку автоматически выполняются краевые условия для оболочек и условия сопряжения решений на границе  $\Gamma$ . Остается поставить статические или геометрические условия совместности перемещений (12.2) или деформаций в области  $S$ .

Пусть решается контактная задача для пологих оболочек, взаимодействующих только по нормали. Тогда условие контакта можно записать в декартовых координатах  $x, y$  и оно будет иметь вид

$$\iint_S K(x, y, \xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \quad (x, y) \in S \quad (12.3)$$

где

$$K(x, y, \xi, \eta) = G_1(x, y, \xi, \eta) + G_2(x, y, \xi, \eta)$$

$$f(x, y) = \iint_{S_1} q_1(\xi, \eta) G_1(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_{S_2} q_2(\xi, \eta) G_2(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + f_2(x, y) - f_1(x, y) - \alpha - \omega_x y + \omega_y x$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = \sigma(\xi, \eta), \quad q_{ix} = q_{iy} = 0, \quad q_{iz} = q(\xi, \eta),$$

$$\bar{\alpha} = (0, 0, \alpha), \quad \bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, 0),$$

$f_i(x, y)$  – уравнения поверхностей оболочек,  $G_i(x, y, \xi, \eta)$  – нормальные перемещения  $i$ -ой оболочки под действием единичной нагрузки в точке  $(\xi, \eta)$ .

К уравнению (1.3) необходимо добавить условия статического равновесия:

$$\begin{aligned} \iint_{S_i} q_i(\xi, \eta) dS_i &= \iint_S \sigma(\xi, \eta) dS \\ \iint_{S_i} q_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} dS_i &= \iint_S \sigma(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} dS, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (12.4)$$

### § 13. Одномерные контактные задачи теории пластин [12]

Рассмотрим цилиндрический изгиб пластины жестким штампом (рис. 3.2).

Форма штампа задается уравнением  $z = f(x)$  ( $f(x) = f(-x)$ ), штамп вдавливаются в пластину без поворота.

Будем считать, что пластина подчиняется условиям Кирхгофа-Лява, т.е. нормаль ее не деформируется, толщина пластины не меняется.

Если принять для краев  $x = \pm l$  условия шарнирного опирания, то функцию Грина этой задачи надо искать из краевой задачи

$$G^{IV}(\xi, \eta) = \frac{1}{D} \delta(x - \xi), \quad G(\pm l, \xi) = 0, \quad G''(\pm l, \xi) = 0 \quad (13.1)$$

где  $D$  – изгибная жесткость пластины.

Достаточно просто получить  $G(x, \xi)$  в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} \left[ l|x - \xi|^3 + x\xi(x^2 + \xi^2 + 2l^2) - 3l^2(x^2 + \xi^2) + 2l^4 \right] \quad (13.2)$$

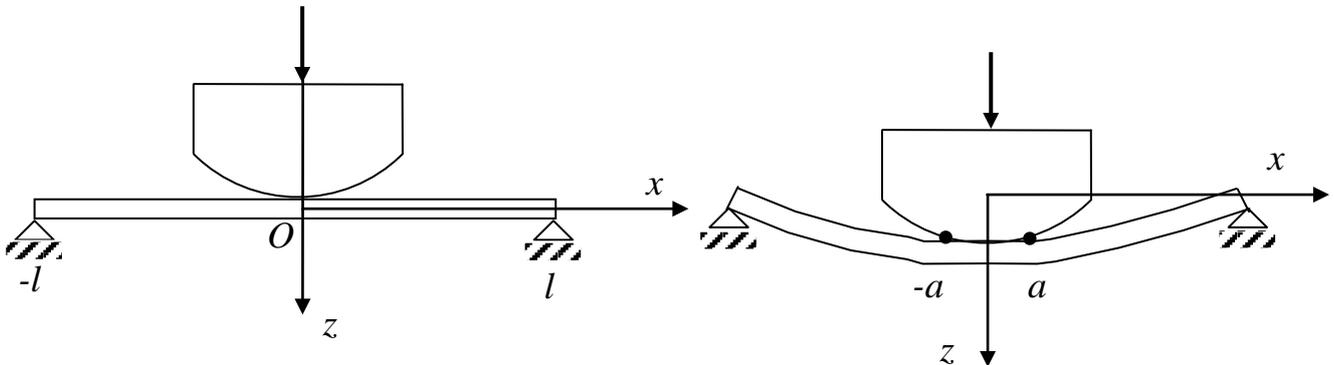


Рис. 3.2. Контактная задача при цилиндрическом изгибе

Форма штампа симметрична, контакт первоначально происходит в центре пластины, поворота нет – значит, задача симметрична относительно оси  $z$ . Условия контакта можно записать в виде интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a G(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = f(x) - \alpha, \quad |x| < a \quad (13.3)$$

Здесь  $\alpha$  – неизвестное жесткое смещение штампа.

Условие статики имеет вид

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = -P \quad (13.4)$$

$P$  и  $f(x)$  – известны, надо найти контактные напряжения  $\sigma(x)$ , жесткое смещение  $\alpha$  и область контакта  $2a$ .

Уравнение (13.3) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода. Известно, что решение уравнений Фредгольма 1-го рода с гладким ядром (а у нас функция  $G(x, \xi)$  – гладкая) является задачей математически некорректной. Что это значит? Это значит, что бесконечно малому изменению правой части будет соответствовать конечное изменение решения.

Физически же некорректность постановки может проявляться по-разному, в зависимости от решаемой задачи, от того объекта или процесса, ко-

торый мы моделируем таким интегральным уравнением. Надо быть готовым в таком случае ко всяким неожиданностям.

Попытаемся все же решить уравнение (13.3).

Дифференцируем четыре раза по  $x$ :

$$\sigma(x) = D[f(x) - \alpha]_x^{IV}, \quad |x| < a$$

$$\sigma(x) = Df^{IV}(x)$$

Пусть штамп параболический:  $f(x) = kx^2$ ,  $f^{IV}(x) = 0$ .

Следовательно,  $\sigma(x) = 0$ ,  $|x| < a$  – результат парадоксальный!!!

Но остались еще точки  $x = \pm a$ . Чтобы уравновесить силу  $P$ , допустим, что в них присутствуют сосредоточенные силы.

Введем вместо  $\sigma(x)$  новую неизвестную функцию:

$$\sigma(x) = u^{IV}(x) + R(\delta(x-a) + \delta(x+a)), \quad (13.5)$$

где  $u(x) = D(f(x) - \alpha)$ , и подставим в уравнение (13.3)

$$\int_{-a}^a G(x, \xi) u^{IV}(\xi) d\xi + R(G(x, a) + G(x, -a)) = \frac{u(x)}{D}$$

Интегрируем по частям, получаем

$$\begin{aligned} & [G(x, \xi) u'''(\xi) - G'_\xi u''(\xi) + G''_{\xi\xi}(x, \xi) u'(\xi) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi) u(\xi)] \Big|_{\xi=-a}^a + \\ & + R[G(x, a) + G(x, -a)] + \int_{-a}^a G^{IV}(x, \xi) u(\xi) d\xi = \frac{u(x)}{D} \end{aligned} \quad (13.6)$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} \left( l|x - \xi|^3 + x\xi(x^2 + \xi^2 + 2l^2) - 3l^2(x^2 + \xi^2) + 2l^4 \right)$$

$$G'_\xi(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} \left( -3l|x - \xi|^2 \operatorname{sign}(x - \xi) + x^3 + 3x\xi^2 + 2l^2x - 6l^2\xi \right)$$

$$G''_{\xi\xi}(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} \left( 6l|x - \xi| + 6l|x - \xi|^2 \delta(x - \xi) + 6x\xi - 6l^2 \right)$$

$$G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} \left( 6x - 6l \operatorname{sign}(x - \xi) - 12l|x - \xi| \operatorname{sign}(x - \xi) \delta(x - \xi) - 6l|x - \xi|^2 \delta'(x - \xi) \right)$$

У нас задача симметричная, значит  $\sigma(x)$  – четная и  $u(x)$  тоже четная функция. Следовательно,

$$u(a) = u(-a), \quad u'(a) = -u'(-a), \quad u''(a) = u''(-a), \quad u'''(a) = -u'''(-a).$$

Кроме того,

$$\int_{-a}^a G^{IV}(x, \xi) u(\xi) d\xi = \int_{-a}^a \frac{1}{D} \delta(x - \xi) u(\xi) d\xi = \frac{1}{D} u(x).$$

Подставляя в (13.6), получаем

$$[u'''(a) + R] \cdot [G(x, a) + G(x, -a)] - u''(a) [G'_\xi(x, a) - G'_\xi(x, -a)] + \\ + u'(a) [G''_{\xi\xi}(x, a) + G''_{\xi\xi}(x, -a)] - u(a) [G'''_{\xi\xi\xi}(x, a) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, -a)] = 0$$

$$G(x, a) + G(x, -a) = \frac{1}{D} \left( \frac{x^2(a-l)}{2} + \frac{a^3 - 3la^2 + 2l^3}{6} \right),$$

$$G'_\xi(x, a) - G'_\xi(x, -a) = \frac{1}{D} \left( \frac{x^2 + a^2}{2} - la \right),$$

$$G''_{\xi\xi}(x, a) - G''_{\xi\xi}(x, -a) = \frac{a-l}{D}, \quad G'''_{\xi\xi\xi}(x, a) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, -a) = \frac{1}{D}.$$

Окончательно условие контакта штампа с пластиной выражается через полином второй степени

$$(u'''(a) + R) \left( \frac{x^2(a-l)}{2} + \frac{a^3 - 3la^2 + 2l^3}{6} \right) - \\ - u''(a) \left( \frac{x^2 + a^2}{2} - la \right) + u'(a)(a-l) - u(a) = 0, \quad |x| < a$$

