Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2020. Том 61, № 2

УДК 512.643:517.982

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть tr — канонический след на полной матричной алгебре $\mathscr{M}_n$, I — единица $\mathscr{M}_n$. Доказано, что выполнение соответствующего аналога классических неравенств для определителя и следа (или для перманента и следа) матриц для положительного функционала φ на алгебре $\mathscr{M}_n$ с $\varphi(I) = n$ влечет равенство $\varphi = \mathrm{tr}$. Получено обобщение неравенства Фишера для определителей. Установлено новое неравенство для следа матричной экспоненты.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.206

Ключевые слова: линейный функционал, матрица, след, определитель, перманент, матричная экспонента, неравенство Фишера.

Введение

Пусть tr — канонический след на полной матричной алгебре $\mathscr{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A)$ — определитель матрицы $A \in \mathscr{M}_n$. Пусть $\mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$, $\mathscr{M}_n^{\mathrm{id}}$, $\mathscr{M}_n^{\mathrm{sa}}$ и $\mathscr{M}_n^{+}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$), множество идемпотентов ($P = P^2$), эрмитова часть и конус неотрицательно определенных матриц в $\mathscr{M}_n$ соответственно. Пусть I — единица алгебры $\mathscr{M}_n$. В работе получено следующее обобщение неравенства Фишера для определителей. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{id}}$ с $P_iP_k = 0$ при $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \dots, m$, и $\sum\limits_{k=1}^m P_k = I$. Тогда $\det(\mathscr{P}(A)) \geq \det(A)$ для всех $A \in \mathscr{M}_n^+$, где $\mathscr{P}(A) = \sum\limits_{k=1}^m P_k A P_k^*$ (теорема 1). Для $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$ показано, что $\mathrm{tr}(\exp(\mathscr{P}(A))) \leq \mathrm{tr}(\mathscr{P}(\exp(A)))$ для всех $A \in \mathscr{M}_n^+$ (теорема 2).

Известно, что выполнение каждого из неравенств: Юнга, Гёльдера, Коши — Буняковского — Шварца, Голдена — Томпсона, Пайерлса — Боголюбова, Араки — Либа — Тирринга, для произвольного положительного функционала φ на алгебре $\mathscr{M}_n$ с $\varphi(I) = n$ влечет равенство $\varphi = \mathrm{tr}$ (см. [1–4]). Пусть $\varphi = \mathrm{tr}$, $\mathrm{per}(A)$ и $\lambda_t(A)$ ($t = 1, \dots, n$) — перманент и характеристические числа матрицы $A \in \mathscr{M}_n$ соответственно. Тогда имеют место соотношения

• неравенство Шура [5, ч. III, § 1.4]

$$\sum_{t=1}^n |\lambda_t(A)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 (= \varphi(AA^*)) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{M}_n,$$

Работа выполнена за счет субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект 1.13556.2019/13.1).

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда матрица A нормальная;

• равенство [5, ч. I, § 4.16, формула (1)]

$$\det(\exp(A)) = \exp(\varphi(A)) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{M}_n; \tag{1}$$

• неравенство [6, задача 3, с. 163] $\det(A)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\varphi(A)$ для всех $A \in \mathscr{M}_n^+$;

• неравенство [5, ч. II, § 4.4.12] $\operatorname{per}(A) \leq \frac{1}{n}\varphi(A^n)$ для всех неотрицательных матриц $A \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{sa}}$.

Показано, что для произвольного положительного функционала φ на алгебре $\mathscr{M}_n$ с $\varphi(I) = n$ выполнение любого из приведенных выше четырех соотношений влечет равенство $\varphi = \operatorname{tr}$ (теоремы 3, 4).

1. Определения и обозначения

C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathscr{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathscr{A}$. Для C^*-алгебры $\mathscr{A}$ через $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, $\mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathscr{A}^+$ будем обозначать ее подмножества проекторов, идемпотентов и положительных элементов соответственно. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ — $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$ (Гельфанд — Наймарк, см. [7, теорема 3.4.1]).

