КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Киясов С. Н., Шурыгин В. В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ОСНОВЫ ТЕОРИИ,
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Казань — 2011

УДК 517.9

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

методической комиссии механико-математического факультета Протокол № 9 от 7 апреля 2011 г.

заседания кафедры дифференциальных уравнений Протокол № 9 от 23 марта 2011 г.

Научный редактор:
доктор физ.-мат. наук, проф. И.А. Бикчантаев

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ Н.Б. Плещинский
канд. физ.-мат. наук, проф. КВВКУ Л.К. Астафьева

Киясов Сергей Николаевич, Шурыгин Вадим Вадимович.
Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач: Учебное пособие / С.Н. Киясов, В.В. Шурыгин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2011. – 112 с.

Учебное пособие предназначено для студентов II курса механико-математического факультета КФУ.

Часть 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{0.1}$$

в котором x — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция. *Дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*, называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{0.2}$$

Правую часть уравнения (0.2) будем считать определенной на некотором открытом множестве D плоскости (x, y). Иногда уравнение (0.2) записывают в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{0.3}$$

и называют *уравнением первого порядка, записанным в дифференциалах.*

Решением уравнения (0.2) (или (0.3)) на интервале I оси x называется любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на I. *Общим решением* уравнения (0.2) называется множество всех его решений. Общее решение зависит от одной произвольной постоянной C и дается формулой

$$y = \varphi(x, C). \tag{0.4}$$

Выражение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{0.5}$$

из которого y определяется неявно как функция от x называется *общим интегралом* уравнения (0.2).

Решить уравнение (0.2) означает найти его общее решение или общий интеграл. При этом предпочтение, как правило, отдается более компактной записи ответа.

Формы записи уравнения в виде (0.2) или (0.3) равносильны и из одной записи можно получить другую. Однако, в некоторых случаях, форма записи (0.3) оказывается предпочтительнее, так как в нее переменные x и y входят симметрично. Поэтому, если независимую переменную и искомую функцию поменять местами (разрешить уравнение относительно $\dfrac{dx}{dy}$), то общее решение $x = \psi(y, C)$ полученного уравнения определит общий интеграл уравнения (0.2).

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (0.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{где} \quad (x_0, y_0) \in D. \tag{0.6}$$

Условие (0.6) называется *начальным условием*, а сама поставленная задача — *задачей Коши*. Любое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (0.2) определяет на множестве D некоторую кривую, которую называют *интегральной кривой* уравнения. Поэтому, геометрический смысл задачи Коши состоит в том, чтобы найти интегральную кривую уравнения, проходящую через точку $(x_0, y_0) \in D$. Чтобы решить задачу Коши, нужно подставить начальное условие (0.6) в (0.4) или (0.5) и определить оттуда значение $C = C_0$, при котором точка (x_0, y_0) лежит на искомой интегральной кривой. Тогда решение задачи Коши запишется в виде $y = \varphi(x, C_0)$ или $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

§1. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными — это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \tag{1.1}$$

или же в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{1.2}$$

Чтобы решить такое уравнение, необходимо *разделить переменные*, то есть, привести уравнение к такой форме, чтобы при дифференциале dx стояла функция, зависящая лишь от x, а при дифференциале dy — функция, зависящая от y. Для этого уравнение вида (1.1) следует переписать в форме

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx,$$

а уравнение вида (1.2) в форме

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0.$$

Таким образом, уравнение с разделяющимися переменными сводится к уравнению

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0. \tag{1.3}$$

Пусть $F(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ и $G(y)=\displaystyle\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy$, $(x_0,y_0)\in D$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(y)$ соответственно. Тогда их дифференциалы равны

$$dF(x)=f(x)\,dx \quad \text{и} \quad dG(y)=g(y)\,dy.$$

Следовательно, уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$dF(x)+dG(y)=d(F(x)+G(y))=0.$$

Но дифференциал функции равен нулю тогда и только тогда, когда эта функция — константа. Поэтому общим решением уравнения (1.3) будет

$$F(x)+G(y)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+\int_{y_0}^{y} g(x)\,dy=\mathrm{const}.$$

Заметим, что при разделении переменных могут теряться решения вида $x=x_0$, $y=y_0$ за счет обращения в нуль функций $P(x)$ и $N(y)$. Поэтому, если потерянное решение не может быть получено из общего решения при каком-нибудь $C=C_0$, его необходимо также включить в ответ.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (задачу Коши)

$$(x+1)y\,dx+(y+2)\,dy=0, \quad y(1)=1. \tag{1.4}$$

Решение. Разделяя переменные, получим

$$(x+1)\,dx+\frac{y+2}{y}\,dy=0.$$

Интегрируем полученные выражения и учитывая, что неопределенный интеграл означает множество всех первообразных, отличающихся на постоянную, получим

$$\int(x+1)\,dx+\int\frac{y+2}{y}\,dy=\frac{1}{2}(x+1)^2+(y+2\ln|y|)+C=0.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1.4) (если произвольную постоянную C взять в виде $-C$) есть

$$\frac{1}{2}(x+1)^2+(y+2\ln|y|)=C.$$

В процессе преобразования уравнения мы делили на y. Подставив $y=0$ в уравнение (1.4), убеждаемся, что $y=0$ тоже является решением и не получается из общего интеграла ни при каком значении C, так как не входит в область его определения.

Подставив $x = 1$, $y = 1$ в общий интеграл, найдем решение задачи Коши: $\frac{1}{2}(x+1)^2 + (y + 2\ln|y|) = 3$.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^2(y+1)\,dx + (x^3-1)(y-1)\,dy = 0. \tag{1.5}$$

Решение. Разделяем переменные:

$$\frac{x^2}{x^3-1}\,dx + \frac{y-1}{y+1}\,dy = 0.$$

При этом мы делим на x^3-1 и $y+1$, поэтому необходимо отдельно рассмотреть случаи $x^3-1=0$ и $y+1=0$. Подставив в уравнение (1.5) сначала $x=1$, а потом $y=-1$, убеждаемся, что обе эти функции являются решениями.

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx + \int \frac{y-1}{y+1}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{x^3-1} + \int\left(1 - \frac{2}{y+1}\,dy\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + y - 2\ln|y+1| + C = 0.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1.5) можно записать так:

$$\frac{1}{3}\ln|x^3-1| + y - 2\ln|y+1| = C, \quad x = 1, \quad y = -1.$$

Если постоянную C взять в виде $\ln|C|$, то общий интеграл запишется следующим образом:

$$\frac{(x^3-1)^{1/3}e^y}{(y+1)^2} = C.$$

В этой форме записи решение $x = 1$ содержится при $C = 0$. Поэтому к общему интегралу такого вида следует добавить лишь решение $y = -1$.

Если же постоянную взять в виде $-\ln|C|$ и переписать общий интеграл в виде $(y+1)^2 = Ce^y(x^3-1)^{1/3}$, то, наоборот, решение $y = -1$ получится при $C = 0$.

Пример 3. Решим уравнение

$$y'(y+1)\sin x + 2y = y^2.$$

Решение. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx}(y+1)\sin x = y^2 - 2y.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{(y+1)dy}{y(y-2)} = \frac{dx}{\sin x}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{2}\frac{dy}{y} + \frac{3}{2}\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Проинтегрируем:

$$-\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{3}{2}\ln|y-2| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Заменяя C на $\ln|C|$ и потенцируя, получим окончательно

$$\frac{(y-2)^3}{y} = C\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Кроме того, мы должны исследовать случаи $y(y-2) = 0$ и $\sin x = 0$. Первый случай дает функции $y = 0$ и $y = 2$, являющиеся решениями исходного уравнения, а второй — функции $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, которые уравнению не удовлетворяют. Так как $y = 2$ содержится в общем интеграле при $C = 0$, то к нему следует добавить лишь решение $y = 0$.

1.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

К таким уравнениям относятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c).$$

Сделав в таком уравнении замену $z = ax + by + c$, получим уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dz}{dx} = bf(z) + a$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y' = (2x + 3y + 1)^2. \tag{1.6}$$

Решение. Сделаем замену $z = z(x) = 2x+3y+1$, тогда $y = \dfrac{1}{3}(-2x+z-1)$. Поэтому $y' = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}z'$. Подставим это в исходное уравнение: $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}z' = z^2$, откуда

$$\frac{dz}{dx} = 3(z^2+2) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{z^2+2} = 3\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение и делая обратную замену, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} = 3x + C, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3y+1}{\sqrt{2}} = 3x + C.$$

Поскольку выражение z^2+2 не обращается в нуль в ни при одном значении z, потери решений не произошло.

§2. Задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными

При составлении дифференциальных уравнений в физических задачах важно правильно выбрать независимую переменную и искомую функцию, описывающую происходящий процесс. За независимую переменную, как правило, берется время t от начала процесса. Рассматривая приращение искомой функции за произвольный малый промежуток времени и выражая это приращение через данные, указанные в задаче, в пределе, при стремлении этого промежутка времени к нулю, получают дифференциальное уравнение. Часто дифференциальное уравнение можно составить исходя из физического смысла производной. Так производная неизвестной функции $x(t)$ означает скорость ее изменения: $x(t)$ — путь, $x'(t)$ — скорость; $x(t)$ — скорость, $x'(t)$ — ускорение и т.д. При составлении дифференциальных уравнений в геометрических задачах используется геометрический смысл производной.

Пример 1. Через 12 часов после начала опыта численность некоторой популяции бактерий возросла в 3 раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток? Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству.

Решение. Пусть $x(t)$ — количество бактерий в момент времени t. Скорость их размножения (изменение их количества в момент времени t) есть производная $x'(t)$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{dt} = kx$, где k — некоторый коэффициент, пока неизвестный. Решая это уравнение, получаем $x = Ce^{kt}$. Примем, что начальное количество бактерий равно N (в принципе, ничто не мешает считать это количество равным единице). Подставляя $t = 0$, получаем $C = x(0) = N$. После этого подставим $t = 12$. Получим $Ne^{12k} = 3N$, откуда $e^{12k} = 3$. Следовательно, $x(72) = Ne^{72k} = N(e^{12k})^6 = 3^6 \cdot N = 729N$.

Ответ: количество бактерий возрастет в 729 раз.

Пример 2. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 0{,}2$ м и вылетает из нее со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Считая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время T движения пули в стене.

Решение. Второй закон Ньютона гласит, что сумма сил, действующих на тело, векторно равна ускорению тела, помноженному на его массу. Ускорение тела есть $w = \dfrac{dv}{dt}$. В данном случае на пулю действует сила сопротивления $F_c = -kv^2$ (знак «$-$» соответствует направлению силы сопротивления). Кроме того, на нее действует сила тяжести mg, которой в данном случае можно пренебречь. Следовательно, уравнение движения пули имеет вид $m\dfrac{dv}{dt} = -kv^2$. Массу пули можно считать единичной (а можно считать коэффициент сопротивления равным k/m). Поэтому мы запишем это уравнение в виде

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Решая его, получаем $\dfrac{1}{v} = kt + C$, откуда $v = \dfrac{1}{kt+C}$. Подставив $t = 0$, получим $1/C = v_0$. После этого, подставив $t = T$, получим $\dfrac{1}{kT + 1/v_0} = v_1$, откуда $kT = \dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{v_0}$. Осталось определить величину k. Путь, пройденный пулей в стене, равен $\displaystyle\int_0^T v(t)\,dt$. Вычислим этот интеграл:

$$\int_0^T \frac{dt}{kt+C} = \frac{1}{k}\ln(kT+C)\,\Big|_0^T = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kT+C}{C}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kT}{C}+1\right) = \\ = \frac{1}{k}\ln\left(v_0\Big(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_0}\Big)+1\right) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right).$$

Подставив сюда численные данные, указанные в условии, получим $0{,}2 = \dfrac{1}{k}\ln 4$, откуда $k = 5\ln 4$. Наконец, $T = \dfrac{1}{k}\Big(\dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{v_0}\Big) = \dfrac{3}{2000\ln 4}$.

Пример 3. На дне цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью, образовалось отверстие. В течение первых суток вытекло 10% содержимого. Определить, когда из сосуда вытечет половина жидкости. Скорость истечения жидкости через малое отверстие, находящееся на расстоянии h ниже уровня жидкости, равна $\mu\sqrt{2gh}$ (закон Торричелли), где μ — некоторый коэффициент. Можно считать $\mu = 0{,}6$.

Решение. Обозначим $h(t)$ уровень жидкости в резервуаре. Пусть S — площадь основания резервуара, а s_0 — площадь отверстия. Рассмотрим промежуток времени от t до $t+\Delta t$. За этот промежуток количество жидкости в резервуаре изменится на величину $Sh(t+\Delta t) - Sh(t)$. С другой стороны, в течение этого промежутка уровень жидкости равен $h(t)+\alpha(t)$, где $\alpha(t) = o(\Delta t)$ — величина бóльшего порядка малости, чем Δt. Следовательно, количество жидкости, вытекшей за это время, будет равно $\mu\sqrt{2g(h(t)+\alpha(t))}\cdot s_0\cdot\Delta t$. Отсюда

$$S(h(t+\Delta t) - h(t)) = -\mu\sqrt{2g(h(t)+\alpha(t))}\cdot s_0\cdot\Delta t.$$

Поделим обе части уравнения на $S\cdot\Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. Получим $h'(t) = -\dfrac{\mu s_0\sqrt{2g}}{S}\sqrt{h}$. Обозначив $k = -\dfrac{\mu s_0\sqrt{2g}}{S}$, получим для функции h уравнение

$$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Его решение имеет вид $2\sqrt{h} = kt + C$. Поскольку нам нужно найти время, а не высоту, не будем выражать h из этого соотношения.

Будем считать высоту резервуара равной 1. Тогда из условий задачи вытекает, что $h(0) = 1$ и $h(24) = 0{,}9$. Первое из этих равенств дает $C = 2$, тогда из второго следует, что $12k + 1 = \sqrt{0{,}9}$. Нам требуется решить уравнение $h(T) = 0{,}5$. Тогда T удовлетворяет уравнению $2\sqrt{0{,}5} = kT + 2$, из которого $T = \dfrac{2\sqrt{0{,}5} - 2}{k} = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{0{,}5} - 1}{\sqrt{0{,}9} - 1} \approx 68{,}5$.

Ответ: примерно через 68 ч 30 мин.

Пример 4. Найти кривую, проходящую через точку $(2, 3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок произвольной ее касательной, концы которого лежат на осях координат, делится точкой касания пополам.

Решение. Изобразим на рисунке эскиз графика функции $y(x)$ и проведем в какой-либо его точке (x_0, y_0) касательную прямую. Отметим точки A и B ее пересечения с осями координат. Условие задачи означает, что точка касания делит отрезок AB пополам. Очевидно, это равносильно тому, что абсцисса x_A точки A по абсолютной величине вдвое больше абсолютной величины абсциссы x_0. Чтобы составить дифференциальное уравнение кривой, нам необходимо определить x_A. Запишем уравнение касательной

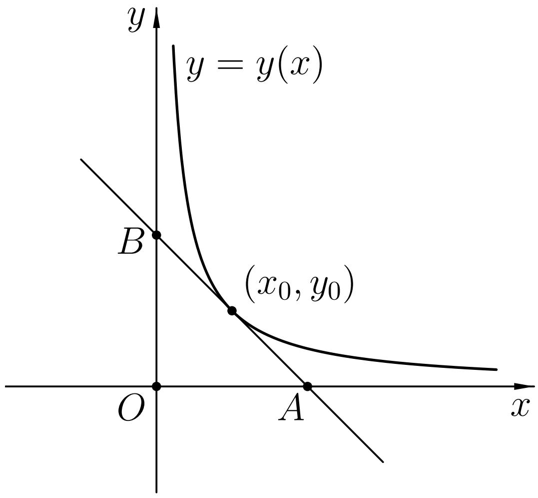

Рис. 1.

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

к кривой в точке (x_0, y_0). Подставив $y = 0$, получим $x_A = x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)}$. Учитывая геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной к кривой с положительным направлением оси абсцисс), находим, что в соответствующих квадрантах значения x_0, y_0, $y'(x_0)$ имеют следующие знаки: в первом квадранте $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $y'(x_0) < 0$; во втором квадранте $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, $y'(x_0) > 0$; в третьем квадранте $x_0 < 0$, $y_0 < 0$, $y'(x_0) < 0$; в четвертом квадранте $x_0 > 0$, $y_0 < 0$, $y'(x_0) > 0$. Следовательно, для искомой кривой должно выполняться равенство $x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)} = 2x_0$ или $y'(x_0) = -x_0 y_0$.

Учитывая, что точка (x_0, y_0) — произвольная, дифференциальное уравнение этой кривой имеет вид

$$y' = -xy \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Решением этого уравнения служат функции $y = \dfrac{C}{x}$.

В частности, чтобы найти ту кривую, которая проходит через точку $(2, 3)$, подставим эти числа в уравнение кривой и найдем $C = 6$.

Ответ: $y = 6/x$.

§3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

3.1. Однородные уравнения

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется *однородной* степени m (еще говорят, с показателем однородности m), если для всех t (или хотя бы для $t > 0$) справедливо соотношение

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \tag{3.1}$$

Так, функции $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = x^3y - 7y^4 + 2x^2y^2$, $h(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ являются однородными функциями степеней 1, 4 и 3/2, соответственно (проверьте это!). Функция $\varphi(x, y) = x^2y^3 - y^6$ не является однородной.

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

называется *однородным*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени m. Можно показать, что однородное уравнение может также быть записано в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.3}$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции y по формуле

$$y(x) = x \cdot t(x). \tag{3.4}$$

Тогда производная y' и дифференциал dy заменяются по формулам

$$y' = t'x + t, \qquad dy = t\,dx + x\,dt.$$

После решения полученного уравнения нужно сделать обратную подстановку

$$t = \frac{y}{x}.$$

Пример 1. Решим уравнение

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad y(0) = -1. \tag{3.5}$$

Решение. Уравнение имеет вид (3.3). Делаем замену $y = tx$. Тогда уравнение (3.5) запишется в виде $t'x + t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, откуда $x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{t - t^3}{1 + t^2}$. Разделив переменные, получим

$$\frac{(1+t^2)dt}{t(1-t^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Преобразовывая дробь в левой части последнего уравнения, запишем

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right) dt = \frac{dx}{x}.$$

Тогда

$$\int \left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right) dt = \int \frac{dx}{x} \quad \text{или} \quad \ln|t| - \ln|1-t^2| = \ln|x| + C.$$

Взяв постоянную C в виде $\ln|C|$, получим

$$\frac{t}{1-t^2} = Cx.$$

Подставив $t = y/x$, получим окончательно

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} = Cx \quad \text{или} \quad Cy = (x^2 - y^2).$$

Кроме того, в процессе решения мы делили на x, t и $1-t^2$. Нетрудно видеть, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения, а $t = 0$ и $t = \pm 1$ являются решениями уравнения $t'x + t = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Следовательно, исходное уравнение (3.5) имеет еще решения $y = 0$ и $y = \pm x$. Заметим, что решения $y = \pm x$ входят в серию решений $Cy = (x^2 - y^2)$ (они получаются при $C = 0$), а решение $y = 0$ не содержится в этой серии (но получается при $C = 0$ из первой формы записи общего решения).

Подставив $x = 0$, $y = -1$, получим решение задачи Коши: $y = x^2 - y^2$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x(y - x)dy = y^2 dx. \tag{3.6}$$

Решение. При дифференциалах dx и dy стоят однородные функции степени 2. Подставим $y = tx$, $dy = t\,dx + x\,dt$. Получим $(t\,dx + x\,dt)x^2(t-1) = t^2x^2dx$. Сокращая на x^2 (проверьте, что $x = 0$ является решением!) и раскрывая скобки, получаем $t^2dx - t\,dx + tx\,dt - x\,dt = t^2dx$, откуда $(t-1)x\,dt = t\,dx$ или

$$\frac{t-1}{t}\,dt = \frac{dx}{x}.$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$t - \ln|t| = \ln|x| + C.$$

Если постоянную C взять в виде $\ln|C|$, то

$$t = \ln|Cxt| \quad \text{или} \quad e^t = Cxt.$$

Возвращаясь к переменным x, y, имеем окончательно

$$e^{y/x} = Cy.$$

В процессе решения мы производили деление на t. Равенство $t = 0$ эквивалентно тому, что $y = 0$. Легко видеть, что эта функция также является решением исходного уравнения, поэтому ее следует добавить к полученному общему интегралу. Если же общее решение записать в виде $y = Ce^{y/x}$, то решение $y = 0$ получится при $C = 0$.

3.2. Уравнения, приводящиеся к однородным

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{3.7}$$

приводится к однородному уравнению заменой $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, где (x_0, y_0) — точка пересечения прямых $ax+by+c = 0$ и $a_1x+b_1y+c_1 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$ и уравнение (3.7) имеет вид $y' = f_1(ax+by)$. Решение таких уравнений было рассмотрено в п. 1.2.

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0. \tag{3.8}$$

Решение. Решая систему

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - y + 4 = 0, \end{cases}$$

находим $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Сделаем замену $u = x + 1$, $v = y - 3$; тогда $x = u - 1$, $y = v + 3$, $dy/dx = dv/du$. Уравнение (3.8) принимает вид

$$(u + v)\,du + (u - v)\,dv = 0.$$

Решив его с помощью подстановки $v = tu$, получим

$$u^2 + 2uv - v^2 = C.$$

Возвращаясь к исходным переменным (x, y), найдем

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

3.3. Обобщенно-однородные уравнения

Уравнение называется *обобщенно-однородным*, если его можно привести к однородному заменой $y = z^m$, где m — некоторое действительное число.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$9yy' - 18xy + 4x^3 = 0. \tag{3.9}$$

Делая в нем замену $y = z^m$, получаем $9mz^{2m-1}z' - 18xz^m + 4x^3 = 0$. Для того, чтобы это уравнение было однородным относительно x и z, необходимо, чтобы степени всех одночленов были одинаковыми: $2m - 1 = 1 + m = 3$. Эти два равенства образуют переопределенную систему двух уравнений относительно одного неизвестного m, которая в общем случае решения не имеет. Тем не менее, видно, что $m = 2$ является ее решением. Делаем замену $y = z^2$, придем к однородному уравнению

$$9z^3z' - 9xz^2 + 2x^3 = 0.$$

Теперь подстановка $z = tx$ приводит к уравнению

$$9t^3(t'x + t) - 9t^2 + 2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{9t^3\,dt}{9t^4 - 9t^2 + 2} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Сделаем еще одну замену $t^2 = u$, тогда

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9u\,du}{9u^2 - 9u + 2} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{6du}{3u - 2} - \frac{3du}{3u - 1} + \frac{2dx}{x} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$2\ln|3u - 2| - \ln|3u - 1| + 2\ln|x| = \ln|C|, \quad \text{откуда} \quad \frac{(3u - 2)^2x^2}{3u - 1} = C.$$

Сделав обратные замены $u = t^2 = \dfrac{z^2}{x^2} = \dfrac{y}{x^2}$, получим окончательно

$$\frac{(3y-2x^2)^2}{3y-x^2} = C.$$

При этом мы производили деление на x, $3u-2$, $3u-1$. Видно, что $x=0$ не является решением исходного уравнения. Случаи $u=2/3$ и $u=1/3$ дают, соответственно, $t=1/\sqrt{3}$ и $t=2/\sqrt{3}$. Подставляя эти функции в уравнение $9t^3(t'x+t)-9t^2+2=0$, мы убеждаемся, что они являются его решениями. Они соответствуют решениям $y=x^2/3$ и $y=2x^2/3$ исходного уравнения (3.9). Второе из этих решений содержится в серии $(3y-2x^2)^2/(3y-x^2)=C$ при $C=0$, а первое не содержится, поэтому его необходимо включить в окончательный ответ.

Замечание. Чтобы определить, будет ли уравнение обобщенно-однородным, удобно ввести понятие *измерения.* Так, переменной x ставят в соответствие измерение 1, искомой функции y — измерение m, а производной y' — измерение $m-1$. Число m пытаются подобрать так, чтобы измерения всех членов, входящих в уравнение, были одинаковыми. Действия с измерениями аналогичны действиям со степенями: если два члена уравнения перемножаются, то их измерения складываются, если какой-либо член уравнения возводится в степень, то его измерение умножается на показатель степени. Так, в рассмотренном примере, измерения членов $9yy'$, $-18xy$ и $4x^3$ равны, соответственно, $m+(m-1)$, $1+m$ и 3. Приравняв их все: $2m-1=1+m=3$, найдем $m=2$. Поэтому в уравнении (3.9) можно сразу сделать замену $y=z^2$.

§4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним

4.1. Линейные уравнения первого порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и ее производной, то есть, уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{4.1}$$

Функция $b(x)$ называется *свободным членом* уравнения (4.1). Уравнение

$$y' + a(x)y = 0 \tag{4.2}$$

называется *линейным однородным* уравнением, соответствующим линейному уравнению (4.1). Разделив переменные в уравнении (4.2), получим $\dfrac{dy}{y} =$

$-a(x)\,dx$, откуда $\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx + \ln|C|$, или

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.3}$$

Теперь для того, чтобы решить уравнение (4.1), нужно применить *метод вариации постоянной.* Его суть состоит в том, что решение уравнения (4.1) ищут в том же виде, что и решение соответствующего однородного уравнения (4.2), но C уже считают не постоянной, а неизвестной функцией от x. Таким образом, решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.4}$$

Тогда

$$y' = C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx} - C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}a(x).$$

Подставляя y и y' в уравнение (4.1), получим

$$C'(x) = b(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\,dx + C, \quad C = \text{const}.$$

Подставив это выражение для $C(x)$ в (4.4), общее решение уравнения запишем в виде

$$y = \left(\int_{x_0}^{x} b(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\,dx + C\right)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.5}$$

При решении конкретных уравнений имеет смысл не применять формулу (4.5), а проводить вычисления по схеме самостоятельно.

Пример 1. Решим уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = 3x. \tag{4.6}$$

Решение. Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$. Потенцируя, находим $y = \dfrac{C}{x}$. Теперь ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим

$$\left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = 3x,$$

откуда $C'(x) = 3x^2$. Интегрируя, находим $C(x) = x^3 + C$. Поэтому общее решение уравнения (4.6) имеет вид

$$y = \frac{x^3 + C}{x} = x^2 + \frac{C}{x}.$$

Пример 2. Некоторые уравнения приводятся к линейным, если поменять местами независимую переменную x и зависимую переменную y. Например, рассмотрим уравнение

$$2y\,dx + (y^2 - 2x)\,dy = 0.$$

Решение. Оно не является линейным относительно y, так как содержит выражение y^2. Однако, это уравнение будет линейным относительно x. Перепишем его в виде

$$2y\frac{dx}{dy} + y^2 - 2x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2}.$$

Решив полученное уравнение, найдем

$$x = Cy - \frac{y^2}{2}.$$

4.2. Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1, \tag{4.7}$$

называется *уравнением Бернулли*. Разделим обе части уравнения на y^n. Получим уравнение

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x).$$

Поскольку $\left(\dfrac{1}{y^{n-1}}\right)' = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$, замена $z = y^{1-n}$ приводит это уравнение к линейному относительно z:

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x).$$

При $n > 0$ функция $y = 0$ является решением уравнения (4.7), а при $n < 0$ не является.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0. \tag{4.8}$$

Решение. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{2xy},$$

откуда

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}. \tag{4.9}$$

Это уравнение Бернулли при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$, тогда $y = \sqrt{z}$, $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$. Подставив эти выражения в (4.9), получим

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{2x} = -\frac{x}{2\sqrt{x}} \quad \text{откуда} \quad z' - \frac{z}{x} = -x.$$

Решая полученное линейное уравнение, найдем

$$z = (-x + C)x = -x^2 + Cx.$$

Возвращаясь к переменным (x, y), получаем окончательно

$$y^2 = -x^2 + Cx.$$

К этому общему интегралу следует добавить решение $x = 0$, потерянное при приведении уравнения к виду (4.9).