Подставляем (13.5) в (13.4), интегрируем и находим

$$u'''(a) + R = -\frac{P}{2}$$

$$\text{Значит, } R = -\frac{P}{2} - u'''(a)$$

$$-\frac{P}{2D} \left( \frac{x^2(a-l)}{2} + \frac{a^3 - 3la^2 + 2l^3}{6} \right) - f''(a) \left( \frac{x^2}{2} + \frac{a^2 - 2la}{2} \right) + f'(a)(a-l) - f(a) + \alpha = 0$$

Поскольку условие контакта должно выполняться при любом  $x$ , принадлежащем области контакта, необходимо выполнение условий:

$$\begin{cases} \frac{P}{2D}(l-a) - f''(a) = 0; \\ \frac{P}{12D}(a^3 - 3la^2 + 2l^3) + f''(a)\frac{2l-a}{2} + f'(a)(l-a) + f(a) - \alpha = 0 \end{cases}$$

Отсюда  $P = \frac{2Df''(a)}{l-a}$ ;

$$\alpha = f(a) + f'(a)(l-a) + f''(a)a\frac{2l-a}{2} + \frac{P}{12D}(a^3 - 3la^2 + 2l^3).$$

В частном случае параболического штампа  $f(x) \equiv kx^2$ ,  $f'(a) = 2ak$ ,  $f''(a) = 2k$ .

$$P = \frac{4kD}{l-a}; \quad \alpha = -\frac{P}{12D}(a^3 - 3la^2 + 2l^3);$$

$$\sigma(x) = -\frac{P}{2}[\delta(x-a) + \delta(x+a)].$$

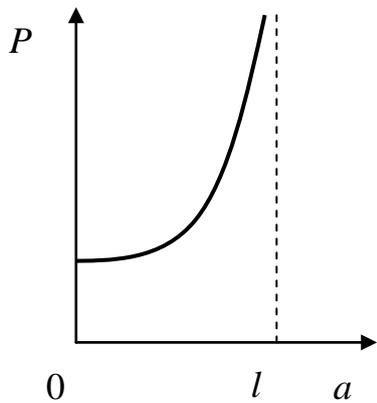


Рис. 3.3. Зависимость  $P(a)$

Что мы видим в этом решении?

Новые проявления математической некорректности.

Во-первых, зависимость  $P(a)$  (рис. 3.3) имеет две особые точки:  $a = 0$  и  $a = l$ . В нулевой точке мы имеем конечное значение силы  $P$ , т.е. бесконечно малому приращению длины области контакта  $a$  соответствует конечное приращение прижимающей штамп силы  $P$ .

А для того, чтобы область контакта распространилась на всю длину  $l$ , требуется бесконечно большое значение силы  $P$ .

Во-вторых, напряжения под штампом отсутствуют, а на границах они настолько велики, что сосредоточены в точках  $x = \pm a$ . Но при гладкой форме штампа как раз на границе напряжений не должно быть, из простых физических соображений ясно, что должно быть  $\sigma(\pm a) = 0$ .

В чем причина. В неправильной постановке задачи.

Корректность, строгость постановки контактных задач теории оболочек целиком зависит от точности построения функций влияния контактирующих объектов. Для тонкостенных элементов наиболее простой и в то же время достаточно строгий способ построения функции влияния состоит в суммировании функции влияния, полученной по классической теории оболочек, дающей перемещения оболочки в результате изгиба и растяжения, и функции влияния для полупространства (или полуплоскости), характеризующей местную сжимаемость элемента, его деформацию в поперечном направлении. Тот факт, что в малой окрестности сосредоточенной силы, приложенной к тонкостенному элементу, напряженное состояние близко к тому, которое наблюдается в полуплоскости под действием сосредоточенной силы, был подтвержден экспериментально методом фотоупругости.

Для контактных задач без учета касательного взаимодействия между объектами возможно упрощение: вместо полупространства рассматривать слой постоянной толщины  $h/2$  и моделировать его упругим основанием с одним “коэффициентом постели”. Для малых толщин  $h$  этот коэффициент может быть получен из асимптотического решения для слоя, и он равен [12]

$$K_0 = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)}.$$

Функция Грина может быть представлена в виде

$$G_n(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}') + K_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

И теперь, подставляя эту функцию в основное интегральное уравнение контактной задачи

$$\iint_{\Omega} G_n(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\Omega = f(r)$$

и используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, получим

$$K_0 \sigma(\vec{r}) + \iint_{\Omega} G_n(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\Omega = f(r).$$

Такие уравнения называются интегральными уравнениями Фредгольма 2-ого рода. Задача стала математически корректной.

Вернемся к задаче о вдавливании жесткого штампа в пластину при цилиндрическом изгибе.

Теперь уравнение (условие контакта) будет иметь вид

$$K_0\sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = f(x) - \alpha$$

Поступим так же, как и в предыдущем случае

$$\int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = f(x) - \alpha - K_0\sigma(x) = \frac{V(x)}{D} \quad (13.7)$$

Дифференцируем по  $x$  четыре раза:

$$\sigma(x) = V^{IV}(x)$$

Подставляем в уравнение (2.7), интегрируем по частям, получаем

$$[G(x, \xi)V'''(\xi) - G'_\xi(x, \xi)V''(\xi) + G''(x, \xi)V'(\xi) - G'''(x, \xi)V(\xi)] \Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0$$

Так как  $V(x) = D(f(x) - \alpha) - K_0D\sigma(x) = u(x) - \varepsilon\sigma(x)$  (так мы ввели функцию  $V(x)$ ) то, после замены  $\sigma(x) = V^{IV}(x)$ , получим дифференциальное уравнение относительно  $V$

$$\varepsilon V^{IV}(x) + V(x) = u(x),$$

которое удобнее представить в виде

$$V^{IV}(x) + 4\omega^4 V(x) = 4\omega^4 u(x), \quad 4\omega^4 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{K_0 D}$$

Общее решение этого уравнения есть

$$V(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x) + V_0(x),$$

где  $V_0$  – частное решение,  $\Phi_1(x) = \operatorname{ch} \omega x \cos \omega x$ ,  $\Phi_2(x) = \operatorname{sh} \omega x \sin \omega x$ .

Краевые условия для  $V(x)$  получим, как и прежде, из условия

$$[G(x, \xi)V'''(\xi) - G'_\xi(x, \xi)V''(\xi) + G''(x, \xi)V'(\xi) - G'''(x, \xi)V(\xi)] \Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0:$$

$$l_1 V'''(a) - V''(a) = 0; \quad a_1 V'''(a) + a_2 V''(a) - l_1 V'(a) - V(a) = 0;$$

$$l_1 = l - a; \quad a_1 = \frac{a^3 - 3la^2 + 2l^3}{6}; \quad a_2 = \frac{a(2l - a)}{2}.$$

Возьмем опять параболический штамп:  $f(x) = kx^2$ .

Добавим к граничным условиям на  $V$  еще и условия на  $\sigma$ :

1) статическое равновесие штампа:  $\int_{-a}^a \sigma(x) dx + P = 0$ ;

2) непрерывность  $\sigma(x)$ :  $\sigma(a) = 0$ .

Получим окончательно:

$$\sigma(x) = -\frac{\omega P}{d} (\text{sh } \omega(a+x) \sin \omega(a-x) + \text{sh } \omega(a-x) \sin \omega(a+x));$$

$$P = \frac{4kD}{l_1 + \frac{\text{ch } \varphi + \cos \varphi}{d\omega}}; \quad \alpha = \frac{P}{2D} \left( a_1 + a_2 \frac{\text{ch } \varphi + \cos \varphi}{d\omega} - l_1 \frac{\text{sh } \varphi + \sin \varphi}{2d\omega^2} \right); \quad (13.8)$$

$$\varphi = 2\omega a; \quad d = \text{sh } \varphi - \sin \varphi.$$

Главным критерием достоверности решения служит сравнение с решением, полученным по точным уравнениям теории упругости, если оно, конечно, существует.

Как видно из рисунка 3.4, учёт обжатия позволяет получить контактные напряжения, близкие к тем, что даёт расчёт по теории упругости.

Формулы (13.8) были впервые получены другим путём Э. И. Григолюком и В. М. Толкачёвым в работе [13].



Рис. 3.4. Сравнение контактных напряжений, полученных по теории упругости и теории пластин с учётом обжатия

## § 14. Двумерные контактные задачи теории пластин и оболочек.

### Метод сведения интегрального уравнения к краевой задаче

Рассмотрим тонкую оболочку, взаимодействующую с жёстким телом – штампом. Предположим (рис. 3.4), что контакт происходит в области  $\Omega$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ . Моделируя условие контакта в виде равенства перемещений нижней поверхности штампа перемещениям верхней поверхности оболочки с учётом деформаций поперечного обжатия в области контакта, получим для определения неизвестного контактного давления

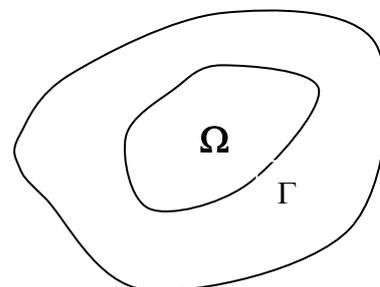


Рис. 3.4. Двумерная область контакта

получим для определения неизвестного контактного давления  $\sigma(x, y)$  интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varepsilon\sigma(x, y) + \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)d\xi d\eta = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (14.1)$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент обжатия,  $f(x, y)$  – функция формы и жесткого смещения штампа и оболочки,  $G(x, y, \xi, \eta)$  – функция влияния, удовлетворяющая уравнению

$$LG(x, y, \xi, \eta) = L_1\delta(x - \xi, y - \eta) \quad (14.2)$$

( $L_1, L$  – дифференциальные операторы) и соответствующим краевым условиям.

