УДК 514.763.33, 514.84

В. В. ШУРЫГИН (мл.)

КОГОМОЛОГИИ ДВОЙНОГО КОМПЛЕКСА БРЫЛИНСКОГО ПУАССОНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И КВАНТОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ ДЕ РАМА

В настоящее время активно изучаются пуассоновы многообразия, см. например, Bertelson [1], Brylinski [2], Вайсман [16], [17], Воробьев и Карасев [3], Conn [5], [6], Gammella [7], Ginzburg, Lu [8], Kosmann-Schwarzbach, Magri [11], Lichnerowicz [13], Weinstein [18], [19], Xu [20], [21]. В частности, исследуются различные процедуры квантования геометрических объектов на пуассоновых многообразиях, см., например, Концевич [10], Omori, Maeda, Miyazaki, Yoshioka [15], Huebschmann [9]. В работе Cao, Zhou [4] был предложен один из способов деформационного квантования пуассоновых многообразий: были построены (полиномиальные) квантовые когомологии де Рама пуассонова многообразия, а также было показано, что квантовые когомологии де Рама симплектического многообразия получаются деформационным квантованием его когомологий де Рама. В данной работе мы показываем, что квантовые когомологии де Рама произвольного пуассонова многообразия получаются деформационным квантованием его когомологий де Рама.

1. Пусть M — гладкое многообразие. Мы будем обозначать алгебру гладких функций на M через $C^\infty(M)$, кольцо дифференциальных форм на M через $\Omega^*(M)$ и пространство кососимметрических контравариантных тензорных полей на M через $\mathcal{V}^*(M)$.

Скобкой Пуассона на гладком многообразии M называется билинейное кососимметричное отображение $\{\ ,\ \} : C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

и тождеству Якоби

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Многообразие, наделенное скобкой Пуассона, называется *пуассоновым многообразием.* Скобка Пуассона на гладком многообразии M однозначно определяет контравариантный кососимметрический тензор $w \in \mathcal{V}^2(M)$ такой, что

$$\{f, g\} = i(w)(df \wedge dg) \tag{1}$$

для всех $f, g \in C^\infty(M)$, где $i(w) : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-2}(M)$ есть внутреннее умножение на w; в локальных координатах $(i(w)\alpha)_{i_1\dots i_{p-2}} = w^{jk}\alpha_{jki_1\dots i_{p-2}}$. Этот тензор обычно называют тензором Пуассона. Известно, что скобка (1) на $C^\infty(M)$, построенная по такому тензору, удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда $[w, w] = 0$, где $[\,,\,]$ — скобка Схоутена-Нейенхейса на $\mathcal{V}^*(M)$ (см. [13], [18]). В дальнейшем мы будем обозначать пуассоново многообразие символом (M, w). Если ранг тензора w постоянен, то пуассоново многообразие (M, w) называется *регулярным.* Примерами регулярных пуассоновых многообразий являются симплектические многообразия.

2. В [12] Koszul ввел кодифференциал $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ на пуассоновом многообразии (M, ω):

$$\delta = [i(w), d] = i(w) \circ d - d \circ i(w),$$

где $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ — внешний дифференциал. Он также показал, что $\delta^2 = 0$ и $d \circ \delta + \delta \circ d = 0$.

Предложение 2.1. *Пусть (M, w) — пуассоново многообразие. Тогда для любого натурального числа k имеет место тождество*

$$i(w) \circ d \circ i^k(w) = \frac{k}{k+1}\, d \circ i^{k+1}(w) + \frac{1}{k+1}\, i^{k+1}(w) \circ d, \tag{2}$$

где $i^p(w) = \underbrace{i(w) \circ \ldots \circ i(w)}_{p \text{ раз}}$.

