Тестовые задачи по курсу "Теоретическая механика и основы механики сплошных сред"

Задачи сгруппированы по разделам механики, в каждом по мере возрастания сложности. Задачи на **остаточные знания** выделены **жирным шрифтом**.

Кинематика (всем)

1.1. Найти траекторию $y(x)$, мгновенную и среднюю скорость, мгновенное и среднее ускорение материальной точки массы m, если ее декартовые координаты меняются по закону:

а) $x = a\,(1-\lambda\cos\omega t)$, $y = b(1-\cos\omega t)$, $0 < \lambda < 1$;

б) $x = a\,(1-\lambda\cos\omega t)$, $y = b(1-\sin\omega t)$, $0 < \lambda < 1$.

Для обоих случаев определить также модуль и направление силы и вычислить компоненту секторной скорости, перпендикулярную плоскости движения.

1.2. Точка А находится на ободе колеса радиуса R, которое катится без проскальзывания по горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω. Определить закон движения точки обода колеса в декартовых координатах. Найти скорость и ускорение данной точки и показать, что ускорение всегда направлено к центру колеса.

$$x(t) = R\big(\omega t - \sin(\omega t)\big),\ y(t) = R\big(1-\cos(\omega t)\big)$$

1.3. Бусинка движется по параболе с постоянной величиной скорости v. Найти величину ускорения бусинки в зависимости от ее положения.

$$\left[w = 2pv^2 / (1+4p^2x^2)^{3/2}\right]$$

1.4. Движение материальной точки в плоскости задано в полярных координатах: $\rho = \rho(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Показать, что в случае постоянства секторной скорости $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$ вектор ускорения точки коллинеарен (параллелен) ее радиус-вектору, а его величина w определяется формулой Бине: $w = w_\rho = -\dfrac{4\sigma^2}{\rho^2}\left(\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\right)$.

Динамика

2.1. Груз веса *P*, находящийся в покое на гладкой горизонтальной плоскости начинает двигаться вдоль оси *x* под действием горизонтальной силы $f = A\sin(\omega t)$, где A и ω – константы. Найти закон движения груза, предполагая, что в начальный момент его координата $x = 0$.

2.2. Найти закон движения материальной точки с массой *m* под действием силы упругости $F = -\kappa x$ $(\kappa > 0)$, предполагая, что она движется вдоль оси О*x* и в начальный момент времени имеет координату x_0 и скорость v_0 (модель линейного гармонического осциллятора).

$$\left[x(t) = a\cos(\omega t + \varphi_0),\ a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2},\ \mathrm{tg}(\varphi_0) = -v_0/\omega x_0\right]$$

2.3. Материальная точки движется под действием заданной силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 - \kappa\mathbf{r}$, где $\mathbf{F}_0$ – постоянная сила $(\kappa > 0)$. Найти траекторию точки, если при $t = 0$ $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, а $(\mathbf{F}_0 \wedge \mathbf{r}_0) = \alpha$.

2.4. Частица, имеющая массу *m* и заряд *e*, влетает в однородное стационарное электрическое поле $\mathbf{E}$ со скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной направлению поля. Определить закон движения частицы, считая, что на нее действует дополнительно сила сопротивления $\mathbf{R} = -\beta\mathbf{v}$ (при $t = 0$ $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = v_{0y}\mathbf{e}_y$).

2.5. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной второй степени скорости v^2.

$$\left[t = \frac{h}{v_0}\left(1 - v/v_0\right)\right].$$

2.6. Найти траекторию частицы массы m и зарядом e, двигающейся с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ в электрическом поле $\mathbf{E}(t)$ и магнитном поле $\mathbf{H}(t)$, для случая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \mathrm{const}$, $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{H}_0$, $(\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{H}_0) = \alpha$.

2.7. Горизонтально летящая пуля, имея массу m и начальную скорость v_0, попадает в материал, величина силы сопротивления которого меняется по закону: $R = -\gamma x\dot{x}$. Определить максимальную глубину проникновения пули в материал L и закон движения пули.