Если форма штампа гладкая и область контакта заранее неизвестна, то к уравнению (14.1) необходимо добавить естественное условие непрерывности контактного давления на границе контакта  $\Gamma$

$$\sigma(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (14.3)$$

Постоянные жесткого смещения определяются из условий статического равновесия штампа.

Сведём решение уравнения (14.1) к решению краевой задачи.

Подействуем оператором  $L$  на уравнение (14.1)

$$\varepsilon L\sigma(x, y) + \iint_{\Omega} LG(x, y, \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)d\xi d\eta = Lf(x, y) \quad (14.4)$$

Введем новую неизвестную функцию  $u(x, y)$

$$L_1u(x, y) = f(x, y) - \varepsilon\sigma(x, y) \quad (14.5)$$

$$\sigma(x, y) = Lu(x, y) \quad (14.6)$$

Тогда из (14.4) следует уравнение

$$\varepsilon Lu(x, y) + L_1 u(x, y) = f(x, y) \quad (14.7)$$

Подставим (14.5) и (14.6) в уравнение (14.1), получим

$$\iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) L_{\xi, \eta} u(\xi, \eta) d\Omega = L_1 u(x, y) \quad (14.8)$$

Для ряда теорий тонких оболочек, используемых в настоящее время, оператор  $L$  можно представить в виде

$$L = \nabla^4 + \alpha_1 \nabla^2 + \alpha_2,$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,  $\alpha_1, \alpha_2$  – постоянные.

Если  $L$  – оператор такого вида, то, используя формулу Грина

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

и следствия из нее

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \nabla^2 u d\Omega &= - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ \iint_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) d\Omega &= \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

получим

$$\iint_{\Omega} LG(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\Omega + \int_{\Gamma} \Psi[G, u] d\Gamma = L_1 u(x, y) \quad (14.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi[G, u] &\equiv (\nabla^2 + \alpha_1) G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial n} + G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial \nabla^2 u(\xi, \eta)}{\partial n} - \\ &- u(\xi, \eta) \frac{\partial \nabla^2 G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n} - (\nabla^2 + \alpha_1) u(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n}, \end{aligned} \quad (14.10)$$

$n$  – внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$ .

В силу симметрии функции влияния по переменным  $x, y$  и  $\xi, \eta$  с учетом фильтрующих свойств  $\delta$ -функции двойной интеграл в (14.9)

$$\iint_{\Omega} LG(x, y, \xi, \eta)u(\xi, \eta)d\Omega \equiv L_1u(x, y)$$

и (14.9) принимает вид

$$\oint_{\Gamma} \Psi[G, u]d\Gamma = 0 \quad (14.11)$$

Последнее соотношение представляет собой краевое условие для функции  $u(x, y)$ . Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (14.1) сведена к решению краевой задачи (14.7), (14.11). Основное отличие от одномерных контактных задач заключается в том, что краевое условие записано в виде контурного интеграла по границе области контакта.

Этот подход применим не только к статическим, но и к динамическим контактным задачам теории пластин и оболочек.

### § 15. Построение функции влияния для неосесимметричной деформации круглой пластины, лежащей на упругом основании [14]

Функцию влияния для неосесимметричной деформации круглой пластины радиуса  $R$ , свободно лежащей на упругом Винклеровом основании, найдём как решение краевой задачи (15.1), (15.2), записанной в системе полярных координат  $r, \varphi$  с полюсом в центре пластины (рис. 3.5).

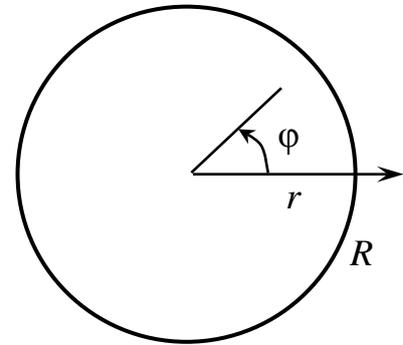


Рис. 3.5. Круглая пластина и полярная система координат

$$LG(r, \xi, \varphi, \varphi_0) = L_1 \frac{1}{\xi} \delta(r - \xi) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (15.1)$$

На свободном краю пластины при  $r = R$  изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \nabla^2 G}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (15.2)$$

Здесь и далее  $L = \nabla^4 + \lambda^4$ ,  $L_1 = \frac{1}{D}$ ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $\lambda^4 = \frac{K}{D}$ ,  $K$  – коэффициент постели упругого основания.

Докажем предварительно

лемму: Частное решение уравнения

$$(\nabla^4 + \lambda^4)F(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi) \quad (15.3)$$

можно представить в виде

$$F(r, \varphi) = F_1(r, \varphi) + F_2(r, \varphi) \quad (15.4)$$

где  $F_1(r, \varphi)$ ,  $F_2(r, \varphi)$  являются частными решениями уравнений

$$(\nabla^2 + i\lambda^2)F_1(r, \varphi) = -\frac{1}{2i\lambda^2}\Phi(r, \varphi);$$

$$(\nabla^2 - i\lambda^2)F_2(r, \varphi) = \frac{1}{2i\lambda^2}\Phi(r, \varphi).$$

Доказательство: подставим решение (15.4) в уравнение (15.3)

$$\begin{aligned} (\nabla^4 + \lambda^4)F(r, \varphi) &= (\nabla^2 + i\lambda^2)(\nabla^2 - i\lambda^2)[F_1(r, \varphi) + F_2(r, \varphi)] = \\ &= (\nabla^2 - i\lambda^2)[(\nabla^2 + i\lambda^2)F_1] + (\nabla^2 + i\lambda^2)[(\nabla^2 - i\lambda^2)F_2] = \\ &= (\nabla^2 - i\lambda^2)\left[-\frac{1}{2i\lambda^2}\Phi(r, \varphi)\right] + (\nabla^2 + i\lambda^2)\left[\frac{1}{2i\lambda^2}\Phi(r, \varphi)\right] = \Phi(r, \varphi) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

В интервале  $(-\pi, \pi)$   $\delta$ -функция представима рядом Фурье

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty /} \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad (15.5)$$

значок  $\sum_{n=0}^{\infty /}$  означает, что при  $n = 0$  вводится коэффициент  $\frac{1}{2}$ .

Будем искать  $G(r, \xi, \varphi, \varphi_0)$  в виде

$$G(r, \xi, \varphi, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty /} G_n(r, \xi) \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad (15.6)$$

Подставим (15.5) и (15.6) в уравнение (15.1) и краевые условия (15.2).

Получим для  $G_n(r, \xi)$  краевую задачу

$$(\nabla_n^4 + \lambda^4)G_n(r, \xi) = \frac{1}{\pi D \xi} \delta(r - \xi) \quad (15.7)$$

При  $r = R$

$$\begin{aligned} \nabla_n^2 G_n + \frac{\nu - 1}{r} \left( \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r} \right) G_n &= 0 \\ \frac{\partial \nabla_n^2 G_n}{\partial r} - \frac{1 - \nu}{r} \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) G_n &= 0 \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$\nabla_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что уравнение Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

( $z, \nu$  – комплексные) имеет своим решением так называемые функции Бесселя или цилиндрические функции  $J_\nu(z)$ , а уравнение

$$(\nabla_n^2 + i\lambda^2)(\nabla_n^2 - i\lambda^2)F(r) = 0$$

имеет своим решением функции Кельвина:  $ber_n(r)$ ,  $bei_n(r)$ ,  $ker_n(r)$ ,  $kei_n(r)$ .

Мы будем использовать для функций Кельвина обозначения Б. Г. Коренева [15]:

$$\begin{aligned} u_n(x) + iv_n(x) &= J_n(x\sqrt{i}); \\ f_n(x) + ig_n(x) &= H_n^{(1)}(x\sqrt{i}). \end{aligned}$$

Функции  $u_n$  и  $v_n$  не имеют особенностей при  $x = 0$ , а  $f_n$  и  $g_n$  – имеют. Физически эта особенность имеет смысл сосредоточенной силы. У нас в задаче никаких точечных опор в точке  $r = 0$  нет, сил там тоже нет, поэтому для однородного уравнения, соответствующего уравнению (15.7), надо взять общее решение в виде:

$$G_{n\text{одн}}(r, \xi) = C_{1n}(\xi_1)u_n(r_1) + C_{2n}(\xi_1)v_n(r_1), \quad r_1 = \lambda r, \quad \xi_1 = \lambda \xi.$$

Частное решение уравнения (15.7) будем искать с помощью сформулированной выше леммы и преобразования Ханкеля [16] (частный случай преобразования Бесселя).

Преобразование Бесселя

$$f^*(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)K(\lambda t)dt,$$

где  $K(\lambda t)$  – функция Бесселя.

К этому виду относятся интегральные преобразования Ханкеля, Мейера, Канторовича-Лебедева и ряд других.