Доказательство. Для скобки Схоутена-Нейенхейса выполняется следующее тождество: $[[i(u), d], i(v)] = i(-[v, u])$ для любых $u, v \in \mathcal{V}^*(M)$ (см., например, [14]). Подставляя в это тождество $u = v = w$ и учитывая, что $[w, w] = 0$, получаем, что $[[i(w), d], i(w)] = 0$. Раскрывая скобки в последнем равенстве, приходим к тождеству

$$i(w) \circ d \circ i(w) = \frac{1}{2} d \circ i^2(w) + \frac{1}{2} i^2(w) \circ d. \tag{3}$$

Пусть теперь $k \geq 2$. Используя (3), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&i(w) \circ d \circ i^k(w) = \tfrac{1}{2} d \circ i^{k+1}(w) + \tfrac{1}{2} i^2(w) \circ d \circ i^{k-1}(w),\\
&i^2(w) \circ d \circ i^{k-1}(w) = \tfrac{1}{2} i(w) \circ d \circ i^k(w) + \tfrac{1}{2} i^3(w) \circ d \circ i^{k-2}(w),\\
&\qquad \ldots\\
&i^{k-1}(w) \circ d \circ i^2(w) = \tfrac{1}{2} i^k(w) \circ d \circ i(w) + \tfrac{1}{2} i^{k-2}(w) \circ d \circ i^3(w),\\
&i^k(w) \circ d \circ i(w) = \tfrac{1}{2} i^{k+1}(w) \circ d + \tfrac{1}{2} i^{k-1}(w) \circ d \circ i^2(w).
\end{aligned}$$

Рассмотрим эту систему равенств как систему уравнений относительно $i^p(w) \circ d \circ i^{k-p+1}(w)$, $p = 1, \ldots, k$; решая эту систему, находим, что $i(w) \circ d \circ i^k(w) = \frac{k}{k+1} d \circ i^{k+1}(w) + \frac{1}{k+1} i^{k+1}(w) \circ d$. $\square$

Следствие 2.1. *Для любого натурального числа k имеет место тождество*

$$\frac{1}{k} i^k(w) \circ d - \frac{1}{k} d \circ i^k(w) = \delta \circ i^{k-1}(w). \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, $\delta \circ i^{k-1}(w) = i(w) \circ d \circ i^{k-1}(w) - d \circ i^k(w) = \frac{k-1}{k} d \circ i^k(w) + \frac{1}{k} i^k(w) \circ d - d \circ i^k(w) = \frac{1}{k} i^k(w) \circ d - \frac{1}{k} d \circ i^k(w)$. $\square$

Пусть $\Omega_0(M) = \oplus_{k\geq 0}\Omega^{2k}(M)$, $\Omega_1(M) = \oplus_{k\geq 0}\Omega^{2k+1}(M)$. Тогда $\Omega^*(M) = \Omega_0(M) \oplus \Omega_1(M)$, и на $\Omega^*(M)$ мы введем следующую $\mathbf{Z}_2$-градуировку: все элементы $\Omega_0(M)$ назовем четными (элементами степени 0), а все элементы $\Omega_1(M)$ — нечетными (степени 1). Заметим, что операторы $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ и $D := d + \delta : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ являются нечетными, т.е. отображают четные элементы в нечетные, и наоборот.

В дальнейшем будем обозначать $i(w)$ через i, и $i(\omega)\alpha$ через $i\alpha$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, определенный следующим образом:

$$\varphi(\alpha) := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} i^k\alpha = \alpha + i\alpha + \frac{1}{2}i^2\alpha + \frac{1}{6}i^3\alpha + \dots$$

Ясно, что φ переводит пространства $\Omega_0(M)$ и $\Omega_1(M)$ в себя, то есть сохраняет $\mathbf{Z}_2$-градуировку на $\Omega^*(M)$.

Мы докажем, что оператор φ осуществляет изоморфизм между $\mathbf{Z}_2$-градуированными дифференциальными группами $(\Omega^*(M), d)$ и $(\Omega^*(M), D)$.

Сначала покажем, что имеет место равенство

$$\varphi \circ d = D \circ \varphi, \tag{5}$$

то есть, что $\varphi : (\Omega^*(M), d) \to (\Omega^*(M), D)$ — гомоморфизм дифференциальных групп.

Для $\alpha \in \Omega^*(M)$ пусть $\alpha_k \in \Omega^k(M)$ есть компонента этой формы относительно разложения $\Omega^*(M)$ в прямую сумму: $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$. Для $\beta \in \Omega^k(M)$ положим $|\beta| = k$.

