Лекция 4. Делимость натуральных чисел

Вопрос 1. Отношение делимости и его свойства

Определение 1. Пусть даны натуральные числа ***а*** и ***в***. Говорят, что число ***а*** делится на число ***в***, если существует такое натуральное число g, что $a = в g$

В этом случае число ***в*** называют делителем числа ***а,*** а число ***а*** - кратным числа ***в.***

Теорема 1. Делитель ***в*** данного числа ***а*** не превышает этого числа**.**

Из теоремы 1 следует, что множество делителей данного числа конечно.

Определение 2. Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя — единицу и само это число.

Определение 3. Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом в связи с тем, что оно имеет только один делитель.

Теорема 2. Отношение делимости рефлексивно, то есть любое натуральное число делится само на себя.

Теорема 3. Отношение делимости антисимметрично.

Теорема 4. Отношение делимости транзитивно.

Теорема 5 (признак делимости суммы). Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится на натуральное число ***в***, то их сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на это число.

Теорема 6 (признак делимости разности). Если числа a_1 и a_2 делятся на ***в*** и

$a_1 \geq a_2$, то их разность $a_1 - a_2$ делится на ***в.***

Теорема 7 (признак делимости произведения). Если число ***а*** делится на ***в***, то произведение вида ***ах***, где $x \in N$, делится на ***в***.

Из теоремы 7 следует, что если один из множителей произведения делится на натуральное число ***в***, то и все произведение делится на ***в***.

Теорема 8. Если в сумме одно слагаемое не делится на число ***в***, а все остальные слагаемые делятся на число ***в***, то вся сумма на число ***в*** не делится.

Теорема 9. Если в произведении ***ав*** множитель ***а*** делится на натуральное число ***m,*** а множитель ***b*** делится на натуральное число ***n*** , то ***ab*** делится на ***mn.***

Теорема 10. Если произведение ***ас*** делится на произведение ***вс,*** причем ***с*** — натуральное число, то и ***а*** делится на ***в.***

Вопрос 2. Признаки делимости

Теорема 1 (признак делимости на 2). Для того чтобы число ***х*** делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Теорема 2 (признак делимости на 5). Для того чтобы число ***х*** делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

Теорема 3 (признак делимости на 4). Для того чтобы число ***х*** делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа ***х***.

Теорема 4 (признак делимости на 9). Для того чтобы число ***х*** делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

Теорема 5 (признак делимости на 3). Для того чтобы число ***х*** делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

Теорема 6 (признак делимости на 10). Для того чтобы число ***х*** делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0.

Теорема 7 (признак делимости на 11). Для того чтобы делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11.

Вопрос 3. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Определение 1. Общим кратным натуральных чисел ***а*** и ***в*** называется число, которое кратно каждому из данных чисел.

Наименьшее число из всех общих кратных чисел ***а*** и ***в*** называется наименьшим общим кратным этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел ***а*** и ***в*** условились обозначать ***К (а, в).***

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие утверждения:

1. Наименьшее общее кратное чисел ***а*** и ***в*** всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел ***а*** и ***в*** не меньше большего из данных чисел, то есть если ***а > в***, то ***К (а, в) ≥ а.***

3. Любое общее кратное чисел ***а*** и ***в*** делится на их наименьшее общее кратное.

Определение 2. Общим делителем натуральных чисел ***а*** и ***в*** называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.

Наибольшее число из всех общих делителей чисел ***а*** и ***в*** называется наибольшим общим делителем данных чисел.

Наибольший общий делитель чисел ***а*** и ***в*** условились обозначать ***D (а, в).***

Число 1 является общим делителем любых двух натуральных чисел а и в. Если у этих чисел нет иных общих делителей, то ***D (а, в)=1,*** а числа ***а*** и ***в*** называются взаимно простыми.

Для наибольшего общего делителя справедливы следующие утверждения:

1. Наибольший общий делитель чисел ***а*** и ***в*** всегда существует и является единственным.

2. Наибольший общий делитель чисел ***а*** и ***в*** не превосходит меньшего из данных чисел, то есть если ***а < в, то D (а, в) ≤ а.***

3. Наибольший общий делитель чисел ***а*** и ***в*** делится на любой общий делитель этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел ***а*** и ***в*** и их наибольший общий делитель взаимосвязаны: произведение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел ***а*** и ***в*** равно произведению этих чисел, то есть

К (а, в) · D (а, в) = а • в

Из этого утверждения вытекают следующие следствия:

а) Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел, то есть

D (а, в) = 1 отсюда следует К (а, в) = а • в.

б) Для того чтобы натуральное число ***а*** делилось на произведение взаимно простых чисел ***m*** и ***n,*** необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на ***m*** и на ***n.***

в) Частные, получаемые при делении двух данных чисел на их наибольший общий делитель, является взаимно простыми числами.