Математические заметки

Том 96 выпуск 3 сентябрь 2014

УДК 517.983+517.986

О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $1 \geqslant q > 0$. Получены обобщения задач 163 и 139 из книги [1] на τ-измеримые операторы: установлено, что 1) каждый τ-компактный q-гипонормальный оператор нормален; 2) если τ-измеримый оператор A нормален и для некоторого натурального числа n оператор A^n τ-компактен, то и оператор A τ-компактен. Доказано, что если τ-измеримый оператор A гипонормален и оператор A^2 τ-компактен, то и оператор A τ-компактен. Установлено новое свойство невозрастающей перестановки произведения гипонормального и когипонормального τ-измеримых операторов. Для нормальных τ-измеримых операторов A и B показано совпадение невозрастающих перестановок операторов AB и BA. Приведены приложения полученных результатов к F-нормированным симметричным пространствам на $(\mathcal{M},\tau)$.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10311

Введение. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ – $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, $1 \geqslant q > 0$. В работе получены обобщения задач 163 и 139 из книги Халмоша [1] на τ-измеримые операторы: установлено, что

1) каждый τ-компактный q-гипонормальный оператор нормален (теорема 2.2);
2) если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален и для некоторого натурального числа n оператор A^n τ-компактен, то и оператор A τ-компактен (п. (i) следствия 3.2).

Доказательство теоремы 2.2 опирается на один глубокий результат из [2]. Нами показано, что если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален и оператор A^2 τ-компактен, то и оператор A τ-компактен (п. (i) следствия 3.4). Установлено новое свойство невозрастающих перестановок произведения гипонормального и когипонормального τ-измеримых операторов (теорема 3.5). Для нормальных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ показано совпадение невозрастающих перестановок операторов AB и BA (следствие 3.6). Из известного свойства перестановок (см. п. 6) леммы 1.1) имеем: неотрицательный оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ τ-компактен тогда и только тогда, когда τ-компактен A^p для всех $p > 0$. В теореме 4.1 показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$: τ-компактность AB эквивалентна τ-компактности операторов $A^p B^r$ для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к F-нормированным симметричным пространством на $(\mathcal{M},\tau)$.