4.3. Обобщенные уравнения Бернулли

Обобщенным уравнением Бернулли называется уравнение

$$\varphi'(y)y' + a(x)\varphi(y) = b(x),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая дифференцируемая функция. Делая замену $z = \varphi(y)$ (тогда $z' = \varphi'(y)y'$), придем к линейному уравнению $z' + a(x)z = b(x)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y'}{y} + \frac{\ln y}{x} = 1.$$

Решение. Роль функции $\varphi(y)$ в этом уравнении играет функция $\ln y$. Полагая $z(x) = \ln y(x)$, $z' = \dfrac{y'}{y}$, придем к уравнению $z' + \dfrac{z}{x} = 1$. Решая это уравнение, найдем $z = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x}{2}$. Делая обратную замену, получим

$$\ln y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}.$$

4.4. Уравнения Риккати

Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{4.10}$$

называется *уравнением Риккати.* В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Риккати не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли. Однако, проще сразу сделать замену

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - y_1},$$

которая сводит уравнение Риккати к линейному.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$xy' + y^2 - 2y = 4x^2 - 2x. \tag{4.11}$$

Решение. Прежде всего нужно найти частное решение. Заметим, что правая часть уравнения является многочленом второй степени от x и y. Это наводит на мысль искать частное решение в виде $y = ax + b$. Подставив это выражение в уравнение, придем к необходимости выполнения тождества:

$$ax + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax - 2b \equiv 4x^2 - 2x.$$

Приравняем коэффициенты при x^2, x и свободные члены. Получим переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ a + 2ab - 2a = -2 \\ b^2 - 2b = 0. \end{cases}$$

Однако, легко видеть, что пара чисел $a = 2$, $b = 0$ является ее решением. Значит, $y_1 = 2x$ есть частное решение уравнения (4.11).

Делаем замену неизвестной функции $y = 2x + \dfrac{1}{z}$. Тогда $y' = 2 - \dfrac{z'}{z^2}$. Подставляя это в уравнение (4.11) и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение

$$-\frac{2z'x}{z^2} = -\frac{4x}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} \quad \text{или} \quad z' + \Big(\frac{1}{x} - 2\Big)z = \frac{1}{2x}.$$

Его решение имеет вид

$$z = -\frac{1}{4x} + \frac{C}{x}e^{2x}.$$

Сделав обратную подстановку $z = \dfrac{1}{y-2x}$, найдем общий интеграл уравнения (4.11):

$$\frac{1}{y-2x} = \frac{4Ce^{2x}-1}{4x}.$$

Записав выражение $4C$ как новую произвольную постоянную C, выразим из полученного соотношения y:

$$y = 2x + \frac{4x}{Ce^{2x}-1}.$$

§5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

5.1. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение первого порядка, записанное в дифференциалах. Это уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$. Тогда это уравнение можно переписать в виде $dF(x,y)=0$, так что его решение будет иметь вид

$$F(x,y) = C. \tag{5.2}$$

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные по x и по y, то уравнение (5.1) будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{5.3}$$

Если условие (5.3) выполнено, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M\,dx + N\,dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования, поэтому функцию $F(x,y)$ можно восстановить по любой из формул

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy \tag{5.4}$$

или

$$F(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx. \tag{5.5}$$

При этом нижние пределы x_0 и y_0 можно выбирать произвольно, лишь бы точка (x_0, y_0) принадлежала области D (области определения функций M и N). За счет правильного выбора чисел x_0 и y_0 иногда удается упростить вычисления интегралов (5.4), (5.5). Например, если функции M и N являются многочленами от x и y, целесообразно выбирать $x_0 = y_0 = 0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(4x^3 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 10y^4)\,dy = 0. \tag{5.6}$$

Здесь $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12xy$, так что условие (5.3) выполнено.

Общий интеграл найдем по формуле (5.4), взяв $x_0 = y_0 = 0$:

$$F(x,y) = \int\limits_0^x (4x^3 + 6xy^2)\,dx + \int\limits_0^y 10y^4\,dy = x^4 + 3x^2y^2 + 2y^5.$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.6) имеет вид $x^4+3x^2y^2+2y^5 = C$.

Это уравнение можно решать и другим способом. Его левая часть представляет собой дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, поэтому

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{5.7}$$

Будем временно считать в первом уравнении (5.7) переменную y не зависящей от x. Тогда на это уравнение можно смотреть как на обыкновенное дифференциальное уравнение, в котором x — независимая переменная, F — искомая функция, а y — параметр. Интегрируя, получаем

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{5.8}$$

так как первообразные $M(x,y)$ отличаются на функцию, зависящую от y. Возьмем от этого равенства частную производную по y, учитывая второе из равенств (5.7):

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Отсюда $\varphi'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx$. Интегрируя, получаем

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx\right)dy.$$

Подставив любое значение этой первообразной в (5.8), найдем общий интеграл исходного уравнения по формуле (5.2).

Пример 2. Решим этим способом уравнение (5.6) из предыдущего примера. Проинтегрировав функцию $M(x,y) = 4x^3 + 6xy^2$ по переменной x, получим

$$F(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Приравнивая $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $N(x,y)$, получаем

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 10y^4,$$

откуда $\varphi'(y) = 10y^4$ и $\varphi(y) = 2y^5 + \mathrm{const}$. Полагая $\varphi(y) = 2y^5$, общий интеграл уравнения запишем в виде $x^4 + 3x^2y^2 + 2y^5 = C$.

5.2. Метод интегрируемых комбинаций

В некоторых случаях уравнение удается решить или упростить, выделив в нем группу членов, представляющих собой полный дифференциал или выражение, легко приводящееся к полному дифференциалу умножением или делением на какую-нибудь функцию. При этом можно использовать соотношения

$$y\,dx + x\,dy = d(xy), \qquad y\,dy = \frac{1}{2}d(y^2), \qquad x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2),$$
$$y\,dx - x\,dy = y^2\,d\Big(\frac{x}{y}\Big) = -x^2 d\Big(\frac{y}{x}\Big), \qquad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \quad \text{и т. п.}$$

Пример 3. Решим уравнение

$$xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy. \tag{5.9}$$

Решение. Перепишем его в виде

$$x(y\,dx - x\,dy) = (y^3 + x^2y)\,dy$$

и, выделив интегрируемую комбинацию, сделаем замену $t = y/x$:

$$x\cdot(-x^2)d\Big(\frac{y}{x}\Big) = (y^3 + x^2y)\,dy, \quad -d\Big(\frac{y}{x}\Big) = \left(\Big(\frac{y}{x}\Big)^3 + \Big(\frac{y}{x}\Big)\right)dy.$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$-dt = (t^3 + t)\,dy,$$

интегрируя которое, найдем

$$\frac{1}{2}\ln|t^2 + 1| - \ln|t| = y + C.$$

Отсюда находим

$$\ln\left|1 + \frac{x^2}{y^2}\right| = 2y + C.$$

В процессе решения мы делили на x и на $t = y/x$. Ясно, что $y = 0$ является решением уравнения (5.9), а $x = 0$ не является.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0. \tag{5.10}$$

Домножим его на x и выделим комбинацию $y\,dx + x\,dy$:

$$y\,dx + x\,dy + 3x^3\,dx + \frac{x^4}{y}\,dy = 0$$

или

$$d(xy) + 3x^3\,dx + \frac{x^4}{y}\,dy = 0.$$

Сделаем замену $t = xy$, тогда $y = t/x$, $dy = \dfrac{dt}{x} - \dfrac{t\,dx}{x^2}$:

$$dt + 3x^3\,dx + \frac{x^5}{t}\left(\frac{dt}{x} - \frac{t\,dx}{x^2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad dt + 2x^3\,dx + \frac{x^4}{t}\,dt = 0.$$

Умножим уравнение на t и сделаем еще одну замену $u = x^2$:

$$t\,dt + t\cdot 2x\cdot x^2\,dx + (x^2)^2\,dt = 0, \qquad t\,dt + tu\,du + u^2\,dt = 0.$$

Выделим в последнем уравнении интегрируемую комбинацию $t\,du + u\,dt = d(ut)$ и домножим его на t еще раз:

$$t^2\,dt + ut\,d(ut) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}(ut)^2 = C.$$

Произведем обратную замену и получим общий интеграл уравнения (5.10) в виде

$$\frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C.$$

5.3. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем* для уравнения

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5.11}$$

если после умножения на нее это уравнение становится уравнением в полных дифференциалах. Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{5.12}$$

Поделив обе части последнего уравнения на μ, перепишем его в виде

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.13}$$

Таким образом, интегрирующий множитель μ удовлетворяет уравнениям в частных производных (5.12) и (5.13). Несмотря на то, что эти уравнения, как правило, имеют бесконечно много решений, задача их нахождения в общем случае ничуть не легче решения исходного уравнения (5.11).

Рассмотрим два случая, когда уравнение (5.11) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y.

1) $\mu = \mu(x)$. Тогда

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N},$$

и такой множитель существует, если правая часть зависит только от x или является постоянной.

2) $\mu = \mu(y)$. Тогда

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M},$$

и правая часть должна зависеть только от y или быть постоянной.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$(1 - x^2 y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0. \tag{5.14}$$

Решение. В этом уравнении $M = 1 - x^2 y$, $N = x^2 y - x^3$ и

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -x^2 - (2xy - 3x^2) = 2x(x - y) \neq 0,$$

поэтому это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}.$$

В правой части стоит функция от x, значит, такой множитель существует и находится следующим образом:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{2}{x} \quad \text{или} \quad d\ln\mu = -\frac{2\,dx}{x}, \quad \text{откуда} \quad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Умножив уравнение (5.14) на эту функцию, получим

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)\,dy = 0, \qquad \frac{dx}{x^2} + y\,dy - (y\,dx + x\,dy) = 0.$$

Следовательно,

$$d\Big(-\frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{2}d(y^2) - d(xy) = 0, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y^2 - xy = C.$$

Еще мы должны проверить, не обращается ли функция $\mu(x)$ в нуль и при всех ли x она существует. Проверка показывает, что $x = 0$ также является решением исходного уравнения (5.14).

§6. Уравнения, не разрешенные относительно производной

В этом параграфе мы будем рассматривать общие уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6.1}$$

6.1. Особые решения

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (6.1) называется *особым*, если в каждой своей точке оно касается какого-либо другого решения этого уравнения (но не совпадает с ним в никакой окрестности этой точки). Это означает, что в точках особого решения нарушается теорема о единственности решения задачи Коши. Интегральная кривая, соответствующая особому решению, называется *особой интегральной кривой*.

Если функция $F(x, y, y')$ непрерывна и имеет частную производную по y', то особое решение можно искать следующим образом. Нужно исключить y' из системы уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{6.2}$$

Полученное соотношение между x и y будет задавать кривую, называемую *дискриминантной кривой*. После этого для каждой ветви дискриминантной кривой (если их несколько) нужно проверить, является ли она решением уравнения (6.1) и в том случае, если является, проверить, будет ли это решение особым.

Если семейство решений $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения (6.1) имеет *огибающую*, то эта огибающая будет особым решением. Чтобы найти огибающую, нужно исключить C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0 \tag{6.3}$$

и проверить, будет ли полученная кривая в каждой своей точке касаться какой-то из кривых этого семейства.

Пример 1. Решить уравнение

$$3y^2y'^2 - 2xyy' + 4y^2 - x^2 = 0, \tag{6.4}$$

найти особые решения, дать чертеж.

Решение. Данное уравнение — квадратное относительно y'. Дискриминант равен $D = 4x^2y^2 - 12y^2(4y^2 - x^2) = 16y^2(x^2 - 3y^2)$. Следовательно,

$$y' = \frac{2xy \pm 4y\sqrt{x^2 - 3y^2}}{6y^2} = \frac{x}{3y} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3}.$$

Это однородные уравнения. Поэтому сделаем замену (3.4): $y = tx$. Получим $t'x + t = \dfrac{1}{3t} \pm \sqrt{\dfrac{1}{t^2} - 3}$, откуда

$$3t'x = \frac{1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}}{t} \qquad \text{или} \qquad \frac{3t\,dt}{1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Чтобы вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{3t\,dt}{1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}}$, нужно сделать сначала замену $1 - 3t^2 = u$, а потом $v = \sqrt{u}$ (проделайте это сами!). Интегрируя, получаем

$$-\ln\left|\sqrt{1 - 3t^2} \pm 2\right| = \ln|Cx|$$

(мы записали постоянную интегрирования в виде $\ln|C|$ и считаем, что эта постоянная подобрана так, чтобы произведение Cx было положительным), откуда $x\left(\sqrt{1 - 3t^2} \pm 2\right) = C$. Сделав обратную замену $t = y/x$, получим $\sqrt{1 - \dfrac{3y^2}{x^2}} = \dfrac{C}{x} \pm 2$. При возведении в квадрат знак «$\pm$» можно убрать, так как постоянная C может быть любого знака. Поэтому $\dfrac{C^2}{x^2} - \dfrac{4C}{x} + 4 = 1 - \dfrac{3y^2}{x^2}$, или $C^2 - 4Cx + 3x^2 + 3y^2 = 0$. Это уравнение задает кривую второго порядка на плоскости (x, y), а именно, окружность, так коэффициенты при x^2 и y^2 равны. Чтобы записать ее уравнение в наиболее простом виде, заменим постоянную C на $3C$ и получим окончательно $3x^2 + 3y^2 - 12Cx + 12C^2 - 3C^2 = 0$ или

$$(x - 2C)^2 + y^2 = C^2. \tag{6.5}$$

Итак, решением уравнения (6.4) служит семейство окружностей с центрами в точках $(2C, 0)$ и радиусами $|C|$.

В процессе решения мы делили на t и на выражение $1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2}$. Случай $t = 0$ дает функцию $y = 0$, которая не является решением исходного уравнения. Если $1 - 3t^2 \pm 2\sqrt{1 - 3t^2} = 0$, то $1 - 3t^2 = 0$ или $1 - 3t^2 = 4$. Первое уравнение дает $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Второе уравнение не имеет решений. Легко видеть, что функции $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ тоже являются решениями уравнения (6.4).

Изобразим решения уравнения на рисунке.

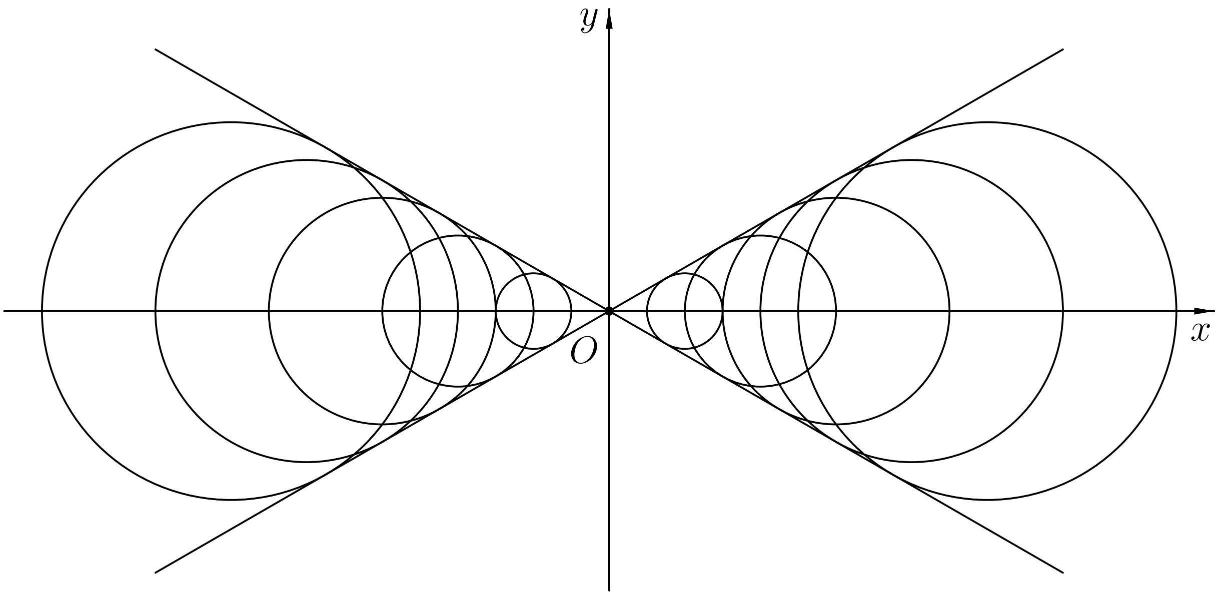

Рис. 2.

По чертежу видно, что прямые $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ касаются семейства окружностей. Следовательно, они должны задавать особые решения. Убедимся, что это действительно так.

Запишем систему уравнений (6.2):

$$3y^2y'^2 - 2xyy' + 4y^2 - x^2 = 0, \qquad 6y^2y' - 2xy = 0.$$

Выразим из второго уравнения $y' = \dfrac{x}{3y}$ и подставим в первое уравнение.

После очевидных преобразований получим $y^2 = \dfrac{x}{3}$. Таким образом, дискриминантная кривая состоит из двух ветвей — прямых $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Выясним, будут ли эти решения особыми. Пусть $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Выразим y из формулы общего решения (6.5):

$$y = \pm\sqrt{C^2 - (x-2C)^2} = \pm\sqrt{-x^2 + 4Cx - 3C^2}.$$

В силу симметрии картины относительно оси Oy можно ограничиться рассмотрением случая $x, y \geqslant 0$. В каждой точке $x_0 > 0$ должны выполняться условия касания графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = \sqrt{-x^2+4Cx-3C^2}$:

$$y(x_0) = \varphi(x_0), \qquad y'(x_0) = \varphi'(x_0). \tag{6.6}$$

Запишем эти условия:

$$\sqrt{-x_0^2 + 4Cx_0 - 3C^2} = \frac{x_0}{\sqrt{3}}, \qquad \left.\frac{2C - x}{\sqrt{-x^2+4Cx-3C^2}}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из первого уравнения, возводя в квадрат, имеем $-x_0^2 + 4Cx_0 - 3C^2 = \dfrac{x_0}{3}$, откуда $(3C - 2x_0)^2 = 0$, следовательно, $C = \dfrac{2}{3}x_0$. Подставим это значение C во второе уравнение. Легко видеть, что мы получим тождество $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, решения $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ и $y = \sqrt{-x^2+4Cx-3C^2}$ действительно касаются в точке с абсциссой x_0 при $C = \dfrac{2}{3}x_0$. Поэтому $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ является особым решением уравнения (6.4). Проверка того, что $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ также является особым решением, осуществляется аналогично. Впрочем, ее можно не делать, если заметить, что графики всех решений симметричны относительно оси Ox.

В рассматриваемом примере легко можно выразить y из формулы общего решения, заданного неявно соотношением (6.5). При решении других задач это может оказаться невозможным. Поэтому покажем, как проверять, является ли решение $y = \varphi(x)$ особым, не разрешая соотношения $\Phi(x, y, C) = 0$, задающего общее решение, относительно y.

Итак, общее решение $y(x)$ удовлетворяет неявному соотношению (6.5): $x^2 - 4Cx + 3C^2 + y^2 = 0$. Продифференцируем это равенство по x. Получим $2x - 4C + 2yy' = 0$, т.е., $yy' = 2C - x$. Запишем первое из условий (6.6) (условие наличия общей точки у графиков при $x = x_0$) как систему уравнений

$$y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{3}}, \qquad x_0^2 - 4Cx_0 + 3C^2 + y_0^2 = 0.$$

Подставим y_0 из первого равенства во второе. Получим то же самое равенство $(3C-2x_0)^2=0$, что и выше. Теперь проверим, что выполняется условие касания $y'(x_0)=\varphi'(x_0)$. Оно означает, что при $x=x_0$ производные функций $y(x)$ и $\varphi(x)$ одинаковы. Имеем $\varphi'(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Производная $y'(x)$ удовлетворяет соотношению $yy'=2C-x$. Подставим в это равенство $x=x_0$, $y=\dfrac{x_0}{\sqrt{3}}$, $C=\dfrac{2}{3}x_0$. Получим $\dfrac{x_0}{\sqrt{3}}y'(x_0)=\dfrac{x_0}{3}$, откуда $y'(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\varphi'(x_0)$.

Кроме того, особое решение можно найти как огибающую семейства общих решений. Сделаем это в рассматриваемом примере. Запишем условия (6.3):

$$x^2-4Cx+3C^2+y^2=0, \qquad -4x+6C=0.$$

Выразим из второго уравнения $C=\dfrac{2}{3}x$ и подставим во второе уравнение. Получим $y^2-\dfrac{x^2}{3}=0$, откуда $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Теперь проверку того, что это особые решения, можно осуществить любым из вышеописанных способов.

6.2. Случай, когда уравнение удается разрешить относительно производной

Получится одно или несколько уравнений вида $y'=f(x,y)$. Их нужно решать обычными методами.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $yy'^2+(x-y)y'-x=0$. Это уравнение — квадратное относительно y'. Решив его, получим $y'=1$ или $y'=-\dfrac{x}{y}$. Решением первого уравнения служат функции $y=x+C$. Во втором уравнении разделяются переменные: $y\,dy=-x\,dx$. Интегрируя, получим $y^2+x^2=C$. В процессе решения мы производили деление на y. Легко видеть, что $y=0$ не является решением исходного уравнения. Таким образом, оно имеет два семейства решений.

6.3. Метод введения параметра

Этот метод можно применять, когда уравнение (6.1) удается разрешить относительно x или y. Рассмотрим оба этих случая подробнее.

1) Уравнение (6.1) можно разрешить относительно y, то есть, переписать в виде

$$y=f(x,y'). \tag{6.7}$$

Обозначим $y'=p$. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства $y=$

$f(x,p)$. Получим $dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp$. Подставив в него $dy = p\,dx$, получим уравнение, содержащее только переменные x и p:

$$p\,dx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp.$$

Если взять p за независимую переменную и найти общее решение $x = \varphi(p,C)$ полученного уравнения, то общее решение уравнения (6.7) можно записать в параметрическом виде

$$x = \varphi(p,C), \quad y = f(\varphi(p,C),p).$$

Если же за независимую переменную взять x, и записать решение этого уравнения в виде $p = \varphi(x,C)$, то подставляя найденное значение p в исходное уравнение (6.7), найдем его общее решение в виде $y = f(x,\varphi(x,C))$.

2) Уравнение (6.1) можно разрешить относительно x, то есть, переписать в виде

$$x = g(y,y'). \tag{6.8}$$

Снова введем параметр $p = y'$. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства $x = g(y,p)$. Получим $dx = \dfrac{\partial g}{\partial y}dy + \dfrac{\partial g}{\partial p}dp$. Подставив в него $dx = dy/p$, получим уравнение, содержащее только переменные y и p:

$$\frac{dx}{p} = \frac{\partial g(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial g(y,p)}{\partial p}dp.$$

Если взять p за независимую переменную и найти его общее решение $y = \psi(p,C)$, то общее решение уравнения (6.8) можно записать в параметрическом виде

$$y = \psi(p,C), \quad x = g(\psi(p,C),p).$$

Если же за независимую переменную взять y, и записать решение этого уравнения в виде $p = \psi(y,C)$, то подставляя его в исходное уравнение (6.8), запишем его общий интеграл $x = g(y,\psi(y,C))$.

Пример 3. Решить уравнение,

$$x - y = \frac{3}{2}y'^2 - y'^3, \tag{6.9}$$

найти особые решения, дать чертеж.

Решение. Поскольку данное уравнение является кубическим относительно y', мы не будем пытаться разрешить его относительно производной, а применим метод введения параметра. Имеем $x - y = \dfrac{3}{2}p^2 - p^3$, поэтому $dx - dy = 3(p - p^2)\,dp$. Заменив $dy = p\,dx$, получим

$$(1-p)\,dx = 3p(1-p)\,dp. \tag{6.10}$$

Отсюда $dx = 3p\,dp$, следовательно $x = \dfrac{3}{2}p^2 + C$ и $y = x - \dfrac{3}{2}p^2 + p^3 = p^3 + C$. Из полученных параметрических уравнений общего решения можно исключить параметр p следующим образом: запишем $x - C = \dfrac{3}{2}p^2$, $y - C = p^3$. Возведем первое равенство в куб, а второе — в квадрат. После исключения p^6 останется

$$27(y - C)^2 = 8(x - C)^3. \tag{6.11}$$

Кроме того, $p = 1$ также является решением уравнения (6.10). Подставляя это значение p в исходное уравнение, получим $x - y = \dfrac{1}{2}$. Легко видеть, что $y = x - \dfrac{1}{2}$ также является решением уравнения (6.9).

Чтобы найти дискриминантную кривую, запишем систему уравнений (6.2):

$$x - y = \frac{3}{2}p^2 - p^3, \qquad 0 = 3p - 3p^2.$$

Из второго уравнения сразу получим $p = 0$ или $p = 1$. Следовательно, дискриминатная кривая состоит из двух прямых линий

$$y = x, \qquad y = x - \frac{1}{2}.$$

Ветвь $y = x$ дискриминантной кривой вообще не является решением уравнения (как видно из чертежа, она состоит из точек возврата кривых общего решения).

Проверим, что прямая $y = x - \dfrac{1}{2}$ является особым решением. Запишем условие касания кривых $27(y - C)^2 = 8(x - C)^3$ и $y = x - \dfrac{1}{2}$ в точке (x_0, y_0). Взяв производную от первого равенства, получим $9y'(y - C) = 4(x - C)^2$. Отсюда $y' = \dfrac{4(x - C)^2}{9(y - C)}$. Поэтому условия (6.6) запишутся в виде

$$27(y_0 - C)^2 = 8(x_0 - C)^2, \qquad y_0 = x_0 - \frac{1}{2}, \qquad \frac{4(x_0 - C)^2}{9(y_0 - C)} = 1.$$

Проверим, что эта система совместна. Из первого и третьего равенств получаем $2(x_0 - C)^4 = 3(x_0 - C)^3$. Если $x_0 - C = 0$, то из первого равенства $y_0 - C = 0$, что противоречит условию $y_0 = x_0 - \dfrac{1}{2}$. Поэтому, сократив на $(x_0 - C)^3$, получим $C = x_0 - \dfrac{3}{2}$. Тогда $y_0 - C = \dfrac{4}{9}(x_0 - C)^2 = 1$. Несложно убедиться, что при подстановке x_0 и y_0 во второе уравнение получится тождество.