2.8. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$ и вычислить период колебания в областях финитного движения для потенциала: $U(x) = \kappa x^2/2$.

2.9. Частица, имеющая массу m и заряд e, влетает в однородное стационарное магнитное поле $\mathbf{H}$ со скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной направлению поля. Определить закон движения частицы для этих случаев, считая, что на нее, кроме силы Лоренца, действует дополнительно сила сопротивления $\mathbf{R} = -\beta\mathbf{v}$ (при $t = 0$ $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = v_{0y}\mathbf{e}_y$).

$$\left[\begin{gathered}\left(x - v_0\omega/\Omega^2\right)^2 + \left(y - v_0\beta/m\Omega^2\right)^2 = \left(v_0/\Omega\right)^2 \exp\left(-2\beta t/m\right) \\ \omega = eH/mc, \quad \Omega^2 = \omega^2 + \left(\beta/m\right)^2\end{gathered}\right]$$

Метод законов сохранения и движение в центральном поле

3.1. **Автомобиль заданной массы m движется таким образом, что развиваемая им мощность в процессе движения сохраняет свое *постоянное* значение. Показать, что путь, проходимый автомобилем, изменяется со временем по закону $S(t) = at^{3/2}$. Считать, что в начальный момент времени его скорость равна нулю**.

$$\left[s(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{2N_0}{m}\right)^{1/2} t^{3/2} \right]$$

3.2. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите с эксцентриситетом e. Найти отношение максимального $\dot{\varphi}_{max}$ и

минимального $\dot{\varphi}_{min}$ значений угловой скорости радиус-вектора спутника.

$$[\dot{\varphi}_{max}/\dot{\varphi}_{min} = (1 + e)^2/(1 - e)^2]$$

3.3. Шарик массы m находится на гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени ему сообщается скорость v под углом α к горизонту, после чего он начинает подпрыгивать над плоскостью. Постоянный коэффициент восстановления λ ($\lambda = |p_{y+}|/|p_{y-}|$, $0 < \lambda < 1$) при ударе предполагается известным. Найти время τ, по истечении которого шарик перестает подпрыгивать. Найти также расстояние L, пройденное шариком по горизонтали за это время.

$$\left[\tau = \frac{2v\sin\alpha}{g(1-\lambda)}, \quad L = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{g(1-\lambda)}\right]$$

3.4. Телу массы m, находящемуся в состоянии покоя, сообщается скорость v. Как изменится совершаемая над ним работа, если скорость тела увеличится на ту же величину v, но от начального значения скорости v_0?

[увеличится на величину $m(\mathbf{v}\mathbf{v}_0)$]

3.5. Доказать, что при движении частицы в поле $V(\rho) = -\alpha/\rho$, где α – положительная константа, величина $\mathbf{A} = [\mathbf{v}\,\mathbf{M}] - \alpha\mathbf{e}_\rho$ есть интеграл движения. Найти траекторию частицы, используя при этом постоянство вектора $\mathbf{A}$.

3.6. **Тело падает на Землю с большой высоты H. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость, с каой тело упадет на поверхность Земли** и время этого падения T**. Радиус Земли R предполагается известным**.

3.7. Найти траектории (изобразить их примерный вид) и закон движения частицы в поле $U = -U_0$ (при $r < R$) и $U = 0$ (при $r > R$) (сферическая потенциальная яма) при различных значениях начального момента импульса M и энергии E.

3.8. Частица с зарядом e движется в магнитном поле **H**. Доказать, что выражение $J = (\mathbf{MH}) + \dfrac{e}{2c}[\mathbf{rH}]^2$ является интегралом движения, если поле **H** – однородное и постоянное (**M** – момент импульса частицы).