Преобразованием Ханкеля называется интеграл

$$f_v^*(u) = H_v[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\mathfrak{I}_v(ut)t dt, \quad 0 < u < \infty, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

Формула обращения

$$f(t) = H_v^{-1}[f_v^*(u)] = \int_0^{\infty} f_v^*(u)\mathfrak{I}_v(ut)u du, \quad 0 < t < \infty, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

Свойства преобразования Ханкеля

$$1. \quad H_v[f(at)] = \frac{1}{a^2} f_v^*\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$2. \quad H_v\left[\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{df}{dt} - \frac{\nu^2}{t^2} f\right] = -u^2 H_v[f(t)]$$

$$\text{при } t \rightarrow 0: \quad t^{\nu+1} \frac{df}{dt} = 0, \quad t^\nu f(t) = 0;$$

$$\text{при } t \rightarrow \infty: \quad \sqrt{t} \frac{df}{dt} = 0, \quad \sqrt{t} f(t) = 0.$$

3. Равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} t f(t) g(t) dt = \int_0^{\infty} u f_v^*(u) g_v^*(u) du, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

$$f_v^*(u) = H_v[f(t)], \quad g_v^*(u) = H_v[g(t)]$$

Применив преобразование Ханкеля к уравнениям

$$(\nabla^2 + i\lambda^2)G_{1n}(r, \xi) = -\frac{1}{2i\lambda^2\pi D\xi}\delta(r - \xi);$$

$$(\nabla^2 - i\lambda^2)G_{2n}(r, \xi) = \frac{1}{2i\lambda^2\pi D\xi}\delta(r - \xi);$$

и сложив полученные решения, найдём частное решение уравнения (15.7)

$$G_{n\psi}(r, \xi) = \frac{1}{2D\lambda^2} \begin{cases} u_n(r_1)f_n(\xi_1) - v_n(r_1)g_n(\xi_1), & 0 \leq r \leq \xi \\ u_n(\xi_1)f_n(r_1) - v_n(\xi_1)g_n(r_1), & \xi \leq r \end{cases}$$

Определив  $C_{1n}(\xi)$ ,  $C_{2n}(\xi)$  из условий (15.8), запишем окончательно выражение для функции влияния в виде

$$G(r, \xi, \varphi, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(r_1, \xi_1) \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad (15.9)$$

$$G_n(r, \xi) = \frac{1}{2D\lambda^2} [C_{1n}(\xi)u_n(r) + C_{2n}(\xi)v_n(r) + G_n^0(r, \xi)]$$

$$G_n^0(r, \xi) = \begin{cases} u_n(r)f_n(\xi) - v_n(r)g_n(\xi), & 0 \leq r \leq \xi \\ u_n(\xi)f_n(r) - v_n(\xi)g_n(r), & \xi \leq r \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} C_{1n}(\xi) \\ C_{2n}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{1n} & \Delta_{2n} \\ \Delta_{2n} & \Delta_{3n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n(\xi) \\ v_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad \Delta_{in} = \frac{\alpha_{in}}{\Delta_n} (i = 1, 2, 3)$$

$$\Delta_n = l(u'^2 + v'^2) - 2l_{1n}(uu' + vv') + l_{2n}(u^2 + v^2) + (l_{3n} - 1)(u'v - uv'),$$

$$\alpha_{1n} = -l(uf' + v'g') + 2l_{1n}(uf' + v'g) - l_{2n}(uf + vg) - (l_{3n} - 1)(u'g - ug') - \frac{2l_{3n}}{\pi R_1},$$

$$\alpha_{2n} = l(u'g' - v'f') + 2l_{1n}(v'f - ug') + l_{2n}(ug - vf) + (l_{3n} - 1)(uf' - u'f) + \frac{2l_{1n}}{\pi R_1},$$

$$\alpha_{3n} = -\alpha_{1n} - 2\frac{l_{3n} + 1}{\pi R_1}, \quad R_1 = \lambda R$$

$$l = \frac{1 - \nu}{R_1}, \quad l_{1n} = \frac{(1 - \nu)n^2}{R_1^2}, \quad l_{2n} = \frac{(1 - \nu)n^2}{R_1^3}, \quad l_{3n} = \left( \frac{(1 - \nu)n(n - 1)}{R_1^2} \right)^2$$

через  $u, v, f, g$  и  $u', v', f', g'$  обозначены функции Кельвина  $u_n(R_1)$ ,  $v_n(R_1)$ ,  $f_n(R_1)$ ,  $g_n(R_1)$  и их производные.

$$(\nabla^2 + i\lambda^2)G_{1n}(r, \xi) = -\frac{1}{2i\lambda^2\pi D\xi}\delta(r - \xi);$$

$$(\nabla^2 - i\lambda^2)G_{2n}(r, \xi) = \frac{1}{2i\lambda^2\pi D\xi}\delta(r - \xi);$$

и сложив полученные решения, найдём частное решение уравнения (15.7)

$$G_{n\psi}(r, \xi) = \frac{1}{2D\lambda^2} \begin{cases} u_n(r_1)f_n(\xi_1) - v_n(r_1)g_n(\xi_1), & 0 \leq r \leq \xi \\ u_n(\xi_1)f_n(r_1) - v_n(\xi_1)g_n(r_1), & \xi \leq r \end{cases}$$

Определив  $C_{1n}(\xi)$ ,  $C_{2n}(\xi)$  из условий (15.8), запишем окончательно выражение для функции влияния в виде

$$G(r, \xi, \varphi, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(r_1, \xi_1) \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad (15.9)$$

$$G_n(r, \xi) = \frac{1}{2D\lambda^2} [C_{1n}(\xi)u_n(r) + C_{2n}(\xi)v_n(r) + G_n^0(r, \xi)]$$

$$G_n^0(r, \xi) = \begin{cases} u_n(r)f_n(\xi) - v_n(r)g_n(\xi), & 0 \leq r \leq \xi \\ u_n(\xi)f_n(r) - v_n(\xi)g_n(r), & \xi \leq r \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} C_{1n}(\xi) \\ C_{2n}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{1n} & \Delta_{2n} \\ \Delta_{2n} & \Delta_{3n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n(\xi) \\ v_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad \Delta_{in} = \frac{\alpha_{in}}{\Delta_n} (i = 1, 2, 3)$$

$$\Delta_n = l(u'^2 + v'^2) - 2l_{1n}(uu' + vv') + l_{2n}(u^2 + v^2) + (l_{3n} - 1)(u'v - uv'),$$

$$\alpha_{1n} = -l(uf' + v'g') + 2l_{1n}(uf' + v'g) - l_{2n}(uf + vg) - (l_{3n} - 1)(u'g - ug') - \frac{2l_{3n}}{\pi R_1},$$

$$\alpha_{2n} = l(u'g' - v'f') + 2l_{1n}(v'f - ug') + l_{2n}(ug - vf) + (l_{3n} - 1)(uf' - u'f) + \frac{2l_{1n}}{\pi R_1},$$

$$\alpha_{3n} = -\alpha_{1n} - 2\frac{l_{3n} + 1}{\pi R_1}, \quad R_1 = \lambda R$$

$$l = \frac{1 - \nu}{R_1}, \quad l_{1n} = \frac{(1 - \nu)n^2}{R_1^2}, \quad l_{2n} = \frac{(1 - \nu)n^2}{R_1^3}, \quad l_{3n} = \left( \frac{(1 - \nu)n(n - 1)}{R_1^2} \right)^2$$

через  $u, v, f, g$  и  $u', v', f', g'$  обозначены функции Кельвина  $u_n(R_1)$ ,  $v_n(R_1)$ ,  $f_n(R_1)$ ,  $g_n(R_1)$  и их производные.

## § 16. Контактная задача для круглой пластины при внецентричном положении штампа [14]

Рассмотрим неосесимметричную контактную задачу о вдавливании штампа в тонкую круглую пластину, лежащую на упругом основании, при внецентричном положении штампа (рис. 3.6).

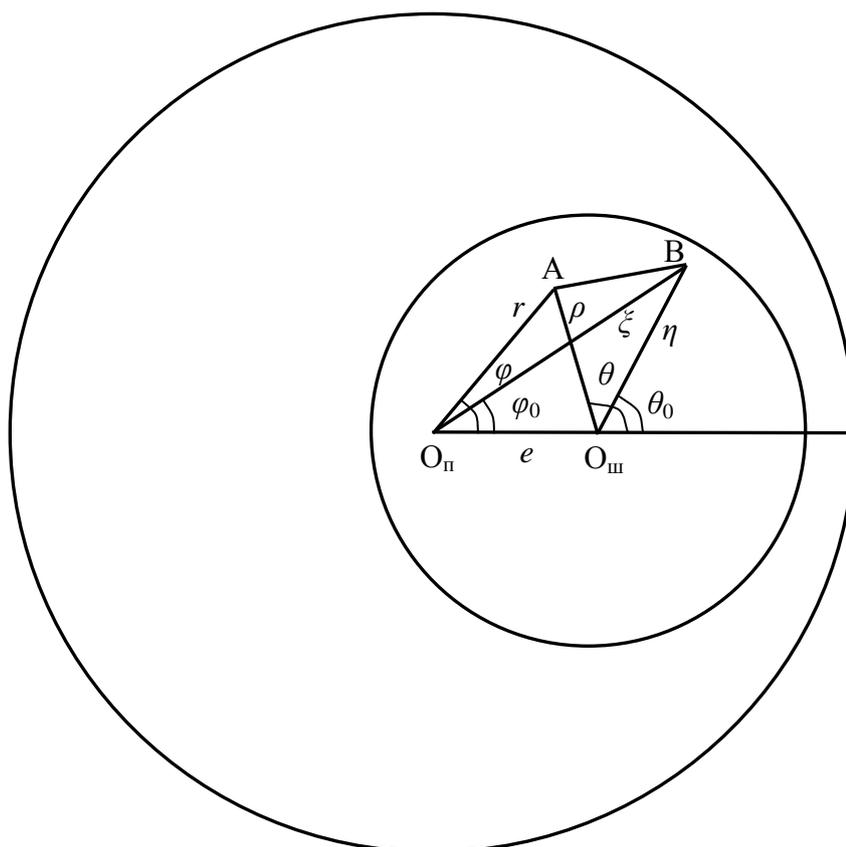


Рис. 3.6. Пластина и штамп в двухполярной системе координат

Моделируя условие контакта в виде равенства перемещения штампа перемещениям верхней границы пластинки с учётом деформаций поперечного обжатия, получим основное интегральное уравнение в виде

$$k_0 \sigma(\rho, \theta) = \iint_{\Omega} G(\rho, \eta, \theta, \theta_0) \sigma(\eta, \theta_0) \eta d\eta d\theta_0 = \gamma - f(\rho, \theta), \quad (\rho, \theta) \in \Omega \quad (16.1)$$

где  $\sigma(\rho, \theta)$  – неизвестное контактное давление,  $\gamma$  и  $f(\rho, \theta)$  – соответственно жёсткое смещение и функция, описывающая форму подошвы штампа,

$k_0 = 13h(1 - \nu^2)/(32E)$  – коэффициент обжатия,  $\rho, \theta$  – полярные координаты с полюсом в центре штампа.