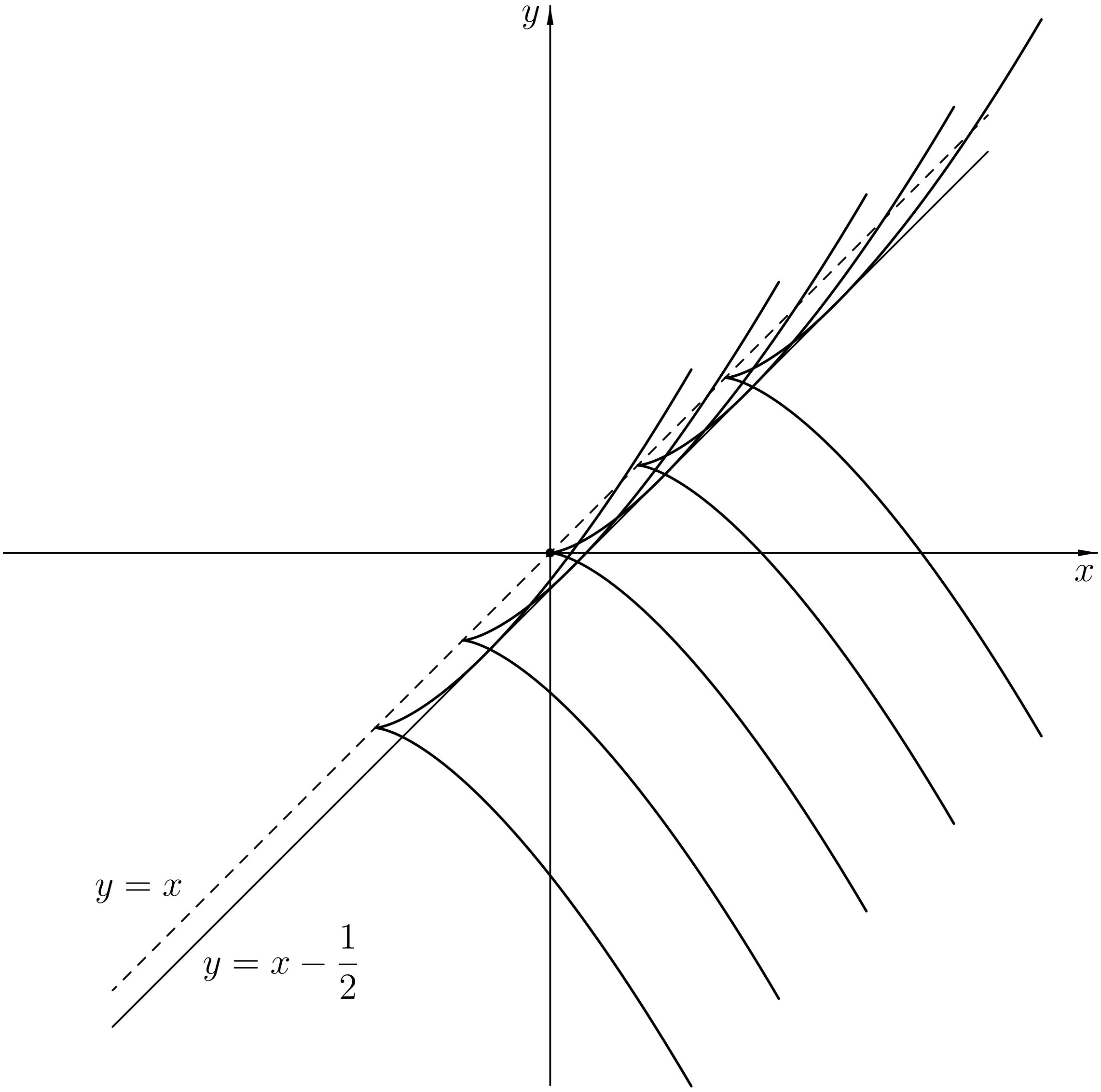

Рис. 3.

Пример 4. $y = 2xy' + y'^2 + x^2/2$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y = 2px + p^2 + x^2/2$, возьмем дифференциал от обеих частей и заменим $dy = p\,dx$. Получим уравнение $p\,dx = 2x\,dp + 2p\,dx + 2p\,dp + x\,dx$ или

$$2x\,dp + p\,dx + 2p\,dp + x\,dx = 0, \quad \text{откуда} \quad (x+p)(2\,dp + dx) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $x + p = 0$, либо $2\,dp + dx = 0$. Решением последнего уравнения является функция $x = C - 2p$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $y = 2p(C-2p) + p^2 + (C-2p)^2/2 = -p^2 + Cp + \frac{1}{2}C^2$. Отсюда можно записать решение исходного уравнения в параметрическом виде

$$x = C - 2p, \qquad y = -p^2 + Cp + \frac{1}{2}C^2.$$

Поскольку p легко исключается: $p = \frac{1}{2}(C - x)$, решение можно записать в явном виде: $y = (C-x)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(C-x)^2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}Cx + \frac{1}{4}C^2$.

Случай $x + p = 0$ дает еще одно решение уравнения: $p = -x$, отсюда $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Пример 5. $x = \dfrac{y}{2y'} + e^{yy'}$.

Решение. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства $x = \dfrac{y}{2p} + e^{yp}$. Получим $dx = \dfrac{p\,dy - y\,dp}{2p^2} + e^{py}\,d(py)$. Заменим dx на dy/p, и после преобразований получим уравнение

$$\left(\frac{1}{2p^2} - e^{py}\right) d(py) = 0.$$

Из него получаем $py = C$, откуда $p = C/y$. Подставив это в исходное уравнение, получим

$$x = \frac{y^2}{2C} - e^C.$$

Кроме того, равенство $e^{py} = 1/(2p^2)$ приводит к решению в параметрическом виде

$$y = -\frac{2}{p}\ln(\sqrt{2}|p|), \quad x = -\frac{1}{p^2}\ln(\sqrt{2}|p|) - \frac{1}{2p^2}.$$

6.4. Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнением Лагранжа называется уравнение, линейное относительно x и y, то есть, уравнение вида

$$A(y')y + B(y')x = C(y'), \tag{6.12}$$

где A, B и C — дифференцируемые функции от y'. Если $A(p) \not\equiv 0$, то это уравнение можно разрешить относительно y, то есть, переписать в виде

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \tag{6.13}$$

Заменим $p = y'(x)$, возьмем от этого уравнения дифференциал, и, подставив $dy = p\,dx$, перепишем его в виде

$$p = \varphi(p) + \big(\varphi'(p)x + \psi'(p)\big)\frac{dp}{dx}. \tag{6.14}$$

Будем рассматривать x как функцию от переменной p. Тогда уравнение будет линейным:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{6.15}$$

и интегрируется в квадратурах (см. п. 4.1). Его решение имеет вид $x = Cf(p) + g(p)$. Следовательно, общее решение уравнения (6.13) можно записать в параметрическом виде

$$y = \varphi(p)(Cf(p) + g(p)) + \psi(p), \quad x = Cf(p) + g(p).$$

Если параметр p удается исключить, то получим общий интеграл уравнения.

Кроме того, к общему решению следует добавить все решения вида

$$y = C_0 x + \psi(C_0),$$

где C_0 — корень уравнения $\varphi(p) - p = 0$.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y = x(1 + y') + y'^2$.

Решение. Это уравнение Лагранжа $y = x(1 + p) + p^2$, где $\varphi(p) = 1 + p$, $\psi(p) = p^2$. Перепишем его в виде (6.15):

$$\frac{dx}{dp} + x = -2p.$$

Его решением служит функция $x = Ce^{-p} + 2(1 - p)$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $y = (Ce^{-p} + 2(1 - p))(1 + p) + p^2 = Ce^{-p}(1 + p) + 2 - p^2$.

При решении уравнения Лагранжа мы предполагали, что $\varphi(p) \not\equiv p$, иначе в формуле (6.15) получается деление на нуль. Рассмотрим случай $\varphi(p) \equiv p$ отдельно.

Уравнение вида

$$y = px + \psi(p). \tag{6.16}$$

называется *уравнением Клеро*. Для него уравнение (6.14) принимает вид

$$p = p + \big(x + \psi'(p)\big)\frac{dp}{dx}; \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dx}\big(x + \psi'(p)\big) = 0.$$

Первый множитель приводит к дифференциальному уравнению $\dfrac{dp}{dx} = 0$, из которого $p = C$. Тогда общее решение уравнения (6.16) можно записать в виде

$$y = Cx + \psi(C). \tag{6.17}$$

Геометрически это решение представляет собой семейство прямых.

Приравняв к нулю второй множитель, получим $x = -\psi'(p)$. Если это равенство удается разрешить относительно p, т.е., выразить $p = \omega(x)$, то, подставив его в исходное уравнение (6.16), получим

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{6.18}$$

Если этого сделать не удается, то мы можем записать ту же кривую в параметрическом виде

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p). \tag{6.19}$$

Несложно проверить, что соотношения (6.19) задают еще одно решение уравнения (6.16). Если $\psi(p)$ имеет отличную от нуля вторую производную, то решение в самом деле можно записать в виде (6.18) и эта кривая оказывается огибающей семейства решений (6.17), а, значит, особым решением уравнения.

Пример 7. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

Решение. Общее решение этого уравнения запишем по формуле (6.17):

$$y = Cx + \sqrt{1 - C^2}.$$

Поскольку $\psi(p) = \sqrt{1 - p^2}$, уравнение $x = -\psi'(p)$ имеет вид

$$x = \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Разрешив его относительно p, найдем $p = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Тогда

$$\psi(p) = \sqrt{1 - p^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Поэтому уравнение огибающей (особой интегральной кривой) будет

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \text{или} \quad y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Часть 2

Дифференциальные уравнения высших порядков

§7. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.1}$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, а функция F определена и непрерывна на некотором открытом множестве G $(n+2)$-мерного пространства своих аргументов.

Решение уравнения (7.1) на некотором интервале I действительной оси x определяется как n раз непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ такая, что для всех $x \in I$ точка $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in G$ и при подстановке которой в (7.1) это уравнение превращается в тождество. *Общим решением* уравнения (7.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{7.2}$$

где C_1, …, C_n — произвольные постоянные, которая при любом фиксированном наборе этих постоянных определяет решение уравнения. Если общее решение задано неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{7.3}$$

то (7.3) называется *общим интегралом* уравнения (7.1).

Чтобы поставить для уравнения (7.1) *задачу Коши*, позволяющую выделить конкретное решение из всей бесконечной совокупности решений, определенных формулой (7.2) или (7.3), нужно, в отличие от уравнения первого порядка, задать не одно условие $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, а добавить к этому условию еще значения производных искомой функции в точке x_0 до порядка $n-1$ включительно. Поэтому, задача Коши для уравнения (7.1) ставится следующим образом: найти решение $y(x)$ уравнения (7.1), удовлетворяющее следующим (начальным) условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \tag{7.4}$$

где произвол в выборе чисел x_0, y_0, $y_{0,1}$, …, $y_{0,n-1}$ определяется тем, что точка

$$(x_0, y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)) \in G.$$

Для решения задачи Коши нужно подставить условия (7.2) (или (7.3)) в (7.4) и определить постоянные $C_1, \ldots, C_n$, удовлетворяющие уравнениям, полученным в результате такой подстановки. Условия существования и единственности задачи Коши формулируются, как правило, для уравнения (7.1), разрешенного относительно старшей производной искомой функции. Само же уравнение (7.1), как будет видно из приведенных примеров, иногда имеет несколько серий решений. Поэтому на вопросе существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (7.1) мы не останавливаемся.

Рассмотрим теперь следующие частные случаи уравнения (7.1), которые при помощи замены неизвестной функции можно привести к уравнению более низкого порядка.

7.1. В уравнение (7.1) не входит неизвестная функция $y(x)$ и первые $k-1$ ее последовательные производные

В таком случае уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n. \tag{7.5}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$z(x) = y^{(k)}(x). \tag{7.6}$$

Тогда получаем $z'(x) = y^{(k+1)}(x), \ldots, z^{(n)}(x) = y^{(n-k)}(x)$ и от уравнения (7.5) придем к уравнению

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0, \tag{7.7}$$

порядок которого ниже на k единиц.

Если для уравнения (7.7) удается найти общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

то, подставляя его в (7.6) и последовательно интегрируя k раз, получим

$$\begin{aligned}
&y^{(k-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})\, dx + C_{n-k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{k} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})\, \underbrace{dx \ldots dx}_{k} + \\
&\qquad\qquad + C_{n-k+1}x^{k-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Если для уравнения (7.7) можно получить лишь общий интеграл

$$\Phi(x, z, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0,$$

который удается разрешить относительно x, то решение уравнения (7.5) записывают в параметрическом виде, приняв за параметр z. В этом случае независимая переменная, как функция параметра, определится из найденного общего интеграла, а равенство (7.6) определит значение k-й производной искомого решения как функции параметра. Таким образом, мы имеем следующие равенства:

$$x = \psi(z, C_1, \ldots, C_{n-k}), \quad y^{(k)}(x) = z. \tag{7.9}$$

Поэтому, чтобы записать решение искомого уравнения в параметрическом виде, нам осталось определить y как функцию параметра. Для этого запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} & dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx = z\,d\psi(z, C_1, \ldots, C_{n-k}), \\ & \ldots \\ & dy' = y''\,dx = y''\,d\psi(z, C_1, \ldots, C_{n-k}), \\ & dy = y'\,dx = y'\,d\psi(z, C_1, \ldots, C_{n-k}). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Определяя отсюда последовательно $y^{(k-1)}$, ..., y'', y' как функции параметра z, найдем значение искомой функции как функции параметра и n произвольных постоянных интегрирования, первые $n-k$ из которых вошли в параметрическое представление x, а остальные k появляются в процессе интегрирования равенств (7.10). Значит общее решение уравнения (7.5) в параметрической форме в этом случае можно записать так:

$$x = \psi(z, C_1, \ldots, C_{n-k}), \quad y = \omega(z, C_1, \ldots, C_n). \tag{7.11}$$

Если общий интеграл уравнения (7.7) не разрешается относительно x, но его удается параметризовать:

$$x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}), \quad z = \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}), \tag{7.12}$$

где t — параметр, то, учитывая (7.6) и (7.12), запишем цепочку равенств (7.10):

$$\begin{aligned} & dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx = z\,d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}) = \\ & \qquad\qquad = \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k})\,d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}), \\ & \ldots \\ & dy' = y''\,dx = y''\,d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}), \\ & dy = y'\,dx = y'\,d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Из этих равенств (определяя последовательно $y^{(k-1)}, \ldots, y'', y'$ как функции параметра t) получим параметрическое решение уравнения (7.5) вида (7.11).

Пример 1. Решим уравнение $y''' + y'' - x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции и ее первой производной. Поэтому, сделав замену (7.6) при $k = 2$, мы придем к линейному уравнению $z' + z = x$, общее решение которого имеет вид $z = C_1e^{-x} + x - 1$. Значит, $y'' = C_1e^{-x} + x - 1$ и, следуя (7.8), $y = C_1e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3$. Удовлетворяя начальным условиям, придем к системе $C_1 + C_3 = 1$, $-C_1 + C_2 = -1$, $C_1 - 1 = 0$. Из этой системы получим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, следовательно, $y = e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

Пример 2. $(y' + 1)y'' = y'/x$.

Решение. Положив $y' = z(x)$, придем к уравнению с разделяющимися переменными $(z + 1)z' = z/x$, общий интеграл которого запишем в виде $z + \ln C_1z = \ln|x|$ (здесь постоянную интегрирования мы взяли в виде $-\ln|C_1|$ и считаем, что произведение C_1z положительно). Следует также учесть, что при разделении переменных мы могли потерять значение $z = 0$, которому соответствует $y = C$. Нетрудно проверить, что это значение y удовлетворяет уравнению. Так как общий интеграл не удается разрешить относительно z, то, разрешив его относительно x, получим $x = C_1ze^z$. Будем искать решение в параметрическом виде, приняв z за параметр. Записав, следуя (7.10), равенство $dy = y'\,dx = y'\,d(C_1ze^z) = C_1z(1 + z)e^z\,dz$, найдем $y = C_1(z^2 - z + 1)e^z + C_2$, что, вместе с уже полученным выражением для x, дает решение уравнения в параметрической форме. Решение $y = C$ содержится в этой серии при $C_1 = 0$.

Пример 3. $y'y'' + x = 0$.

Решение. Сделав в уравнении замену $y' = z(x)$, придем к уравнению $zz' + x = 0$, общий интеграл которого есть $z^2 + x^2 = C_1^2$ (постоянная интегрирования взята в таком виде для удобства). Этот общий интеграл легко параметризуется: $x = C_1\sin t$, $z = C_1\cos t$. Записав равенство (7.12), получим $dy = y'\,dx = C_1^2\cos t\,d\sin t = C_1^2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}C_1^2(1 + \cos 2t)dt$. Отсюда $y = \frac{1}{4}C_1^2(2t + \sin 2t) + C_2$.

7.2. В уравнение (7.1) не входит независимая переменная x

В этом случае уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7.14}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y' = p(y). \tag{7.15}$$

Тогда

$$y'' = \frac{dp(y)}{dy}y' = p'p,$$

$$y''' = \frac{d(p'p)}{dy}y' = (p''p + p'^2)p = p''p^2 + p'^2p.$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков. Подставляя выражения этих производных в (7.14), получим уравнение, порядок которого на единицу ниже:

$$F_1(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0, \tag{7.16}$$

а роль независимой переменной в котором играет y. Если для уравнения (7.16) удается найти общее решение $p = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$, то, подставив его в (7.15), придем к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}). \tag{7.17}$$

Интегрируя (7.17), получим общий интеграл (7.3) уравнения (7.14). Если для уравнения (7.16) можно получить лишь общий интеграл

$$\Phi(y, p, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0,$$

который удается разрешить относительно y, то решение уравнения (7.14) записывают в параметрическом виде, приняв p за параметр. В этом случае искомая функция, как функция параметра, определится из найденного общего интеграла, а равенство (7.15) позволяет выразить dx через дифференциал параметра. Таким образом, мы имеем следующие равенства:

$$y = \psi(p, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{d\psi(p, C_1, \ldots, C_{n-1})}{p}. \tag{7.18}$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем $x = \omega(p, C_1, \ldots, C_n)$. В общем случае, параметризуя общий интеграл уравнения (7.16) (когда это удается сделать), получим $y = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, $p = \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$. Подставляя эту параметризацию в (7.18) и интегрируя полученное уравнение, определим x как функцию параметра t:

$$x = \psi_2(t, C_1, \ldots, C_n).$$

Пример 4. Решим уравнение $y'' - 2yy' = 0$.

Решение. Сделав замену (7.15), после сокращения на p придем к уравнению $p' = 2y$. При этом теряется решение $y = C$, соответствующее

$p = 0$. Общее решение полученного уравнения имеет вид $p = y^2 + C_1$. Подставив его в (7.15), придем к уравнению $dy/dx = y^2 + C_1$. Здесь следует различать два случая в зависимости от знака C_1 и случай $C_1 = 0$. Поэтому, заменяя в последнем уравнении C_1 на $\pm C_1^2$, и интегрируя это уравнение, получим два семейства решений исходного уравнения:

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = x + C_2, \quad \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = x + C_2,$$

которые вместе с ранее найденным решением $y = C$ и решением $y = 1/(C - x)$ (которое получается если положить $C_1 = 0$) дают все решения уравнения.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $2y'' = e^y$.

Решение. Согласно (7.15), соответствующее уравнение (7.16), а именно, $2pp' = e^y$ имеет общий интеграл $y = \ln|p^2 + C_1|$. Взяв p за параметр, из (7.18) найдем $dx = 2\,dp/(p^2 + C_1)$. Поэтому, как в примере 4, получаем три параметрических семейства решений уравнения, в которых параметрическое представление искомой функции определено выше, а представление независимой переменной дается формулами

$$x = \frac{2}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{p}{C_1} + C_2, \quad x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{p - c_1}{p + c_1}\right| + C_2, \quad x = C - \frac{2}{p}.$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение $2yy'' - 3y'^2 - y^2 = 0$.

Решение. После замены $y' = p(y)$ уравнение (7.16) примет вид $2ypp' - 3p^2 - y^2 = 0$. Общий интеграл этого уравнения Бернулли имеет вид $p^2 + y^2 - C_1y^3 = 0$. Так как в него входят однородные функции от p и y, степени которых отличаются на единицу, для его параметризации сделаем подстановку $p = ty$, $y \neq 0$. Получим $y = (t^2 + 1)/C_1$, $p = (t^3 + t)/C_1$. Отсюда имеем $dx = 2\,dt/(t^2 + 1)$, $x = 2\operatorname{arctg} t + C_2$. Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = 0$ также будет решением уравнения. Исключив параметр t, можно записать общее решение уравнения.

7.3. В уравнение (7.1) не входит независимая переменная x, а также неизвестная функция $y(x)$ и первые $k-1$ ее последовательные производные

В таком случае уравнение имеет вид

$$F(y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n. \tag{7.19}$$

На уравнение (7.19) можно смотреть как на частный случай уравнения (7.14), а также уравнения (7.5). Однако, если сразу сделать замену $y' = p(y)$, то порядок уравнения понизится лишь на единицу и оно окажется уравнением типа (7.14), причем достаточно сложного вида. Поэтому сначала осуществляют более простую замену $z = y^{(k)}$ и приходят к уравнению (7.14), порядок которого будет равен $n-k$, а роль неизвестной функции будет играть z. Теперь можно сделать замену $z' = p(z)$ и понизить порядок уравнения (7.19) еще на одну единицу. Если удастся найти общее решение полученного уравнения, то, определив $z(x)$ (если это возможно), общее решение уравнения (7.19) можно найти, интегрируя выражение $y^{(k)} = z$. В остальных случаях решение уравнения приходится искать в параметрическом виде.

Пример 7. Решим уравнение $y' + y''' - 1 = 0$.

Решение. Осуществляя последовательно замены $y' = z(x)$, а затем $z' = p(z)$, придем, соответственно, к уравнениям $z + z'' = 1$, $z + pp' = 1$. Общий интеграл последнего уравнения можно записать следующим образом: $p^2 + (z-1)^2 = C_1^2$. Введем его параметризацию, полагая $p = C_1 \cos t$, $z = 1 + C_1 \sin t$. Из равенства $z' = p$ находим $dx = dz/p = dt$, $x = t + C_2$. Следовательно, $dy = z\,dx = (1 + C_1 \sin t)\,dt$, откуда $y = t - C_1 \cos t + C_3$. Выразив параметр t через x, можно записать общее решение уравнения.

7.4. Метод интегрируемых комбинаций

Этот метод применяется в том случае, если уравнение (7.1) удается умножить на некоторую функцию его аргументов, таким образом, что его можно будет представить в виде полной производную по x от некоторой комбинации этих аргументов. Это позволяет понизить порядок уравнения на единицу интегрированием.

Пример 8. Пусть дано уравнение $yy'' = 2y'^2$.

Решение. Несмотря на то, что это уравнение имеет вид (7.14), его проще решить, поделив обе его части на выражение yy'. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{y''}{y'} = 2 \cdot \frac{y'}{y} \quad \text{или} \quad \bigl(\ln y'\bigr)' = 2\bigl(\ln y\bigr)'.$$

Проинтегрировав, получим $\ln y' = 2\ln y + \ln C_1$, откуда $y' = C_1 y^2$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, находим $-1/y = C_1 x + C_2$ или $y = -1/(C_1 x + C_2)$. Во время деления на y' было потеряно решение $y = C$, которое при $C \neq 0$ содержится в общем решении (при $C_1 = 0$), а при $C = 0$ должно быть включено в ответ.

Пример 9. Рассмотрим уравнение $(yy'' + y'^2)x + (1 - y')xyy' - yy' = 0$.

Решение. Поделив обе части уравнения на xyy', перепишем его в виде

$$\frac{(yy'' + y'^2)}{yy'} + (1 - y') - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{или} \quad \bigl(\ln yy' + x - y - \ln x\bigr)'_x = 0.$$

Отсюда получаем $\ln yy' = y - x + \ln C_1 x$, следовательно, $yy' = C_1 x e^{y-x}$. Решив это уравнение с разделяющимися переменными, найдем общий интеграл исходного уравнения: $(y+1)e^{-y} = C_1(x+1)e^{-x} + C_2$. К нему еще нужно добавить решение $y = C$, потерянное при делении на xyy'.

§8. Понижение порядка в однородных уравнениях

8.1. Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{8.1}$$

называется *однородным* относительно искомой функции и ее производных, при замене y на ty, y' на ty', ..., $y^{(n)}$ на $ty^{(n)}$ это уравнение меняется на эквивалентное ему. Другими словами, функция F является однородной относительно y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ степени m, то есть, $F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$. В этом случае порядок уравнения можно понизить, сделав замену

$$y' = zy, \tag{8.2}$$

где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда производные y'', ..., $y^{(n)}$ выражаются следующим образом;

$$\begin{aligned} &y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y, \\ &y''' = (z'' + 2z'z)y + (z' + z^2)y' = (z'' + 3z'z + z^3)y, \\ &\ldots \\ &y^{(n)} = f(z^{(n-1)}, \ldots, z', z)y. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Подставляя (8.2) и (8.3) в (8.1) и пользуясь однородностью функции F, получим

$$\begin{aligned} F(x, y, zy, (z' + z^2)y, \ldots, f(z^{(n-1)}, \ldots, z', z)y) = \\ = y^m F(x, 1, z, (z' + z^2), \ldots, f(z^{(n-1)}, \ldots, z', z)) = 0. \end{aligned}$$

После сокращения на y^m (при этом, если $m > 0$, может быть потеряно решение $y = 0$), получаем уравнение

$$F_1(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0, \tag{8.4}$$

порядок которого на единицу ниже. Если найдено общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

уравнения (8.4), то, подставив его в (8.2) и проинтегрировав полученное уравнение, можно найти общее решение уравнения (8.1):

$$y = C_n e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}) dx}, \tag{8.5}$$

из которого решение $y = 0$ получается при $C_n = 0$.

Если для уравнения (8.4) получен лишь общий интеграл

$$\Phi(x, z, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0,$$

который удается разрешить относительно x, то, приняв за параметр z, получим $x = \psi(z, C_1, \ldots, C_{n-1})$. Тогда искомую функцию y как функцию параметра z получим из (8.2):

$$y = C_n e^{\int_{z_0}^{z} z\, d\psi(z, C_1, \ldots, C_{n-1})}. \tag{8.6}$$

Если общий интеграл уравнения (8.4) не разрешается относительно x, но его удается параметризовать: $x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, $z = \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, то решение уравнения (8.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ &y = C_n e^{\int_{t_0}^{t} \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})\, d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение $(yy'' - y'^2)x - yy' = 0$.

Решение. Уравнение является однородным относительно y, y', y'' степени $m = 2$. Сделав замену $y' = yz$ (тогда $y'' = (z^2 + z')y$, согласно (8.3)), после сокращения на y^2 получим уравнение $xz' - z = 0$, решение которого имеет вид $z = C_1 x$. Поэтому из (8.5) имеем $y = C_2 e^{C_1 x^2}$. Решение $y = 0$ получается из общего решения при $C_2 = 0$.

Пример 2. Пусть дано уравнение $y'' - \dfrac{y^3}{yy'} e^{y'/y} - \dfrac{y'^2}{y} = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит независимой переменной и его порядок может быть понижен заменой (7.15). С другой стороны, уравнение является однородным (степени 1) относительно искомой функции и ее производных и заменой (8.2) приводится к уравнению $z' = e^z/z$. Решив это уравнение, находим

$$x = -(z + 1)e^{-z} + C_1.$$

Приняв переменную z за параметр, можно найти параметрическое представление искомой функции из (8.6):

$$y = C_2 e^{-(z^2+2z+2)e^{-z}}.$$

Отметим, что $y = 0$ не является решением уравнения, так как не входит в его область определения.

Пример 3. Решим уравнение $\dfrac{2y''y'}{y^2} - \dfrac{2y'^3}{y^3} - x - \dfrac{y'^2}{xy^2} = 0$.

Решение. Уравнение является однородным относительно y, y', y'' степени $m = 0$. Понизив его порядок, придем к уравнению Бернулли $2zz'x - z^2 = x^2$, общий интеграл которого запишем в виде $z^2 - x^2 - 2C_1x = 0$. Вводя параметризацию $z = C_1 \operatorname{sh} t$, $x + C_1 = C_1 \operatorname{ch} t$, решение уравнения получим по формуле (8.7):

$$x = C_1(\operatorname{ch} t - 1), \quad y = C_2 e^{C_1^2(\operatorname{sh} 2t - 2t)/4}.$$

8.2. Обобщенно-однородные уравнения

Дифференциальное уравнение (8.1) называется *обобщенно-однородным*, если при замене x на tx, y на $t^\alpha y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, …, $y^{(n)}$ на $t^{\alpha-n}y^{(n)}$, где α — некоторое действительное число, оно меняется на эквивалентное ему. Таким образом, функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ удовлетворяет следующему условию:

$$F(tx, t^\alpha y, t^{\alpha-1}y', \ldots, t^{\alpha-n}y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{8.8}$$

где m — некоторое действительное число.

В этом случае делается замена как независимой переменной, так и искомой функции:

$$x = e^t \ \ (x = -e^t \text{ при } x < 0), \quad y = z(t)e^{\alpha t}. \tag{8.9}$$

Производные при такой замене преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
&y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + \alpha z)e^{(\alpha-1)t} = g_1(z, z')e^{(\alpha-1)t},\\
&y''(x) = \frac{[y'(x)]'_t}{x'_t} = (z'' + (2\alpha - 1)z' + \alpha(\alpha - 1)z)e^{(\alpha-2)t} = g_2(z, z', z'')e^{(\alpha-2)t},\\
&\ldots\\
&y^{(n)}(x) = g_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})e^{(\alpha-n)t}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Подставляя (8.9) и (8.10) в (8.1), получим

$$F(e^t, z(t)e^{\alpha t}, g_1(z, z')e^{(\alpha-1)t}, \ldots, g_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})e^{(\alpha-n)t}) = 0.$$

Из условия (8.8) следует, что мы можем вынести выражение e^t из-под функции F и прийти к уравнению

$$F(1, z(t), g_1(z, z'), \ldots, g_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0$$

вида (7.14), не содержащему независимой переменной. Порядок полученного уравнения понижается на единицу при помощи замены $z' = p(z)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $yy' + xyy'' - xy'^2 + y = 0$.