Проблема двух тел, теория столкновения и рассеяния частиц

4.1. Две частицы с массами m_1 и m_2, взаимодействующие по закону всемирного тяготения, совершают финитное движение. Показать, что минимальное и максимальное расстояние x между ними являются корнями квадратного уравнения

$$Ex^2 + \gamma m_1 m_2 x - (m_1 + m_2)M^2 / 2m_1 m_2 = 0,$$

где E и M – величины энергии и момента импульса системы соответственно, а γ – гравитационная постоянная. Из указанного уравнения найти условие, при котором реализуются круговые орбиты.

$$\left[\gamma^2 m_1^3 m_2^3 + 2M^2 E(m_1 + m_2) = 0\right]$$

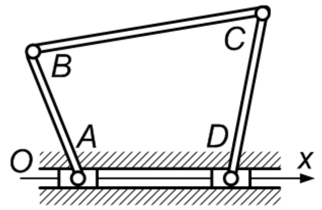
4.2. Найти скорости после упругого "лобового удара" двух одинаковых частиц, двигающихся навстречу друг другу со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. (только для физического потока)

4.3. **Три абсолютно упругих шара с массами m_1, m_2, m_3 покоятся в гладком горизонтальном желобе на некотором расстоянии друг от друга. Первый шар, пущенный с некоторой начальной скоростью, ударяет по второму шару, который, начав двигаться, в свою очередь, ударяет по третьему шару. При какой величине массы m_2 второго шара третий шар получит наибольшую скорость?** (только для физического потока)

$$\left[m_2 = \sqrt{m_1 m_3}\right]$$

Уравнения Лагранжа

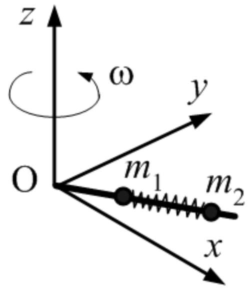
5.1. Найти число степеней свободы n плоского трехзвенного механизма ABCD, у которого точки



A и D могут перемещаться только по оси O*x*. Как изменится результат для неплоского механизма?

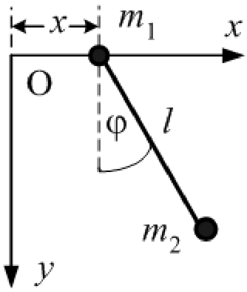
$[n = 3]$

5.2. Стержень, находящийся в плоскости *x*O*y*, на котором могут свободно двигаться две материальные точки с массами *m*1 и *m*2, соединенные между собой пружиной, вращается вокруг вертикальной оси O*z* с постоянной угловой скоростью ω. Написать уравнения связей системы, определить число ее степеней свободы и ввести обобщенные координаты.



$$\left[z_1 = z_2 = 0,\, x_1 \sin\omega t - y_1 \cos\omega t = 0,\, x_2 \sin\omega t - y_2 \cos\omega t = 0;\; n = 2\right]$$

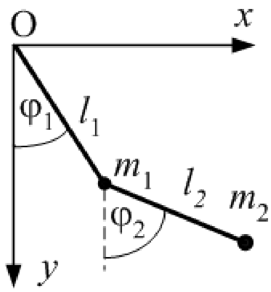
5.3. Найти функцию Лагранжа плоского маятника длиной *l* и массы *m*2 , точка подвеса которого (с массой *m*1 в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой.



$$\left[L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 gl\cos\varphi\right]$$

5.4. Составить функцию Лагранжа и получить уравнения Лагранжа для частицы, двигающейся в центрально симметричном поле под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра.

5.5. Составить функцию Лагранжа двойного плоского маятника, изображенного на рисунке, состоящего из двух частиц с массами m_1 и m_2, которые подвешены на нитях длиной l_1 и l_2 соответственно.