Ясно, что для доказательства (5) достаточно доказать, что для любой $\alpha \in \Omega^p(M)$, $p = 0, 1, \dots, n$, выполняется равенство $\varphi d\alpha = D\varphi\alpha$. Мы докажем, что для любого $k = 0, \dots, n$ имеет место равенство компонент $(\varphi d\alpha)_k = (D\varphi\alpha)_k$.

Пусть сначала $|\alpha| = 2m$. Тогда $(\varphi d\alpha)_{2m+1} = d\alpha = (D\varphi\alpha)_{2m+1}$. Для компонент степени $2m-1$ имеем

$$(\varphi d\alpha)_{2m-1} = id\alpha = di\alpha + \delta\alpha = (D\varphi\alpha)_{2m-1},$$

что следует из определения оператора δ.

Для компонент любой другой степени $k = 1, 3, \dots, 2m-3$ имеем

$$(\varphi d\alpha)_k = \frac{1}{k!} i^k d\alpha = \frac{1}{k!} di^k\alpha + \frac{1}{(k-1)!}\delta i^{k-1}\alpha = (D\varphi\alpha)_k.$$

что немедленно вытекает из формулы (4).

Остальные компоненты форм $\varphi\, d\alpha$, $D\,\varphi\alpha$ равны нулю.

Если $|\alpha| = 2m+1$, то равенство компонент для степеней $2, 4, \dots, 2m+2$ проверяется точно так же, а для компонент степени 0 имеем

$$(\varphi\, d\alpha)_0 = \frac{1}{(m+1)!} i^{m+1} d\alpha = \frac{1}{m!}\delta i^m\alpha = (D\,\varphi\alpha)_0,$$

что также следует из формулы (4) с учетом того, что $i^{m+1}\alpha = 0$. Все остальные компоненты форм $\varphi d\alpha$, $D\varphi\alpha$ равны нулю.

Предложение 2.2. *Гомоморфизм* $\varphi : (\Omega^*(M), d) \to (\Omega^*(M), D)$ *является изоморфизмом* $\mathbf{Z}_2$*-градуированных дифференциальных групп.*

Доказательство. Так как отображение φ сохраняет $\mathbf{Z}_2$-градуировку и в силу Предложения 2.2 является гомоморфизмом дифференциальных групп, достаточно доказать, что оно биективно.

Докажем, что $\varphi|_{\Omega_0(M)} : \Omega_0(M) \to \Omega_0(M)$ есть биекция.

Докажем, что $\varphi|_{\Omega_0(M)}$ — эпиморфизм. Рассмотрим любой элемент $c = \alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m} \in \Omega_0(M)$, где $|\alpha_k| = k$, $k = 0, 2, \ldots, 2m$. Элемент $c_1 = c - \varphi(\alpha_{2m})$ имеет вид $c_1 = \beta_0 + \beta_2 + \ldots + \beta_{2m-2}$, где $\beta_{2m-2} = \alpha_{2m-2} - i\alpha_{2m}$, $\beta_{2m-4} = \alpha_{2m-4} - \frac{1}{2}i^2\alpha_{2m}$, $\ldots$, $\beta_0 = \alpha_0 - \frac{1}{m!}i^m\alpha_{2m}$. Теперь рассмотрим элемент $c_2 = c_1 - \varphi(\beta_{2m-2}) = c - \varphi(\alpha_{2m} + \beta_{2m-2})$ (то есть, $c = c_2 + \varphi(\alpha_{2m} + \beta_{2m-2})$) и так далее. На $(m+1)$-ом шаге получим $c_{m+1} = 0$, откуда $c = \varphi(\alpha_{2m} + \beta_{2m-2} + \ldots) \in \operatorname{im}\varphi|_{\Omega_0(M)}$.

Докажем, что $\varphi|_{\Omega_0(M)}$ — мономорфизм. Условие $\varphi(c) = 0$, где $c = \alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m} \in \Omega_0(M)$, равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\alpha_{2m} = 0\\
&\alpha_{2m-2} + i\alpha_{2m} = 0\\
&\alpha_{2m-4} + i\alpha_{2m-2} + \tfrac{1}{2}i^2\alpha_{2m} = 0\\
&\qquad\ldots\\
&\alpha_0 + i\alpha_2 + \ldots + \tfrac{1}{m!}i^m\alpha_{2m} = 0.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем, что $\alpha_{2m} = 0$, тогда из второго уравнения следует, что $\alpha_{2m-2} = 0$ и так далее, из последнего уравнения имеем $\alpha_0 = 0$. Таким образом, $c = 0$ и φ — мономорфизм.