Напомним, что $A^* = [\overline{a_{ji}}]_{i,j=1}^n$ для $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathscr{M}_n$. Линейный функционал φ на алгебре $\mathscr{M}_n$ называется *эрмитовым*, если $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$ для всех $A \in \mathscr{M}_n$; *положительным*, если он эрмитов и $\varphi(\mathscr{M}_n^+) \subset \mathbb{R}^+$. Положительный функционал φ на $\mathscr{M}_n$ называется *точным*, если $\varphi(A) = 0$ $(A \in \mathscr{M}_n^+) \Rightarrow A = 0$.

Пусть $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{id}}$ с $P_iP_k = 0$ при $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$, и $\sum\limits_{k=1}^m P_k = I$. Определим отображение $\mathscr{P} : \mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_n$ формулой

$$\mathscr{P}(A) = \sum_{k=1}^m P_k A P_k^* \quad \text{для всех } A \in \mathscr{M}_n.$$

Если $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$, то отображение $\mathscr{P}$ является оператором блочного проектирования, свойства которого изучены в [8–10]. Формула $S = 2P - I$ $(P \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{id}})$ устанавливает биекцию между $\mathscr{M}_n^{\mathrm{id}}$ и множеством $\mathscr{M}_n^{\mathrm{sym}}$ всех симметрий $(S^2 = I)$ из $\mathscr{M}_n$.

2. Новые неравенства для определителей и следа

Лемма 1. *Пусть $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{id}}$ с $P_iP_k = 0$ при $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$, и $\sum\limits_{k=1}^m P_k = I$. Тогда $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(\sum\limits_{k=1}^m P_k\, AP_k\right)$ для всех $A \in \mathscr{M}_n$. В частности, $\operatorname{tr}(\mathscr{P}(A)) = \operatorname{tr}(A)$, $A \in \mathscr{M}_n$, для $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. Для всех $A \in \mathscr{M}_n$ имеем

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^m P_k A\right) = \sum_{k=1}^m \operatorname{tr}(P_k A) = \sum_{k=1}^m \operatorname{tr}(P_k A P_k) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^m P_k\, AP_k\right). \quad \square$$

Лемма 2 [11, теорема 1.3]. *Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра и $P \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$. Существует единственное разложение $P = \widetilde{P} + Z$, где $\widetilde{P} \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент Z принадлежит $\mathscr{A}$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\widetilde{P} = 0$ и $\widetilde{P}Z = Z$.*

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{A}$ — унитальная C^*-алгебра, элемент $A \in \mathscr{A}^+$ обратим и $P \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$, $P = \widetilde{P} + Z$ — описанное в лемме 2 разложение. Тогда элемент PAP^* обратим в редуцированной алгебре $\widetilde{P}\mathscr{A}\widetilde{P}$.*

Доказательство. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $A \geq \varepsilon I$. Рассмотрим мультипликативное представление $P = \widetilde{P}T$ с обратимым элементом $T \in \mathscr{A}^+$ [12, лемма 3]. Пусть число $\delta > 0$ таково, что $T \geq \delta I$. Тогда $T^2 \geq \delta^2 I$ и

$$PAP^* \geq \varepsilon PP^* = \varepsilon \widetilde{P}T^2\widetilde{P} \geq \varepsilon\delta^2\widetilde{P}.$$

Осталось учесть, что $\widetilde{P}P = P$, $\widetilde{P}PAP^*\widetilde{P} = PAP^*$ и $\widetilde{P}$ — единица редуцированной алгебры $\widetilde{P}\mathscr{A}\widetilde{P}$. $\square$

Теорема 1. *Имеем* $\det(\mathscr{P}(A)) \geq \det(A)$ *для всех* $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{id}}$ *с* $P_iP_k = 0$ *при* $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \dots, m$, *и* $\sum\limits_{k=1}^m P_k = I$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$.