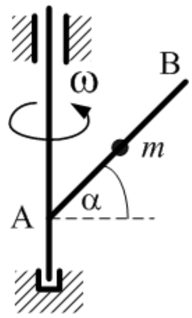


$$\left[\begin{aligned} &L(\varphi_1,\varphi_2,\dot{\varphi}_1,\dot{\varphi}_2) = \frac{(m_1+m_2)}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + \\ &+m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2 g\cos\varphi_2 \end{aligned}\right]$$

5.6. Материальная точка массы m скользит без трения по гладкой проволоке, изогнутой в виде некоторой четной функции $f(x)$. Проволока, в свою очередь, может вращаться с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Оy, совпадающей с осью симметрии функции $f(x)$. Найти функцию Лагранжа такой системы.

$$\left[L = \frac{m}{2}[1 + f'^2(\rho)]\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 - mgf(\rho) \right]$$

5.7. **Материальная точка массы *m* движется под действием силы тяжести ($P = mg$) по прямой АВ, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси; прямая АВ образует угол α с горизонталью. Найти закон движения точки, если ее начальная скорость была равна нулю, а начальное расстояние r_0 до оси по прямой *AB* было равно *a*. Вычислить силу реакции, действующую со стороны стержня АВ на частицу**.



$$\left[r(t) = (a - \frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha})\,\mathrm{ch}(\omega t\cos\alpha) + \frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} \right]$$

Движение твердого тела (только для физического потока)

6.1. Найти положение центра инерции четырехатомной молекулы с атомами, расположенными в вершинах правильной треугольной пирамиды с высотой *h* и ребром основания *a*. В вершинах основания располагаются атомы с массой m_2, а в верхней вершине – атом с массой m_1.

6.2. Система состоит из 4-ех частиц с массами *m*, расположенных в точках с координатами: –*a*, 3*a*, 5*a*; –3*a*, 8*a*, –5*a*; –*a*, –3*a*, –3*a*; –3*a*, –8*a*, 7*a*. Определить главные моменты и главные направления инерции.

$$\left[J_1 = 250ma^2,\ J_2 = 204ma^2,\ J_3 = 54ma^2 \right]$$

[$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_2 = (3/5)\mathbf{e}_y + (4/5)\mathbf{e}_z$., $\mathbf{e}_3 = (4/5)\mathbf{e}_y - (3/5)\mathbf{e}_z$]

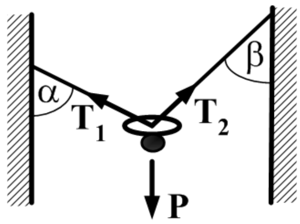
$$\left[X = 0,\ Y = 0,\ Z = m_1 h/(m_1 + 3m_2) \right]$$

6.3. Определить главные моменты инерции следующих сплошных тонких однородных тел с массой *m*: *а*) круглый диск радиуса *R*; *б*) сферическая оболочка радиуса *R*;

$$\left[\text{à})\ J_1 = J_2 = \frac{mR^2}{4},\ J_3 = \frac{mR^2}{2};\ \ \text{á})\ J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{3} mR^2 \right]$$

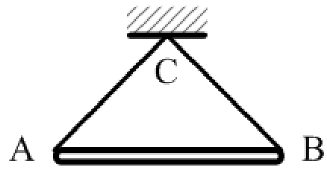
Статика. Условия равновесия системы.

7.1. **Между двумя вертикальными стенами на двух веревках висит фонарь веса *P*. Левая из веревок образует со стеной угол α а правая – угол β. Найти натяжение обеих веревок**



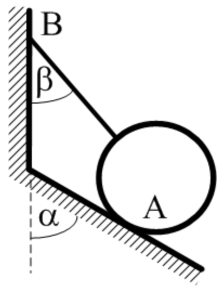
7.2. **Однородный стержень AB веса *P* и длины 2*l* подвешен в точке C на двух тросах AC и CB одинаковой длины, равной *a*. Определить натяжение тросов.**

$$\left[T = P / 2\sqrt{(a^2 - l^2)/a^2} \right]$$



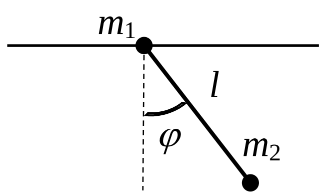
7.3. Шар весом *P* привязан нитью к неподвижной точке B, а в точке A опирается на гладкую наклонную плоскость. Определить величину реакции в точке A и натяжение нити, если углы α и β известны.