Условие статического равновесия штампа запишем в виде

$$P = \iint_{\Omega} \sigma(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (16.2)$$

Считая край пластины свободным и принимая для упругого основания модель Винклера, используем функцию влияния, построенную в предыдущем параграфе.

Простой формальный переход в формуле (15.9) от координат  $r, \varphi$  к координатам  $\rho, \theta$  нецелесообразен, так как приводит к значительным математическим трудностям. Поэтому будем решать задачу в двухполярной системе координат, показанной на рис. 3.6. Применим к уравнению (16.1) подход, изложенный в § 14: подействуем на уравнение (16.1) оператором

$$L = \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 + \lambda^4$$

с учётом инвариантности операторов  $L$  и  $L_1$  относительно систем полярных координат  $r, \varphi$  и  $\rho, \theta$  и фильтрующих свойств  $\delta$ -функции, получим

$$k_0 L \sigma(\rho, \theta) + L_1 \sigma(\rho, \theta) = L(\gamma - f(\rho, \theta)).$$

Вводя новую неизвестную функцию  $U(\rho, \theta)$  с помощью соотношения

$$L_1 U(\rho, \theta) = \gamma - f(\rho, \theta) - k_0 \sigma(\rho, \theta), \quad (16.3)$$

получим для неё краевую задачу вида

$$(k_0 L + L_1) U(\rho, \theta) = \gamma - f(\rho, \theta), \quad (16.4)$$

$$\oint_{\Gamma} \Psi[G, U] d\Gamma = 0, \quad (16.5)$$

где  $\Psi[G, U]$  получается из (14.10) при  $\alpha_1 = 0$  и имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi[G, U] \equiv & \nabla^2 G(\rho, \eta, \theta, \theta_0) \frac{\partial U(\eta, \theta_0)}{\partial n} + G(\rho, \eta, \theta, \theta_0) \frac{\partial \nabla^2 U(\eta, \theta_0)}{\partial n} - \\ & - U(\eta, \theta_0) \frac{\partial \nabla^2 G(\rho, \eta, \theta, \theta_0)}{\partial n} - \nabla^2 U(\eta, \theta_0) \frac{\partial G(\rho, \eta, \theta, \theta_0)}{\partial n} \end{aligned}$$

В частном случае действия на пластину плоского круглого штампа радиуса  $a$  краевая задача (16.4), (16.5) сводится к задаче

$$(\nabla^4 + \varepsilon^4)U(\rho, \theta) = \gamma/k_0, \quad \varepsilon^4 = \lambda^4 + 1/(k_0 D), \quad (16.6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \nabla_{\eta, \theta_0}^2 G(\rho, \eta, \theta, \theta_0) \frac{\partial U(\eta, \theta_0)}{\partial \eta} + G \frac{\partial \nabla^2 U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \nabla^2 G}{\partial \eta} - \nabla^2 U \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) d\theta_0 \Big|_{\eta=a} = 0. \quad (16.7)$$

Общее решение уравнения (16.6), не имеющее особенностей при  $\rho = 0$ , можно записать в виде

$$U(\rho, \theta) = \gamma_0 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(\rho_0) + B_n v_n(\rho_0)] \cos n\theta \right\}, \quad (16.8)$$

где  $\gamma_0 = \gamma/(k_0 \varepsilon^4)$ ,  $\rho_0 = \varepsilon \rho$ .

Преобразуем выражение (15.9) к виду, позволяющему применить теоремы сложения функций Кельвина (см. Приложение 1) для перехода от координат  $\xi, \varphi_0$  к координатам  $\eta, \theta_0$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r, \xi, \varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2D\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} / [C_{1n}(r_1)u_n(\xi_1) + C_{2n}(r_1)v_n(\xi_1)] \cos n(\varphi - \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{2D\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} / G_n^0(r_1, \xi_1) \cos n(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}$$

Отметим прежде всего, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} / G_n^0(r_1, \xi_1) \cos n(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2} f_0 \left( \lambda \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos(\varphi - \varphi_0)} \right).$$

Но из простых геометрических соображений (см. рис. 3.6) ясно, что

$$r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos(\varphi - \varphi_0) = \rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\theta - \theta_0),$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} / G_n^0(r_1, \xi_1) \cos n(\varphi - \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} / G_n^0(\rho_1, \eta_1) \cos n(\theta - \theta_0).$$

С помощью теорем сложения функций Кельвина (Приложение 1.10-11) приведём функцию влияния к виду

$$\begin{aligned}
G(r, \eta, \varphi, \theta_0) &= \\
&= \frac{1}{2D\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} / \sum_{k=0}^{\infty} / (-1)^k \left\{ \left[ C_{1nk}(r_1, e_1) u_k(\eta_1) - C_{2nk}(r_1, e_1) v_k(\eta_1) \right] \cos n\varphi \cos k\theta_0 - \right. \\
&\quad \left. - \left[ C_{1nk}^-(r_1, e_1) u_k(\eta_1) - C_{2nk}^-(r_1, e_1) v_k(\eta_1) \right] \sin n\varphi \sin k\theta_0 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2D\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} / G_n^0(\rho_1, \eta_1) \cos n(\theta - \theta_0),
\end{aligned} \tag{16.9}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{1nk}(r, e) &= C_{1n}(r) u_{nk}(e) + C_{2n}(r) v_{nk}(e), & C_{2nk}(r, e) &= C_{1n}(r) v_{nk}(e) - C_{2n}(r) u_{nk}(e) \\
u_{nk}(e) &= u_{n+k}(e) + (-1)^k u_{n-k}(e), & v_{nk}(e) &= v_{n+k}(e) + (-1)^k v_{n-k}(e) \\
u_{nk}^-(e) &= u_{n+k}(e) - (-1)^k u_{n-k}(e), & v_{nk}^-(e) &= v_{n+k}(e) - (-1)^k v_{n-k}(e)
\end{aligned}$$

$C_{1nk}^-$  и  $C_{2nk}^-$  получаются из  $C_{1nk}$ ,  $C_{2nk}$  заменой  $u_{nk}$ ,  $v_{nk}$  на  $u_{nk}^-$ ,  $v_{nk}^-$  соответственно.

Подставив (16.8), (16.9) в условие (16.7) и выполнив операции дифференцирования и интегрирования с учётом того, что при  $\eta = a$  следует взять в  $G_n^0(\rho_1, \eta_1)$  ветвь, соответствующую  $\eta \geq \rho$ , получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} / \sum_{k=0}^{\infty} / (-1)^k \left\{ \left[ u_{1nk}(e_1) \Phi_k^U(a) - v_{1nk}(e_1) \Phi_k^V(a) \right] u_n(r_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ u_{2nk}(e_1) \Phi_k^U(a) - v_{2nk}(e_1) \Phi_k^V(a) \right] v_n(r_1) \right\} \cos n\varphi + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Phi_n^F(a) u_n(\rho_1) - \Phi_n^G(a) v_n(\rho_1) \right] \cos n\theta = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} / \left\{ \left[ u_{1n0}(e_1) v_0'(a_1) + v_{1n0}(e_1) u_0'(a_1) \right] u_n(r_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ u_{2n0}(e_1) v_0'(a_1) + v_{2n0}(e_1) u_0'(a_1) \right] v_n(r_1) \right\} \cos n\varphi + \\
&\quad + g_0'(a_1) u_0(\rho_1) + f_0'(a_1) v_0(\rho_1)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
u_{ink}(e) &= \Delta_{in} u_{nk}(e) + \Delta_{i+1, n} v_{nk}(e), & v_{ink}(e) &= \Delta_{in} v_{nk}(e) - \Delta_{i+1, n} u_{nk}(e), & (i=1, 2) \\
\Phi_k^U(a) &= A_k U_k^V(a) - B_k U_k^U(a), & \Phi_k^V(a) &= A_k V_k^V(a) - B_k V_k^U(a), \\
\Phi_k^F(a) &= A_k F_k^V(a) - B_k F_k^U(a), & \Phi_k^G(a) &= A_k G_k^V(a) - B_k G_k^U(a), \\
U_k^V(a) &= \alpha^3 u_k(a_1) v_k'(a_0) - \alpha^2 u_k'(a_1) v_k(a_0) + \alpha v_k(a_1) u_k'(a_0) - v_k'(a_1) u_k(a_0), \\
U_k^U(a) &= \alpha^3 u_k(a_1) u_k'(a_0) - \alpha^2 u_k'(a_1) u_k(a_0) - \alpha v_k(a_1) v_k'(a_0) + v_k'(a_1) v_k(a_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_k^V(a) &= \alpha^3 v_k(a_1) v_k'(a_0) - \alpha^2 v_k'(a_1) v_k(a_0) - \alpha u_k(a_1) u_k'(a_0) + u_k'(a_1) u_k(a_0), \\
V_k^U(a) &= \alpha^3 v_k(a_1) u_k'(a_0) - \alpha^2 v_k'(a_1) u_k(a_0) + \alpha u_k(a_1) v_k'(a_0) - u_k'(a_1) v_k(a_0), \\
F_k^V(a) &= \alpha^3 f_k(a_1) v_k'(a_0) - \alpha^2 f_k'(a_1) v_k(a_0) + \alpha g_k(a_1) u_k'(a_0) - g_k'(a_1) u_k(a_0), \\
F_k^U(a) &= \alpha^3 f_k(a_1) u_k'(a_0) - \alpha^2 f_k'(a_1) u_k(a_0) - \alpha g_k(a_1) v_k'(a_0) + g_k'(a_1) v_k(a_0), \\
G_k^V(a) &= \alpha^3 g_k(a_1) v_k'(a_0) - \alpha^2 g_k'(a_1) v_k(a_0) - \alpha f_k(a_1) u_k'(a_0) + f_k'(a_1) u_k(a_0), \\
G_k^U(a) &= \alpha^3 g_k(a_1) u_k'(a_0) - \alpha^2 g_k'(a_1) u_k(a_0) + \alpha f_k(a_1) v_k'(a_0) - f_k'(a_1) v_k(a_0), \\
a_1 &= \lambda a, \quad a_0 = \varepsilon a, \quad \alpha = \varepsilon / \lambda.
\end{aligned}$$