Решение. Чтобы проверить, является ли уравнение обобщенно-однородным, заменим в уравнении x на tx, y на $t^\alpha y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, y'' на $t^{\alpha-2}y''$ и попытаемся подобрать α так, чтобы множитель t входил во все члены уравнения в одинаковой степени. Получаем систему уравнений $\alpha + (\alpha - 1) = 1 + \alpha + (\alpha - 2) = 1 + 2(\alpha - 1) = \alpha$, которая эквивалентна равенству $2\alpha - 1 = \alpha$. Отсюда $\alpha = 1$. В большинстве случаев, чтобы не осуществлять указанные замены, удобно ввести понятие измерения (см. замечание к п. 3.3). Так, независимой переменной x надо поставить в соответствие измерение 1, а переменным y, y', y'', ... — измерения α, $\alpha - 1$, $\alpha - 2$, ..., соответственно. Число α должно быть таким, чтобы измерения всех членов уравнения были одинаковы. Действия с измерениями производятся так же, как действия со степенями: при перемножении измерения складываются, при возведении в степень — умножаются на показатель степени. Тогда можно сразу записать полученную систему уравнений для определения α.

Сделаем замену (8.9) (при $\alpha = 1$) и вычислим производные по правилу (8.10). Получим

$$x = e^t, \quad y(x) = z(t)e^t, \quad y'(x) = z'(t) + z(t), \quad y''(x) = (z''(t) + z'(t))e^{-t}.$$

Подставив эти значения в уравнение и положив $z' = p(z)$, получим уравнению Бернулли $zpp' - p^2 + z = 0$ на функцию $p(z)$. Отсюда $dz/\sqrt{C_1z^2 + 2z} = \pm\, dt$ (при разделении переменных мы делим на z, поэтому теряем решение $y = 0$). Дальнейшее решение зависит от знака постоянной C_1.

Если $C_1 = 0$, то $\sqrt{2z} = \pm t + C$, откуда $z = (t + C)^2/2$. Сделав обратную замену $t = \ln x$, $z = ye^{-t} = y/x$, получим $y = \dfrac{1}{2}x(\ln|x| + C)^2$.

При $C_1 > 0$ получим параметрическое задание решения (роль параметра играет z)

$$x = C_2(\sqrt{C_1(C_1z^2 + 2z)} + C_1z + 1)^{\pm 1/\sqrt{C_1}},$$
$$y = C_2z(\sqrt{C_1(C_1z^2 + 2z)} + C_1z + 1)^{\pm 1/\sqrt{C_1}}.$$

Аналогично, при $C_1 < 0$ получаем

$$y = x(\pm \sin(\sqrt{-C_1}\ln|x| + C_2) - 1)/C_1.$$

Кроме того, в процессе решения было потеряно решение $y = 0$.

§9. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

9.1. Линейные однородные уравнения

Линейное однородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (9.1)$$

где $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ — функции, непрерывные на некотором интервале I оси x.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_m(x)$ уравнения (9.1) называются *линейно зависимыми*, если найдутся постоянные C_1, C_2, …, C_m, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация этих решений $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_my_m(x) \equiv 0$ на I. В противном случае, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_m(x)$ называются *линейно независимыми.*

Необходимым и достаточным условием линейной независимости n решений

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x) \qquad (9.2)$$

уравнения (9.1) является условие $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in I$, где

$$W(x) \equiv W[y_1,\, y_2, \ldots, y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского (вронскиан) системы решений (9.2). Линейно независимая система решений называется *фундаментальной системой решений* (ф.с.р.) уравнения (9.1) на интервале I. Если известна ф.с.р., то общее решение уравнения (9.1) дается формулой

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (9.3)$$

где C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

Для определителя Вронского имеет место *формула Остроградского-Лиувилля*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)/a_0(t)\,dt}. \qquad (9.4)$$

В общем случае метода построения ф.с.р. не существует. Конечно, на уравнение (9.1) можно смотреть как на уравнение п. 8.1 и понизить его порядок при помощи замены (8.2). Но в этом случае нарушится основное свойство уравнения — свойство линейности. Так, если для уравнения (9.1) при $n = 2$ осуществить подобную замену, то придем к уравнению Риккати (см. п. 4.4), которое в общем случае не интегрируется в квадратурах. Однако, если удается подобрать какое-либо решение $y_1(x)$ уравнения (9.1), то его порядок может быть понижен на единицу с сохранением линейности. Действительно, полагая $y = y_1 z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция и вычисляя производные, получим

$$y' = y_1' z + y_1 z', \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \ldots + y_1 z^{(n)}. \tag{9.5}$$

Так как производная $y^{(k)}(x)$, $k = 1, \ldots, n$, представляет собой линейную комбинацию z, z', ..., $z^{(k)}$ с коэффициентами от x, то, подставив (9.5) в (9.1), получим для $z(x)$ линейное однородное уравнение того же порядка, но не содержащее искомой функции (коэффициент при z равен $Ly_1 \equiv 0$):

$$b_0(x) z^{(n)} + b_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x) z' = 0, \qquad b_0(x) = a_0(x) y_1(x).$$

Следовательно, порядок полученного уравнения понижается на единицу заменой $z' = u(x)$ или $u = (y/y_1)'$, после чего снова получается линейное уравнение

$$L_1 u \equiv b_0(x) u^{(n-1)} + b_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x) u = 0. \tag{9.6}$$

Если удается подобрать второе решение $y_2(x)$ уравнения (9.1), линейно независимое с $y_1(x)$, то решением уравнения (9.6) будет функция $u_1 = (y_2/y_1)'$. Поэтому при помощи замены $v = (u/u_1)'$ можно понизить порядок уравнения (9.6) на единицу с сохранением линейности. Таким образом, если известно m линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_m(x)$ уравнения (9.1), то порядок уравнения может быть понижен с сохранением линейности на m единиц.

В случае $n = 2$ уравнение (9.1) принимает вид

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \tag{9.7}$$

и при наличии одного его частного решения $y_1(x)$ указанным способом приводится линейному однородному уравнению первого порядка. Однако можно сразу записать общее решение уравнения, воспользовавшись формулой (9.4). Действительно, пусть $y(x)$ — любое другое решение уравнения, линейно независимое с $y_1(x)$. Обозначим $p(x) = a_1(x)/a_0(x)$. Тогда

$$W[y_1, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = y_1 y' - y y_1' = C e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}.$$

Разделив обе части полученного равенства на y_1^2, получим

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \qquad y = y_1 \cdot \left(C \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\,dx}{y_1^2} + C_1 \right).$$

Последняя формула дает общее решение уравнения (9.7):

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad y_2 = y_1 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\,dx}{y_1^2}. \tag{9.8}$$

В некоторых случаях частное решение уравнения (9.7) (или (9.1)) удается найти в виде многочлена от x или показательной функции e^{ax}.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2 - x + 1)y'' - (2x^2 + 1)y' + (4x - 2)y = 0$.

Решение. Будем искать одно решение этого уравнения в виде многочлена. Можно считать, при необходимости домножив решение на постоянную, что коэффициент при старшей степени этого многочлена равен 1. Пусть $y_1 = x^n + \ldots$ — искомое решение (точками обозначены члены низшей степени). Подстановка этого многочлена в уравнение должна привести к тождественному равенству. В результате такой подстановки в левой части уравнения будет стоять многочлен

$$(x^2 - x + 1)(n(n-1)x^{n-2} + \ldots) - (2x^2 + 1)(nx^{n-1} + \ldots) + (4x - 2)(x^n + \ldots) \equiv 0.$$

Старшая степень x, входящая в левую часть, есть $n+1$. Приравнивая к нулю коэффициент при ней, получим уравнение для определения степени многочлена: $-2n+4 = 0$, откуда $n = 2$. Следовательно, искомое решение, согласно сделанному выше замечанию, нужно искать в виде $y_1 = x^2 + ax + b$. Подставим это выражение в исходное дифференциальное уравнение и приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x полученного многочлена. Полученная система уравнений на a и b дает $a = 0$, $b = 1$, поэтому $y_1 = x^2+1$. Общее решение уравнения запишется по формуле (9.8).

Чтобы не вычислять полученный в (9.8) интеграл, попробуем найти еще одно решение уравнения. Будем искать его в виде $y_2 = e^{ax}$. Подставив y_2 в уравнение, после сокращения на $e^{ax} \neq 0$ получим уравнение

$$(a^2 - 2a)x^2 - (a^2 - 4)x + (a^2 - a - 2) = 0.$$

Приравняем все его коэффициенты к нулю. Получим систему уравнений

$$a^2 - 2a = 0, \quad a^2 - 4 = 0, \quad a^2 - a - 2 = 0.$$

При $a = 2$ эти равенства будут выполняться одновременно. Следовательно, $y_2 = e^{2x}$ является решением исходного уравнения. В силу линейной независимости функций y_1 и y_2, их линейная комбинация $y_0 = C_1(x^2 + 1) + C_2 e^{2x}$ определит общее решение уравнения.

9.2. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{9.9}$$

в правой части которого стоит заданная непрерывная на интервале I функция $f(x)$. Для удобства мы будем считать коэффициент при старшей производной равным 1. Уравнение (9.9) называется *линейным неоднородным уравнением n-го порядка* (функция $f(x)$ называется свободным членом уравнения). Линейное однородное уравнение (9.1) иногда называют соответствующим однородным уравнением для уравнения (9.9). Если известно общее решение (9.3) соответствующего однородного уравнения y_0 и некоторое частное решение $\hat{y}$ уравнения (9.9), то общее решение неоднородного уравнения дается формулой $y = y_0 + \hat{y}$. Для отыскания частного решения уравнения (9.9) удобно пользоваться теоремой о *сложении решений,* которая состоит в следующем. Правую часть уравнения (9.9) разбивают на сумму функций более простого вида: $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ и находят частные решения $\hat{y}_k$ уравнений $Ly = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, соответственно. Тогда $\hat{y} = \hat{y}_1 + \ldots + \hat{y}_m$ будет решением уравнения (9.9) с правой частью $f(x)$.

Если решение уравнения (9.9) подобрать не удается, но известно общее решение (ф.с.р.) соответствующего однородного уравнения (9.1), то можно найти общее решение неоднородного уравнения *методом вариации произвольных постоянных* или методом *неопределенных множителей Лагранжа.* Суть этого метода заключается в том, что решение неоднородного уравнения (9.9) ищется в том же виде (9.3), что и общее решение соответствующего однородного уравнения (9.1), но коэффициенты C_i, $i = 1, \ldots, n$, считаются не постоянными, а пока неопределенными функциями $C_i = C_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти эти функции можно, решив алгебраическую систему уравнений относительно их производных $C_i'(x)$:

$$\begin{array}{lclclclcl}
C_1'y_1 & + & C_2'y_2 & + & \ldots & + & C_n'y_n & = & 0, \\
C_1'y_1' & + & C_2'y_2' & + & \ldots & + & C_n'y_n' & = & 0, \\
\ldots & & & & & & & & \\
C_1'y_1^{(n-2)} & + & C_2'y_2^{(n-2)} & + & \ldots & + & C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0, \\
C_1'y_1^{(n-1)} & + & C_2'y_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & C_n'y_n^{(n-1)} & = & f(x).
\end{array} \tag{9.10}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ фундаментальной системы решений, который не обращается в нуль на интервале I. Поэтому система (9.10) имеет единственное решение $C_i'(x) = \phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем $C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \phi_i(x)\,dx + C_i$, $i = 1, \ldots, n$, где C_i —

произвольные постоянные интегрирования. Подставляя эти значения в (9.3), запишем общее решение уравнения (9.9) следующим образом:

$$y = C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n+y_1\cdot\int\limits_{x_0}^{x}\phi_1(x)\,dx+y_2\cdot\int\limits_{x_0}^{x}\phi_2(x)\,dx+\ldots+y_n\cdot\int\limits_{x_0}^{x}\phi_n(x)\,dx. \tag{9.11}$$

В формуле (9.11) первые n слагаемых представляют из себя общее решение уравнения (9.1), а сумма остальных определяет некоторое частное решение уравнения (9.9), которое получается из общего решения, если положить $C_i = 0,\ i = 1,\ldots,n$. Однако, следует учитывать, что при обосновании метода вариации произвольных постоянных, коэффициент $a_0(x)$ при старшей производной уравнения (9.1) считается равным единице. Если это условие не выполняется, то в последнем уравнении системы (9.10) функцию $f(x)$ нужно заменить на $f(x)/a_0(x)$.

Если известно решение $y_1(x)$ уравнения (9.1), то порядок уравнения (9.9), как и для уравнения (9.1), понижается на единицу при помощи той же замены $u = (y/y_1)'$. В этом случае получается неоднородное уравнение $L_1u = f(x)$, левая часть которого определена в (9.6). Таким образом, если известно m линейно независимых решений $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ уравнения (9.1), то порядок уравнения (9.9) может быть понижен на m единиц с сохранением линейности.

Пусть известно m решений $\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_m$ уравнения (9.9). Тогда разности $y_1 = \hat{y}_2 - \hat{y}_1,\ \ldots,\ y_{m-1} = \hat{y}_m - \hat{y}_{m-1}$ будут решениями соответствующего однородного уравнения (9.1). Поэтому, если эти разности окажутся линейно независимыми, то порядок уравнения (9.9) может быть понижен с сохранением линейности на $(m-1)$ единиц.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $xy'' + y' - \dfrac{4y}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде многочлена $y_1 = x^2$. Далее, его общее решение находится по формуле (9.8): $y_0 = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^2}$. Решение неоднородного уравнения будем искать в том же виде, но при этом считать, что $C_i = C_i(x),\ i = 1,2$. Учитывая, что старший коэффициент уравнения равен x, система (9.10) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} C_1'x^2 + \dfrac{C_2'}{x^2} = 0, \\ 2C_1'x - \dfrac{2C_2'}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $C_1' = \dfrac{1}{4x^3}$, $C_2' = -\dfrac{x}{4}$, откуда $C_1(x) = C_1 - \dfrac{1}{8x^2}$,

$C_2(x) = C_2 - \dfrac{x^2}{8}$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид (9.11):

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{8x^2}\cdot x^2 - \frac{x^2}{8}\cdot\frac{1}{x^2} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{4}.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение $x^2y'' + 4xy' + 2y = 6x$ с известными частными решениями $\hat{y}_1 = x$, $\hat{y}_2 = x + 1/x$.

Решение. Поскольку известны два частных решения уравнения, их разность $\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = 1/x$ является решением соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения найдем по формуле (9.8): $y_0 = C_1/x + C_2/x^2$. Чтобы записать общее решение исходного неоднородного уравнения, нужно к этому решению прибавить любое частное решение, например, $\hat{y}_1 = x$:

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + x.$$

§10. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

10.1. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Это уравнение является частным случаем уравнения (9.1), в котором коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$, — действительные постоянные:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \tag{10.1}$$

Для этого уравнения задача построения ф.с.р. сводится к определению корней многочлена

$$L(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n = 0, \tag{10.2}$$

в котором символ p означает операцию дифференцирования по x (то есть, $p = d/dx$). Многочлен $L(p)$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (10.1). Правило построения характеристического многочлена состоит в том, что в уравнении (10.1) нужно каждую производную $y^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, заменить на p^k, ($y^{(0)} = y$ заменяется на $p^0 = 1$).

Пусть

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

есть совокупность всех корней $L(p)$ с учетом кратностей (в этой последовательности каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность). Рассмотрим следующие случаи.

1. Корни p_1, p_2, $\ldots$, p_n — вещественные и различные. Тогда ф.с.р. уравнения (10.1) составляют функции

$$y_1 = e^{p_1 x},\ y_2 = e^{p_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{p_n x}.$$

Общее решение уравнения (10.1) запишется по формуле (9.3):

$$y_0 = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x} + \ldots + C_n e^{p_n x}.$$

2. Все корни p_1, p_2, $\ldots$, p_n различны, но среди них есть комплексные. Пусть $p = \alpha + i\beta$ — один из комплексных корней. Тогда сопряженное число $\alpha - i\beta$ также является корнем характеристического уравнения (10.2), ибо все коэффициенты этого уравнения вещественны. Этим двум корням соответствуют две функции

$$y = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

входящие в ф.с.р. уравнения (10.1). Поэтому в этом случае ф.с.р. строится так: каждому вещественному корню p характеристического уравнения ставится в соответствие одна функция $y = e^{px}$, а каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ ставятся в соответствие две функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Общее решение записывается по формуле (9.3).

3. Характеристическое уравнение имеет кратные корни (вещественные либо комплексные).

Пусть сначала p — вещественный корень кратности $k \geqslant 2$. Этому корню соответствуют k функций, входящих в ф.с.р.:

$$y_1 = e^{px},\ y_2 = xe^{px},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{px}.$$

Если же характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k, то этим корням соответствуют $2k$ функций, входящих в ф.с.р.:

$$\begin{aligned} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\\ y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (9.1) записывается по формуле (9.3).

Отметим также, что все функции, входящие в ф.с.р., определены на всей оси x. Поэтому любое решение уравнения (9.1) также определено для всех x.

Пример 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристический многочлен уравнения имеет вид $L(p) = p^2 - 3p + 2$. Его корни $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ вещественны и различны. Ф.с.р.

уравнения образуют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Пример 2. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 0$.

Решение. Характеристический многочлен $L(p) = p^4 - 2p^2 + 1$ уравнения имеет кратные корни $p_{1,2} = -1$, $p_{3,4} = 1$. Общее решение уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x + C_4 x e^x$.

Пример 3. $y^{\mathrm{IV}} + 8y' = 0$.

Решение. Характеристический многочлен уравнения $L(p) = p^4 + 8p$ имеет два комплексно сопряженных корня $p_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ и два действительных корня $p_3 = -2$, $p_4 = 0$. Общее решение уравнения дается формулой $y_0 = C_1 e^x \cos\sqrt{3}x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}x + C_3 e^{-2x} + C_4$.

Пример 4. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Корни характеристического многочлена уравнения $L(p) = p^4 + 2p^2 + 1$ двукратные и комплексно сопряженные: $p_{1,2} = i$, $p_{3,4} = -i$. Общее решение уравнения имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$.

10.2. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

При решении неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{10.3}$$

с непрерывной правой частью $f(x)$ также применяют теорему о сложении решений и метод вариации произвольных постоянных (см. п. 9.2).

Пример 5. $y'' + y = x + 1/\sin x$.

Решение. Разобьем правую часть уравнения на две: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/\sin x$. Частное решение уравнения с правой частью $f_1(x)$ ищется в виде многочлена и легко подбирается: $\hat{y}_1 = x$. Решение уравнения с правой частью $f_2(x)$ будем искать методом вариации произвольных постоянных.

Общее решение соответствующего однородного уравнения легко записывается по корням характеристического многочлена $p_1 = i$, $p_2 = -i$ и имеет вид $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Считая здесь $C_i = C_i(x)$, $i = 1, 2$, пока не определенными функциями, запишем соответствующую систему (9.10):

$$\begin{aligned} &C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ &-C_1' \sin x + C_2' \cos x = 1/\sin x. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим $C_1' = -1$, $C_2' = \operatorname{ctg} x$, следовательно, $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|\sin x| + C_2$. Постоянные интегрирования проще всего взять равными нулю: $C_i = 0,\ i = 1, 2$. Тогда частное решение уравнения с правой частью $f_2(x)$ имеет вид $\hat{y}_2 = -x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$. По теореме о сложении решений, функция $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$ будет частным решением исходного уравнения. Прибавив это решение к общему решению однородного уравнения, получим его общее решение: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$.

Однако, в ряде случаев, если функция $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение уравнения (10.3) удобнее искать *методом неопределенных коэффициентов.*

1. Пусть $f(x) = P_m(x)$ — многочлен степени m от x.

1.1. Число $p = 0$ не является корнем характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (10.3) (в последовательности его корней $p_1, p_2, \ldots, p_n$ нет значения $p = 0$). Тогда существует частное решение уравнения вида

$$\hat{y} = \tilde{P}_m(x), \tag{10.4}$$

где $\tilde{P}_m(x)$ — многочлен степени m от x с неопределенными коэффициентами. Подставив его в (10.3), получим тождественное равенство двух многочленов. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, получим линейную алгебраическую систему для определения коэффициентов многочлена (10.4).

1.2. Число $p = 0$ является корнем кратности k для многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней значение $p = 0$ повторяется k раз). Тогда частное решение уравнения (10.3) можно искать в виде

$$\hat{y} = x^k \tilde{P}_m(x). \tag{10.5}$$

Неопределенные коэффициенты многочлена $\tilde{P}_m(x)$ ищутся аналогично.

2. Пусть $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m от x, а α — некоторое действительное число.

2.1. Число $p = \alpha$ не является корнем многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней $p_1, p_2, \ldots, p_n$ нет значения $p = \alpha$). Тогда частное решение уравнения (10.3) ищется в виде

$$\hat{y} = \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}. \tag{10.6}$$

Подставив (10.6) в (10.3), после сокращения на $e^{\alpha x}$, придем, как и в предыдущих случаях, к тождественному равенству многочленов степени m.

2.2. Число $p = \alpha$ является корнем кратности k для многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней значение $p = \alpha$ повторяется k раз). В этом случае частное решение уравнения (10.3) нужно искать в виде

$$\hat{y} = x^k \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}. \tag{10.7}$$

3. Пусть $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x$, где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней m и l соответственно, а β — некоторое действительное число.

3.1. Числа $p = \pm i\beta$ не являются корнями многочлена $L(p)$. В этом случае частное решение уравнения (10.3) ищется в виде

$$\hat{y} = \tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x, \tag{10.8}$$

где $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ — многочлены степени s, где $s = \max(m, l)$, с неопределенными коэффициентами. Подставим (10.8) в (10.3) и приравняем отдельно многочлены, стоящие в обеих частях полученного равенства при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ (это можно сделать в силу линейной независимости этих функций). Таким образом, мы снова придем к тождественному равенству многочленов и системе уравнений для определения коэффициентов $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_s(x)$.

3.2. Числа $p = \pm i\beta$ являются корнями кратности k многочлена $L(p)$. Тогда частное решение нужно искать в виде

$$\hat{y} = x^k(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.9}$$

4. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$, где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ многочлены от x степеней m и l соответственно, α, β — некоторые действительные числа.

4.1. Если числа $p = \alpha \pm i\beta$ не являются корнями многочлена $L(p)$, то частное решение уравнения (10.3) можно искать в виде

$$\hat{y} = e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.10}$$

После подстановки (10.10) в (10.3) и сокращения на $e^{\alpha x}$ необходимо приравнять многочлены, стоящие в обеих частях равенства при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Получится система алгебраических уравнений для определения их коэффициентов.

4.2. Если числа $p = \alpha \pm i\beta$ являются корнями кратности k многочлена $L(p)$, то частное решение уравнения ищется в виде

$$\hat{y} = x^k e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.11}$$

Отметим, что случай 4 обобщает все случаи 1–3. В самом деле, случай 3 получается при $\alpha = 0$, случай 2 — при $\beta = 0$, а случай 1 — при $\alpha = \beta = 0$. Тем не менее, на практике удобнее рассматривать их отдельно.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y''' + y' = x + 2e^x + \cos x + e^{-x}\sin x$.

Решение. Характеристический многочлен этого уравнения имеет вид $L(p) = p^3 + p$. Его корни равны $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $Ly \equiv y''' + y' = 0$ имеет вид

$$y_0 = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Разобьем правую часть уравнения на четыре слагаемых: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$, где

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2e^x, \quad f_3(x) = \cos x, \quad f_4(x) = e^{-x}\sin x.$$

Правая часть уравнения $Ly = f_1(x)$ имеет вид 1: здесь $m = 1$, $P_1(x) \equiv x$. Она подпадает под случай 1.2 при $k = 1$. Поэтому частное решение нужно искать в виде (10.5):

$$\hat{y}_1 = x(ax + b).$$

Подставив это выражение в уравнение, получим равенство $2ax + b \equiv x$, из которого $a = 1/2$, $b = 0$. Следовательно, $\hat{y}_1 = x^2/2$.

Правая часть уравнения $Ly = f_2(x)$ имеет вид 2 при $m = 0$, $P_0(x) \equiv 2$, $\alpha = 1$ и подпадает под случай 2.1. Следовательно, частное решение уравнения с такой правой частью ищется по формуле (10.6):

$$\hat{y}_2 = ae^x.$$

Подставим эту функцию в уравнение и сократим полученное равенство на e^x. Тогда постоянная a должна быть вещественным корнем уравнения $a^3 + a - 2 = 0$. Такой корень только один: $a = 1$, поэтому $\hat{y}_2 = e^x$.

Правая часть уравнения $Ly = f_3(x)$ имеет вид 3: $m = l = 0$, $P_0(x) \equiv 1$, $Q_0(x) \equiv 0$, $\beta = 1$ и подпадает под случай 3.2 при $k = 1$. Поэтому частное решение будем искать в виде (10.9):

$$\hat{y}_3 = x(a\cos x + b\sin x).$$

Подставим это выражение в уравнение и приравняем в левой и правой частях многочлены при $\cos x$ и $\sin x$ соответственно. Получим $a = -1/2$, $b = 0$, следовательно, $\hat{y}_3 = -(x\cos x)/2$.

Правая часть уравнения $Ly = f_4(x)$ имеет вид 4 при $\alpha = -1$, $m = l = 0$, $P_0(x) \equiv 0$, $Q_0(x) \equiv 1$, $\beta = 1$ и подпадает под случай 4.1. Поэтому, частное решение уравнения с такой правой частью нужно искать в виде (10.10):

$$\hat{y}_2 = e^{-x}(a\cos x + b\sin x).$$

Подставим это выражение в уравнение, сократим на e^{-x} и приравняем многочлены при $\cos x$ и $\sin x$ в обеих частях полученного тождества. Отсюда найдем $a = 3/8$, $b = -1/8$. Поэтому $\hat{y}_4 = e^{-x}(3\cos x - \sin x)/8$.

Таким образом, по теореме о сложении решений, функция $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3 + \hat{y}_4$ будет частным решением исходного уравнения, а его общее решение дается формулой

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{x^2}{2} + e^x - \frac{x}{2}\cos x + e^{-x}\Big(\frac{3}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x\Big).$$

10.3. Уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера называется уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \qquad (10.12)$$

где a_i, $i = 1, \ldots, n$, — действительные постоянные. Формально, это уравнение является уравнением с переменными коэффициентами. Однако, при помощи замены независимой переменной

$$x = e^t, \quad t = \ln x \text{ при } x > 0 \qquad (x = -e^t \text{ при } x < 0), \qquad (10.13)$$

оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно, вычисляя производные, получим

$$\begin{aligned}
&y'(x) = y'(t)\frac{dt}{dx} = y'(t)\frac{1}{x},\\
&y''(x) = \frac{d}{dx}\Big(y'(t)\frac{1}{x}\Big) = y''(t)\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - y'(t)\frac{1}{x^2} = \Big(y''(t) - y'(t)\Big)\frac{1}{x^2},\\
&y'''(x) = \Big(y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)\Big)\frac{1}{x^3},\\
&\ldots\\
&y^{(n)}(x) = \Big(y^{(n)}(t) + \ldots\Big)\frac{1}{x^n}
\end{aligned}$$

(в выражении для $y^{(n)}(x)$ многоточием обозначена линейная комбинация $y^{(k)}(t)$, $k = 1, \ldots, n-1$, с постоянными коэффициентами). Подставив эти производные в (10.12), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y = f(e^t).$$

Пример 7. $x^2 y'' - 2y = \ln x$.