$$\left[T = \frac{P\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)},\ R = \frac{P\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} \right]$$



Малые колебания механических систем (лагранжев формализм)

8.1. **Найти частоту колебаний маятника массы m_2 точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении. Проверить случай обычного маятника, когда точка подвеса закреплена.**

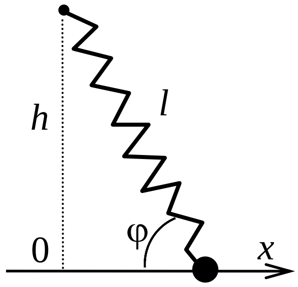


$$\left[\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 l} g} \right]$$

8.2. **Найти частоту малых колебаний частицы массы *m* в поле $U(x) = U_0 \cos\alpha x - F_0 x,\ F_0 = \mathrm{const}$.**

$$\left[\omega^2 = \frac{U_0\alpha^2}{m}\sqrt{1-\left(\frac{F_0}{U_0\alpha}\right)^2}\right]$$

8.3. Частица массы m способна двигаться по гладкой горизонтальной прямой. К частице прикреплена пружина жесткости k, другой конец которой закреплен на расстоянии h от прямой. Длина пружины в ненапряженном состоянии l_0. Найти частоту малых колебаний частицы.



8.4. Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если функция Лагранжа ее имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - \omega_0^2(x^2 + y^2)/2 + \alpha xy$, где ω_0 и α – константы.

[собственные частоты: $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha$, $\omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha$
нормальные координаты: $\theta_1 = (x + y)/\sqrt{2}$, $\theta_1 = (x - y)/\sqrt{2}$]

8.5. Частица массы m движется по окружности радиуса R, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через ее центр. Найти частоту малых колебаний частицы.

$\omega_2 = \sqrt{g/R - \Omega^2}$ при $\Omega^2 < g/R$; $\omega_{3,4} = \sqrt{\Omega^2 - g^2/(R\Omega)^2}$ при $\Omega^2 > g/R$.

Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона.

9.1. Составить функцию Гамильтона частицы, двигающейся в однородном поле тяжести $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$.

9.2. Найти функцию Гамильтона математического маятника, функция Лагранжа которого (ω – константа) $L = \dot{\varphi}^2/2 - \omega^2(1 - \cos\varphi)$.

9.3. Найти функцию Гамильтона и провести анализ движения системы в гамильтоновом формализме для частицы в центральном поле $U = U(\rho)$.

$$\left[H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho) \right].$$

9.4. Найти функцию Гамильтона и составить уравнения Гамильтона для механической системы, лагранжиан которой имеет вид (a, b – константы) $L = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1q_2$.

9.5. Найти функцию Лагранжа механической системы, гамильтониан которой имеет вид $\boldsymbol{H = \frac{p^2}{2m} + (ap) + U(r)}$, a – постоянный вектор.

9.6. Вычислить скобку Пуассона $\{x, M_y\}$; где x – декартова координата, а M_y – компонента момента импульса.

9.7. Вычислить скобку Пуассона $\{\varphi, \psi\}$, где $\varphi = q^2 + p^2$, $\psi = \mathrm{arctg}(p/q)$.

Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби

10.1. Установить каноничность следующего преобразования $Q = pe^q$, $P = q + e^{-q} + \ln p$.

10.2. Для гармонического осциллятора найти канонические преобразования, порождаемые производящей функцией $F_1 = -(m/2)\omega_0 q^2 \mathrm{tg}Q$, и новый гамильтониан $H'(\mathrm{Q,P})$.

$$H'(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = \omega_0 P.$$

10.3. Записать уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в центральном поле.

$$S = \tilde{S}(\rho) + \alpha_\varphi\varphi - Et.$$

$$\left(\frac{d\tilde{S}}{d\rho}\right)^2 = 2mE - 2mU(\rho) - \frac{\alpha_\varphi^2}{2m\rho^2}.$$

10.4. Найти действие одномерного гармонического осциллятора, проходящего через точки $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x(t_2)$.