Воспользуемся ещё раз теоремами сложения функций Кельвина, на этот раз для перехода от координат  $\rho, \theta$  к координатам  $r, \varphi$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} / \sum_{k=0}^{\infty} / (-1)^k \left\{ \left[ u_{1nk}(e_1) \Phi_k^U(a) - v_{1nk}(e_1) \Phi_k^V(a) + u_{nk}(e_1) \Phi_k^F(a) - v_{nk}(e_1) \Phi_k^G(a) \right] \times \right. \\
& \times u_n(r_1) + \left[ u_{2nk}(e_1) \Phi_k^U(a) - v_{2nk}(e_1) \Phi_k^V(a) - v_{nk}(e_1) \Phi_k^F(a) - u_{nk}(e_1) \Phi_k^G(a) \right] \times \\
& \left. \times v_n(r_1) \right\} \cos n\varphi = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} / \left\{ \left[ u_{1n0}(e_1) v_0'(a_1) + v_{1n0}(e_1) u_0'(a_1) + u_{n0}(e_1) g_0'(a_1) + v_{n0}(e_1) f_0'(a_1) \right] u_n(r_1) + \right. \\
& \left. + \left[ u_{2n0}(e_1) v_0'(a_1) + v_{2n0}(e_1) u_0'(a_1) + u_{n0}(e_1) f_0'(a_1) - v_{n0}(e_1) g_0'(a_1) \right] v_n(r_1) \right\} \cos n\varphi
\end{aligned}$$

В силу линейной независимости функций  $\cos n\varphi$  и системы функций Кельвина  $u_n(r_1), v_n(r_1)$  получим из последнего соотношения бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $A_k, B_k$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_{1nk}^V A_k - \alpha_{1nk}^U B_k] = \beta_{1n}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_{2nk}^V A_k - \alpha_{2nk}^U B_k] = \beta_{2n}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.10)$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{1nk}^V &= (-1)^k \left[ u_{1nk}(e_1) U_k^U(a) - v_{1nk}(e_1) V_k^V(a) + u_{nk}(e_1) F_k^V(a) - v_{nk}(e_1) G_k^V(a) \right], \\
\alpha_{2nk}^V &= (-1)^k \left[ u_{2nk}(e_1) U_k^U(a) - v_{2nk}(e_1) V_k^V(a) - v_{nk}(e_1) F_k^V(a) - u_{nk}(e_1) G_k^V(a) \right] \\
\beta_{1n} &= u_{1n0}(e_1) v_0'(a_1) + v_{1n0}(e_1) u_0'(a_1) + u_{n0}(e_1) g_0'(a_1) + v_{n0}(e_1) f_0'(a_1), \\
\beta_{2n} &= u_{2n0}(e_1) v_0'(a_1) + v_{2n0}(e_1) u_0'(a_1) + u_{n0}(e_1) f_0'(a_1) - v_{n0}(e_1) g_0'(a_1),
\end{aligned}$$

$\alpha_{ink}^U$  получается из  $\alpha_{ink}^V$  ( $i = 1, 2$ ) заменой верхнего индекса.

Выражение для контактного давления найдём с помощью (16.3)

$$\sigma(\rho, \theta) = \frac{\gamma}{Kk_0 + 1} \left\{ K - \frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(\rho_0) + B_n v_n(\rho_0)] \cos n\theta \right\}$$

Из условия (16.2)

$$P = \frac{\pi a^2 \gamma}{Kk_0 + 1} \left\{ K + \frac{2}{a_0 k_0} [A_0 v_0'(R_0) - B_0 u_0'(R_0)] \right\}$$

И, окончательно, безразмерное контактное давление запишется в виде

$$\sigma^*(\rho, \theta) = \pi a^2 \frac{\sigma(\rho, \theta)}{P} = \frac{\left\{ Kk_0 - \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(\rho_0) + B_n v_n(\rho_0)] \cos n\theta \right\}}{Kk_0 + 2[A_0 v_0'(R_0) - B_0 u_0'(R_0)]/a_0} \quad (16.11)$$

Решение соответствующей осесимметричной задачи является частным случаем рассмотренной при  $e = 0$ , причём в силу свойств функций Кельвина автоматически получается  $A_n = B_n = 0$  при  $n \geq 1$  и в ряду (16.12) остаётся только нулевая гармоника.

Численные исследования решения (16.11) показывают, что качественная картина распределения контактных напряжений не зависит от коэффициента постели упругого основания и относительной толщины пластины  $h' = h/R$ .

Изолинии безразмерного напряжения  $\sigma^*(\rho, \theta)$  при различных значениях относительного эксцентриситета  $e' = e/R$  для малых ( $a' = a/R = 2$ ) относительных размеров штампа представлены на рис. 3.7, 3.8, а для больших ( $a' = 7$ ) – на рис. 3.9, 3.10. Эти результаты получены при  $E = 2 \cdot 10^5$  Мпа,  $\nu = 0,3$ ,  $K = 2 \cdot 10^8$  н/м<sup>3</sup>,  $h' = 0,05$ . На рисунках показана только половина области контакта  $0 \leq \theta \leq \pi$ , так как картина изолиний симметрична относительно оси  $\theta = 0$ .

Решение, полученное в этом параграфе, справедливо при безотрывном контакте (штамп приклеен или приварен к пластине). Расчёты показывают, что безотрывный контакт для неприклеенной пластины возможен только при очень малых ( $a \approx 0,1h$ ) размерах штампа. При бóльших размерах штампа возникают зоны отрыва, конфигурация которых зависит от относительного эксцентрисите-

та: при малых  $e'$  граница зоны отрыва близка к круговой, при больших  $e'$  границы зон отрыва имеют весьма сложные очертания, причём зона отрыва может выходить на границу штампа.

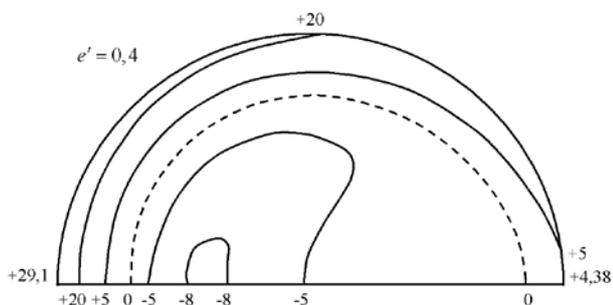


Рис. 3.7.  $a' = 2, e' = 0,4$ .

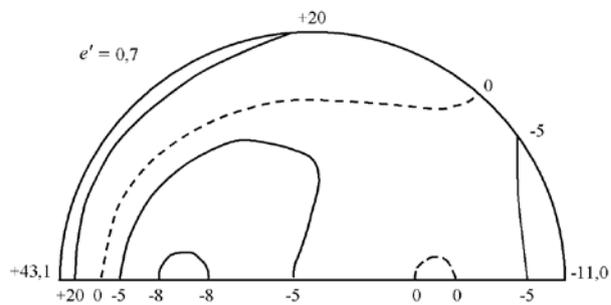


Рис. 3.8.  $a' = 2, e' = 0,7$ .

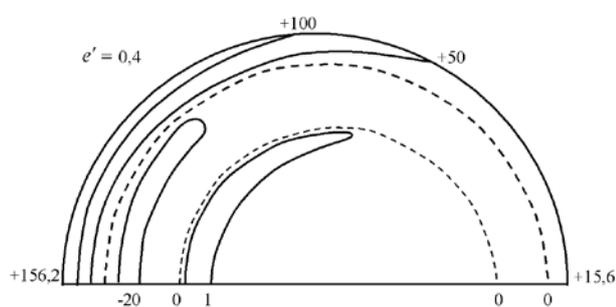


Рис. 3.9.  $a' = 7, e' = 0,4$ .

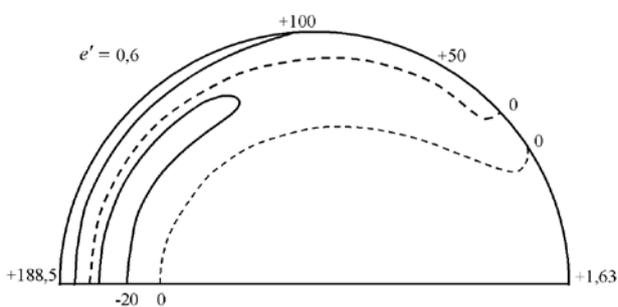


Рис. 3.10.  $a' = 7, e' = 0,6$ .