Доказательство. В силу теоремы об определителе произведения матриц имеем $\det(S) \in \{-1, +1\}$ для каждого $S \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{sym}}$. Поскольку $\mathscr{P}(\mathscr{M}_n^+) \subset \mathscr{M}_n^+$ и $\det(X) \geq 0$ для всех $X \in \mathscr{M}_n^+$, утверждение теоремы достаточно проверить только для обратимых матриц. Из результатов [13, 14] следует, что функция

$$A \mapsto \log\det(A) \tag{2}$$

вогнутая на множестве обратимых матриц $A \in \mathscr{A}^+$ (см. также [15, гл. 10, § 2, теорема 9′]). В силу леммы 2 из [10] для 2^{m-1} наборов $\{t_{jk}\}_{k=1}^m$ с $t_{jk} \in \{-1, +1\}$ имеем равенство

$$\mathscr{P}(A) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} S_jAS_j^*, \tag{3}$$

где $S_j = \sum\limits_{k=1}^m t_{jk}P_k \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{sym}}$ для всех $j = 1, 2, 3, \dots, 2^{m-1}$. Поэтому $\det(S_j) = \det(S_j^*) \in \{-1, +1\}$ для всех $j = 1, 2, 3, \dots, 2^{m-1}$. Обратимость матрицы $\mathscr{P}(A)$ для обратимой $A \in \mathscr{M}_n^+$ следует из представления (3), где каждое слагаемое $S_jAS_j^*$ лежит в $\mathscr{M}_n^+$ и обратимо в силу теоремы об обратимости произведения обратимых матриц. Ввиду вогнутости функции (2) и теоремы об определителе произведения матриц из (3) получаем

$$\log\det(\mathscr{P}(A)) \geq \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{2^{m-1}} \log\det(S_jAS_j^*) = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{2^{m-1}} \log\det(A) = \log\det(A).$$

Поэтому

$$\det(\mathscr{P}(A)) \geq \det(A) \tag{4}$$

вследствие строгой монотонности функции log на полуоси $(0, +\infty)$. $\square$

Замечание 1. Соотношение (4) для частного случая $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$ известно [16, задача II.5.6] как неравенство Фишера (Fischer's inequality). Отсюда для всех $A \in \mathscr{M}_n^+$ в силу леммы 1 и (1) имеем

$$\det(\mathscr{P}(\exp(A))) \geq \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)) = \exp(\mathrm{tr}(\mathscr{P}(A))).$$

Следствие 1. *Для каждой положительно определенной матрицы* $A \in \mathscr{M}_n^+$ *имеет место неравенство* $\det(\mathscr{P}(A)) \geq \exp(\operatorname{tr}(\log A))$.

Доказательство. Для положительно определенной матрицы $A \in \mathscr{M}_n^+$ имеем

$$\det(\mathscr{P}(A)) = \det(\mathscr{P}(\exp(\log A))) \geq \det(\exp(\log A)) = \exp(\operatorname{tr}(\log A)). \quad \square$$

Предложение 2. *Пусть число* $n \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $A \in \mathscr{M}_n$ *и* $S, T \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{sym}}$ *с* $\det(S) = \det(T)$. *Тогда* $\det(A - SAT) = 0$.