Аналогично доказывается, что $\varphi|_{\Omega_1(M)} : \Omega_1(M) \to \Omega_1(M)$ есть биекция. □

Доказанное предложение позволяет вычислить когомологии дифференциальной группы $(\Omega^*(M), D)$. Так как $\Omega^*(M) = \Omega_0(M) \oplus \Omega_1(M)$ и оператор D является нечетным, получаем, что

$$H(\Omega^*(M), D) = H_0(\Omega^*(M), D) \oplus H_1(\Omega^*(M), D),$$

где

$$H_0(\Omega^*(M), D) := \frac{\ker D : \Omega_0(M) \to \Omega_1(M)}{\operatorname{im} D : \Omega_1(M) \to \Omega_0(M)}, \quad H_1(\Omega^*(M), D) := \frac{\ker D : \Omega_1(M) \to \Omega_0(M)}{\operatorname{im} D : \Omega_0(M) \to \Omega_1(M)}.$$

Аналогично,

$$H(\Omega^*(M), d) = H_0(\Omega^*(M), d) \oplus H_1(\Omega^*(M), d),$$

где

$$H_0(\Omega^*(M), d) := \frac{\ker d : \Omega_0(M) \to \Omega_1(M)}{\operatorname{im} d : \Omega_1(M) \to \Omega_0(M)} \cong \oplus_{k \geq 0} H^{2k}(M)$$

$$H_1(\Omega^*(M), d) := \frac{\ker d : \Omega_1(M) \to \Omega_0(M)}{\operatorname{im} d : \Omega_0(M) \to \Omega_1(M)} \cong \oplus_{k \geq 0} H^{2k+1}(M)$$

Так как $\varphi : (\Omega^*(M), d) \to (\Omega^*(M), D)$ есть изоморфизм $\mathbf{Z}_2$-градуированных дифференциальных групп, получаем

Следствие 2.2. *Группа $H_0(\Omega^*(M), D)$ изоморфна прямой сумме четномерных когомологий де Рама $\oplus_{k\geq 0} H^{2k}(M)$ многообразия M. Группа $H_1(\Omega^*(M), D)$ изоморфна прямой сумме нечетномерных когомологий де Рама $\oplus_{k\geq 0} H^{2k+1}(M)$ многообразия M.*

3. Применим Следствие 2.2 для вычисления когомологий двойного комплекса $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{p,q}, \delta, d' = (-1)^p d)$, где $\mathcal{C}^{p,q} = \Omega^{q-p}(M)$, $p, q \in \mathbf{Z}$, введенного Brylinkski в [2] ($\dim M = n$).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & d'\uparrow & \\
 & & & 0 & \overset{\delta}{\to} & \Omega^n(M) & \overset{\delta}{\to}\cdots \\
 & & & d'\uparrow & & d'\uparrow & \\
 & 0 & \overset{\delta}{\to} & \Omega^n(M) & \overset{\delta}{\to} & \Omega^{n-1}(M) & \overset{\delta}{\to}\cdots \\
 & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & \\
\cdots\overset{\delta}{\to} & \Omega^n(M) & \overset{\delta}{\to} & \Omega^{n-1}(M) & \overset{\delta}{\to} & \Omega^{n-2}(M) & \overset{\delta}{\to}\cdots \\
 & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & \\
\cdots\overset{\delta}{\to} & \Omega^2(M) & \overset{\delta}{\to} & \Omega^1(M) & \overset{\delta}{\to} & \Omega^0(M) & \overset{\delta}{\to}\cdots \\
 & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & \\
\cdots\overset{\delta}{\to} & \Omega^1(M) & \overset{\delta}{\to} & \Omega^0(M) & \overset{\delta}{\to} & 0 & \\
 & d'\uparrow & & \uparrow & & & \\
\cdots\overset{\delta}{\to} & \Omega^0(M) & \overset{\delta}{\to} & 0 & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & 0 & & & & &
\end{array}
\tag{6}
$$