Решение. Замена (10.13) приводит к уравнению

$$y'' - y' - 2y = t.$$

Корни характеристического многочлена $L(p) = p^2 - p - 2$ равны $p_1 = -1$, $p_2 = 2$. Частное решение полученного уравнения ищем в виде (10.4), а именно, $\hat{y}(t) = at + b$. Приравняв коэффициенты при степенях t в равенстве $-a - 2(at + b) = t$, получим $a = -1/2$, $b = 1/4$. Следовательно, $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}$. Сделав обратную замену, получим

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}.$$

Если в уравнении (10.12) при $y^{(k)}(x)$ вместо множителя x^k стоит множитель $(ax + b)^k$, $k = 1, \ldots, n$, то такое уравнение называется *уравнением Лагранжа.* С помощью замены $ax + b = e^t$ оно также сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

§11. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

11.1. Общая линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Метод исключения

Эта система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^j(p)x_i(t) = f_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11.1}$$

Здесь t — независимая переменная, $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ — неизвестные функции, $L_i^j(p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — многочлены от оператора дифференцирования p с постоянными действительными коэффициентами (см. п. 10.1), а $f_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — заданные, достаточное число раз дифференцируемые функции. Число уравнений системы равно числу неизвестных функций. Таким образом, каждое слагаемое $L_i^j(p)x_i$ представляет собой линейную комбинацию функции $x_i(t)$ и ее производных с постоянными коэффициентами:

$$L_i^j(p)x_i \equiv a_{0,i}^j x_i^{(s_i)} + a_{1,i}^j x_i^{(s_i-1)} + \ldots + a_{s_i-1,i}^j x_i' + a_{s_i,i}^j x_i, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где s_i — *порядок системы* (11.1) *относительно неизвестной функции* x_i (порядок наивысшей производной функции x_i, входящей в уравнения системы). Тогда число $m = s_1 + \ldots + s_n$ называется *порядком* этой системы.

Обозначим через $L(p)$ матрицу этой системы:

$$L(p) = \begin{pmatrix} L_1^1(p) & \cdots & L_n^1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1^n(p) & \cdots & L_n^n(p) \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Пусть $D(p) = \det L(p)$ — определитель матрицы системы (11.1). Он является многочленом от p с постоянными действительными коэффициентами некоторой степени q, где $q \leqslant m$. Решением системы (11.1) называется набор достаточное число раз дифференцируемых функций $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, которые при подстановке в уравнения системы, обращают их в тождества. Обозначим через $M_j^i(p)$ алгебраическое дополнение (т.е., минор, взятый с надлежащим знаком) элемента $L_i^j(p)$ матрицы (11.2). Справедливо следующее тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} M_j^i(p)L_k^j(p) = \delta_k^i D(p),$$

где δ_k^i — символ Кронекера ($\delta_i^i = 1$, $\delta_k^i = 0$ при $i \neq k$). Пусть набор функций $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ есть решение системы (11.1). Применяя к уравнениям системы дифференциальные операторы $M_1^i(p)$, $M_2^i(p)$, ..., $M_n^i(p)$ соответственно и складывая полученные уравнения получим, что функция $x_i(t)$ этого набора будет решением уравнения с постоянными коэффициентами

$$D(p)x_i = \sum_{j=1}^{n} M_j^i(p) f_j(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11.3}$$

Обратное неверно. Если взять произвольные решения $x_i(t)$ уравнений (11.3) и составить набор функций $x_1(t)$, $\ldots x_n(t)$, то этот набор, вообще говоря, не будет решением системы (11.1). Для того чтобы найти *общее* решение системы (11.1), нужно найти общее решение $x_i(t)$ каждого из уравнений (11.3), $i = 1, \ldots, n$, составить набор функций $x_1(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$ и выяснить, при каких соотношениях между постоянными интегрирования этот набор функций будет решением системы (11.1).

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \dot{y} & = t, \\ \ddot{x} - x - \dot{y} + y & = \cos t. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в операторном виде (11.1):

$$\begin{cases} (p^2+1)x - py & = t \\ (p^2-1)x + (-p+1)y & = \cos t. \end{cases}$$

Определителем $D(p)$ матрицы (11.2) этой системы является многочлен

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2+1 & -p \\ p^2-1 & -p+1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 1,$$

а соответствующие алгебраические дополнения равны

$$M_1^1(p) = -p+1, \quad M_2^1(p) = p, \quad M_1^2(p) = -p^2+1, \quad M_2^2(p) = p^2+1.$$

Применяя к первому уравнению дифференциальный оператор $M_1^1(p)$, а к второму — $M_2^1(p)$, получим для $x(t)$ уравнение

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t - 1 - \sin t.$$

Применяя дифференциальные операторы $M_1^2(p)$ и $M_2^2(p)$ соответственно, придем к уравнению (11.3) для $y(t)$:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = t.$$

Общие решения этих уравнений (их можно найти используя метод неопределенных коэффициентов, см. п. 10.2) имеют вид

$$x = (at+b)e^t + t + 1 - \frac{1}{2}\cos t, \quad y = (ct+d)e^t + t + 2.$$

Подставив эти функции в уравнения системы, и сократив на e^t, придем к тождествам:

$$(2a - c)t + 2a + 2b - d - c = 0, \quad 2a - c = 0.$$

Откуда $c = 2a$, $d = 2b$. Полагая $a = C_1$, $b = C_2$, общее решение системы запишем следующим образом:

$$x = (C_1 t + C_2)e^t + t + 1 - \frac{1}{2}\cos t, \quad y = 2(C_1 t + C_2)e^t + t + 2.$$

Рассмотрим однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^j(p)x_i(t) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11.4}$$

В том случае, когда набор функций $x_1(t)$, …, $x_n(t)$ является решением системы (11.4), каждая функция $x_i(t)$ этого набора будет некоторым решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$D(p)x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11.5}$$

порядка q. Однако, если составить набор из n произвольных решений уравнения (11.5), то такой набор $x_1(t)$, …, $x_n(t)$, как и в случае системы (11.1), также не будет решением системы (11.4).

Пусть $p = \lambda$ — корень многочлена $D(p)$ кратности k. Тогда решение системы (11.4) ищут в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t)e^{\lambda t}, \tag{11.6}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — искомая вектор-функция, а $\mathbf{g}$ — векторный многочлен, компонентами которого служат многочлены степени $k - 1$ с неопределенными коэффициентами. Любое решение системы (11.4) вида (11.6) называется решением, *соответствующим корню* λ. Подставив (11.6) в (11.4), сократив на $e^{\lambda t}$ и приравняв нулю коэффициенты при всех степенях t многочленов, стоящих в левых частях полученных тождеств, придем к линейной однородной алгебраической системе nk уравнений для определения такого же числа коэффициентов многочлена $\mathbf{g}(t)$. Обозначив через r ранг матрицы этой системы, получим, что решение, соответствующее корню λ будет линейно зависеть от $nk - r$ произвольных постоянных.

Пусть, теперь λ_1, …, λ_m — совокупность всех различных корней многочлена $D(p)$ кратностей k_1, …, k_m соответственно, так, что $k_1 + \ldots + k_m = q$. Если $\mathbf{x}_1$, …, $\mathbf{x}_m$ — решения системы (11.4), соответствующие корням λ_1, …, λ_m, то общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_m. \tag{11.7}$$

Пусть λ — вещественный корень $D(p)$. Так как коэффициенты многочлена $D(p)$ вещественные, то решение вида (11.6), соответствующее этому корню, будет вещественным, если входящие в него произвольные постоянные считать вещественными. Если λ — комплексный корень многочлена $D(p)$, то сопряженное число $\overline{\lambda}$ также будет корнем этого многочлена, причем той же кратности. Пусть

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t)e^{\lambda t}$$

есть решение, соответствующее корню λ. Считая входящие в него произвольные постоянные комплексными, получим комплексное решение системы (11.4), соответствующее этому корню. Так как система (11.4) имеет вещественные коэффициенты, то ее решением, соответствующим корню $\overline{\lambda}$, будет

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{g}}(t)e^{\overline{\lambda}t}.$$

Тогда сумма $\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x})$, входящая в (11.7), будет вещественной. Поэтому в случае комплексного корня λ решение, соответствующее корню $\overline{\lambda}$, искать необязательно. Достаточно найти лишь комплексное решение, соответствующее корню λ, и взять его вещественную часть (множитель 2 можно опустить).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} - 2x + \ddot{y} - y &= 0, \\ \dot{x} + \dot{y} + y &= 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в операторном виде (11.4):

$$\begin{cases} (p^2 + p - 2)x + (p^2 - 1)y &= 0 \\ px + (p+1)y &= 0. \end{cases}$$

Многочлен

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2 + p - 2 & p^2 - 1 \\ p & p + 1 \end{vmatrix} = 2p^2 - 2$$

имеет два простых вещественных корня $p_1 = 1$, $p_2 = -1$. Решение, соответствующее корню $p_1 = 1$, ищем в виде:

$$x = ae^t, \quad y = be^t.$$

Подставляя это решение во второе уравнение исходной системы, после сокращения на e^t получим $a + 2b = 0$ или $b = -C_1$, $a = 2C_1$ (подстановка в первое уравнение системы дает тот же результат). Тогда решение, соответствующее этому корню, запишется так:

$$x_1 = 2C_1e^t, \quad y_1 = -C_1e^t.$$

Решение, соответствующее корню $p_2 = -1$, ищем в виде:

$$x = ae^{-t}, \quad y = be^{-t},$$

что, после аналогичных вычислений, дает $(a = 0,\ b = C_2)$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = C_2 e^{-t}.$$

Поэтому, согласно (11.7), общее решение системы дается формулой

$$x = x_1 + x_2 = 2C_1 e^t, \quad y = y_1 + y_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} + y &= 0, \\ \dot{x} + x + 2y &= 0. \end{cases}$$

Решение. Многочлен $D(p)$ этой системы равен $D(p) = (p-1)^2$ и имеет один двукратный корень $p = 1$. Поэтому решение системы, соответствующее этому корню, ищем в виде (11.6) (при $n = 2,\ k = 2$):

$$x = (at + b)e^t, \quad y = (ct + d)e^t,$$

в котором $a,\ b,\ c,\ d$ — неопределенные коэффициенты. Подставив эти соотношения в исходную систему и сократив на e^t, придем к необходимости выполнения тождеств

$$2(a + c)t + 2a + 2b + c + 2d \equiv 0, \quad 2(a + c)t + a + 2b + 2d \equiv 0.$$

Приравняв к нулю коэффициенты при всех степенях t, получим линейную однородную алгебраическую систему четырех уравнений для определения коэффициентов $a,\ b,\ c,\ d$. Так как ранг матрицы полученной системы равен двум, то, положив $a = 2C_1,\ b = C_2$, найдем $c = -2C_1,\ d = -C_1 - C_2$. Поэтому общее решение исходной системы можно записать в виде

$$x = (2C_1 t + C_2)e^t, \quad y = (-2C_1 t - C_1 - C_2)e^t.$$

Пример 4.

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} + y^{\mathrm{IV}} + y &= 0, \\ x + \ddot{y} + \dot{y} &= 0. \end{cases}$$

Решение. Многочлен $D(p)$ системы имеет два простых комплексных корня $p_1 = i$ и $p_2 = -i$. Решение, соответствующее корню $p = i$, ищем в виде

$$x = ae^{it}, \quad y = be^{it}.$$

Подставив его во второе уравнение системы, найдем $a = (1-i)b$. Возьмем $b = C_1 + iC_2$. Тогда $x = (1-i)(C_1+iC_2)e^{it}$, $y = (C_1+iC_2)e^{it}$ – комплексное решение системы, соответствующее корню $p = i$. Как было сказано выше, решение системы, соответствующее комплексно сопряженному корню $p = -i$, искать нет необходимости, а можно сразу записать ее общее решение:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}\big((1-i)(C_1+iC_2)e^{it}\big) = \mathrm{Re}\big((1-i)(C_1+iC_2)(\cos t + i\sin t)\big) = \\ &\qquad\qquad = (C_1+C_2)\cos t + (C_1-C_2)\sin t, \\ y &= \mathrm{Re}\big((C_1+iC_2)e^{it}\big) = C_1\cos t - C_2\sin t. \end{aligned}$$

11.2. Нормальная линейная система с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций:

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i + f^j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11.8}$$

Здесь a_i^j, $i, j = 1, \ldots, n$, — некоторые вещественные постоянные, $f^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — заданные непрерывные функции. Такая система называется *нормальной линейной системой дифференциальных уравнений порядка n.*

Система

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i, \quad j = 1, \ldots, n \tag{11.9}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

где $A = (a_i^j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — постоянная вещественная матрица, называется нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений, соответствующей неоднородной системе (11.8). Эта система, очевидно, является частным случаем системы (11.4), для которой $L_i^j(p) = a_i^j - \delta_i^j p$, $i, j = 1, \ldots, n$, где δ_i^j — символ Кронекера. Многочлен $D(p)$ системы (11.9) есть характеристический многочлен $\det(A - pE)$ матрицы A, степень которого равна n. Значит, в отличии от системы (11.4), общее решение системы (11.9) всегда содержит n произвольных постоянных интегрирования, а вектор-функции,

$$\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}, \ldots, x_{in}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11.10}$$

стоящие при этих постоянных, образуют *фундаментальную систему решений* однородной системы (11.9). Это означает, что *определитель Вронского* системы решений (11.10)

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \tag{11.11}$$

отличен от нуля на любом интервале ее определения. Таким образом, общее решение системы (11.9) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{aligned} &x_1(t) = C_1x_{11}(t) + \ldots + C_nx_{n1}(t), \\ &\ldots \\ &x_n(t) = C_1x_{1n}(t) + \ldots + C_nx_{nn}(t). \end{aligned} \tag{11.12}$$

Решение неоднородной системы (11.8) ищут в том же виде (11.12), что и общее решение соответствующей однородной системы (11.9), но C_i, $i = 1, \ldots, n$, считаются не постоянными, а пока неизвестными функциями переменной t. Для их определения записывают линейную алгебраическую систему (сравнить с (11.12))

$$\begin{aligned} &\dot{C}_1(t)x_{11}(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)x_{n1}(t) = f^1(t), \\ &\ldots \\ &\dot{C}_1(t)x_{1n}(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)x_{nn}(t) = f^n(t). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Определителем системы (11.13) служит определитель (11.11). Поэтому система имеет единственное решение $\dot{C}_i(t) = \varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда, интегрируя, находим $C_i(t) = \int_{t_0}^t \varphi_i(t)\,dt + C_i$, $i = 1, \ldots, n$, где C_i — произвольные постоянные интегрирования. Подставляя найденные функции $C_i(t)$ в (11.12), получим общее решение системы (11.8), которое в векторной форме можно переписать так:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i(t) \int_{t_0}^{t} \varphi_i(t)\,dt.$$

В этой формуле первая сумма определяет общее решение однородной системы (11.9), а вторая — некоторое частное решение неоднородной системы.

Пример 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = x + y + t. \end{cases}$$

Решение. Запишем соответствующую однородную систему в операторной форме:

$$\begin{cases} (p-1)x - y = 0, \\ -x + (p+1)y = 0. \end{cases}$$

Многочлен $D(p)$ этой системы имеет двукратный корень $p = 0$. Решение системы, соответствующее этому корню, ищем в виде

$$x = a + bt, \quad y = c + dt.$$

Подставив этот вид решения в систему и приравняв нулю свободные члены и коэффициенты при t, придем к линейной однородной алгебраической системе из четырех уравнений, ранг матрицы которой равен двум. Решив полученную систему, общее решение однородной системы запишем следующим образом:

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = -C_1 + C_2(1-t).$$

Следовательно, фундаментальную систему решений образуют вектор-функции с компонентами

$$x_1 = 1, \quad y_1 = -1; \qquad x_2 = t, \quad y_2 = 1 - t.$$

Система (11.13) в нашем случае принимает вид:

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 t = 1, \quad -\dot{C}_1 + \dot{C}_2(1-t) = t.$$

Отсюда находим

$$\dot{C}_1 = 1 - t - t^2, \quad \dot{C}_2 = 1 + t; \qquad C_1(t) = t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + C_1, \quad C_2(t) = t + \frac{t^2}{2} + C_2.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$x = C_1 + C_2 t + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \quad y = -C_1 + C_2(1-t) - \frac{t^3}{6}.$$

§12. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами

12.1. Преобразование Лапласа

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;
2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;

3) $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т.е., существуют постоянные $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$ такие, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| < Me^{s_0 t}$.

Очевидно, условиям 2), 3) удовлетворяют многие элементарные функции: t^n, $e^{\alpha t}$, $\sin \alpha t$ и другие. Условие 1) кажется несколько искуственным и вызвано, в первую очередь, тем, что излагаемый метод был предложен для решения дифференциальных уравнений и систем, описывающих некоторые физические процессы, в частности, в задачах радиофизики, в которых за независимую переменную берется время $t \geqslant 0$ от начала процесса, а правые части могут иметь конечное число точек разрыва первого рода и быть заданными графически. С другой стороны, если умножить функцию, удовлетворяющую условиям 2), 3) на *единичную функцию Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

то получится функция-оригинал. Поэтому мы будем заранее предполагать, что такое домножение уже произведено и функцию $\eta(t)f(t)$ будем считать функцией-оригиналом $f(t)$.

Изображением функции-оригинала по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{12.1}$$

Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией, причем $F(\infty) = 0$. Тот факт, что функция $F(p)$ есть изображение функции-оригинала $f(t)$, мы будем символически записывать следующим образом:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad (\text{или } F(p) \doteqdot f(t)).$$

Свойства преобразования Лапласа. Всюду в дальнейшем мы считаем, что

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{и} \quad g(t) \doteqdot G(p).$$

I. *Свойство линейности.* Для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p).$$

II. *Теорема подобия.* Для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. *Дифференцирование оригинала.* Если $f'(t)$ — функция-оригинал, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

Обобщение. Если функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и $f^{(n)}(t)$ — оригинал, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

IV. *Дифференцирование изображения.*

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t)$$

(дифференцирование изображения равносильно умножению оригинала на $-t$).

Обобщение.

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

V. *Интегрирование оригинала.*

$$\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$$

(интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p).

VI. *Интегрирование изображения.*

$$\int\limits_p^\infty F(p_1)\, dp_1 \risingdotseq \frac{f(t)}{t},$$

если $\int_p^\infty F(p_1)\, dp_1$ сходится.

VII. *Теорема запаздывания.* Для любого $\tau > 0$ имеет место

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p).$$

VIII. *Теорема смещения.* Для любого комплексного λ имеет место

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda).$$

IX. *Теорема умножения* (Э. Борель).

$$F(p)G(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t g(\tau) f(t-\tau)\, d\tau.$$

Два последних интеграла называются сверткой функций f и g. Таким образом, умножение изображений равносильно свертке оригиналов.

Если изображение $F(p)$ есть правильная рациональная дробь: $F(p) = A(p)/B(p)$, где $A(p)$, $B(p)$ — многочлены и p_k, $k = 1, \dots, m$, — полюсы функции $F(p)$ порядка n_k (то есть, нули многочлена $B(p)$ кратности n_k), то оригинал $f(t)$ может быть найден по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} [F(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt}]. \tag{12.2}$$

В частном случае, когда все p_k, $k = 1, \dots, m$, — простые полюсы ($n_k = 1$), формула (12.2) упрощается и принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{12.3}$$

Пример 1. Найти изображения следующих функций-оригиналов $f(t)$:

1) t^n; 2) $e^{\lambda t}$; 3) $\cos \omega t$; 4) $\sin \omega t$; 5) $\operatorname{ch} \omega t$; 6) $\operatorname{sh} \omega t$; 7)$e^{\lambda t} \cos \omega t$; 8) $t^n \sin \omega t$.

Решение. Непосредственным вычислением интеграла (12.1) при $f(t) \equiv 1$, находим, что $1 \doteqdot 1/p$. Согласно IV, $(-1)^n t^n \doteqdot (1/p)^{(n)}$, откуда 1) $t^n \doteqdot n!/p^{n+1}$.

Применяя VIII, получим 2) $e^{\lambda t} \doteqdot 1/(p - \lambda)$.

Так как $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$, то, используя свойство I и найденное изображение функции $e^{\lambda t}$, получаем, что 3)

$$\cos \omega t \doteqdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогично, 4) $\sin \omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i \doteqdot \omega/(p^2 + \omega^2)$, 5) $\operatorname{ch} \omega t = (e^{\omega t} + e^{-\omega t})/2 \doteqdot p/(p^2 - \omega^2)$, 6) $\operatorname{sh} \omega t = (e^{\omega t} - e^{-\omega t})/2 \doteqdot \omega/(p^2 - \omega^2)$.

Применяя VIII для функции $f(t) = \cos \omega t$, найдем 7) $e^{\lambda t} \cos \omega t \doteqdot (p - \lambda)/[(p - \lambda)^2 + \omega^2]$.

Аналогично, свойства IV и I для функции $f(t) = \sin \omega t$, приводят к 8) $t^n \sin \omega t \doteqdot (-1)^n [\omega/(p^2 + \omega^2)]^{(n)}$.

Пример 2. Найти оригиналы следующих изображений $F(p)$:

1) $(p+3)/(p^2+4)$; 2) $1/p(p^2-1)$; 3) $(p-1)/(p^2+2p+1)$; 4) $1/(p^2+1)^2$.

Решение. 1) Имеем

$$\frac{p+3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{2} \frac{2}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t;$$

2) Первый способ. Так как $1/(p^2 - 1) \doteqdot \operatorname{sh} t$, то, согласно V, $1/p(p^2 - 1) \doteqdot \int_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1$;

Второй способ. Применяя формулу (12.3) при $m = 3$, $A(p) \equiv 1$, $B(p) = p^3 - p$, $p_1 = 0$, $n_1 = 1$, $p_2 = 1$, $n_2 = 1$, $p_3 = -1$, $n_3 = 1$, $B'(p) = 3p^2 - 1$, получим

$$f(t) = \frac{1}{-1} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{ch} t - 1;$$

3) Имеем

$$\frac{p-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2} \risingdotseq e^{-t} + te^{-t} \quad \left(\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t} \ \text{(см. IV)}\right);$$

4) Первый способ. Так как $1/(p^2+1) \risingdotseq \sin t$, то, согласно IV, $t \sin t \risingdotseq 2p/(p^2+1)^2$, а применяя V и I, получим

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau \sin\tau \, d\tau = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$

Второй способ. Применяя формулу (12.2) при $m = 2$, $A(p) \equiv 1$, $B(p) = (p^2+1)^2$, $p_1 = i$, $n_1 = 2$, $p_2 = -i$, $n_2 = 2$, получим

$$f(t) = \lim_{p\to i} \frac{d}{dp}\left[\frac{(p-i)^2 e^{pt}}{(p^2+1)^2}\right] + \lim_{p\to -i} \frac{d}{dp}\left[\frac{(p+i)^2 e^{pt}}{(p^2+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{p\to i} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}\right] + \lim_{p\to -i} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p-i)^2}\right] = \lim_{p\to i} e^{pt}\left[\frac{t}{(p+i)^2} - \frac{2}{(p+i)^3}\right] +$$

$$+ \lim_{p\to -i} e^{pt}\left[\frac{t}{(p-i)^2} - \frac{2}{(p-i)^3}\right] = 2\operatorname{Re}\left(e^{it}\left[\frac{t}{(2i)^2} - \frac{2}{(2i)^3}\right]\right) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$

12.2. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t), \tag{12.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{12.5}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до $(n-1)$-го порядка включительно являются функциями-оригиналами. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. По правилу дифференцирования оригинала (свойство III) с учетом (12.5) найдем

$$
\begin{aligned}
&x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0,\\
&x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - px_0 - x_1,\\
&\ldots\\
&x^{(n)}(t) \doteqdot p^nX(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0) =\\
&\qquad\qquad = p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \ldots - x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Применяя к обеим частям уравнения (12.4) преобразование Лапласа и пользуясь свойством линейности преобразования, получаем операторное уравнение

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p),$$

в котором $A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$, а $B(p)$ — некоторый многочлен степени $n-1$ от p, который получается при переносе в правую часть операторного уравнения слагаемых, не содержащих искомого изображения $X(p)$:

$$
\begin{aligned}
B(p) = a_0x_0p^{n-1} + (a_1x_0 + a_0x_1)p^{n-2} + (a_2x_0 + a_1x_1 + a_0x_2)p^{n-3} + \ldots +\\
+(a_{n-2}x_0 + a_{n-3}x_1 + \ldots + a_0x_{n-2})p + (a_{n-1}x_0 + a_{n-2}x_1 + \ldots + a_0x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Тогда $X(p) = (F(p) + B(p))/A(p)$ и решение задачи Коши сводится к отысканию оригинала $x(t)$ по известному изображению $X(p)$.

Пример 3. Рассмотрим задачу $\ddot{x} + x = t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, тогда $\dot{x}(t) \doteqdot pX(p) - 1$, $\ddot{x}(t) \doteqdot p^2X(p) - p$. Так как $t \doteqdot 1/p^2$, то операторное уравнение принимает вид

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p^2} + p,$$

откуда

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Переходя к оригиналам, получим (см. Пример 1) $x(t) = \cos t - \sin t + t$.

12.3. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Ограничимся лишь рассмотрением систем дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + b_{ik}\dot{x}_k + c_{ik}x_k) = f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n \tag{12.6}$$

с начальными условиями

$$x_k(0)=\alpha_k,\quad \dot x_k(0)=\beta_k,\quad k=1,\ldots,n. \tag{12.7}$$

Считая неизвестные функции $x_k(t)$, а также заданные функции $f_i(t)$, $i,k=1,\ldots,n$, функциями-оригиналами и обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ соответствующие им изображения, от системы (12.6), учитывая свойство III и начальные условия (12.7), придем к операторной системе

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik}\right)X_k(p)=$$
$$=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(a_{ik}p+b_{ik}\right)\alpha_k+a_{ik}\beta_k\right],\quad i=1,\ldots,n.$$

Эта система является линейной алгебраической системой уравнений для определения изображений $X_1(p),\ldots,X_n(p)$, соответствующие оригиналы которых $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ будут решениями задачи Коши (12.6), (12.7).