Доказательство следует из соотношений

$$S(A - SAT)T = -(A - SAT), \quad \det(S) = \det(T) \in \{-1, +1\}$$

и теоремы об определителе произведения матриц. $\square$

Здесь нечетность числа $n \in \mathbb{N}$ существенна. Рассмотрим в $\mathscr{M}_2$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $S \in \mathscr{M}_2^{\mathrm{sym}}$ и $\det(A - SAS) = x^2 + 2x - 4 \neq 0$ при $2x \neq -1 \pm \sqrt{5}$. След $\operatorname{tr}(A - SAS^*) = x^2 + 2x$ может принимать любые значения из промежутка $[-1, +\infty)$. Для идемпотента $P = (I + S)/2$ имеем $\operatorname{tr}(PAP^*) - \operatorname{tr}(\widetilde{P}A\widetilde{P}) = x + x^2/4$, проектор $\widetilde{P}$ определен в лемме 2. Для пары $P_1 = P, P_2 = I - P$ будет $\operatorname{tr}(\mathscr{P}(A)) - \operatorname{tr}(A) = x + x^2/2$, поэтому требование $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$ существенно в лемме 1. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathscr{M}_n^+$ *и* $B \in \mathscr{M}_n$ *с операторной нормой* $\|B\| \leq 1$, $1 \leq p < \infty$. *Тогда*

$$\lambda_t((BAB^*)^p) \leq \lambda_t(BA^pB^*) \quad \text{для всех } t = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку вещественная функция $s \mapsto s^q$ $(s \in \mathbb{R}^+)$ операторно выпукла при $1 \leq q \leq 2$, имеем

$$(BXB^*)^q \leq BX^qB^*$$

для всех $X \in \mathscr{M}_n^+$ и $B \in \mathscr{M}_n$ с $\|B\| \leq 1$ в силу [17, теорема 2.1]. Ввиду монотонности собственных чисел (т. е. $\lambda_t(X) \leq \lambda_t(Y)$ для всех $t = 1, 2, \dots, n$ при $0 \leq X \leq Y$) из этого матричного неравенства получаем утверждение леммы для $1 \leq q \leq 2$. Пусть числа $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $2 < p < \infty$ фиксированы. Выберем $j \in \mathbb{N}$ таким, что $2^{j-1} < p \leq 2^j$, и положим $q = \sqrt[j]{p}$. Тогда $j \geq 2$ и $1 < 2^{\frac{j-1}{j}} < q \leq 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_t(BA^pB^*) &= \lambda_t(B(A^{p/q})^qB^*) \geq \lambda_t((BA^{p/q}B^*)^q) = \lambda_t((BA^{p/q}B^*))^q \\ &= \lambda_t(B(A^{p/q^2})^qB^*)^q \geq \dots \geq \lambda_t(BA^{p/q^j}B^*)^{q^j} = \lambda_t(BAB^*)^p = \lambda_t((BAB^*)^p) \end{aligned}$$

в силу монотонности степенных функций $s \mapsto s^b$ $(s \in \mathbb{R}^+)$ и равенства $\lambda_t(X^b) = \lambda_t(X)^b$ для всех $X \in \mathscr{M}_n^+$ и чисел $b > 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\{P_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}}$ *с* $P_iP_k = 0$ *при* $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \dots, m$, *и* $\sum\limits_{k=1}^m P_k = I$. *Тогда* $\mathrm{tr}(\exp(\mathscr{P}(A))) \le \mathrm{tr}(\mathscr{P}(\exp(A)))$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\exp(\mathscr{P}(A)) &= I + \sum_{k=1}^m P_kAP_k + \sum_{k=1}^m \frac{(P_kAP_k)^2}{2!} + \dots + \sum_{k=1}^m \frac{(P_kAP_k)^j}{j!} + \dots \\ &= -(m-1)I + \left(I + P_1AP_1 + \frac{(P_1AP_1)^2}{2!} + \dots + \frac{(P_1AP_1)^j}{j!} + \dots\right) \\ &\quad + \dots + \left(I + P_mAP_m + \frac{(P_mAP_m)^2}{2!} + \dots + \frac{(P_mAP_m)^j}{j!} + \dots\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\exp(A)) &= P_1\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^j}{j!} + \dots\right)P_1 \\ &\quad + \dots + P_m\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^j}{j!} + \dots\right)P_m \\ &= -(m-1)I + \left(I + P_1AP_1 + \frac{P_1A^2P_1}{2!} + \dots + \frac{P_1A^JP_1}{j!} + \dots\right) \\ &\quad + \dots + \left(I + P_mAP_m + \frac{P_mA^2P_m}{2!} + \dots + \frac{P_mA^jP_m}{j!} + \dots\right),\end{aligned}$$