## § 17. Учёт деформаций поперечного сдвига в контактной задаче для пластины средней толщины [15]

Как известно, решение задач теории пластин и оболочек на основе классической теории Кирхгофа-Лява позволяет получать приемлемые по точности решения только для тонких объектов. Для пластин и оболочек средней толщины необходимо использовать теории, в которых учитываются деформации поперечного сдвига (искривление нормали к срединной поверхности). В работе [18] С. Н. Карасев, Ю. П. Артюхин исследовали влияние учёта деформаций поперечного сдвига на распределение контактных напряжений, но ограничились тонкими пластинами. Рассмотрим контактную задачу о взаимодействии штампа с пластиной средней толщины, лежащей на упругом основании.

Согласно математически корректной постановке контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе теории Кирхгофа-Лява с учетом местного обжатия, условия контакта поверхности тела и пластины записываются в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$k_0\sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = \alpha - f(x), \quad -a \leq x \leq a \quad (17.1)$$

где  $k_0 = h(1+\nu)(1-2\nu)/(2E(1-\nu))$  – коэффициент обжатия,  $\sigma(x)$  – неизвестное контактное давление,  $f(x)$  – функция формы подошвы штампа,  $\alpha$  – жесткое смещение штампа (штамп движется поступательно, без поворота). Точно такой же вид имеет и условие контакта при решении задачи на основе классической теории оболочек без учёта поперечного сдвига. Отличие заключается в том, что функция влияния  $G(x, \xi)$ , являющаяся прогибом пластинки под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке  $-L < \xi < L$ ,  $L$  – полуширина пластины, должна быть найдена из уравнения

$$LG(x, \xi) = L_1\delta(x - \xi) \quad (17.2)$$

$$L = \frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4, \quad L_1 = \frac{1}{D} - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dx^2}$$

при соответствующих граничных условиях. Здесь  $\delta(x - \xi)$  –  $\delta$ -функция Дирака,  $D$  – цилиндрическая жёсткость пластины,  $K = 5Gh/6$  – жёсткость на сдвиг,  $4\lambda^4 = k_0/D$ .

Связь между прижимающей штамп силой и жёстким смещением штампа выражается очевидным условием статического равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^a \sigma(x)dx \quad (17.3)$$

Для решения уравнения (17.1) применим изложенный ранее в § 14 метод сведения интегрального уравнения контактных задач к краевой задаче для вспомогательной функции, связанной с искомым контактным давлением дифференциальными соотношениями

$$L_1U(x) = \alpha - f(x) - k_0\sigma(x) \quad (17.4)$$

$$\sigma(x) = LU(x). \quad (17.5)$$

Тогда для функции  $U(x)$  имеем краевую задачу (17.6), (17.7)

$$(k_0L + L_1)U(x) = \alpha - f(x) \quad (17.6)$$

$$G(x, \xi)U'''(\xi) - G'_\xi(x, \xi)U''(\xi) + G''_{\xi\xi}(x, \xi)U'(\xi) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi)U(\xi) \Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0 \quad (17.7)$$

Решение контактной задачи получим при трёх различных вариантах закрепления пластины:

1) оба края жёстко защемлены

$$G(\pm L, \xi) = G'_x(\pm L, \xi) = 0 \quad (17.8)$$

2) оба края шарнирно опёрты

$$G(\pm L, \xi) = G''_{xx}(\pm L, \xi) = 0 \quad (17.9)$$

3) оба края свободны

$$G''_{xx}(\pm L, \xi) = G'''_{xxx}(\pm L, \xi) = 0 \quad (17.10)$$

Общее решение уравнения (17.2) достаточно просто получить методом вариации произвольных постоянных. Удовлетворяя граничным условиям, получим функцию влияния в виде

$$G(x, \xi) = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_{ki} Y_i(\lambda \xi) Y_k(\lambda x) + \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 B_{ki} Y_i(\lambda \xi) Y_k(\lambda x) H(x - \xi),$$

где  $H(x - \xi)$  – единичная функция Хэвисайда, конкретный вид  $C_{ki}$  определяется граничными условиями, здесь не приводится ввиду их громоздкости,  $Y_k(x)$  – балочные функции Крылова:

$$Y_1(x) = \operatorname{ch} x \cos x, \quad Y_2(x) = \operatorname{sh} x \sin x, \quad Y_3(x) = \operatorname{sh} x \cos x, \quad Y_4(x) = \operatorname{ch} x \sin x.$$

В случае плоского штампа  $f(x) = 0$  и общее решение уравнения (17.6) имеет вид

$$U(x) = \sum_{k=1}^4 A_k V_k(x) + \alpha / k_0$$

$V_1(x) = \operatorname{ch} a_1 x \cos a_2 x$ ,  $V_2(x) = \operatorname{sh} a_1 x \sin a_2 x$ ,  $V_3(x) = \operatorname{sh} a_1 x \cos a_2 x$ ,  $V_4(x) = \operatorname{ch} a_1 x \sin a_2 x$   
 $a_1$ ,  $a_2$  – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (17.6).

Подставляя  $U(\xi)$  и  $G(x, \xi)$  в условие (17.7), приведём его к виду

$$\sum_{k=1}^4 F_k(A_1, A_2, A_3, A_4, a) Y_k(x) = 0.$$

Так как это соотношение должно выполняться при любом  $x \in (-a, a)$ , то коэффициенты при  $Y_k(x)$  должны равняться нулю. Таким образом, произвольные постоянные  $A_1, A_2, A_3, A_4$  есть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$F_k(A_1, A_2, A_3, A_4, a) = 0, \quad k = \overline{1, 4}$$

и может быть выписано в замкнутом виде. Конкретные выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

### Численные результаты.

Далее представлены некоторые результаты расчётов относительного контактного давления  $\sigma_0(x) = \sigma(x)/P$  в зависимости от  $x/L$  для пластины  $L=1$  различной толщины  $h$  при различных размерах штампа. В силу симметрии задачи графики построены только для правой половины штампа  $0 \leq x \leq a$ . Числами отмечены результаты, соответствующие различным относительным размерам штампа:  $a/L = 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9$ . На рис. 3.11 и 3.12 показаны результаты для жёсткого защемления, на рис. 3.13 и 3.14 – для шарнирного опирания, на рис. 3.15 и 3.16 – для свободного края. Рисунки 3.11, 3.13, 3.15 иллюстрируют распределение относительного контактного давления для тонких пластин  $h = 0,1L$ , рисунки 3.12, 3.14, 3.16 – для пластин средней толщины  $h = 0,5L$ .

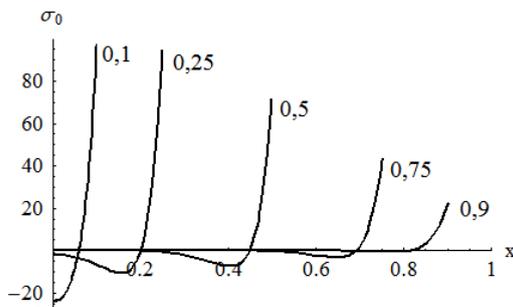


Рис. 3.11.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0,1$

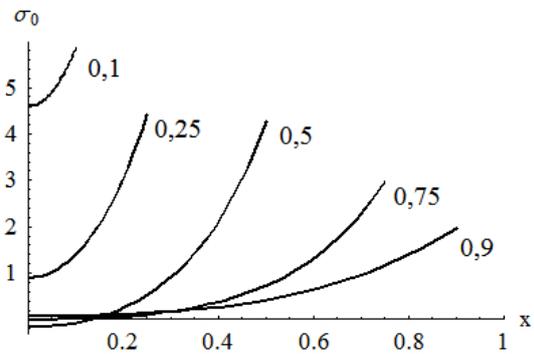


Рис. 3.12.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0,5$

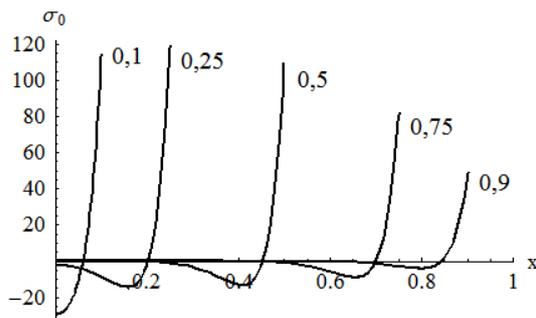


Рис. 3.13.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0,1$

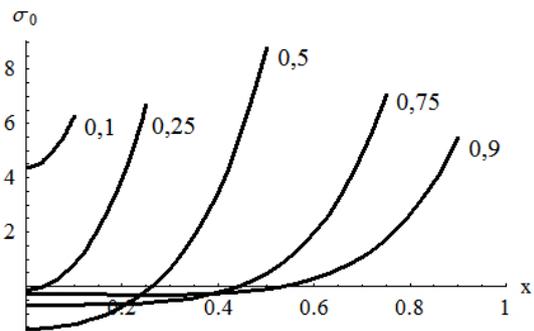


Рис. 3.14.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0,5$

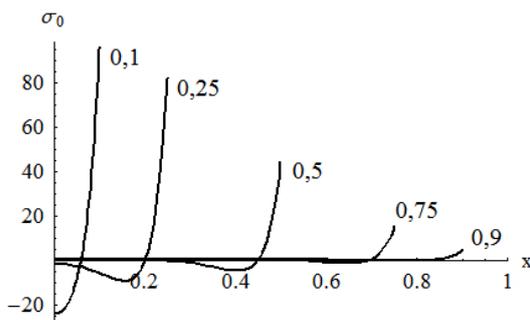


Рис. 3.15.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0,1$

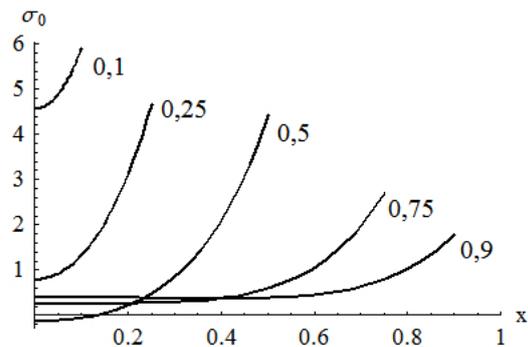


Рис. 3.16.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0,5$

Хорошо виден различный характер распределения контактных напряжений при разной толщине пластин. Для тонких пластин результаты совпадают с полученными ранее решениями на основе теории Кирхгофа-Лява. Для пластин средней толщины при малых областях контакта напряжения только положительные, в отличие от тонких пластин. При увеличении размера штампа в центральной зоне области контакта появляются отрицательные напряжения, то есть в случае одностороннего взаимодействия в этой зоне будет происходить отрыв поверхности пластины от штампа. Размер этих зон зависит от условий закрепления краёв пластины.