Этот комплекс мы будем называть *двойным комплексом Брылинского пуассонова многообразия* (M, w). Диагональный комплекс двойного комплекса (6) имеет вид $\mathcal{A} = (A^p, \widetilde{D}^p)$, $p \in \mathbf{Z}$, где $A^{2k} = \Omega_0(M)$, $A^{2k+1} = \Omega_1(M)$, $k \in \mathbf{Z}$, а $\widetilde{D}^p = \delta + (-1)^p d'$. Но $(-1)^p d' = d$, следовательно $\widetilde{D} = D$. Таким образом, этот диагональный комплекс имеет вид:

$$\ldots \overset{D}{\to} A^{2k-1} = \Omega_1(M) \overset{D}{\to} A^{2k} = \Omega_0(M) \overset{D}{\to} A^{2k+1} = \Omega_1(M) \overset{D}{\to} A^{2k+2} = \Omega_0(M) \overset{D}{\to} \ldots$$

Когомологиями двойного комплекса Брылинского $H^*_{Br}(M, w)$ будем называть когомологии этого диагонального комплекса.

Из Следствия 2.2 непосредственно вытекает

Теорема 1. *Для любого пуассонова многообразия (M, w) имеют место изоморфизмы:*

$$H^{2p}_{Br}(M, w) \cong \oplus_{k\geq 0} H^{2k}(M), \qquad H^{2p+1}_{Br}(M, w) \cong \oplus_{k\geq 0} H^{2k+1}(M), \qquad p \in \mathbf{Z}.$$

4. В заключительной части данной работы мы вычисляем квантовые когомологии де Рама пуассоновых многообразий.

Квантовые когомологии де Рама пуассонова многообразия были введены в [4]. Напомним их построение.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$ с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Обозначим символом $T^*(V)$ алгебру ковариантных тензоров на V. Для $\alpha \in T^k(V)$ обозначим

$$(\alpha \dashv v)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}, v),$$
$$(v \vdash \alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}),$$

где v, $v_1, \dots, v_{k-1} \in V$. Обозначим алгебру внешних форм на пространстве V через $\Lambda^*(V)$, а алгебру полиномов от h с коэффициентами в $\Lambda^*(V)$ через $\Lambda^*(V)[h]$. Выберем произвольный кососимметрический контравариантный тензор $w = w^{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda_2(V)$. Определим отображение $\wedge_h = \wedge_{h,w} : \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(V) \to \Lambda^*(V)[h]$ следующим образом:

$$\alpha \wedge_h \beta = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} w^{i_1 j_1} \dots w^{i_n j_n} (\alpha \dashv e_{i_1} \dashv \dots \dashv e_{i_n}) \wedge (e_{j_n} \vdash \dots \vdash e_{j_1} \vdash \beta),$$

где $\alpha, \beta \in \Lambda^*(V)$. По линейности $\wedge_h$ продолжается до *квантового внешнего произведения* $\wedge_h = \wedge_{h,w} : \Lambda^*(V)[h] \otimes \Lambda^*(V)[h] \to \Lambda^*(V)[h]$.

В [4] показано, что это определение не зависит от выбора базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ а также (Теорема 1.1), что квантовое внешнее произведение суперкоммутативно и ассоциативно.

Пусть (M, w) — пуассоново многообразие ($\dim M = n$). Операция квантового внешнего произведения естественным образом распространяется на кольцо $\Omega^*(M)[h]$ полиномов от h с коэффициентами в $\Omega^*(M)$. Рассмотрим оператор

$$d_h := d - h\delta : \Omega^*(M)[h] \to \Omega^*(M)[h]$$

В [4] (Теорема 2.2) показано, что он удовлетворяет соотношениям $d_h \circ d_h = 0$ и

$$d_h(\alpha \wedge_h \beta) = (d_h \alpha) \wedge_h \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge_h (d_h \beta),$$

где $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)[h]$.

Аналогично определяется квантовое внешнее произведение $\wedge_h$ и квантовый внешний дифференциал d_h на алгебре $\Omega^*(M)[h, h^{-1}]$ многочленов от h и h^{-1} и на алгебрах $\Omega^*(M)[[h]]$ и $\Omega^*(M)[[h, h^{-1}]]$ рядов Тейлора и Лорана от h соответственно.