матричные ряды сходятся по норме (т. е. поэлементно). Поскольку матричный след совпадает со спектральным следом и является непрерывным линейным функционалом, теорема 2 вытекает из леммы 3. $\square$

3. Неравенства для определителей характеризуют след

Теорема 3. *Для положительного функционала* φ *на алгебре* $\mathscr{M}_n$ *с* $\varphi(I) = n$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varphi = \mathrm{tr}$;

(ii) $\det(\mathscr{P}(\exp(A))) \ge \exp(\varphi(A))$ *для всех* $\mathscr{P}$ *и* $A \in \mathscr{M}_n^+$;

(iii) $\det(A)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\varphi(A)$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$;

(iv) $\mathrm{per}(A) \le \frac{1}{n}\varphi(A^n)$ *для всех неотрицательных матриц* $A \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{sa}}$;

(v) $\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon\varphi(A) + o(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$.

Если к тому же функционал φ *точен, то условия* (i)–(v) *равносильны следующим условиям:*

(vi) $\det(\exp(A)) \le \exp(\varphi(A))$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$;

(vii) $\varphi(A^p)^{\frac{1}{p}} \le \varphi(A^q)^{\frac{1}{q}}$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$ *и* $0 < q < p$.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из теоремы 1 и равенства (1). Импликацию (i) $\Rightarrow$ (v) см. в [18, гл. 6, § 9, упражнение 1].

Не ограничивая общности, считаем, что $\varphi(X) = \mathrm{tr}(S_\varphi X)$ для всех $X \in \mathscr{M}_n$, где

$$S_\varphi = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n) \in \mathscr{M}_n^+$$

и $s_1 + \dots + s_n = n$. Надо показать, что

$$s_1 = \dots = s_n = 1. \tag{6}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Если (6) не выполнено, то найдется номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $s_k > 1$. Для проектора

$$A = \operatorname{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ раз}}, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{M}_n^{\mathrm{pr}} \tag{7}$$

по конечномерной спектральной теореме имеем $\exp(A) = \exp(1) \cdot A + \exp(0) \cdot (I - A)$ и для ассоциированного со всеми проекторами вида (7) с $k = 1, 2, \ldots, n$ отображения $\mathscr{P}$ в силу (ii) получаем $\exp(1) \geq \exp(s_k)$. Следовательно, $s_k \leq 1$; противоречие.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Если (6) не выполнено, то найдется номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $s_k > 1$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ введем матрицу $A_\varepsilon = (1+\varepsilon)I - \varepsilon A$, где A из (7). Подставляя $A_\varepsilon (\in \mathscr{M}_n^+)$ в (iii), получаем неравенство

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n}((1+\varepsilon)s_1 + \cdots + (1+\varepsilon)s_{k-1} + s_k + (1+\varepsilon)s_{k+1} + \cdots + (1+\varepsilon)s_n) \\ = \frac{1}{n}((1+\varepsilon)n - \varepsilon s_k) = 1 + \varepsilon - \frac{s_k}{n}\varepsilon.\end{aligned}$$

Запишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{n-1}{n}} = 1 + \frac{n-1}{n}\varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \to 0+.$$

Теперь неравенство (iii) принимает вид

$$1 + \frac{n-1}{n}\varepsilon + o(\varepsilon) \leq 1 + \varepsilon - \frac{s_k}{n}\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \to 0+.$$

Следовательно, $s_k \leq 1$; противоречие.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Если (6) не выполнено, то найдется номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $s_k > 1$. Для произвольного числа $1 > \varepsilon > 0$ введем матрицу $A_\varepsilon = I - \varepsilon A$, где A из (7). Подставляя A_ε в (iv), получаем

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{n}(s_1 + \cdots + s_{k-1} + (1-\varepsilon)^n s_k + s_{k+1} + \cdots + s_n).$$

Запишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано: $(1-\varepsilon)^n = 1 - n\varepsilon + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$. Теперь неравенство (iv) принимает вид: $1 - \varepsilon \leq 1 - s_k\varepsilon + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$. Следовательно, $s_k \leq 1$; противоречие.