Пример 4. Решим задачу

$$\begin{aligned}&\ddot x+\dot y=t,\qquad \dot x+\ddot y=1,\\&x(0)=y(0)=1,\qquad \dot x(0)=\dot y(0)=0.\end{aligned}$$

Решение. Пусть $x(t)\doteqdot X(p)$, $y(t)\doteqdot Y(p)$. Тогда $\dot x(t)\doteqdot pX(p)-1$, $\ddot x(t)\doteqdot p^2X(p)-p$; $\dot y(t)\doteqdot pY(p)-1$, $\ddot y(t)\doteqdot pY(p)-p$. Записывая изображения правых частей системы, придем к операторной системе:

$$\begin{aligned}&p^2X(p)+pY(p)=1+p+1/p^2,\\&pX(p)+p^2Y(p)=1+p+1/p,\end{aligned}$$

решая которую, найдем

$$X(p)=\frac{1}{p},\quad Y(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3},\ \text{ откуда }\ x(t)=1,\ \ y(t)=1+\frac{t^2}{2}.$$

§13. Краевые задачи. Функция Грина

Рассмотрим следующую задачу. Найти решение уравнения

$$a_0(t)\ddot x+a_1(t)\dot x+a_2(t)x=f(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{13.1}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned}&\alpha_{10}\dot x(t_0)+\alpha_{11}x(t_0)+\beta_{10}\dot x(t_1)+\beta_{11}x(t_1)=\gamma_1,\\&\alpha_{20}\dot x(t_0)+\alpha_{21}x(t_0)+\beta_{20}\dot x(t_1)+\beta_{21}x(t_1)=\gamma_2.\end{aligned} \tag{13.2}$$

Здесь α_{ij}, β_{ij}, γ_i, $i, j = 1, 2$, — заданные постоянные. Коэффициенты уравнения (13.1) и его правую часть $f(t)$ будем считать непрерывными на отрезке $[t_0, t_1]$. Поставленная задача называется *краевой* или *граничной* задачей, а условия (13.2) называется *краевыми* (*граничными*) условиями. Отметим, что эти условия не позволяют определить значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ ни при $t = t_0$, ни при $t = t_1$. Поэтому краевая задача не сводится к задаче Коши и картина ее разрешимости может быть любой: краевая задача может иметь единственное решение, может иметь бесчисленное множество решений, а может не иметь решений. Отметим также, что если подобрать любую функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую краевым условиям (13.2) (ее ищут, как правило, в виде многочлена) и сделать замену искомой функции $x(t) = y(t) + \omega(t)$, то относительно новой неизвестной функции $y(t)$ получится уравнение (13.1) с правой частью $f_1(t) = f(t) - a_0(t)\ddot{\omega}(t) - a_1(t)\dot{\omega}(t) - a_2(t)\omega(t)$ с однородным граничным условиям ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). Поэтому, в дальнейшем, мы будем предполагать, что такая замена уже сделана, и будем искать решение уравнения (13.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} &\alpha_{10}\dot{x}(t_0) + \alpha_{11}x(t_0) + \beta_{10}\dot{x}(t_1) + \beta_{11}x(t_1) = 0, \\ &\alpha_{20}\dot{x}(t_0) + \alpha_{21}x(t_0) + \beta_{20}\dot{x}(t_1) + \beta_{21}x(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Функцией Грина краевой задачи (13.1), (13.3) называется функция двух переменных $G(t, s)$, для которой выполняются следующие условия:

I. При $t \neq s$ функция $G(t, s)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0. \tag{13.4}$$

II. При $t = t_0$ и $t = t_1$ функция $G(t, s)$ удовлетворяет соответственно первому и второму краевым условиям (13.3).

III. При $t = s$ функция $G(t, s)$ непрерывна:

$$G(t, s)|_{t=s+0} = G(t, s)|_{t=s-0}.$$

IV. При $t = s$ ее частная производная $G'_t(t, s)$ имеет скачок, равный $1/a_0(s)$:

$$G'_t(t, s)|_{t=s+0} - G'_t(t, s)|_{t=s-0} = \frac{1}{a_0(s)}.$$

Если краевая задача (13.1), (13.3) имеет единственное решение, то условия I–IV однозначно определяют ее функцию Грина, а решение краевой задачи дается формулой

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t, s) f(s)\, ds. \tag{13.5}$$

Метод функции Грина удобен в том случае, когда приходится многократно решать краевую задачу (13.1), (13.3), изменяя лишь правую часть уравнения (13.1) и записывая решение задачи по формуле (13.5).

Введем следующие обозначения:

$$V_{i,t_0}[x] = \alpha_{i0}\dot{x}(t_0) + \alpha_{i1}x(t_0), \quad V_{i,t_1}[x] = \beta_{i0}\dot{x}(t_1) + \beta_{i1}x(t_1), \quad i = 1, 2.$$

В этих обозначениях краевые условия (13.3) запишутся так:

$$V_i[x] = V_{i,t_0}[x] + V_{i,t_1}[x] = 0, \;\; i = 1, 2. \tag{13.6}$$

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (13.4) и $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ — его общее решение (C_1, C_2 — произвольные постоянные). Так как краевая задача (13.1), (13.6) имеет единственное решение, то однородная краевая задача (13.4), (13.6) не имеет нетривиальных решений. Поэтому условия

$$V_i[C_1x_1 + C_2x_2] = C_1V_i[x_1] + C_2V_i[x_2] = 0, \;\; i = 1, 2,$$

могут выполняться лишь при $C_1 = C_2 = 0$, и определитель этой системы Δ отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} V_1[x_1] & V_1[x_2] \\ V_2[x_1] & V_2[x_2] \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13.7}$$

Согласно свойству I, будем искать функцию Грина в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} A_1(s)x_1(t) + A_2(s)x_2(t), & t_0 \leqslant t \leqslant s; \\ B_1(s)x_1(t) + B_2(s)x_2(t), & s \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases} \tag{13.8}$$

Тогда, в силу III, при $t = s$ должно выполняться равенство

$$B_1(s)x_1(s) + B_2(s)x_2(s) = A_1(s)x_1(s) + A_2(s)x_2(s).$$

Подставив частную производную функции Грина по переменной t

$$G'_t(t,s) = \begin{cases} A_1(s)x'_1(t) + A_2(s)x'_2(t), & t_0 \leqslant t \leqslant s; \\ B_1(s)x'_1(t) + B_2(s)x'_2(t), & s \leqslant t \leqslant t_1, \end{cases}$$

в условие IV, получим

$$B_1(s)x'_1(s) + B_2(s)x'_2(s) - (A_1(s)x'_1(s) + A_2(s)x'_2(s)) = 1/a_0(s).$$

Вводя новые неизвестные функции $C_i(s) = B_i(s) - A_i(s)$, $i = 1, 2$, придем к системе равенств

$$\begin{aligned} C_1(s)x_1(s) + C_2(s)x_2(s) &= 0, \\ C_1(s)x'_1(s) + C_2(s)x'_2(s) &= 1/a_0(s), \end{aligned} \tag{13.9}$$

которая имеет единственное решение $\{C_1(s), C_2(s)\}$, так как ее определителем является определитель Вронского фундаментальной системы решений $x_1(s)$, $x_2(s)$.

Удовлетворяя, наконец, условиям II и учитывая (13.6), (13.8), получим

$$A_1(s)V_{i,t_0}[x_1] + A_2(s)V_{i,t_0}[x_2] + B_1(s)V_{i,t_1}[x_1] + B_2(s)V_{i,t_1}[x_2] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Положив в этих равенствах $B_i(s) = C_i(s) + A_i(s)$, $i = 1, 2$, мы придем к системе равенств

$$\begin{aligned} A_1(s)V_1[x_1] + A_2(s)V_1[x_2] &= -C_1(s)V_{1,t_1}[x_1] - C_2(s)V_{1,t_1}[x_2], \\ A_1(s)V_2[x_1] + A_2(s)V_2[x_2] &= -C_1(s)V_{2,t_1}[x_1] - C_2(s)V_{2,t_1}[x_2], \end{aligned} \tag{13.10}$$

которая, согласно (13.7), однозначно разрешима. Определив отсюда $A_i(s)$, а затем, по найденным ранее $C_i(s)$, и коэффициенты $B_i(s)$, $i = 1, 2$, функцию Грина краевой задачи (13.1), (13.3) получим по формуле (13.8).

Пример 1. Решим задачу

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + x = f(t), \\ &x(0) + \dot{x}(\pi) = 1, \quad \dot{x}(0) - x(\pi) = -1. \end{aligned}$$

Решение. Краевые условия задачи неоднородные. Будем искать функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую этим условиям, в виде многочлена: $\omega(t) = at+b$. Подставив ее в краевые условия, найдем $\omega(t) \equiv 1$. Полагая $x(t) = y(t) + \omega(t) = y(t) + 1$, где $y(t)$ — новая неизвестная функция, придем к краевой задаче с однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + y = f_1(t), \\ &y(0) + \dot{y}(\pi) = 0, \quad \dot{y}(0) - y(\pi) = 0, \end{aligned}$$

где $f_1(t) = f(t) - 1$.

Фундаментальную систему решений однородного уравнения $\ddot{y} + y = 0$ составляют функции $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$. Поэтому функцию Грина, согласно (13.8), ищем в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} A_1(s)\cos t + A_2(s)\sin t, & 0 \leqslant t \leqslant s; \\ B_1(s)\cos t + B_2(s)\sin t, & s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решив соответствующую систему (13.9):

$$\begin{aligned} C_1(s)\cos s + C_2(s)\sin s &= 0, \\ -C_1(s)\sin s + C_2(s)\cos s &= 1, \end{aligned}$$

получим $C_1(s) = -\sin s$, $C_2(s) = \cos s$.

Чтобы записать систему (13.10), удобнее воспользоваться видом функций $G(t,s)$ и $G'_t(t,s)$ и потребовать выполнения для них свойства II:

$$G(0,s)+G'_t(\pi,s)=0,\quad G'_t(0,s)-G(\pi,s)=0.$$

Тогда получим $A_1(s)-B_2(s)=0$, $A_2(s)+B_1(s)=0$. Полагая $B_i=A_i+C_i$, $i=1,2$, где C_i определены выше, придем к соответствующей системе (13.10):

$$A_1(s)-A_2(s)=\cos s,\quad A_1(s)+A_2(s)=\sin s.$$

Решив эту систему, найдем

$$A_1=(\sin s+\cos s)/2,\quad A_2=(\sin s-\cos s)/2.$$

Тогда

$$B_1=A_1+C_1=-(\sin s-\cos s)/2,\quad B_2=A_2+C_2=(\sin s+\cos s)/2.$$

Таким образом,

$$G(t,s)=\begin{cases}(\cos(t-s)-\sin(t-s))/2, & 0\leqslant t\leqslant s;\\ (\cos(t-s)+\sin(t-s))/2, & s\leqslant t\leqslant \pi.\end{cases}$$

Решение задачи с однородными краевыми условиями запишем по формуле (13.5):

$$y(t)=\int\limits_0^\pi G(t,s)f_1(s)\,ds.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нужно разбить его точкой $s=t$ на два интеграла и записать функцию Грина как функцию переменной s:

$$G(t,s)=\begin{cases}(\cos(t-s)+\sin(t-s))/2, & 0\leqslant s\leqslant t;\\ (\cos(t-s)-\sin(t-s))/2, & t\leqslant s\leqslant \pi.\end{cases}$$

Решение исходной краевой задачи тогда запишется в следующем виде:

$$x(t)=1+\int\limits_0^t G(t,s)f(s)\,ds+\int\limits_t^\pi G(t,s)f(s)\,ds-\int\limits_0^\pi G(t,s)\,ds.$$

§14. Устойчивость

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\ldots,x_n),\quad i=1,\ldots,n, \tag{14.1}$$

или, в векторной записи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{14.2}$$

В дальнейшем будем считать, что функции f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t \geqslant t_0$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Определение. Решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (14.2), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется *устойчивым* по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

1) любое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее условию

$$|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta, \tag{14.3}$$

определено в промежутке $[t_0, +\infty)$;

2) для всех этих решений выполняется неравенство

$$|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{14.4}$$

Иными словами, решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ устойчиво, если все достаточно близкие к нему в любой заранее выбранный начальный момент $t = t_0$ решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ целиком содержатся в сколь угодно узкой ε-трубке, построенной вокруг решения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Если же для некоторого ε такого δ не существует, то решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ называется *неустойчивым*.

Определение. Решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (14.2) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, для всех решений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих условию (14.3) выполняется

$$|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| \to 0, \quad t \to +\infty. \tag{14.5}$$

Ясно, что условие (14.5) сильнее, чем условие (14.4), потому что оно означает, что решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ не просто содержится в ε-трубке, а еще и стремится к решению $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора точки t_0. Из неравенств (14.3)–(14.4) по смыслу вытекает, что всегда следует выбирать $\delta \leqslant \varepsilon$.

Вопрос исследования устойчивости некоторого решения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (14.2) всегда можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения $\mathbf{y}(t) \equiv 0$ другой системы уравнений, получаемой из (14.2) заменой $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}(t)$. На рисунке ниже показана устойчивость нулевого решения в двумерном случае.

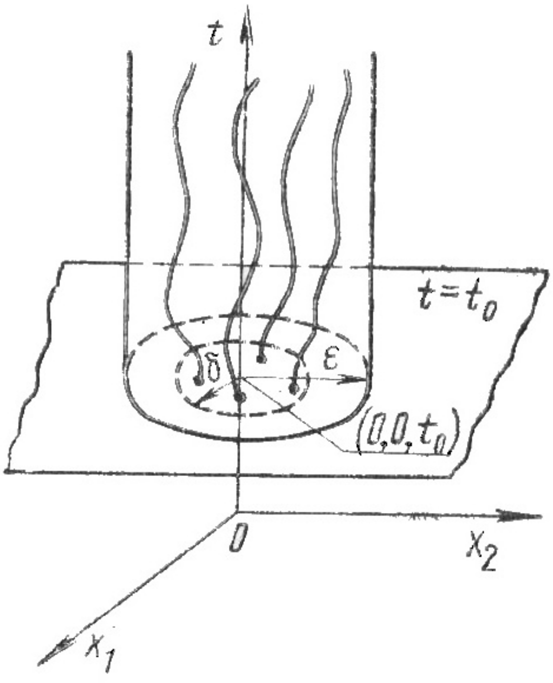

Рис. 4.

Пример 1. Выяснить, устойчиво ли решение уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$ с начальным условием $x(0) = 0$?

Решение. Общее решение этого уравнения имеет вид $y = \sin x + C \cos x$. Подставив сюда начальное условие, получим $C = 0$. Таким образом, на устойчивость требуется исследовать решение $\varphi(x) = \sin x$.

Разность $x(t) - \varphi(t) = C \cos x$. Выберем $t_0 = 0$. Запишем условие (14.3): $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |C| < \delta$. Неравенство (14.4) принимает вид $|C \cos x| < \varepsilon$. Легко видеть, что для его выполнения при всех $t \geqslant t_0 = 0$ достаточно выбрать любое положительное $\delta \leqslant \varepsilon$. Следовательно, решение $\varphi(x) = \sin x$ исходного уравнения устойчиво.

Поскольку выражение $|x(t) - \varphi(t)| = |C \cos x|$ не стремится к нулю при $x \to +\infty$ и малых $C \neq 0$, это решение не будет асимптотически устойчивым.

Пример 2. Выяснить, устойчиво ли решение уравнения $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$ с начальным условием $x(0) = 1$?

Решение. Общее решение данного уравнения с разделяющимися переменными имеет вид $x = (t - C)^3$, кроме того, есть еще решение $y = 0$. Решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, получается при $C = -1$ и имеет вид $\varphi(t) = (x + 1)^3$.

Разность $x(t) - \varphi(t) = -3t^2(C+1) + 3t(C^2-1) - (C^3+1)$. Возьмем $t_0 = 0$. Условие (14.3) примет вид $|C^3 + 1| < \delta$. Отсюда $\sqrt[3]{-1-\delta} < C < \sqrt[3]{-1+\delta}$. Это означает, что C принадлежит некоторому открытому интервалу, содержащему точку -1.

Запишем теперь условие (14.4): $|-3t^2(C+1) + 3t(C^2-1) - (C^3+1)| < \varepsilon$.

Под знаком модуля стоит многочлен от t, не равный константе при всех $C \neq -1$. Ясно, что модуль этого многочлена не может быть ограничен сверху никаким числом ε при $t \to +\infty$. Поэтому решение $\varphi(t) = (x+1)^3$ не является устойчивым.

14.1. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим один из методов исследования на устойчивость нулевого решения системы (14.1). Разложим функции f_i в ряд Тейлора в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ с точностью до слагаемых первой степени:

$$f_i(t, \mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \psi_i(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14.6}$$

где a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, — постоянные числа, а функции $\psi_i(t, \mathbf{x})$ — бесконечно малые порядка выше первого, то есть,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to 0} \frac{|\psi_i(t, \mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0 \tag{14.7}$$

равномерно по $t \geqslant t_0$ (здесь $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$). Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица из коэффициентов разложений (14.6).

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. *Если вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны, а функции f_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют равенству* (14.7)*, то нулевое решение системы* (14.1) *асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво.*

Эта теорема, таким образом, позволяет исследовать лишь случай асимптотической устойчивости или неустойчивости. Если же собственные значения матрицы A имеют как отрицательные, так и нулевые вещественные части (но нет собственных значений с положительной вещественной частью), то теорема не дает ответа об устойчивости (неустойчивости) нулевого решения. В этом случае необходимо дополнительное исследование (см. п. 14.2).

Пример 3. Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту теорему. Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -3y. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Решение. Эта система легко решается: $x = C_1 e^{-t}$, $y = C_2 e^{-3t}$. Исключив отсюда t и обозначив $k = C_2/C_1^3$, получим $y = kx^3$. Таким образом, траекториями системы уравнений (14.8) являются всевозможные кубические параболы, а также прямые $x = 0$ и $y = 0$ (при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Из того, что $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, следует, что движение по траектории осуществляется в сторону начала координат. Поэтому, если взять решение системы, достаточно близкое к нулевому, то это решение будет стремиться к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, нулевое решение системы (14.8) асимптотически устойчиво.

Матрица A в рассматриваемом случае имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения равны -1 и -3 и асимптотическая устойчивость нулевого решения следует также из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пример 4. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{9 - x + 2y} - 3\cos 2y, \\ \dot{y} &= e^x - e^{2y} + \ln(1 - 5x). \end{aligned} \tag{14.9}$$

Решение. Разложим в ряд Тейлора с точностью до $o(\sqrt{x^2 + y^2})$ все входящие в правые части функции: $\sqrt{9 - x + 2y} = 3\sqrt{1 - x/9 + 2y/9} \approx 3 - x/6 + y/3$; $3\cos 2y \approx 3$; $e^x \approx 1 + x$; $e^{2y} \approx 1 + 2y$; $\ln(1 - 5x) \approx -5x$.

Следовательно, с точностью до $o(\sqrt{x^2 + y^2})$ система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y, \\ \dot{y} &= -4x - 2y, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1/6 - \lambda & 1/3 \\ -4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{13}{6}\lambda + \frac{5}{3} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа $\lambda_{1,2} = -\dfrac{13}{12} \pm \dfrac{\sqrt{71}}{12}$. Они вещественны и отрицательны, следовательно, нулевое решение системы (14.9) асимптотически устойчиво.

14.2. Исследование на устойчивость с помощью теоремы Ляпунова

Рассмотрим функцию $V(t, \mathbf{x})$, непрерывно дифференцируемую в области

$$D = \{||\mathbf{x}|| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0\}.$$

Определение. Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется *знакопостоянной (знакоположительной* или *знакоотрицательной)* в области D, если

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant 0 \quad (\text{или } V(t, \mathbf{x}) \leqslant 0) \quad \text{при} \quad (t, \mathbf{x}) \in D.$$

Определение. Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется *положительно определенной* в области D, если существует непрерывная функция $W(\mathbf{x})$, $||\mathbf{x}|| < \varepsilon$ такая, что

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant W(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0; \qquad V(t, 0) = W(0) = 0.$$

Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется *отрицательно определенной* в области D, если существует непрерывная функция $W(\mathbf{x})$, $||\mathbf{x}|| < \varepsilon$ такая, что

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant -W(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0; \qquad V(t, 0) = W(0) = 0.$$

Положительно или отрицательно определенная функция называется *знакоопределенной* в D.

В качестве функции $W(\mathbf{x})$ иногда можно взять $W(\mathbf{x}) = \inf\limits_t |V(t, \mathbf{x})|$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14.10}$$

Функцию

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x})$$

называют *производной по t в силу системы* (14.10). Если $\mathbf{x}(t)$ есть решение системы (14.10), то $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ представляет собой полную производную по t сложной функции $V(t, \mathbf{x}(t))$.

Теорема Ляпунова об устойчивости. *Если для системы уравнений* (14.10) *существует положительно определенная в области D функция $V(t, \mathbf{x})$, производная $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ которой в силу системы* (14.10) *является знакоотрицательной, то нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.*

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если для системы уравнений* (14.10) *существует положительно определенная в области D функция $V(t, \mathbf{x})$, производная $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ которой в силу системы* (14.10) *является отрицательно определенной, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.*

Функция V в этом случае называется *функцией Ляпунова.* Общего метода построения функции Ляпунова не существует. При $n = 2$ иногда удается построить ее в виде суммы одночленов вида $ax^{2k}y^{2\ell}$, $a > 0$.

Теорема Четаева о неустойчивости. *Пусть система уравнений* (14.10) *обладает нулевым решением. Пусть существуют область U пространства переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ и функция $V(t, \mathbf{x})$, определенная при $\mathbf{x} \in U$, $t \geqslant t_0$, такие, что:*

1) *точка* $\mathbf{x}=0$ *принадлежит границе области* U*;*

2) *функция* $V(t,\mathbf{x})$ *равна нулю на границе области* U *при* $||\mathbf{x}||<\varepsilon$*;*

3) *внутри области* U *при* $t>t_0$ *функция* V *положительна, а ее производная* $\dot V(t,\mathbf{x})$ *в силу системы* (14.10) *положительно определенная.*

Тогда нулевое решение системы неустойчиво.

Пример 5. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{aligned} &\dot x = y^3-2x^3-x^2y^3,\\ &\dot y = -x+x^3-y^5. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Решение. Попытаемся применить теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Матрица A из п. 14.1 имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, и ее собственные значения равны нулю, поэтому теорема об устойчивости по первому приближению ответа не дает.

Построим функцию Ляпунова V. Ее производная в силу системы (14.11) имеет вид $\dot V = \frac{\partial V}{\partial x}(y^3-2x^3-x^2y^3)+\frac{\partial V}{\partial y}(-x+x^3-y^5)$. Попытаемся уничтожить слагаемые, входящие в это выражение со знаком «+». Если V будет содержать слагаемое вида ax^{2k}, то ее производная будет содержать слагаемое $y^3\cdot(ax^{2k})' = akx^{2k-1}y^3$. Его можно взаимно уничтожить только со слагаемым $-\frac{\partial V}{\partial y}\cdot x$. Этого можно добиться, если $2k-1=1$, откуда $k=1$. Аналогично, если V будет содержать слагаемое $by^{2\ell}$, то $\dot V$ будет содержать слагаемое $x^3\cdot(by^{2\ell})' = 2b\ell x^3y^{2\ell-1}$. От него можно избавиться за счет слагаемого $-\frac{\partial V}{\partial x}\cdot x^2y^3$, откуда необходимо $\ell=2$. Итак, посмотрим, что будет, если функция V будет содержать слагаемые ax^2+by^4. В этом случае в выражении для $\dot V$ будет присутствовать $2ax(y^3-2x^3-x^2y^3)+4by^3(-x+x^3-y^5) = 2axy^3-4ax^4-2ax^3y^3-4bxy^3+4bx^3y^3-4by^8$. Легко видеть, что при $a=2$, $b=1$, функция $\dot V = -8x^4-4y^8$ будет отрицательно определенной в окрестности начала координат.

Таким образом, функция $V(t,x,y)=2x^2+y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и нулевое решение системы (14.11) будет асимптотически устойчивым.

Пример 6. Показать, что нулевое решение системы

$$\begin{aligned} &\dot x = -x+xy,\\ &\dot y = 2y^2+x^2 \end{aligned} \tag{14.12}$$

неустойчиво.

Решение. Покажем, что функция $V(x,y)=y-x^2/2$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева. Действительно, рассмотрим область $U=\{(x,y)\,|\,y\geqslant x^2/2\}$. Точка $(0,0)$ принадлежит ее границе, а функция V равна нулю на этой границе и положительна внутри области. Производная в силу системы $\dot{V} = -x(-x+xy)+2y^2+x^2 = 2y(y-x^2/2)$ положительно определена внутри области U, так как $y \geqslant x^2/2 \geqslant 0$.

14.3. Условия отрицательности вещественных частей корней многочлена

Левая часть характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ для нахождения собственных значений матрицы A представляет собой многочлен. Таким образом, чтобы найти собственные значения, приходится искать корни этого многочлена, а это зачастую сделать не очень просто. Естественным образом возникает вопрос: нельзя ли выяснить, будут ли вещественные части корней заданного многочлена

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{14.13}$$

отрицательны, не вычисляя самих корней? Ответ на этот вопрос дают следующие условия.

Необходимое условие. *Все коэффициенты a_i должны быть положительны.* Отметим, что в случае, когда $n \leqslant 2$, это условие одновременно является и достаточным. Действительно, если $n=1$, то $\lambda = -a_1/a_0 < 0$. Если же $n=2$, то необходимо рассмотреть два случая. 1) Дискриминант D уравнения отрицателен. Тогда корни имеют вид $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm i\sqrt{|D|}}{2a_0}$, и их вещественные части, равные $-\dfrac{a_1}{2a_0}$, отрицательны. 2) Дискриминант уравнения неотрицателен. Тогда оно имеет два вещественных корня, сумма которых отрицательна (она равна $-\dfrac{a_1}{a_0}$), а произведение положительно (оно равно $\dfrac{a_2}{a_0}$). Поэтому оба эти корня отрицательны.

Достаточные условия Рауса-Гурвица. Составим из коэффициентов уравнения (14.13) матрицу размера $n\times n$, называемую *матрицей Гурвица*:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Строится она следующим образом: по главной диагонали записываются числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. После этого в каждой строке числа a_i расставляются вправо по убыванию индексов, а влево по возрастанию, пока не закончатся индексы, либо не закончится строка. Оставшиеся свободными места заполняются нулями. После этого необходимо вычислить все главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

Условия Рауса-Гурвица состоят в том, что *все эти миноры должны быть положительны.*

Достаточные условия Льенара-Шипара. Эти условия равносильны условиям Рауса-Гурвица и состоят в том, что *достаточно того, чтобы были положительны миноры* Δ_{n-1}*,* Δ_{n-3}*,* Δ_{n-5}*, и т.д.* Эти условия удобнее для практического применения, так как содержат фактически вдвое меньше определителей.

Пример 7. Будет ли нулевое решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -3x_1 - 2x_3 - x_5, \\ \dot{x}_2 = & -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4, \\ \dot{x}_3 = & -2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5, \\ \dot{x}_4 = & -x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4, \\ \dot{x}_5 = & -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \end{aligned} \tag{14.14}$$

устойчиво?

Решение. Собственные значения матрицы системы находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & -2-\lambda & 0 \\ -3 & -2 & 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^5+10\lambda^4+27\lambda^3+23\lambda^2+24\lambda+15 = 0.$$

Все коэффициенты последнего уравнения положительны, так что необходимое условие выполнено. Вместо того, чтобы решать это уравнение, запишем матрицу Гурвица и условия Льенара-Шипара:

$$G = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 27 & 10 & 1 & 0 \\ 15 & 24 & 23 & 27 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 24 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 23 & 27 & 10 & 1 \\ 15 & 24 & 23 & 27 \\ 0 & 0 & 15 & 24 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 23 & 27 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя определители, получаем $\Delta_4 = -14316$, $\Delta_2 = 247$. Поскольку Δ_4 отрицателен, нулевое решение системы (14.14) неустойчиво.

§15. Особые точки

Особой точкой системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{15.1}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{15.2}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, называется точка, в которой эти функции одновременно обращаются в нуль. Особая точка системы (15.1) называется также *положением равновесия* этой системы.

Чтобы исследовать поведение траекторий системы (15.1) или интегральных кривых уравнения (15.2) вблизи особой точки (x_0, y_0), осуществляют замену переменных

$$x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0 \tag{15.3}$$

и полученные в результате такой замены систему или уравнение исследуют вблизи особой точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что такая замена уже сделана и исследовать особую точку $(0, 0)$.

Рассмотрим сначала линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{15.4}$$

Соответствующее этой системе уравнение (15.2) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}. \tag{15.5}$$

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ системы (15.4), т.е., корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ограничимся случаем $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ или $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Если числа λ_1, λ_2 — различные и одного знака, то особая точка $(0, 0)$ называется *узлом* (устойчивым при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и неустойчивым при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Чтобы выяснить поведение траекторий системы (15.4) (интегральных кривых уравнения (15.5)), нужно занумеровать собственные значения так, чтобы выполнялось неравенство $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ и найти собственные векторы $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно:

$$\mathbf{Ah_i} = \lambda_1 \mathbf{h_i}, \quad i = 1, 2.$$

Эти векторы образуют, вообще говоря, лишь аффинный базис и определяют новую систему координат x_1, y_1 в направлении векторов $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ соответственно. Траекториями системы в случае устойчивого узла будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, полуоси осей x_1 и y_1 (направление движения точки по полуосям с ростом параметра t к особой точке $(0,0)$). Остальные траектории с ростом t входят в начало координат касаясь оси x_1 и неограниченно удаляются от него, оставаясь в том же квадранте системы координат x_1, y_1 при убывании параметра t. Для неустойчивого узла траектории те же, но направление движения по траекториям с ростом параметра t меняется на обратное.