В [4] были определены (полиномиальные) квантовые когомологии де Рама $Q_h H^*_{dR}(M)$ и $Q_{h,h^{-1}} H^*_{dR}(M)$ пуассонова многообразия (M, w) как когомологии дифференциальных групп $(\Omega^*(M)[h], d_h)$ и $(\Omega^*(M)[h, h^{-1}], d_h)$ соответственно. По аналогии определим тейлоровские и лорановские квантовые когомологии де Рама $TQ_h H^*_{dR}(M)$ и $LQ_{h,h^{-1}} H^*_{dR}(M)$ как когомологии дифференциальных групп $(\Omega^*(M)[[h]], d_h)$ и $(\Omega^*(M)[[h, h^{-1}]], d_h)$ соответственно.

На дифференциальной группе $(\Omega^*(M)[h], d_h)$ можно ввести структуру двойного комплекса $(C^{p,q}, -h\delta, d' = (-1)^p d)$, где $C^{p,q} = h^p \Omega^{q-p}(M)$, $p \geq 0$. Аналогично, на дифференциальной группе $(\Omega^*(M)[h, h^{-1}], d_h)$ можно ввести структуру двойного комплекса $(\widetilde{C}^{p,q}, -h\delta, d' = (-1)^p d)$ (7), где $\widetilde{C}^{p,q} = h^p \Omega^{q-p}(M)$, $p, q \in \mathbf{Z}$. По комплексу

$C^{p,q}$ строится спектральная последовательность E, сходящаяся к $H(\Omega^*(M)[h], d_h) = Q_h H^*_{dR}(M)$ с первым членом $E_1^{p,q} = h^p H^q(C^{p,*}, d') = h^p H^{q-p}_{dR}(M)$, $p \geq 0$. По комплексу $\widetilde{C}^{p,q}$ строится спектральная последовательность $\widetilde{E}$, сходящаяся к $Q_{h,h^{-1}} H^*_{dR}(M)$ с первым членом $\widetilde{E}_1^{p,q} = h^p H^{q-p}_{dR}(M)$, $p, q \in \mathbf{Z}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & d'\uparrow & & \\
 & & & & 0 & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^n(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & \\
 & & 0 & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^n(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^{n-1}(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^n(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^{n-1}(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^{n-2}(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^1(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^0(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & d'\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^0(M) & \xrightarrow{-h\delta} & 0 & & \\
 & & d'\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{-h\delta} & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array} \tag{7}
$$

Если спектральная последовательность E вырождается в первом члене, то, как показано в [4] (Теорема 3.2), квантовые когомологии де Рама получаются деформационным квантованием "обычных" когомологий де Рама. Действительно, в этом случае $Q_h H^*_{dR}(M) \cong E_\infty = \oplus_{p,q} E_1^{p,q} = \oplus_{p,q} h^p H^{q-p}_{dR}(M) = H^*_{dR}(M)[h]$.

Там же доказана следующая

Теорема. *Если (M, w) — компактное симплектическое многообразие без границы, то спектральная последовательность $\widetilde{E}$ вырождается в первом члене, то есть*

$$Q_{h,h^{-1}} H^*_{dR}(M) \cong H^*_{dR}(M)[h, h^{-1}].$$

В настоящей работе мы показываем, что этот результат верен для любого (не обязательно регулярного) пуассонова многообразия.

Теорема 2. *Квантовые когомологии де Рама любого пуассонова многообразия (M, w) получаются деформационным квантованием его обычных когомологий де Рама, то есть*

$$Q_h H^*_{dr}(M) \cong H^*_{dr}(M)[h], \quad Q_{h,h^{-1}} H^*_{dr}(M) \cong H^*_{dr}(M)[h, h^{-1}],$$
$$TQ_h H^*_{dr}(M) \cong H^*_{dr}(M)[[h]], \quad LQ_{h,h^{-1}} H^*_{dr}(M) \cong H^*_{dr}(M)[[h, h^{-1}]].$$

Доказательство. Ограничимся случаем тейлоровских квантовых когомологий, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Рассмотрим следующий гомоморфизм $\varphi_h : (\Omega^*(M)[[h]], d) \to (\Omega^*(M)[[h]], d_h)$ дифференциальных групп:

$$\varphi_h(\alpha) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{1}{k!} h^k i(\omega)^k \alpha.$$

Тождество $\varphi_h \circ d = d_h \circ \varphi_h$ проверяется непосредственно. Проверка эпиморфности и мономорфности φ_h аналогична доказательству Теоремы 1 и предоставляется читателю.