Анализ численных результатов также показывает существенную зависимость распределения контактных напряжений от условий закрепления пластины не только для больших относительных размеров штампа, но и для малых, при значительном удалении границ области контакта от краёв пластины.

Результаты исследования могут быть использованы при верификации алгоритмов и программ численного решения задач контактного взаимодействия.

Часть представленных в настоящем параграфе результатов была получена студентами С. В. Красновым, Я. В. Моренко и Е. В. Сметаниной при выполнении курсовых и дипломных работ.

## Приложение 1. Теорема сложения для функций Кельвина

Теорему сложения для функций Кельвина получим из общей теоремы сложения для цилиндрических функций [19, 20]: при

$$z_1 - z_2 \cos \zeta = z_3 \cos \psi, \quad z_2 \sin \zeta = z_3 \sin \psi \quad (\text{П 1.1})$$

имеют место разложения

$$J_\nu(\alpha z_3) \frac{\cos \nu \psi}{\sin \nu \psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{\nu+k}(\alpha z_1) J_\nu(\alpha z_2) \frac{\cos k \zeta}{\sin k \zeta} \quad (\text{П 1.2})$$

$$H_\nu^{(1)}(\alpha z_3) \frac{\cos \nu \psi}{\sin \nu \psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\nu+k}^{(1)}(\alpha z_1) J_\nu(\alpha z_2) \frac{\cos k \zeta}{\sin k \zeta} \quad (\text{П 1.3})$$

где  $\alpha$  – произвольное комплексное число.

Формулы (П 1.2), (П 1.3) справедливы при  $z_2 \leq z_1$ . Если же  $z_2 \geq z_1$ , то в правой части надо поменять местами  $z_1$  и  $z_2$ . Это ограничение не нужно, если  $\nu$  – целое или нуль и в формулу входят только функции Бесселя 1-го рода.

Величины, входящие в (П 1.1), допускают простую геометрическую интерпретацию, как стороны и углы треугольника  $\triangle ABC$  – рис. П.1.1.

Полагая в (П 1.2), (П 1.3)  $z_1 = e$ ,  $z_2 = r$ ,  $z_3 = \rho$ ,  $\alpha = \sqrt{i}$ ,  $\psi = \pi - \theta$ ,  $\zeta = \varphi$  получим

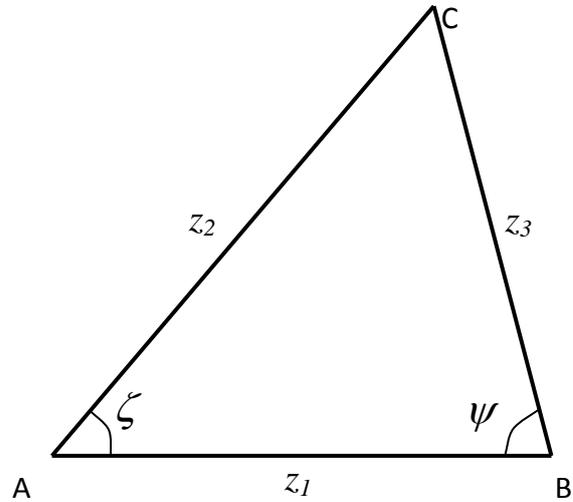


Рис. П.1.1

$$J_\nu(\rho \sqrt{i}) \frac{\cos \nu(\pi - \theta)}{\sin \nu(\pi - \theta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{\nu+k}(e \sqrt{i}) J_\nu(r \sqrt{i}) \frac{\cos k \varphi}{\sin k \varphi} \quad (\text{П 1.4})$$

$$H_\nu^{(1)}(\rho \sqrt{i}) \frac{\cos \nu(\pi - \theta)}{\sin \nu(\pi - \theta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\nu+k}^{(1)}(e \sqrt{i}) J_\nu(r \sqrt{i}) \frac{\cos k \varphi}{\sin k \varphi} \quad (\text{П 1.5})$$

Принимая для функций Кельвина обозначения Б. Г. Коренева [15]:

$$u_n(x) + i v_n(x) = J_n(x \sqrt{i}), \quad f_n(x) + i g_n(x) = H_n^{(1)}(x \sqrt{i})$$

и разделяя в (П 1.4), (П 1.5) действительную и мнимую части, придём к теоремам сложения для функций Кельвина:

$$u_\nu(\rho) \frac{\cos \nu\theta}{-\sin \nu\theta} = (-1)^\nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u_{\nu+k}(e)u_k(r) - v_{\nu+k}(e)v_k(r)] \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi} \quad (\text{П 1.6})$$

$$v_\nu(\rho) \frac{\cos \nu\theta}{-\sin \nu\theta} = (-1)^\nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} [v_{\nu+k}(e)u_k(r) + u_{\nu+k}(e)v_k(r)] \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi} \quad (\text{П 1.7})$$

$$f_\nu(\rho) \frac{\cos \nu\theta}{-\sin \nu\theta} = (-1)^\nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f_{\nu+k}(e)u_k(r) - g_{\nu+k}(e)v_k(r)] \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi} \quad (\text{П 1.8})$$

$$g_\nu(\rho) \frac{\cos \nu\theta}{-\sin \nu\theta} = (-1)^\nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} [g_{\nu+k}(e)u_k(r) + f_{\nu+k}(e)v_k(r)] \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi} \quad (\text{П 1.9})$$

Преобразуя аналогичным образом теоремы сложения (П 1.2), (П 1.3) при  $z_1 = e$ ,  $z_2 = \rho$ ,  $z_3 = r$ ,  $\alpha = \sqrt{i}$ ,  $\psi = \varphi$ ,  $\zeta = \pi - \theta$ , получим теоремы сложения в следующей форме

$$u_\nu(r) \frac{\cos \nu\varphi}{\sin \nu\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [u_{\nu+k}(e)u_k(\rho) - v_{\nu+k}(e)v_k(\rho)] \frac{\cos k\theta}{-\sin k\theta} \quad (\text{П 1.10})$$

$$v_\nu(r) \frac{\cos \nu\varphi}{\sin \nu\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [v_{\nu+k}(e)u_k(\rho) + u_{\nu+k}(e)v_k(\rho)] \frac{\cos k\theta}{-\sin k\theta} \quad (\text{П 1.11})$$

$$f_\nu(r) \frac{\cos \nu\varphi}{\sin \nu\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [f_{\nu+k}(e)u_k(\rho) - g_{\nu+k}(e)v_k(\rho)] \frac{\cos k\theta}{-\sin k\theta} \quad (\text{П 1.12})$$

$$g_\nu(r) \frac{\cos \nu\varphi}{\sin \nu\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [g_{\nu+k}(e)u_k(\rho) + f_{\nu+k}(e)v_k(\rho)] \frac{\cos k\theta}{-\sin k\theta} \quad (\text{П 1.13})$$

При  $\nu$  – не целом эти соотношения справедливы при  $\rho \leq e$ . Если  $\rho \geq e$ , то в правой части надо поменять местами  $\rho$  и  $e$ . При  $\nu$  – целом или нуле это замечание остаётся в силе для формул (П 1.12), (П 1.13), а в (П 1.10), (П 1.11) никаких ограничений на  $\rho$  и  $e$  в этом случае не накладывается.

## Литература

1. Артюхин Ю. П. Контактные задачи для упругих элементов конструкций. Учебное пособие. Набережные Челны: КамПИ, 1988. 78 с.
2. Механика контактных взаимодействий. Под редакцией Воровича И. И., Александрова В. М. М.: Физматлит, 2001. 671 с.
3. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
4. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 520 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.
9. Клубин П. И. Расчёт балочных и круглых плит на упругом основании // Инженерный сборник, 1952, т. 12. С. 95–135.
10. Попов Г.Я. Математические проблемы контактных задач: учебное пособие. Одесса: Одесский университет, 1976. 114 с.
11. Попов Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости // ПММ, 1969, т. 32, вып. 3.
12. Артюхин Ю. П. Одномерные контактные задачи теории оболочек // МТТ, 1981, № 3. С. 55–65.
13. Григолюк Э. И., Толкачёв В. М. Цилиндрический изгиб пластины жёсткими штампами // ПММ, 1975, т. 39, вып. 5. С. 876–883.
14. Кузнецов С.А. Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при внецентренном положении штампа.

Механика сплошных сред: Тез. докл. Респ. научно-техн. конф., Набережные Челны, 1982. С. 105.

15. Коренев Б. Г. Задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: ГИФМП, 1960. 458 с.

16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. II. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970. 327 с.

17. Кузнецов С.А., Краснов С.В., Моренко Я.В., Сметанина Е.В., Старожилова О.В. Контактная задача о взаимодействии с жёстким телом пластины средней толщины, лежащей на упругом основании

18. Карасев С. Н., Артюхин Ю. П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исследования по теории пластин и оболочек. № 12. Казань: Изд-во КГУ, 1976. С. 68–76.

19. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 423 с.

20. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.