(v) $\Rightarrow$ (i) Если (6) не выполнено, то найдется номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $s_k > 1$. В силу (v) для проектора A из (7) имеем

$$1 + \varepsilon = 1 + s_k\varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \to 0+.$$

Следовательно, $s_k = 1$; противоречие.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Если (6) не выполнено, то найдется номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $0 < s_k < 1$. В силу (vi) для проектора A из (7) имеем $\exp(1) \leq \exp(s_k)$. Следовательно, $s_k \geq 1$; противоречие.

(i) $\Rightarrow$ (vii) Не ограничивая общности, считаем, что $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ с $a_j \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда $A^r = \operatorname{diag}(a_1^r, \ldots, a_n^r)$ для всех $r > 0$. В силу неравенства Иенсена (см. [19, теорема 19]) имеем

$$\varphi(A^p)^{\frac{1}{p}} = \left(a_1^p + \cdots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(a_1^q + \cdots + a_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = \varphi(A^q)^{\frac{1}{q}}$$

для всех $0 < q < p$.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Если (6) не выполнено, то найдется номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $0 < s_k < 1$. В силу (vii) для проектора A из (7) имеем $s_k^q \leq s_k^p$. Следовательно, $s_k \geq 1$; противоречие. Напомним, что если $1 < p < \infty$ и φ — положительный функционал на алгебре $\mathscr{M}_n$ с $\varphi(A^p) \leq \varphi(A^p)$ при $0 \leq A \leq B$, то $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}^+$ [20, теорема]. $\square$

Следствие 2. *Для положительного функционала φ на алгебре $\mathscr{M}_n$ с $\varphi(I) = n$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varphi = \mathrm{tr}$*;*

(ii) $\det(\exp(A)) \geq \exp(\varphi(A))$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$.

Замечание 2. В связи с неравенством п. (iii) теоремы 3 напомним, что

$$\det(A)^{\frac{1}{n}} = \min_{B\in\mathscr{M}_n^+,\ \det(B)=1} \frac{\mathrm{tr}(AB)}{n}$$

для всех действительных положительно определенных матриц $A \in \mathscr{M}_n^+$ [21, гл. II, § 21, теорема 14].

Теорема 4. *Для положительного функционала φ на алгебре $\mathscr{M}_n$ с $\varphi(I) = n$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varphi = \mathrm{tr}$*;*

(ii) $\sum\limits_{t=1}^{n} \lambda_t(A)^2 \leq \varphi(A^2)$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$*;*

(iii) $\left|\lambda_t(A) - \frac{\varphi(A^*A)}{n}\right| \leq \left(\frac{n-1}{n}\left(\varphi(A^*A) - \frac{|\varphi(A)|^2}{n}\right)\right)^{1/2}$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n$ *и* $t = 1, \dots, n$*;*

(iv) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \leq \varphi(A^2)$ *для всех* $A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_n^+$*;*

(v) $\varphi(A^2) \leq \mathrm{tr}(A)^2$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$*;*

(vi) $\sqrt{\mathrm{tr}(A)} \leq \varphi(\sqrt{A})$ *для всех* $A \in \mathscr{M}_n^+$*;*

(vii) $\varphi(\sqrt{A}) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_{ii}}$ *для всех* $A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_n^+$.

Доказательство. Импликация (i) ⇒ (ii) — вышеупомянутое неравенство Шура. Импликацию (i) ⇒ (iii) см. в [16, задача I.6.16, с. 172]. Импликации (i) ⇒ (iv)–(vii) см. в [6, задача 16, с. 24].