Изоморфизм φ_h индуцирует изоморфизм групп когомологий

$$TQ_h H^*_{dR}(M) \cong H(\Omega^*(M)[[h]], d) \cong H^*_{dR}(M)[[h]].$$

□

Заключение. Таким образом, когомологии Брылинского и квантовые когомологии де Рама пуассонова многообразия не зависят от пуассоновой структуры на многообразии (хотя и определяются с ее помощью), а зависят лишь от топологической структуры многообразия.

Автор выражает благодарность М.А. Малахальцеву за постановку задачи и ряд ценных советов и замечаний и М.В. Лосику, чьи замечания и рекомендации привели к существенному улучшению структуры всей работы и упрощению доказательств.

Литература

[1] M. Bertelson, *Foliations associated to regular Poisson structures.* preprint math.DG/0010191. – 2000.

[2] J.-L. Brylinski, *A differential complex for Poisson manifolds.//* J. Diff. Geom. – 1988. – V.28. – P. 93–114.

[3] Ю.М. Воробьев, М.В. Карасев, *О пуассоновых многообразиях и скобке Схоутена.//* Функ. Анализ и Прилож. – 1988. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 1–11.

[4] H.-D. Cao, J. Zhou, *On quantum de Rham cohomology.* preprint math.DG/9806157. – 1998.

[5] J. Conn, *Normal forms for analytic Poisson structures.//* Ann. of Math. – 1984. – V. 119. – P. 577–501.

[6] J. Conn, *Normal forms for smooth Poisson structures.//* Ann. of Math. – 1985. – V. 121. – P. 565–593.

[7] A. Gammella, *An approach to the tangential Poisson cohomology based on examples in duals of Lie algebras.//* Pacific J. Math. – 2002. – V. 203. – No. 2. – P. 283–319.

[8] V.L. Ginzburg, J.-H. Lu, *Poisson cohomology of Morita-equivalent Poisson manifolds.*// Duke Math. J. – 1992. – V. 68. – P. A199–A205.

[9] J. Huebschmann, *Poisson cohomology and quantization.*// J. für Reine und Angew. Math. – 1990. – V. 408. – P. 57–113.

[10] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds.* preprint q-alg/9709040. – 1997.

[11] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Poisson-Nijenhuis structures.*// Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor . – 1990. – V. 53. – P. 35–81.

[12] J.-L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie.*// "Elie Cartan et les Math. d'Aujour d'Hui", Astérisque, hors-série. – 1985. – P. 251–271.

[13] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et les algèbres de Lie associées.*// J. Diff. Geom. – 1977. – V. 12. – P. 253–300.

[14] P.W. Michor, *Remarks on the Schouten-Nijenhuis bracket.*// Suppl. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II. – 1987. – V. 16. – P. 207–215.

[15] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, *Poincaré-Cartan class and deformation quantization of Kähler manifolds.*// Commun. Math. Phys. – 1998. – V. 194. – P. 207–230.

[16] I. Vaisman, *Remarks on the Lichnerovicz-Poisson cohomology.*// Ann. Inst. Fourier Grenoble. – 1990. – V. 40. – P. 951–963.

[17] I. Vaisman, *The Poisson-Nijenhuis manifolds revisited.*// Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. – 1994. – V. 52. – P. 377–394.

[18] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds.*// J. Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – P. 523–557.

[19] A. Weinstein, *Poisson manifolds.*// "Elie Cartan et les Math. d'Aujour d'Hui", Astérisque, hors-série. – 1985. – P. 421–434.

[20] P. Xu, *Poisson cohomology of regular Poisson manifolds.*// Ann. Inst. Fourier Grenoble. – 1992. – V. 42. – P. 967–988.

[21] P. Xu, *Morita equivalence of Poisson manifolds.*// Commun. Math. Phys. – 1991. – V. 142. – P. 493–509.

Казанский государственный университет

17.12.2003