Если числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки, то особая точка $(0,0)$ называется *седлом.* Полагая $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ и определяя собственные векторы $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ матрицы $\mathbf{A}$ с собственными значениями λ_1, λ_2, соответственно, получим, что траекториями системы (15.4) будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, полуоси осей x_1 и y_1 в направлении векторов $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ соответственно (направление движения точки по полуосям оси x_1 с ростом параметра t к особой точке $(0,0)$, а по полуосям оси y_1 — от нее). Остальные траектории с ростом параметра t неограниченно приближаются из соответствующих квадрантов к оси y_1, а с убыванием t — к оси x_1.

Пусть собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ комплексные (на самом деле, комплексно-сопряженные, т.к. $\mathbf{A}$ — вещественная матрица):

$$\lambda_1 = \mu + i\nu, \quad \lambda_2 = \mu - i\nu \quad (\nu > 0).$$

Тогда собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ также будут комплексно-сопряженными: $\mathbf{H} = \mathbf{h_1} + i\mathbf{h_2}$, $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{h_1} - i\mathbf{h_2}$. Вещественные векторы $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ образуют базис, что вытекает из линейной независимости векторов $\mathbf{H}$ и $\overline{\mathbf{H}}$ как соответствующих различным собственным значениям. Все вещественные решения системы (15.4) даются формулой

$$\mathbf{x} = re^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha)\mathbf{h_1} + re^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha)\mathbf{h_2}, \tag{15.6}$$

где $r \geqslant 0$ и α — вещественные постоянные.

Если $\mu \neq 0$, то особая точка $(0,0)$ называется *фокусом* (устойчивым при $\mu < 0$ и неустойчивым при $\mu > 0$). Траекториями системы будут спирали, закручивающиеся вокруг начала координат, а также положение равновесия $x = 0$, $y = 0$. Чтобы выяснить направление закручивания спиралей, нужно найти вектор скорости $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ в любой точке плоскости (x_0, y_0):

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0). \tag{15.7}$$

Этот вектор в случае устойчивого фокуса определяет направление закручивания спиралей, а в случае неустойчивого фокуса — направление их раскручивания.

Если $\mu = 0$, то особая точка $(0, 0)$ называется *центром.* Траекториями в аффинной системе координат x_1, y_1 в направлении векторов $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ соответственно при $r > 0$ являются эллипсы с центром в начале координат (см. (15.6) при $\mu = 0$), отсекающие на полуосях осей x_1, y_1 отрезки $r|\mathbf{h_1}|$ и $r|\mathbf{h_2}|$ соответственно, а при $r = 0$ — положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Направление обхода эллипсов с ростом параметра t определяется направлением вектора скорости (15.7).

Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное значение ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$). В этом случае особая точка $(0, 0)$ может быть либо *дикритическим узлом*, либо *вырожденным узлом.* В случае дикритического узла система (15.4) имеет вид $\dot{x} = ax$, $\dot{y} = ay$. Траекториями будут лучи, исходящие из начала координат и положение равновесия $x = 0$, $y = 0$. Направление движения по траекториям с ростом параметра t в случае устойчивого дикритического узла ($\lambda_1 < 0$) к особой точке, а в случае неустойчивого дикритического узла ($\lambda_1 > 0$) — от нее.

Если особая точка — вырожденный узел, то матрица $\mathbf{A}$ имеет вещественный собственный вектор $\mathbf{h_1}$ с собственным значением λ_1. Дополняя этот вектор произвольным вектором $\mathbf{h_2}$ до базиса, придем к разложению

$$\mathbf{A}\mathbf{h_2} = \mu\mathbf{h_1} + \lambda_1\mathbf{h_2}, \tag{15.8}$$

из которого значение μ определяется однозначно. Новый базис $\mathbf{H_1} = \mu\mathbf{h_1}$, $\mathbf{H_2} = \mathbf{h_2}$ определит систему координат x_1, y_1 в направлении этих векторов и соответствующие квадранты аффинной системы координат. Траекториями системы (15.4) в случае устойчивого вырожденного узла ($\lambda_1 < 0$) будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и полуоси оси x_1 (направление движения с ростом параметра t к особой точке). Остальные траектории с ростом t будут входить в начало координат, касаясь оси x_1 из первого и третьего квадрантов новой системы координат и неограниченно удаляться от него с убыванием t соответственно во второй и четвертый квадранты. В случае неустойчивого вырожденного узла ($\lambda_1 > 0$) направление движения по полуосям оси x_1 меняется на обратное. Остальные траектории с ростом параметра t будут выходить из начала координат, касаясь оси x_1 из второго и четвертого квадрантов, неограниченно удаляясь соответственно в первый и третий квадранты аффинной системы координат.

Пример 1. Исследовать поведение траекторий в окрестности особой точки системы уравнений

$$\dot{x} = -11x + 3y,$$
$$\dot{y} = -2x - 4y.$$

Решение. Собственные значения матрицы данной системы есть $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -10$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$). Особая точка $(0, 0)$ — устойчивый узел. Собственный вектор $\mathbf{h_1} = (h_1^1, h_1^2)$ с собственным значением $\lambda_1 = -5$ находится из условия

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_1^2 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_1^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы получающейся отсюда линейной однородной алгебраической системы равен 1. Поэтому, приравняв, например, первые компоненты этих векторов, найдем $6h_1^1 = 3h_1^2$. Так как все собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному значению, коллинеарны, то, положив $h_1^1 = 1$, получим $\mathbf{h_1} = (1, 2)$. Собственный вектор $\mathbf{h_2} = (h_2^1, h_2^2)$ с собственным значением $\lambda_2 = -10$ находится из условия

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2^1 \\ h_2^2 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} h_2^1 \\ h_2^2 \end{pmatrix}.$$

Откуда $h_2^1 = 3h_2^2$ и $\mathbf{h_2} = (3, 1)$. Траектории системы изображены на рис. 5.

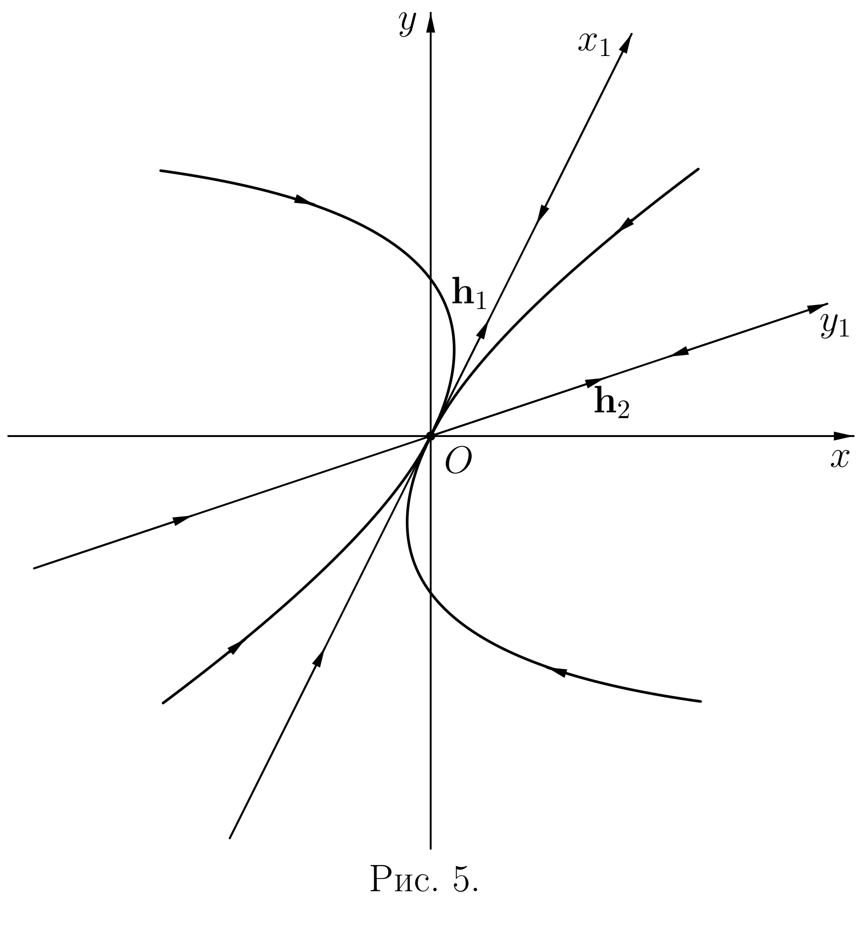

Рис. 5.

Пример 2. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - 3y}{y + 2x}$$

вблизи его особой точки.

Решение. Соответствующая этому уравнению система (15.4) имеет вид

$$\dot{x} = 2x + y,$$
$$\dot{y} = -4x - 3y.$$

Собственные значения матрицы системы $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ $(\lambda_1 < 0 < \lambda_2)$. Особая точка $(0,0)$ — седло. Собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$ соответственно, равны $\mathbf{h_1} = (1, -4)$, $\mathbf{h_2} = (1, -1)$. См. рис. 6.

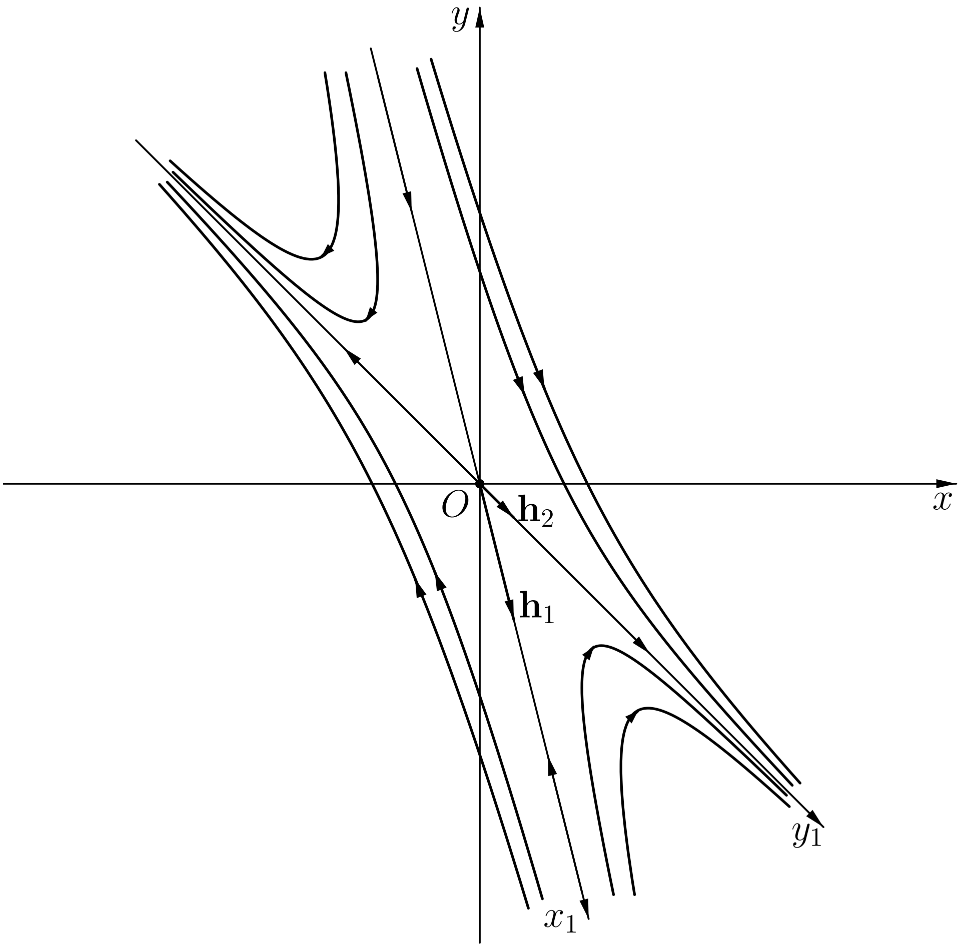

Рис. 6.

Пример 3. Исследовать поведение траекторий системы уравнений

$$\dot{x} = x - y,$$
$$\dot{y} = x + y$$

вблизи особой точки.

Решение. Собственные значения комплексно-сопряженные: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Особая точка — неустойчивый фокус. Вектор скорости (15.7) в точке $(1,0)$ равен вектору $\mathbf{v} = (1,1)$. Спирали с ростом параметра t раскручиваются против часовой стрелки (закручиваются по часовой стрелке с убыванием t). Одна из траекторий системы показана на рис. 7.

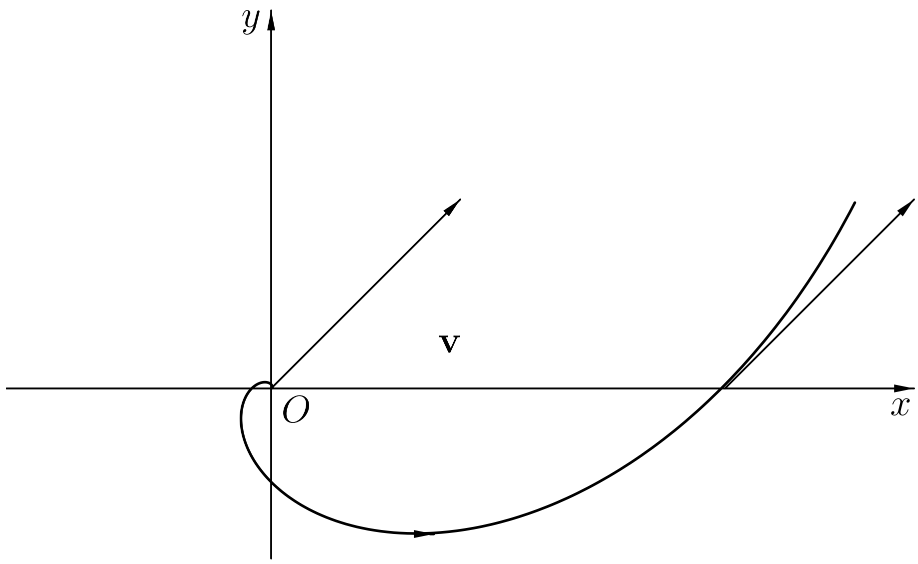

Рис. 7.

Пример 4. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{5y - x}$$

вблизи особой точки.

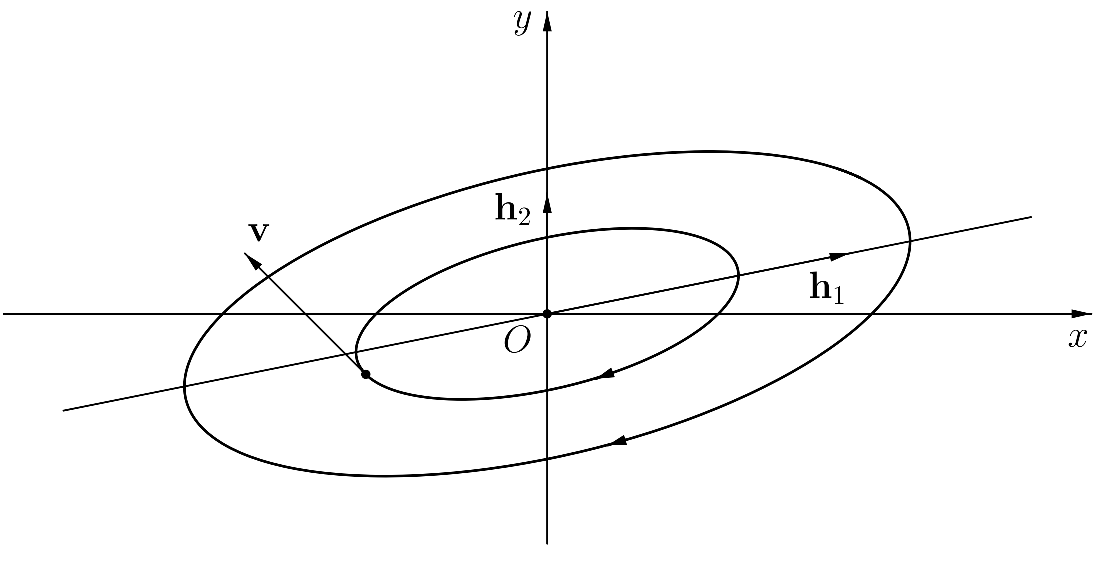

Рис. 8.

Решение. Соответствующая система (15.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 5y, \\ \dot{y} &= -x + y. \end{aligned}$$

Собственные значения $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = 2i$. Особая точка $(0, 0)$ — центр. Собственный вектор матрицы системы с собственным значением $\lambda_1 = 2i$ есть

$\mathbf{H} = (5, 1+2i)$. Откуда $\mathbf{h_1} = (5,1)$, $\mathbf{h_2} = (0,2)$. Эллипсы отсекают на полуосях x_1, y_1 в направлении векторов $(5,1)$ и $(0,2)$ отрезки $2\sqrt{6}r$ и $2r$, $r > 0$ соответственно. Вектор скорости в точке $(-3,-1)$ равен вектору $\mathbf{v} = (-2,2)$ (эллипсы обходятся по часовой стрелке). См. рис. 8.

Пример 5. Исследовать поведение траекторий системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

вблизи особой точки.

Решение. Матрица системы имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Особая точка $(0,0)$ — неустойчивый вырожденный узел. Собственный вектор $\mathbf{h_1} = (h_1^1, h_1^2)$ находится из условий $h_1^1 = h_1^2$, $h_1^1 + h_1^2 = h_1^2$. Можно взять вектор $\mathbf{h_1} = (0,1)$. Дополнив этот вектор вектором $\mathbf{h_2} = (1,0)$ до базиса и записав разложение (15.8), получим $\mu = 1$ и $\mathbf{H_1} = \mathbf{h_1} = (0,1)$, $\mathbf{H_1} = \mathbf{h_2} = (1,0)$. Первый и третий квадранты новой системы координат совпадают с декартовыми, а второй и четвертый меняются местами. Траекториями будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и полуоси оси x_1 (ось y декартовой системы координат). Направление движения с ростом параметра t — от особой точки. Остальные траектории с ростом t выходят из второго и четвертого квадрантов системы координат x_1, y_1 (соответственно четвертого и второго квадрантов декартовой системы x, y) и неограниченно удаляются в первый и третий квадранты системы координат x_1, y_1. Траектории системы показаны на рис. 9.

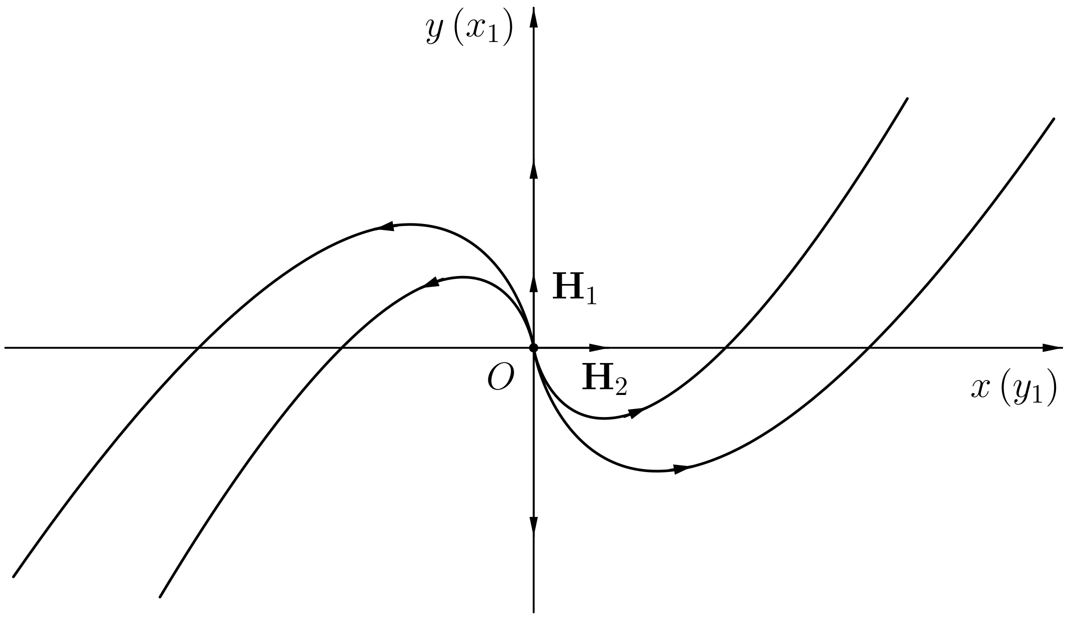

Рис. 9.

Для исследования особой точки $(0,0)$ общей системы (15.1) нужно разложить функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (15.1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + r_1(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + r_2(x,y), \tag{15.9}$$

где $r_i = o(\sqrt{x^2+y^2})$, $i = 1,2$, т. е., в окрестности начала координат имеют порядок малости выше, чем линейная часть (мы предполагаем, что P и Q по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы в этой окрестности). Тогда особая точка $(0,0)$ системы (15.9) будет того же типа, что и особая точка соответствующей системы (15.4), если для последней она является узлом, седлом, фокусом, дикритическим или вырожденным узлом. При этом траекториям системы (15.4), являющимся полуосями оси x_1 и (или) y_1, могут соответствовать кривые для системы (15.9), но угловые коэффициенты направлений, по которым эти траектории входят в особую точку, сохраняются, а в случае фокуса сохраняются направления закручивания траекторий.

В том случае, когда для системы (15.4) особая точка — центр, для системы (15.9) она может быть центром или фокусом. Для наличия центра достаточно (но не необходимо), чтобы траектории системы (15.9) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Наличие оси симметрии $y = kx$ означает, что уравнение (15.2) не меняется при замене x и y на $[(1-k^2)x + 2ky]/(1+k^2)$ и $[2kx - (1-k^2)y]/(1+k^2)$, соответственно. В общем случае отыскание оси симметрии сводится к нахождению общего корня алгебраических уравнений относительно k достаточно высокой степени. Поэтому рекомендуется проверять наличие оси симметрии лишь для некоторых значений k. Так, при $k = 0$ (ось симметрии — ось x) уравнение (15.2) не должно меняться при замене y на $-y$; при $k = \infty$ (ось симметрии — ось y) — при замене x на $-x$; при $k = 1$ уравнение не должно меняться при замене x на y и y на x, а при $k = -1$ — при замене x на $-y$ и y на $-x$. Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (15.9) было асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Исследование на устойчивость можно провести с помощью функции Ляпунова (см. п. 14.2).

Пример 6.

$$\dot{x} = x + 2y + xy,$$
$$\dot{y} = -2x - y - xy.$$

Решение. Приравнивая правые части системы нулю, найдем два положения равновесия системы: $x = 0$, $y = 0$ и $x = -3$, $y = -3$. Функции $r_i(x,y) = \pm xy$, $i = 1,2$, имеют порядок малости в окрестности точки $(0,0)$

выше, чем у линейной части. Для соответствующей системы (15.4):

$$\dot{x} = x + 2y,$$
$$\dot{y} = -2x - y$$

особая точка $(0,0)$ — центр ($\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$). Нетрудно проверить, что соответствующее уравнение (15.2):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y + xy}{x + 2y + xy}$$

не меняется при замене x на y и y на x. Значит, траектории исходной системы имеют ось симметрии $y = x$ и особая точка $(0,0)$ для нее будет центром.

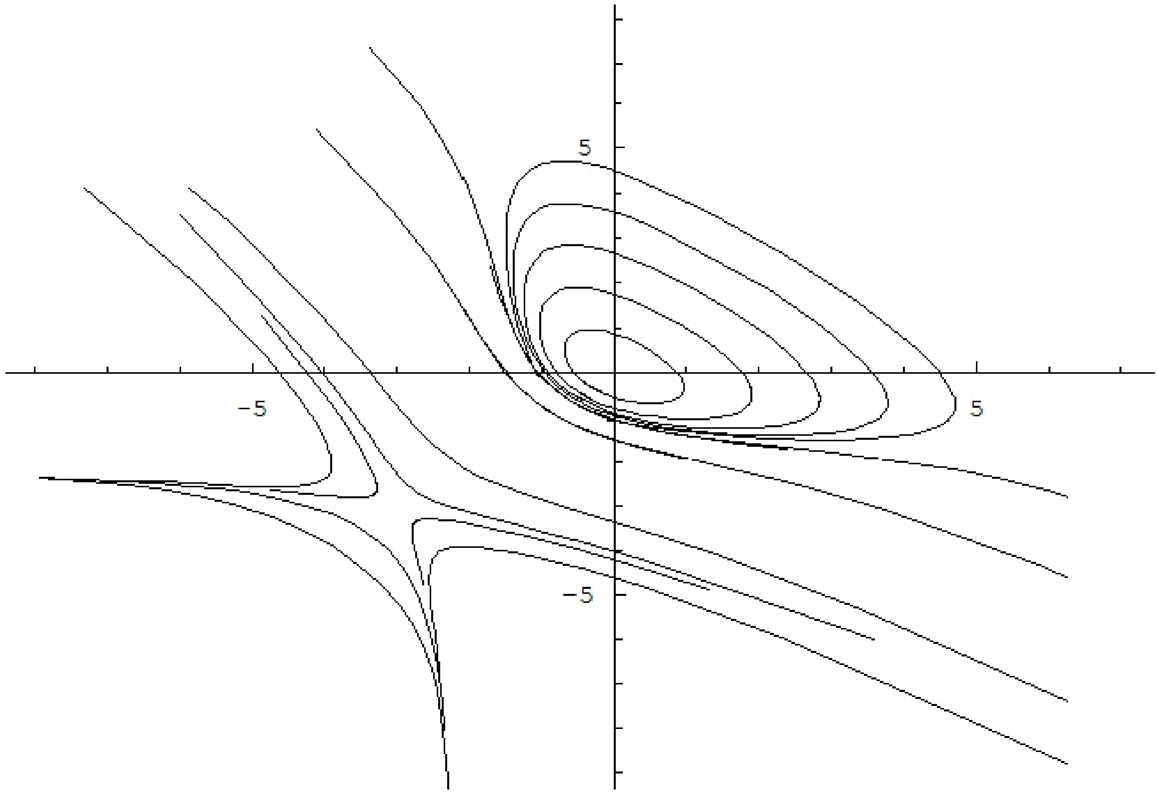

Рис. 10.

Чтобы исследовать особую точку $(-3,-3)$, перенесем начало координат в нее, сделав замену переменных (15.3): $x = x_1 - 3$, $y = y_1 - 3$. Тогда мы придем к системе

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - y_1 + x_1 y_1,$$
$$\dot{y}_1 = x_1 + 2y_1 - x_1 y_1,$$

для которой $r_i = o(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$, $i = 1, 2$, при $(x_1, y_1) \to (0,0)$. Особая точка $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ для соответствующей линейной системы

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - y_1,$$
$$\dot{y}_1 = x_1 + 2y_1$$

является седлом ($\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$). Поэтому особая точка $(-3, -3)$ для исходной системы также будет седлом.

Примерный вид траекторий этой системы, построенный в одном из пакетов символьных вычислений, показан на рис. 10.

§16. Нелинейные системы

Определение. *Нормальной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений, разрешенных относительно производных, вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{16.1}$$

где $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — неизвестные функции, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции от t, x_1, ..., x_n, непрерывные в некоторой области. Число n называется *порядком системы.* Совокупность функций $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, определенных и непрерывно дифференцируемых в некотором интервале (a, b), называется *решением* системы (16.1) в интервале (a, b), если эти функции обращают все уравнения системы в тождества при любом $t \in (a, b)$. Задача нахождения решения $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_1(t_0) = x_1^{(0)}$, ..., $x_n(t_0) = x_n^{(0)}$, где $t_0 \in (a, b)$, $x_i^{(0)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные числа, называется *задачей Коши.* Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы функции f_i, $i = 1, \ldots, n$, были непрерывны в окрестности точки $(t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Непрерывно дифференцируемая функция $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ (отличная от постоянной) называется *первым интегралом* системы (16.1), если она тождественно обращается в постоянную вдоль любого решения системы. Это означает, что $d\psi$ в силу системы обращается в нуль при всех $t \in (a, b)$:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dt + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} f_1\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} f_n\, dx_n \equiv 0.$$

Нормальная система из n уравнений не может иметь больше n функционально независимых первых интегралов. Таким образом, если ψ_1, ..., ψ_n — функционально независимые первые интегралы (якобиан $\dfrac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$), то всякий другой первый интеграл будет функцией от ψ_1, ..., ψ_n.

Для любого интеграла ψ равенство $\psi(t, x_1, \ldots, x_n) = C$ называется *первым интегралом системы* (16.1). Совокупность n независимых первых интегралов системы называется *общим интегралом.* Задача интегрирования системы считается решенной, если найдено ее общее решение, либо общий интеграл.

16.1. Метод исключения

Один из методов решения таких систем заключается в том, чтобы подстановкой и исключением неизвестных свести систему к одному или нескольким уравнениям, содержащим только одну неизвестную функцию.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{y}. \end{cases} \tag{16.2}$$

Решение. Заметим, что уравнения системы не содержат явно переменной x. Это наводит на мысль поделить их друг на друга и перейти к уравнению, содержащему только y и z. Это уравнение будет иметь вид $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{y}{z}$. Его решение имеет вид $z = C_1 y$. Подставив его в первое уравнение системы, получим $y' = C_1 y$, откуда $y = C_2 e^{C_1 x}$. Тогда $z = y' = C_1 C_2 e^{C_1 x}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = \Big(-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1\Big)y + \Big(-\dfrac{2}{x} - 1\Big)z. \end{cases} \tag{16.3}$$

Решение. Выразим из первого уравнения $z = y' - y$ и подставим во второе уравнение. После приведения подобных слагаемых получим уравнение $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0$ или $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. Это — линейное уравнение с переменными коэффициентами (см. пример 1 из п. 9.1). Его решение ищем в виде многочлена $y = x^n + \ldots$. Для показателя степени n получаем уравнение $n^2 - 3n + 2 = 0$, откуда $n = 1$ или $n = 2$. Этим значениям n соответствуют два решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$, следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1 x + C_2 x^2$. После этого находим $z = y' - y = -C_2 x^2 + (2C_2 - C_1)x + C_1$.

16.2. Системы уравнений в симметрической форме

Система вида

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n(x_1, \ldots, x_n)} \tag{16.4}$$

называется *системой дифференциальных уравнений в симметрической форме.* Если в некоторой точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ хотя бы один из знаменателей (скажем, F_n) отличен от нуля, то в окрестности этой точки систему (16.4) можно записать в виде нормальной системой из $n-1$ уравнения

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{F_1}{F_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{F_2}{F_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Таким образом, система (16.4) в некоторой окрестности выбранной точки имеет $n-1$ независимых первых интегралов. Всякую нормальную систему (16.1) можно записать в виде системы в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{dt}{1}. \tag{16.5}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений, как правило, облегчается, если удается найти один или несколько независимых первых интегралов, так как это позволяет понизить порядок системы. Действительно, если найдено $m < n$ независимых первых интегралов системы (16.1), то выражая m неизвестных функций через $n-m$ остальных и подставляя их в уравнения системы, придем к системе $n-m$ независимых уравнений вида (16.1), а остальные уравнения этой системы либо обратятся в тождества, либо будут следствием остальных. Преимущество симметрической формы (16.5) системы уравнений (16.1) заключается в том, что все переменные, входящие в систему, становятся равноправными, что зачастую облегчает ее решение. Кроме того, к такой системе можно применять *метод интегрируемых комбинаций.* Под интегрируемой комбинацией понимается легко интегрируемое дифференциальное уравнение, полученное из данной системы какими-либо преобразованиями. Для получения интегрируемой комбинации пользуются свойством равных дробей: если имеются равные дроби $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$, то для любых k_1, k_2, …, k_n справедливо равенство

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n}.$$

Так, в примере 1, если записать систему в симметрической форме:

$$dx = \frac{dy}{z} = \frac{y\,dz}{z^2},$$

то один первый интеграл $z/y = C_1$ находится без труда. Подставив эту функцию в первое уравнение системы, придем к уравнению $y' = C_1 y$, решив которое, получим $y = C_2 e^{C_1 x}$. Разрешив последнее равенство относительно C_2 и подставив в него (вместо C_1) левую часть найденного первого интеграла, получим еще один первый интеграл системы: $y e^{-zx/y} = C_2$.

Пример 3. Найти общий интеграл системы уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}. \tag{16.6}$$

Решение. Первые две дроби образуют интегрируемую комбинацию $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, из которой получаем $x = C_1 y$, следовательно, один первый интеграл имеет вид

$$\frac{x}{y} = C_1. \tag{16.7}$$

Чтобы найти еще один первый интеграл, воспользуемся свойством равных дробей и запишем соотношение

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{dz}{x+y},$$

из которого следует, что $x + y = z + C_2$. Поэтому еще один первый интеграл системы (16.6) имеет вид

$$x + y - z = C_2. \tag{16.8}$$

Покажем, что первые интегралы (16.7), (16.8) функционально независимы. Для этого составим якобиан $\dfrac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u,v)}$, где $\psi_1 = \dfrac{x}{y}$, $\psi_2 = x+y-z$, а в качестве u и v можно взять любые две из трех переменных x, y, z. Например,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} = \frac{x+y}{y^2} \not\equiv 0,$$

следовательно, эти два интеграла независимы. Эту же проверку можно было сделать и по-другому: ψ_1 не содержит переменную z, а ψ_2 содержит, поэтому они не могут быть функционально зависимы.

Пример 4. Найти общий интеграл системы уравнений

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{16.9}$$

Решение. Сложим в системе (16.9) числители и знаменатели:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Отсюда с необходимостью следует, что

$$dx + dy + dz = 0, \quad \text{или} \quad d(x+y+z) = 0,$$

следовательно,
$$x + y + z = C_1. \tag{16.10}$$

Теперь домножим в системе (16.9) числители и знаменатели дробей на $2x$, $2y$ и $2z$ соответственно, и сложим. Получим
$$\frac{2x\,dx}{2x(z-y)} = \frac{2y\,dy}{2y(x-z)} = \frac{2z\,dz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0},$$
откуда
$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{16.11}$$

Легко проверить, что первые интегралы (16.10) и (16.11) независимы, поэтому вместе они образуют общий интеграл системы (16.9).

Пример 5. Найти общий интеграл системы уравнений
$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}.$$

Решение. Из первого равенства имеем
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \text{или} \quad x = C_1 y.$$
Таким образом, один первый интеграл имеет вид
$$\frac{x}{y} = C_1.$$
Теперь, чтобы найти еще один, подставим $x = C_1 y$ во второе равенство:
$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{x\sqrt{z^2+1}}, \qquad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{C_1 y\sqrt{z^2+1}}, \qquad C_1 y\,dy = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+1}},$$
откуда $C_1 y^2/2 = \sqrt{z^2+1} + C_2$. Подставив в последнее равенство $C_1 = x/y$, получим $xy = 2\sqrt{z^2+1} + C_2$, или
$$xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_2.$$

§17. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть искомая функция z зависит от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$. Уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию и частные производные от искомой функции, называется *уравнением* *в частных производных*. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения*. Мы ограничимся рассмотрением *линейных уравнений в частных производных первого порядка*, то есть, уравнений вида

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \tag{17.1}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ — функции от $x_1, \ldots, x_n, z$. Чтобы решить такое уравнение, необходимо записать соответствующую характеристическую систему обыкновенных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}, \tag{17.2}$$

и найти n ее независимых первых интегралов

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = C_n. \end{aligned} \tag{17.3}$$

После этого общее решение уравнения (17.1) может быть записано в виде

$$F(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z)) = 0, \tag{17.4}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция. В частности, если z входит только в один из первых интегралов, например, в φ_n, то соотношение (17.3) можно разрешить относительно φ_n и записать в виде

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \tag{17.5}$$

где f — произвольная дифференцируемая функция. Если удается разрешить равенство (17.5) относительно z, то можно записать ответ в явном виде.

Уравнение вида

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{17.6}$$

называется *однородным линейным уравнением в частных производных первого порядка*. Для этого уравнения один из первых интегралов соответствующей характеристической системы имеет вид $\varphi_n \equiv z$. Поэтому для нахождения общего решения достаточно найти $(n-1)$ независимых первых интегралов системы

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n},$$

в которой переменную z (если она входит в коэффициенты уравнения) нужно заменить на постоянную C_n, а затем в полученных первых интегралах осуществить обратную замену.

Если же функции $a_1, \ldots, a_n$ не зависят от z, то общее решение уравнения (17.6) имеет вид

$$z = F(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — остальные независимые первые интегралы характеристической системы, а F — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}. \tag{17.7}$$

Решение. Запишем соответствующую систему уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\,dz.$$

Ее первые интегралы имеют вид $\sqrt{x}-\sqrt{y} = C_1$ и $\sqrt{y}-z = C_2$. Следовательно, общее решение можно записать либо в виде $F(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{y} - z) = 0$, либо в виде $z - \sqrt{y} = f(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. Разрешив последнее равенство относительно z, получим решение уравнения (17.7) в явном виде

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Пример 2. Найти общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{17.8}$$

Решение. Запишем характеристическую систему уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-(y + 2z)} = \frac{dz}{3y + 4z}. \tag{17.9}$$

Вторая и третья дроби образуют интегрируемую комбинацию. Решив это однородное уравнение, получим первый интеграл

$$\frac{(3y + 2z)^2}{y + z} = C_1.$$

Теперь, воспользовавшись свойством равных дробей, получим

$$\frac{dx}{1} = \frac{d(y + z)}{2(y + z)}.$$

Решив это уравнение, найдем второй первый интеграл, функционально независимый с первым, не содержащем переменную x.

$$e^{-2x}(y + z) = C_2.$$

Следовательно, общее решение уравнения (17.8) будет иметь вид

$$u = F\left(\frac{(3y+2z)^2}{y+z}, e^{-2x}(y+z)\right).$$

Заметим, что решение можно записать в более простом виде, если переписать полученный ранее первый интеграл следующим образом:

$$C_1 = \frac{(3y+2z)^2}{y+z} = \frac{(3y+2z)^2}{C_2 e^{2x}}.$$

Тогда $(3y+2z)e^{-x} = C_3$ — тоже первый интеграл системы (17.9). Поэтому общее решение уравнения (17.8) можно также записать формулой

$$u = F(e^{-x}(3y+2z), e^{-2x}(y+z)).$$

Чтобы найти интегральную поверхность $z = z(x, y)$ дифференциального уравнения

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y,z), \tag{17.10}$$

проходящую через данную линию с параметрическими уравнениями

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t) \tag{17.11}$$

(поставленная задача называется *задачей Коши*), необходимо сначала найти два независимых первых интеграла соответствующей системы

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}.$$

Потом в эти интегралы

$$\varphi_1(x,y,z) = C_1, \quad \varphi_2(x,y,z) = C_2 \tag{17.12}$$

нужно подставить вместо x, y, z их выражения (17.11) через параметр t. Затем из полученных соотношений вида $\Phi_1(t) = C_1$, $\Phi_2(t) = C_2$ нужно исключить t и получить уравнение $\Phi(C_1, C_2) = 0$. Подставив сюда вместо C_1 и C_2 их выражения по формулам (17.12), получим уравнение искомой поверхности.

Если же уравнения данной линии даны не в параметрическом виде, а в виде пересечения двух поверхностей

$$\xi(x,y,z) = 0, \quad \eta(x,y,z) = 0, \tag{17.13}$$

то сначала необходимо параметризовать эту линию каким-либо способом.

Пример 3. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(x^3+3xy^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2y^3\frac{\partial z}{\partial y}=2y^2z, \tag{17.14}$$

и проходящую через линию, заданную уравнениями

$$xyz=1, \quad x^2=y.$$

Решение. Запишем соответствующую характеристическую систему уравнений:

$$\frac{dx}{x^3+3xy^2}=\frac{dy}{2y^3}=\frac{dz}{2y^2z}.$$

Вторая и третья дроби образуют интегрируемую комбинацию $dy/y=dz/z$, откуда находим первый интеграл $y/z=C_1$. Первая и вторая дроби также образуют интегрируемую комбинацию. Однородное уравнение $2y^3\,dx=(x^3+3xy^2)\,dy$ проще решать, считая x функцией от y. Сделав замену $x=ty$, придем к уравнению $2t'y=t^3+t$, решением которого является соотношение $\dfrac{t^2}{t^2+1}=Cy$. После обратной подстановки получим второй первый интеграл $y+\dfrac{y^3}{x^2}=C_2$, функционально независимый с полученным.

Запишем уравнение данной в условии линии в параметрическом виде. Если в качестве параметра взять $x=t$, то $y=t^2$, $z=1/xy=1/t^3$. Подставив эти уравнения в первый интеграл $y/z=C_1$, получим $t^5=C_1$, откуда $t=\sqrt[5]{C_1}$. Теперь подставим уравнения линии в первый интеграл $y+\dfrac{y^3}{x^2}=C_2$. Получим $t^2+t^4=C_2$. Заменив t на $\sqrt[5]{C_1}$, придем к равенству

$$\sqrt[5]{C_1^2}+\sqrt[5]{C_1^4}=C_2.$$

Наконец, сделав обратные подстановки для $C_1=y/z$ и $C_2=y+\dfrac{y^3}{x^2}$, найдем уравнение искомой поверхности:

$$\sqrt[5]{\frac{y^2}{z^2}}+\sqrt[5]{\frac{y^4}{z^4}}=y+\frac{y^3}{x^2}.$$

§18. Решение уравнений с помощью рядов

Рассмотрим вопрос о приближенном решении задачи Коши

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \quad y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{18.1}$$

Здесь функцию $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ будем считать аналитической в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, то есть, раскладывающейся в сходящийся ряд по степеням $x - x_0$, $y - y_0$, …, $y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}$. Тогда решение поставленной задачи $y(x)$ также будет аналитической функцией и ее можно разложить в ряд в окрестности точки x_0. Поэтому решение можно искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Пример 1. Найти с точностью до x^5 решение задачи Коши

$$y' = x^2 - \frac{1}{y}, \quad y(0) = -1. \tag{18.2}$$

Решение. Будем искать решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

Из начального условия следует, что $a_0 = y(0) = -1$. Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим $y'(0) = -1/y(0)$. Но $y'(0) = a_1$, следовательно, $a_1 = 1$.

Подставив этот ряд в уравнение (18.2), получим

$$1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots \equiv$$
$$\equiv x^2 + \frac{1}{1 - x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - a_5 x^5 - \ldots}. \tag{18.3}$$

Нам необходимо обратить дробь в правой части полученного тождества, т.е. представить ее в виде ряда $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots$, причем, поскольку в левой части равенства (18.3) максимальная степень x — это x^4, достаточно ограничиться вычислением коэффициентов до четвертой степени. Таким образом, мы получаем равенство

$$1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots \equiv x^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots, \tag{18.4}$$

в котором коэффициенты b_i нужно искать из условия

$$(1 - x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - a_5 x^5 - \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots) \equiv 1. \tag{18.5}$$

Ясно, что свободный член $b_0 = 1$. Приравняв в тождестве (18.5) коэффициенты при x, получим $-b_0 + b_1 = 0$, откуда $b_1 = 1$. Подставив это в соотношение (18.4), найдем $2a_2 = 1$, следовательно, $a_2 = 1/2$.

Теперь приравняем в (18.5) коэффициенты при x^2: $-a_2 b_0 - b_1 + b_2 = 0$, откуда $-1/2 - 1 + b_2 = 0$ и $b_2 = 3/2$. Подставим найденное значение в (18.4) и приравняем коэффициенты при x^2. Найдем $3a_3 = 1 + 3/2$, откуда $a_3 = 5/6$.

Действуя аналогично, приравняем в тождестве (18.5) коэффициенты при x^3 и найдем, что $b_3 = 17/6$. Подставим это значение в (18.4) и приравняем коэффициенты при x^3. Получим, что $a_4 = 17/24$. Наконец, $b_4 = 41/8$ и $a_5 = 41/40$.

Таким образом, с точностью до $o(x^5)$ решение задачи (18.2) имеет вид

$$y = -1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{24}x^4 + \frac{41}{40}x^5.$$

Эту задачу можно было решать и по-другому. Мы нашли $a_0 = y(0) = -1$, $a_1 = y'(0) = 1$. Теперь продифференцируем наше уравнение по x:

$$y'' = 2x + \frac{y'}{y^2}.$$

Подставим $x = 0$ и получим $y''(0) = y'(0)/y^2(0) = 1$. Следовательно, $a_2 = y''(0)/2! = 1/2$. Далее,

$$y''' = 2 + \frac{y''}{y^2} - \frac{2y'^2}{y^3},$$

откуда $y'''(0) = 5$, а $a_3 = y'''(0)/3! = 5/6$. Продолжая аналогично, можно найти коэффициенты a_4 и a_5.

Пример 2. Найти с точностью до x^5 решение задачи Коши

$$y'' = y^2 + x^2 y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{18.6}$$

Решение. Будем искать решение в виде $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$. Из начального условия следует, что $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 2$. Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим $y''(0) = 1$. Но $y''(0) = 2a_2$, следовательно, $a_2 = 1/2$.

Поскольку $y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots$, правую часть уравнения (18.6) достаточно вычислить с точностью до x^3. При этом $y^2 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + (2a_1 a_2 + 2a_0 a_3)x^3 + \ldots$, а $x^2 y' = x^2(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots) = a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \ldots$ Подставив найденные выражения в исходное уравнение, и отбросив все члены выше третьей степени, придем к тождеству

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 &\equiv \\ &\equiv a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_1)x^2 + (2a_1 a_2 + 2a_0 a_3 + 2a_2)x^3. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_2 = a_0^2, \\ 6a_3 = 2a_0 a_1, \\ 12a_4 = a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_1, \\ 20a_5 = 2a_1 a_2 + 2a_0 a_3 + 2a_2, \end{cases}$$

из которой последовательно находим $a_2 = a_0^2/2 = 1/2$, $a_3 = a_0a_1/3 = 2/3$, $a_4 = (a_1^2 + 2a_0a_2 + a_1)/12 = 7/12$, $a_5 = (2a_1a_2 + 2a_0a_3 + 2a_2)/20 = 13/60$.

Следовательно, с точностью до $o(x^5)$, решение задачи (18.6) имеет вид

$$y = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{13}{60}x^5.$$

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{18.7}$$

Эти уравнения важны для приложений, но решить их в элементарных функциях зачастую не удается (см. п. 9.1). В таких случаях можно искать решение уравнения в виде степенного ряда по степеням $x-x_0$, где x_0 — начальное значение. В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что если коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ этого уравнения являются многочленами или сходящимися рядами по степеням $x - x_0$, причем $a_0(x_0) \neq 0$, то решения уравнения (18.7) также могут быть выражены в виде сходящихся рядов по степеням $x - x_0$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + xy' + y = 0. \tag{18.8}$$

Решение. Будем искать решение в виде ряда $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Тогда $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$, $y'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$. Подставим эти выражения в уравнение (18.8), учитывая, что $xy' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^k$, и получим тождество

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0.$$

Производя в первой сумме замену индекса суммирования $k = m+2$, а также меняя во второй и третьей суммах k на m, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty} mc_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \equiv 0.$$

Здесь для удобства, мы полагаем, что во второй сумме суммирование начинается с $m = 0$. Теперь все эти суммы можно объединить в одну. А поскольку сумма полученного ряда равна нулю, все его коэффициенты — нули. Таким образом, мы получаем бесконечную систему уравнений

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} + mc_m + c_m = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

После приведения подобных слагаемых и сокращения на ненулевой множитель $m+1$, уравнения принимают вид

$$c_{m+2} = -\frac{c_m}{m+2}. \tag{18.9}$$

Чтобы найти два линейно независимых решения уравнения (18.8), нужно придать определенные значения начальным коэффициентам c_0 и c_1. Обычно для первого решения берут $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$, а для второго — наоборот $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

Итак, пусть сначала $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$. Из соотношения (18.9) следует, что $c_3 = -c_1/3 = 0$ и, по индукции, все коэффициенты с нечетными номерами $c_5, c_7, \ldots$ равны нулю. Для коэффициентов с четными номерами имеем $c_2 = -c_0/2 = -1/2$, $c_4 = -c_2/4 = 1/(2\cdot 4)$, $c_6 = -c_4/6 = -1/(2\cdot 4\cdot 6)$, и, по индукции, $c_{2k} = (-1)^k/(2k)!!$. Таким образом, одно решение уравнения (18.8) имеет вид

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} x^{2k}.$$

Теперь пусть $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Тогда все коэффициенты с четными номерами $c_{2k} = 0$. Для коэффициентов с нечетными номерами имеем, как и выше $c_3 = -c_1/3 = -1/3$, $c_5 = -c_3/5 = 1/(1\cdot 3\cdot 5)$, $c_7 = -c_5/7 = -1/(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)$, и, по индукции, $c_{2k+1} = (-1)^k/(2k+1)!!$. Следовательно, второе решение уравнения (18.8) имеет вид

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} x^{2k}.$$

Оба эти ряда сходятся на всей числовой прямой. Это легко установить, например, по формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда $R^{-1} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$. Поэтому общее решение исходного уравнения можно записать в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} x^{2k} + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} x^{2k}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, будем искать $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Подставив этот ряд в уравнение, получим

$$(1+x^2)\cdot \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + 4x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2\cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0.$$

Раскрыв скобки, учитывая, что во втором и третьем слагаемом можно формально считать индекс суммирования начинающимся с $k = 0$, и приводя подобные члены, получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(k(k-1)c_k + 4kc_k + 2c_k\Big)x^k \equiv 0.$$

Сделав, как и в предыдущем примере, в первой сумме замену индекса суммирования $k = m+2$, а во второй $k = m$, придем к тождеству

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big((m+2)(m+1)c_{m+2} + (m(m-1)+4m+2)c_m\Big)x^m \equiv 0.$$

Поскольку $m(m-1)+4m+2 = m^2+3m+2 = (m+2)(m+1)$, система уравнений для определения коэффициентов ряда принимает вид

$$c_{m+2} = -c_m.$$

Легко видеть, что решение, соответствующее $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$, имеет вид

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \frac{1}{1+x^2},$$

а решение, соответствующее $c_0 = 0$ и $c_1 = 1$, есть

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots = \frac{x}{1+x^2}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения можно записать в виде

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = \frac{C_1 + C_2x}{1+x^2}.$$

Для уравнения (18.7) точка x_0, в которой коэффициент $a_0(x)$ обращается в нуль, называется *особой точкой*. В окрестности особой точки $x = x_0$ решение в виде степенного ряда может не существовать. В таком случае решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = (x-x_0)^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k.$$

Мы ограничимся рассмотрением уравнения

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{18.10}$$

Обозначим $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$. Число λ ищется из уравнения

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0, \tag{18.11}$$

которое называется *определяющим уравнением.* Пусть λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения. Если разность $\lambda_1 - \lambda_2$ не является целым числом, то можно построить два линейно независимых решения

$$y_1 = x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \quad \text{и} \quad y_2 = x^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k$$

уравнения (18.10). Если же $\lambda_1 - \lambda_2$ — целое число, то указанным способом можно построить только одно решение y_1, а второе найти, например, применяя формулу Остроградского-Лиувилля (9.8).

Кроме того, второе решение можно искать в виде

$$y_2 = Ay_1(x)\ln x + x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k,$$

где A — некоторая константа, возможно, равная нулю.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^2y'' + \left(-x^2 + \frac{1}{2}x\right)y' - \frac{1}{2}y = 0. \tag{18.12}$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение. Имеем $p_0 = 1/2$, $q_0 = -1/2$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1$. Их разность не является целым числом, поэтому мы можем построить два линейно независимых решения.

Сначала найдем решение, соответствующее корню $\lambda_1 = -1/2$. Будем искать его в виде

$$y = x^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-1/2}.$$

Тогда $y' = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(k - \frac{1}{2}\right)c_k x^{k-3/2}$, $y'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)c_k x^{k-5/2}$. Домножим уравнение (18.12) на 2 и подставим в него эти выражения. Получим тождество

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)c_k x^{k-1/2} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)c_k x^{k+1/2} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)c_k x^{k-1/2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-1/2} \equiv 0. \tag{18.13}$$

Соберем отдельно слагаемые, содержащие $x^{k-1/2}$ и $x^{k+1/2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(2\cdot\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)+\left(k-\frac{1}{2}\right)-1\right)c_k x^{k-1/2}-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot\left(k-\frac{1}{2}\right)c_k x^{k+1/2}\equiv 0$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k-3)kc_k x^{k-1/2}-\sum_{k=0}^{\infty}(2k-1)\,c_k x^{k+1/2}\equiv 0.$$

Заметим, что в первой сумме слагаемое, соответствующее $k=0$, также равно нулю. Как и в предыдущих примерах, сделаем в первой сумме замену индекса $k=m+1$, а во второй $k=m$. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2m-1)(m+1)c_{m+1}x^{m+1/2}-\sum_{m=0}^{\infty}(2m-1)\,c_m x^{m+1/2}\equiv 0.$$

Теперь, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе уравнений

$$(2m-1)(m+1)c_{m+1}=(2m-1)c_m,\qquad m=0,1,\ldots$$

Выберем $c_0=1$. Остальные уравнения системы принимают вид

$$c_{m+1}=\frac{c_m}{m+1},$$

откуда легко находятся $c_1=1$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_3=\frac{1}{6}$, ... По индукции устанавливаем, что $c_m=\frac{1}{m!}$. Следовательно, первое решение уравнения (18.12) имеет вид

$$y_1=x^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\frac{e^x}{\sqrt{x}}\,.$$

Теперь будем искать решение, соответствующее корню $\lambda_2=1$. Пусть $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k$. Подставим этот ряд в уравнение (18.12) и приведем подобные слагаемые. Получим тождество

$$2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_k x^k-2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}kc_k x^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}kc_k x^k-\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k\equiv 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(2k+1)c_k x^k-\sum_{k=0}^{\infty}2kc_k x^{k+1}\equiv 0.$$

Заметим, что свободный член (коэффициент при x^0) в первой сумме равен $-c_0$, а во второй сумме вообще отсутствует. Это означает, что $c_0 = 0$. Теперь в первой сумме заменим индекс суммирования $k = m+1$, $m = 0, 1, \ldots$. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(2m+3)c_{m+1}x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} 2mc_m x^{m+1} \equiv 0.$$

Слагаемые, соответствующие $m = 0$, в обеих суммах равны нулю. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x^m, $m = 1, 2, \ldots$. Это приводит к системе уравнений

$$c_{m+1} = \frac{2c_m}{2m+3}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Выберем $c_1 = 1$, тогда $c_2 = \frac{2}{5}$, $c_3 = \frac{2^2}{5 \cdot 7}$, $c_4 = \frac{2^3}{5 \cdot 7 \cdot 9}$, и т.д. По индукции получаем, что

$$c_m = \frac{3 \cdot 2^{m-1}}{(2m+1)!!}.$$

Таким образом, второе независимое решение уравнения (18.12) имеет вид

$$y_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{(2k+1)!!} x^k.$$

Учитывая то, что эта функция нам существенна с точностью до множителя, умножим ее на $2/3$ и запишем общее решение уравнения в виде

$$y = C_1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!} x^k.$$

Литература

[1] Карташев А.П., Рождественский Б.Л., *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: учеб. пособие для вузов.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1976. – 255 с.

[2] Ибрагимов Н.Х., *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – Н.Новгород: Изд-во ННГУ – 2007. – 421 с.

[3] Степанов В.В., *Курс дифференциальных уравнений.* – М.: Эдиториал УРСС. – Изд. 8, стер. – 2004. – 472 с.

[4] Матвеев Н.М., *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* 6-е изд. – С-Пб.: «Лань». – 2004. – 832 с.

[5] Матвеев Н.М., *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* 7-е изд., доп. – С-Пб.: «Лань». – 2002. – 432 с.

[6] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.* 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк. – 1989. – 383 с.

[7] Филиппов А.Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* – Ижевск: РХД. – 2000. – 176 с.

Содержание