Покажем обратные импликации. Не ограничивая общности, считаем, что $\varphi(X) = \mathrm{tr}(S_\varphi X)$ для всех $X \in \mathscr{M}_n$, где $S_\varphi = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n) \in \mathscr{M}_n^+$ и $s_1 + \dots + s_n = n$. Надо проверить соотношения (6). Если (6) не выполнено, то найдутся номера $m, j \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $s_m < 1$ и $s_j > 1$.

(ii) ⇒ (i) В силу (ii) для проектора A (с $j = k$) из (7) имеем $1 = \sum\limits_{t=1}^{n} \lambda_t(A)^2 > \varphi(A^2) = s_j$; противоречие.

(v) ⇒ (i), (vii) ⇒ (i) Для указанной выше матрицы A неравенство (v) (или (vii)) дает $s_j \leq 1$; противоречие.

(iii) ⇒ (i) Для проектора A (с $m = k$) из (7) неравенство (iii) при $t = 1$ дает $s_m \geq 1$; противоречие.

(iv) ⇒ (i), (vi) ⇒ (i) Для проектора A (с $m = k$) из (7) неравенство (iv) (или (vi)) дает $s_m \geq 1$; противоречие. □

О других характеризациях следа см. [22–25] и библиографию в них.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bikchentaev A. M., Tikhonov O. E.* Characterization of the trace by Young's inequality // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2005. V. 6, N 2. Article 49.
2. *Cho K., Sano T.* Young's inequality and trace // Linear Algebra Appl. 2009. V. 431, N 8. P. 1218–1222.
3. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. II // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 483–494.

4. *Bikchentaev A. M.* The Peierls–Bogoliubov inequality in C^*-algebras and characterization of tracial functionals // Lobachevskii J. Math. 2011. V. 32, N 3. P. 175–179.
5. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
6. *Zhang F.* Matrix theory. Basic results and techniques. New York: Springer-Verl., 1999. (Universitext).
7. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
9. *Chilin V. I., Krygin A. V., Sukochev Ph. A.* Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators // Integral Equations Operator Theory. 1992. V. 15, N 2. P. 186–226.
10. *Бикчентаев А. М.* Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 86–91.
11. *Koliha J. J.* Range projections of idempotents in C^*-algebras // Demonstratio Math. 2001. V. 24, N 1. P. 91–103.
12. *Бикчентаев А. М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 32–45.
13. *Bellman R.* Notes on matrix theory. II // Amer. Math. Monthly. 1953. V. 60, N 3. P. 173–175.
14. *Mirsky L.* An inequality for positive definite matrices // Amer. Math. Monthly. 1955. V. 62, N 6. P. 428–430.
15. *Lax P. D.* Linear algebra and its applications. Enlarged second edition. Hoboken, NJ: Wiley-Intersci. [John Wiley & Sons], 2007. (Pure Appl. Math. (Hoboken)).
16. *Bhatia R.* Matrix analysis. New York: Springer-Verl., 1997. (Grad. Texts Math.; V. 169).
17. *Hansen F., Pedersen K. G.* Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem // Math. Ann. 1982. V. 258, N 3. P. 229–241.
18. *Bellman R.* Introduction to matrix analysis. 2nd ed. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1997. (Class. Appl. Math.).
19. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948; 2-е изд.: М.: Ком. книга, 2006.
20. *Bikchentaev A. M., Tikhonov O. E.* Characterization of the trace by monotonicity inequalities // Linear Algebra Appl. 2007. V. 422, N 1. P. 274–278.
21. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.
22. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1228–1236.
23. *Bikchentaev A. M.* Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras. III // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54, N 12. P. 4482–4493.
24. *Бикчентаев А. М.* След и разности идемпотентов в C^*-алгебрах // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 647–655.
25. *Бикчентаев А. М.* Метрики на проекторах алгебры фон Неймана, ассоциированные со следовыми функционалами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1223–1228.

Поступила в редакцию 25 сентября 2019 г.
После доработки 30 сентября 2019 г.
Принята к публикации 18 октября 2019 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru