МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Набережночелнинский институт (филиал)

Кафедра Экономика предприятий и организаций

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

учебно-методическое пособие

Набережные Челны
2019 г.

УДК [519.86+330.45] (076.1)
ББК 65в635я73

Печатается по решению учебно-методической комиссии экономического отделения Набережночелнинского института (филиала) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», от « 16 » 04 2019 г. (протокол № 8)

Рецензенты:
Доктор экономических наук, профессор А.С. Пуряев
Доктор экономических наук, профессор А.Н. Макаров

Гареева Г.А. Методы линейного программирования: учебно-методическое пособие / Гареева Г.А., Григорьева Д.Р. – Набережные Челны: Изд-во Набережночелнинского института КФУ, 2019. – 59 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических и лабораторных занятий по дисциплине. Составлено с учетом требований Федеральных Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Учебно-методическое пособие предназначено для использования в учебном процессе студентами технических направлений в экономике и экономического отделения дневной, заочной и дистанционной форм обучения.

© Гареева Г.А., Григорьева Д.Р., 2019
© НЧИ КФУ, 2019
© Кафедра Экономика предприятий и организаций, 2019 г.

Оглавление

Введение 4

Практическая работа № 1 Графический метод решения задач линейного программирования 5

Практическая работа № 2 Симплексный метод решения задач линейного программирования 8

Практическая работа № 3 Двойственные задачи и их экономическое содержание 14

Практическая работа № 4 Задача целочисленного линейного программирования 20

Практическая работа № 5 Транспортная задача 24

Варианты задач для самостоятельной работы 34

Список литературы 58

Введение

Современная экономическая теория как на макро-, так и на микроуровне включает в себя в качестве необходимого элемента математические методы и модели. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные и существенные связи экономических переменных и объектов. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений методами дедукции можно получать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и сделанные предпосылки. В-третьих, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы.

Основной целью данного пособия является ознакомление студентов с основными математическими моделями и методами линейного программирования, используемых в процессах принятия решений.

Учебно-методическое пособие составлено на основании многолетнего опыта чтения курсов "Математические методы и модели исследования операций в экономике" студентам экономических специальностей КФУ. Рассматриваются следующие темы: графическое решение задач с двумя переменными; симплексный метод; теория двойственности; задачи целочисленного программирования (метод Гомори); метод потенциалов решения транспортной задачи.

Пособие будет полезным не только для обеспечения соответствующего лекционного курса, но и для проведения практических занятий.

Практическая работа № 1
Графический метод решения задач линейного программирования

Графическим методом решается стандартная задача линейного программирования:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max(\min)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq\geq b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

1. Случай единственного решения.

   На рисунке 1 точкой минимума является точка A, а точкой максимума - точка B.

2. Случай бесконечного множества решений (альтернативный оптимум).

   На рисунке 2 максимум достигается во всех точках отрезка BC.

3. Случай неограниченности целевой функции.

   На рисунке 3 точки максимума не существует.

4. Случай несовместности.

   На рисунке 4 – случай отсутствия решения, так как область допустимых значений является пустым множеством.

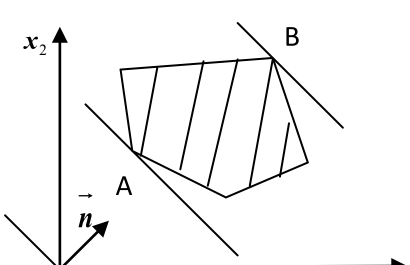


Рис.1

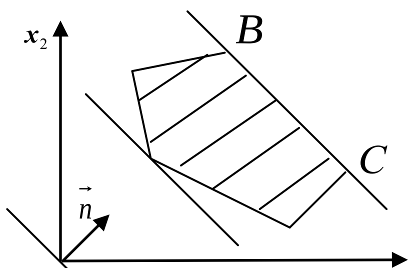


Рис. 2

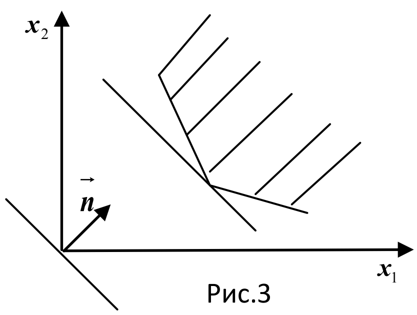


Рис.3

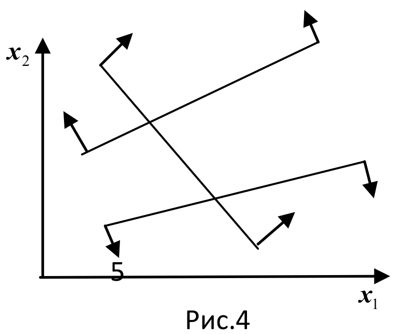


Рис.4

Пример. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств:

$$4x_1 + 6x_2 = 20 \ (1)$$

$$2x_1 - 5x_2 = -27 \ (2)$$

$$7x_1 + 5x_2 = 63 \ (3)$$

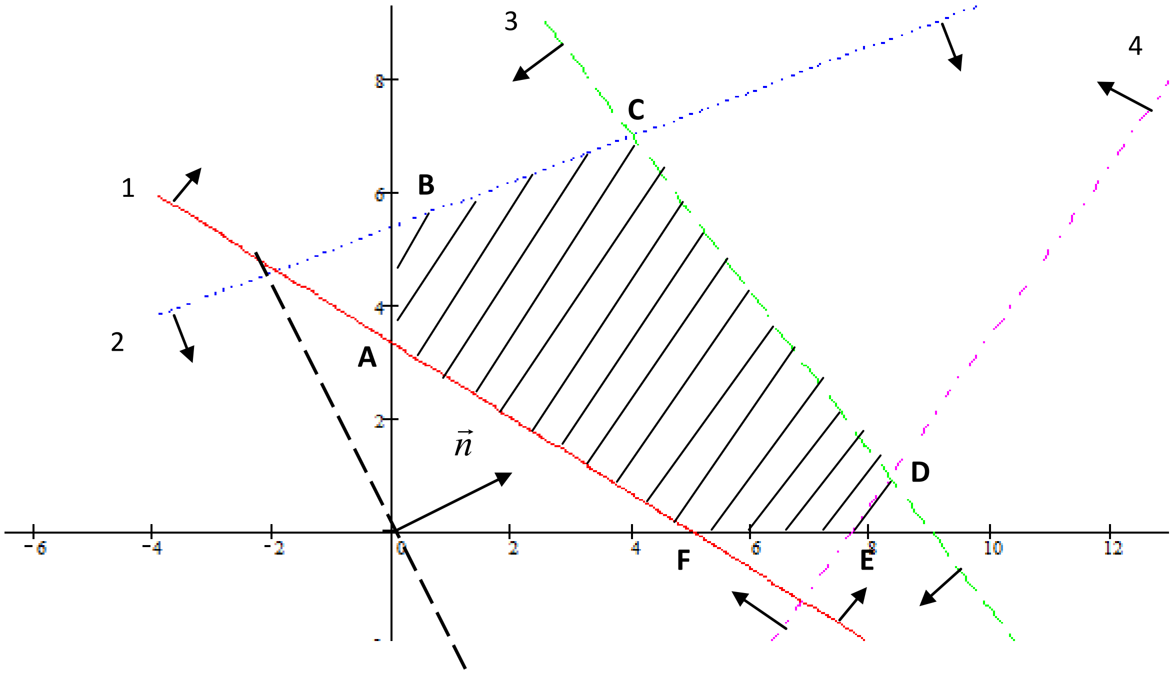
$$3x_1 - 2x_2 = 23 \quad (4)$$

Каждое ограничение-неравенство определяет координатную полуплоскость. В зависимости от знака неравенств при помощи двух стрелок укажем требуемые полуплоскости.

В результате пересечения всех полуплоскостей находим многоугольник решений (шестиугольник *ABCDEF*).

Построим линию уровня целевой функции, проходящую через начало координат $2x_1 + x_2 = 0$, и градиент целевой функции $\vec{n}(2,1)$.

Передвигая линию уровня вдоль градиента параллельно самой себе, находим точки экстремума. Минимум целевой функции достигается в точке *A*, а максимум в точке *D*.



Определим координаты точек максимума и минимума целевой функции и вычислим их значения в найденных точках.

Точка минимума лежит на пересечении прямой (1) и прямой, лежащей на оси x_2, которая имеет уравнение $x_1 = 0$:

$$\min: \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 20 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{20 - 4x_1}{6} \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3{,}33 \end{cases}$$

Точка максимума лежит на пересечении прямых (3) и (4):

$$\max: \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 63 \\ 3x_1 - 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{5}{7}x_2 \\ 3\cdot(9 - \dfrac{5}{7}x_2) - 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{5}{7}x_2 \\ \dfrac{29}{7}x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8{,}31 \\ x_2 = 0{,}97 \end{cases}$$

Минимальное значение целевой функции:
$Z_{\min} = 2\cdot 0 + 3{,}33 = 3{,}33$.
Максимальное значение целевой функции:

$Z_{\max} = 2\cdot 8{,}31 + 0{,}97 = 17{,}59$.

Практическая работа № 2
Симплексный метод решения задач линейного программирования

Пример 1: $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Необходимо, чтобы все b_i были положительными числами, в противном случае умножим на (-1).

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

Для того чтобы привести систему ограничений к каноническому виду, введем дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 20 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 27 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_5 = 63 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_6 = 23 \end{cases}$$

Так как первое неравенство не имеет предпочтительный вид, необходимо ввести искусственную переменную ***w*** и сформулировать *М-задачу*.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 + w = 20 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 27 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_5 = 63 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_6 = 23 \end{cases}$$

В функцию Z переменная w вводится с коэффициентом ***–M*** (в случае нахождения максимума), где M – большое положительное число, поэтому целевая функция будет иметь следующий вид:

$Z = 2x_1 + x_2 - Mw \to \max$

Далее *М-задача* решается с помощью симплексной таблицы.

БП	*Сб*	*B*	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	w
			2	**1**	0	0	0	0	-M
w	*-M*	20	4	**6**	-1	0	0	0	1
x_4	0	27	-2	**5**	0	1	0	0	0
x_5	0	63	7	**5**	0	0	1	0	0
x_6	0	23	3	**-2**	0	0	0	1	0
		-20M	-4M-2	**-6M-1**	M	0	0	0	0

c_j
Коэффициенты перед переменными в целевой функции

Δ_j

БП – базисные переменные.

Сб – коэффициенты перед базисными переменными в целевой функции.

$$\Delta_0 = (Сб, B) = -20M + 0\cdot 27 + 0\cdot 63 + 0\cdot 23 = -20M$$

$$\Delta_j = (Сб, A_j) - c_j$$

$$\Delta_1 = (Сб, A_1) - c_1 = -4M + 0\cdot(-2) + 0\cdot 7 + 0\cdot 3 - 2 = -4M - 2$$

$$\Delta_2 = (Сб, A_2) - c_2 = -6M + 0\cdot 5 + 0\cdot 5 + 0\cdot(-2) - 1 = -6M - 1$$

$$\Delta_3 = (Сб, A_3) - c_3 = (-1)(-M) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = M$$

$$\Delta_4 = (Сб, A_4) - c_4 = 0\cdot(-M) + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = (Сб, A_5) - c_5 = 0\cdot(-M) + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_6 = (Сб, A_6) - c_6 = 0\cdot(-M) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0$$

$$\Delta_7 = (Сб, A_7) - c_7 = 1\cdot(-M) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + M = 0$$

У базисных переменных Δ_j всегда равны 0.

Так как среди оценок Δ_j есть отрицательные, то необходимо продолжить решение задачи.

Среди отрицательных Δ_j выбираем наименьшую оценку. В данном случае это *(-6M-1)*. Столбец x_2 называется разрешающим столбцом. Сравниваем отношения элементов столбца ***B*** на положительные элементы разрешающего столбца и выбираем наименьшую дробь: $\min\left\{\frac{20}{6}, \frac{27}{5}, \frac{63}{5}\right\} = \frac{20}{6}$.

Строка этой дроби называется разрешающей строкой, а знаменатель наименьшей дроби – разрешающим элементом.

Сформируем новую симплексную таблицу. Перейдем к новому допустимому базисному решению.

Правила заполнения новой таблицы:

1. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
2. Элементы разрешающего столбца равны 0, а на месте разрешающего элемента ставится 1.
3. Остальные элементы таблицы заполняются по правилу прямоугольника:

20	4	6
27	-2	5

$$27-\frac{20\cdot 5}{6}=\frac{81-50}{3}=\frac{31}{3}$$

20	4	6
27	-2	5
63	7	5

$$63-\frac{20\cdot 5}{6}=\frac{189-50}{3}=\frac{139}{3}$$

20	4	6
27	-2	5
63	7	5
23	3	-2

$$23-\frac{20\cdot(-2)}{6}=\frac{69+20}{3}=\frac{89}{3}$$

БП	*Сб*	*B*	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	w
			2	**1**	0	0	0	0	$-M$
w	$-M$	20	4	**6**	-1	0	0	0	1
x_4	0	27	-2	**5**	0	1	0	0	0
x_5	0	63	7	**5**	0	0	1	0	0
x_6	0	23	3	**-2**	0	0	0	1	0
		$-20M$	$-4M-2$	$\boldsymbol{-6M-1}$	M	0	0	0	0
$\boldsymbol{x_2}$	1	10/3	2/3	1	-1/6	0	0	0	1/6
x_4	0	31/3	-16/3	0	5/6	1	0	0	-5/6
x_5	0	139/3	11/3	0	5/6	0	1	0	-5/6
x_6	0	89/3	13/3	0	-1/3	0	0	1	1/3
		10/3	-4/3	0	-1/6	0	0	0	$1/6+M$

x_1 x_4 x_5	2 0 0	5 37 28	1 0 0	3/2 8 -11/2	-1/4 -1/2 21/12	0 1 0	0 0 1	0 0 0	1/4 1/2 -21/12
x_6	0	8	0	-13/2	3/4	0	0	1	-3/4
		10	0	2	-1/2	0	0	0	1/2+M
x_1 x_4	2 0	23/3 127/3	1 0	-2/3 11/3	0 0	0 1	0 0	1/3 2/3	0 0
x_5	0	28/3	0	29/3	0	0	1	-7/3	0
x_3	0	32/3	0	-26/3	1	0	0	4/3	-1
		46/3	0	-7/3	0	0	0	2/3	M
x_1 x_4 x_2 x_3	2 0 1 0	241/29 1125/29 28/29 552/29	1 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	0 1 0 0	2/29 -11/29 3/29 26/29	5/29 45/29 -7/29 -22/29	2/29 -11/29 0 -1
		510/29	0	0	0	0	7/29	3/29	4/29+M

Когда все оценки Δ_j станут неотрицательными, то в задаче будет достигнуто оптимальное решение.

В последней симплексной таблице все $\Delta_j \geq 0$, значит, найден максимум целевой функции.

$$Z_{\max} = \frac{510}{29} \text{ при } X^* = \left(\frac{241}{29}, \frac{28}{29}, \frac{552}{29}, \frac{1125}{29}, 0, 0\right).$$

Пример 2: $Z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Необходимо, чтобы все b_i были положительными числами, в противном случае умножим на (-1).

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

Для того чтобы привести систему ограничений к каноническому виду, введем дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 20 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 27 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_5 = 63 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_6 = 23 \end{cases}$$

Так как первое неравенство не имеет предпочтительный вид, необходимо ввести искусственную переменную ***w*** и сформулировать *М-задачу*.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 + w = 20 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 27 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_5 = 63 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_6 = 23 \end{cases}$$

В функцию Z переменная w вводится с коэффициентом M (в случае нахождения минимума), где M – большое положительное число, поэтому целевая функция будет иметь следующий вид:

$$Z = 2x_1 + x_2 + Mw \to \min$$

Далее решают *М-задачу* с помощью симплексной таблицы.

БП	*Сб*	*В*	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	w
			2	**1**	0	0	0	0	M
w	M	20	4	**6**	-1	0	0	0	1
x_4	0	27	-2	**5**	0	1	0	0	0
x_5	0	63	7	**5**	0	0	1	0	0
x_6	0	23	3	**-2**	0	0	0	1	0
		20M	4M-2	**6M-1**	-M	0	0	0	0

c_j Коэффициенты перед переменными в целевой функции

Δ_j

$$\Delta_0 = (Сб, B) = 20M + 0 \cdot 27 + 0 \cdot 63 + 0 \cdot 23 = 20M$$

$$\Delta_j = (Сб, A_j) - c_j$$

$\Delta_1 = (C\textit{б}, A_1) - c_1 = 4M + 0\cdot(-2) + 0\cdot 7 + 0\cdot 3 - 2 = 4M - 2$

$\Delta_2 = (C\textit{б}, A_2) - c_2 = 6M + 0\cdot 5 + 0\cdot 5 + 0\cdot(-2) - 2 = 6M - 1$

$\Delta_3 = (C\textit{б}, A_3) - c_3 = (-1)\cdot M + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = -M$

$\Delta_4 = (C\textit{б}, A_4) - c_4 = 0\cdot M + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_5 = (C\textit{б}, A_5) - c_5 = 0\cdot M + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_6 = (C\textit{б}, A_6) - c_6 = 0\cdot M + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0$

$\Delta_7 = (C\textit{б}, A_7) - c_7 = 1\cdot M + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - M = 0$

У базисных переменных $\Delta_j = 0$.

Так как среди оценок Δ_j есть положительные, то необходимо продолжить решение задачи.

Среди положительных Δ_j выбираем наибольшую оценку. В данном случае это *(6M-1)*. Столбец x_2 называется разрешающим столбцом. Сравниваем отношения элементов столбца ***B*** на положительные элементы разрешающего столбца и выбираем наименьшую дробь: $\min\left\{\frac{20}{6}, \frac{27}{5}, \frac{63}{5}\right\} = \frac{20}{6}$.

Выбираем наименьшую дробь, и строка этой дроби называется разрешающей строкой, а знаменатель наименьшей дроби – разрешающим элементом.

Сформируем новую симплексную таблицу. Перейдем к новому допустимому базисному решению.

БП	*Сб*	*B*	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	*w*
			2	**1**	0	0	0	0	*M*
w	*M*	20	4	**6**	-1	0	0	0	1
x_4	0	27	-2	**5**	0	1	0	0	0
x_5	0	63	7	**5**	0	0	1	0	0
x_6	0	23	3	**-2**	0	0	0	1	0
		20M	4M-2	**6M-1**	-M	0	0	0	0

$\boldsymbol{x_2}$	1	10/3	2/3	1	-1/6	0	0	0	1/6
x_4	0	31/3	-16/3	0	5/6	1	0	0	-5/6
x_5	0	139/3	11/3	0	5/6	0	1	0	-5/6
x_6	0	89/3	13/3	0	-1/3	0	0	1	1/3
		10/3	-4/3	0	-1/6	0	0	0	1/6-M

Когда все оценки Δ_j станут отрицательными, то в задаче будет достигнуто оптимальное решение.

В последней симплексной таблице все $\Delta_j \le 0$, значит, найден минимум целевой функции.

$$Z_{\min} = \frac{10}{3} \text{ при } X^* = \left(0, \frac{10}{3}, 0, \frac{31}{3}, \frac{139}{3}, \frac{89}{3}\right).$$

Практическая работа № 3
Двойственные задачи и их экономическое содержание

Пример: $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \ge 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \ge -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 23 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Оптимальное решение данной задачи было найдено в практической работе № 2. Рассмотрим последнюю симплексную таблицу исходной задачи, соответствующую оптимальному решению:

БП	*Сб*	*B*	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	w
			2	1	0	0	0	0	-*M*
x_1	2	241/29	1	0	0	0	2/29	5/29	2/29
x_4	0	1125/29	0	0	0	1	-11/29	45/29	-11/29
x_2	1	28/29	0	1	0	0	3/29	-7/29	0
x_3	0	552/29	0	0	1	0	26/29	-22/29	-1
		510/29	0	0	0	0	7/29	3/29	4/29+*M*

$$Z_{\max} = \frac{510}{29} \text{ при } X^* = \left(\frac{241}{29}, \frac{28}{29}, \frac{552}{29}, \frac{1125}{29}, 0, 0\right).$$

Составим соответствие между первоначальными и дополнительными переменными исходной и двойственной задач:

Исходная задача	
Первоначальные переменные	Дополнительные переменные
$x_1 \downarrow y_5$ $x_2 \downarrow y_6$	$x_3 \downarrow y_1$ $x_4 \downarrow y_2$ $x_5 \downarrow y_3$ $x_6 \downarrow y_4$
1) Дополнительные переменные	Первоначальные переменные
Двойственная задача	

Составим двойственную задачу:

$$F = -20y_1 + 27y_2 + 63y_3 + 23y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -4y_1 - 2y_2 + 7y_3 + 3y_4 \geq 2 \\ -6y_1 + 5y_2 + 5y_3 - 2y_4 \geq 1 \end{cases}$$

Согласно теореме о соответствии между первоначальными и дополнительными переменными исходной и двойственной задач получим решение двойственной задачи:

$$Y^* = \left(0,\ 0,\ \frac{7}{29},\ \frac{3}{29},\ 0,\ 0\right)$$

$$F_{\min} = Z_{\max} = \frac{510}{29}$$

x_1, x_2 – объемы продукции P_1, P_2, планируемой к выпуску.

y_1, y_2, y_3, y_4 – объективно обусловленные оценки ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4.

Из решения следует, что продукцию P_1 необходимо произвести $\frac{241}{29}$ единиц, а продукцию P_2 – $\frac{28}{29}$ единиц.

Ресурсы S_3, S_4 используются полностью $(x_5^* = 0,\ x_6^* = 0)$, ресурса S_1 осталось $\frac{552}{29}$ единиц, ресурса S_2 осталось $\frac{1125}{29}$ единиц.

Установим степень дефицитности используемых ресурсов и обоснуем рентабельность.

Объективно обусловленная оценка y_1^* избыточного ресурса S_1, которого осталось $\frac{552}{29}$ единиц, равна 0, а оценка y_2^* ресурса S_2, которого осталось $\frac{1125}{29}$ единиц, также равна 0, а для дефицитных ресурсов S_3 и S_4, которые используются полностью по оптимальному плану, оценки будут ненулевые $\left(y_3^* = \frac{2)7}{29}, \quad y_4^* = \frac{3}{29} \right)$.

Увеличение запаса ресурса S_3 на единицу увеличивает прибыль y_3^* на $\frac{7}{29}$ единиц, соответственно S_4 на $\frac{3}{29}$ единиц. Следовательно, ресурс S_3 более дефицитный, чем ресурс S_4.

Рассмотрим продукцию P_1, P_2 .

Так как $x_1^*, x_2^* > 0$, то выпуск данных видов продукций оправдан, и оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции, т.е.:

$$-4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{7}{29} + 3 \cdot \frac{3}{29} = 2$$

$$-6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{7}{29} - 2 \cdot \frac{3}{29} = 1$$

Таким образом, в оптимальный план войдет только та продукция, которая выгодна предприятию (не войдет убыточная продукция), т.е. продукция P_1 и P_2. Оценки y_5^* и y_6^* этих видов продукции равны нулю.

$$y_5^* = (-4y_1^* - 2y_2^* + 7y_3^* + 3y_4^*) - 2 = (-4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{7}{29} + 3 \cdot \frac{3}{29}) - 2 = 0$$

$$y_6^* = (-6y_1^* + 5y_2^* + 5y_3^* - 2y_4^*) - 1 = (-6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{7}{29} - 2 \cdot \frac{3}{29}) - 1 = 0$$

Таким образом, ненулевые оценки показывают, что эти продукции являются неубыточными, поскольку оценки ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадают с оценками единицы изготовленной продукции.

Предположим, что появилась возможность выпускать новую продукцию P_3. При этом затраты составляют: $a_{13} = 2, \quad a_{23} = 1, \quad c_3 = 20$ у.е.

Установим, даст ли прибыль включение в план выпуска дополнительной продукции P_3, какой должна быть прибыль от единицы P_3, чтобы его производство было рентабельным.

Для этого сопоставляются дополнительные затраты на ресурсы в расчете на единицу P_3 с ценой ее реализации:

$$c_3 = a_{13} \cdot y_1^* + a_{23} \cdot y_2^* = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

Так как расходы на производство меньше цены продукции $c_3 = 20$ у.е. (0<20), то выпуск продукции P_3 стоит включить и ее производство будет рентабельным.

Найдем интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменению запасов ресурсов каждого вида.

Пусть запасы ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4 изменились на $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3, \Delta b_4$. Суммарные затраты на ресурсы:

$$F = (-20 + \Delta b_1)y_1 + (27 + \Delta b_2)y_2 + (63 + \Delta b_3)y_3 + (23 + \Delta b_4)y_4$$

Симплексная таблица оптимального решения исходной задачи:

БП	*Сб*	*B*	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	w
			2	1	0	0	0	0	-*M*
x_1	2	241/29	1	0	0	0	2/29	5/29	2/29
x_4	0	1125/29	0	0	0	1	-11/29	45/29	-11/29
x_2	1	28/29	0	1	0	0	3/29	-7/29	0
x_3	0	552/29	0	0	1	0	26/29	-22/29	-1
		510/29	0	0	0	0	7/29	3/29	4/29+*M*

Составим последнюю симплексную таблицу для двойственной задачи:

БП	*Сб*	*B*	y_5	y_2	y_6	y_1
y_3	63	7/29	-2/29	11/29	-3/29	-26/29
y_4	23	3/29	-5/29	-45/29	7/29	22/29
		510/29	-241/29	-1125/29	-28/29	-552/29

В функцию F входят y_3, y_4, а $y_1=0$ и $y_2=0$.

Это означает, что небазисная переменная может увеличиваться, не меняя при этом значения целевой функции. Если такая нулевая относительная оценка соответствует оптимальному решению, то имеется множество оптимальных решений так как P не меняется.

$$y_3 = \frac{7}{29} + \frac{2}{29}y_5 - \frac{11}{29}y_2 + \frac{3}{29}y_6 + \frac{26}{29}y_1$$
$$y_4 = \frac{3}{29} + \frac{5}{29}y_5 + \frac{45}{29}y_2 - \frac{7}{29}y_6 - \frac{22}{29}y_1$$

Подставим y_3, y_4 в функцию F:

$$F = (-20+\Delta b_1)y_1 + (27+\Delta b_2)y_2 + (63+\Delta b_3)\left(\frac{7}{29} + \frac{2}{29}y_5 - \frac{11}{29}y_2 + \frac{3}{29}y_6 + \frac{26}{29}y_1\right) +$$
$$+ (23+\Delta b_4)\left(\frac{3}{29} + \frac{5}{29}y_5 + \frac{45}{29}y_2 - \frac{7}{29}y_6 - \frac{22}{29}y_1\right)$$

Сгруппируем свободные члены и коэффициенты при y:

$$F = \left(\frac{510}{29} + \frac{3}{29}\Delta b_3 - \frac{7}{29}\Delta b_4\right) + \left(\frac{552}{29} + \Delta b_1 + \frac{26}{29}\Delta b_3 - \frac{22}{29}\Delta b_4\right)y_1 +$$
$$+\left(\frac{125}{29} + \Delta b_2 - \frac{11}{29}\Delta b_3 + \frac{45}{29}\Delta b_4\right)y_2 + \left(\frac{241}{29} + \frac{2}{29}\Delta b_3 + \frac{5}{29}\Delta b_4\right)y_5 +$$
$$+\left(\frac{28}{29} + \frac{3}{29}\Delta b_3 - \frac{7}{29}\Delta b_4\right)y_6$$

Для того чтобы объективно обусловленные оценки остались неизменными, то есть сохранилось оптимальное решение двойственной задачи, достаточно, чтобы коэффициенты функции F остались неотрицательными.

$$\begin{cases} \frac{552}{29} + \Delta b_1 + \frac{26}{29}\Delta b_3 - \frac{22}{29}\Delta b_4 \geq 0 \\ \frac{125}{29} + \Delta b_2 - \frac{11}{29}\Delta b_3 + \frac{45}{29}\Delta b_4 \geq 0 \\ \frac{241}{29} + \frac{2}{29}\Delta b_3 + \frac{5}{29}\Delta b_4 \geq 0 \\ \frac{28}{29} + \frac{3}{29}\Delta b_3 - \frac{7}{29}\Delta b_4 \geq 0 \end{cases}$$

Предположим, что ресурсы S_3 и S_4 не изменяем, т.е. $\Delta b_3 = 0$ и $\Delta b_4 = 0$.

Отсюда $\Delta b_1 \geq -\frac{552}{29}$;

$$-20-\frac{552}{29} \leq b_1+\Delta b_1 \leq -20$$

$-39{,}04 \leq b_1+\Delta b_1 \leq -20$ – интервал устойчивости для первого ресурса.

Предположим, что ресурсы S_3 и S_4 не изменяем, т.е. $\Delta b_3=0$ и $\Delta b_4=0$.

Отсюда $\Delta b_2 \geq -\frac{125}{29}$

$$27-\frac{125}{29} \leq b_2+\Delta b_2 \leq 27$$

$22{,}69 \leq b_2+\Delta b_2 \leq 27$ – интервал устойчивости для второго ресурса.

Предположим, что ресурсы S_2, S_3 и S_4 не изменяем, т.е. $\Delta b_1=0,\ \Delta b_2=0,\ \Delta b_4=0$.

Отсюда $\Delta b_3 \leq \frac{125}{11}$; $\Delta b_3 \geq -\frac{28}{3}$

$$63-\frac{28}{3} \leq b_3+\Delta b_3 \leq 63+\frac{125}{11}$$

$53{,}67 \leq b_3+\Delta b_3 \leq 74{,}36$ – интервал устойчивости для третьего ресурса.

Предположим, что ресурс S_1, S_2 и S_3 не изменяем, т.е. $\Delta b_1=0,\ \Delta b_2=0,\ \Delta b_3=0$.

Отсюда $\Delta b_4 \leq 4$; $\Delta b_4 \geq -\frac{125}{45}$

$$23-\frac{125}{45} \leq b_4+\Delta b_4 \leq 23+4$$

$20{,}22 \leq b_4+\Delta b_4 \leq 27$ – интервал устойчивости для четвертого ресурса.

По соотношениям объективно обусловленных оценок можем определить расчетные нормы заменяемости ресурсов, при соблюдении которых проводимые замены в пределах устойчивости двойственных оценок на эффективность оптимального плана не влияют.

Определим нормы заменяемости ресурсов.

$\frac{y_1^*}{y_2^*}=\frac{0}{0}$ – они невзаимозаменяемые (т.к. на нуль делить нельзя)

$$\frac{y_1^*}{y_3^*} = \frac{0}{\frac{7}{29}} \qquad \frac{y_2^*}{y_3^*} = \frac{0}{\frac{7}{29}} \qquad \frac{y_1^*}{y_4^*} = \frac{0}{\frac{3}{29}}$$

$$\frac{y_2^*}{y_4^*} = \frac{0}{\frac{3}{29}} \qquad \frac{y_3^*}{y_4^*} = \frac{\frac{7}{29}}{\frac{3}{29}} = \frac{7}{3}$$

В результате получится матрица взаимозаменяемости ресурсов:

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

Практическая работа № 4
Задача целочисленного линейного программирования

Пример. Найти решение задачи целочисленного программирования методом Гомори:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \ge 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \ge -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 23 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые.

Для нахождения оптимального решения задачи целочисленного программирования воспользуемся последней симплексной таблицей, соответствующей оптимальному решению:

БП	*Сб*	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*w*
x_1	2	$8^9/_{29}$	1	0	0	0	$^2/_{29}$	$^5/_{29}$	0
x_4	0	$38^{23}/_{29}$	0	0	0	1	$^{-11}/_{29}$	$1^{16}/_{29}$	0
x_2	1	$^{28}/_{29}$	0	1	0	0	$^3/_{29}$	$^{-7}/_{29}$	0
x_3	0	$19^1/_{29}$	0	0	1	0	$^{26}/_{29}$	$^{-22}/_{29}$	-1
		$17^{17}/_{29}$	0	0	0	0	$^7/_{29}$	$^3/_{29}$	*M*

Оптимальное решение $Z_{\max} = 17\frac{17}{29}$ при $X^* = (8\frac{9}{29}, \frac{28}{29}, 19\frac{1}{29}, 38\frac{23}{29}, 0, 0)$.

Целой частью числа ***a*** называется наибольшее целое число $[a]$, не превосходящее a.

Дробной частью числа ***a***, называется число, определяемое следующей формулой $\{a\} = a - [a]$.

Неравенство $\{b_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \le 0$ является правильным отсечением.

Поскольку среди компонент оптимального решения есть нецелые, то для нахождения целочисленного оптимального решения среди нецелых компонент выбирается компонента с наибольшей дробной частью, и по соответствующей строке формируется правильное отсечение.

По 3-ему уравнению с переменной x_2, получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане с наибольшей дробной частью $^{28}/_{29}$, составим правильное отсечение:

$$\left\{\frac{28}{29}\right\} - \{1\}x_2 - \left\{\frac{3}{29}\right\}x_5 - \left\{-\frac{7}{29}\right\}x_6 \le 0$$

$$\left\{\frac{28}{29}\right\} = \frac{28}{29}, \qquad \left\{\frac{3}{29}\right\} = \frac{3}{29} \qquad \left\{-\frac{7}{29}\right\} = -\frac{7}{29} - (-1) = \frac{22}{29}$$

$$\frac{28}{29} - \frac{3}{29}x_5 - \frac{22}{29}x_6 \le 0$$

Приведем полученное неравенство к каноническому виду:

$$\frac{28}{29} - \frac{3}{29}x_5 - \frac{22}{29}x_6 + x_7 = 0$$

$$x_7 = -\frac{28}{29} + \frac{3}{29}x_5 + \frac{22}{29}x_6$$

Коэффициенты полученного уравнения введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу (свободный член записывается без изменения знака, а коэффициенты при свободных переменных – с противоположным знаком).

БП	*Сб*	*В*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	2	$8^{9}/_{29}$	1	0	0	0	$^{2}/_{29}$	$^{5}/_{29}$	0
x_4	0	$38^{23}/_{29}$	0	0	0	1	$^{-11}/_{29}$	$1^{16}/_{29}$	0
x_2	1	$^{28}/_{29}$	0	1	0	0	$^{3}/_{29}$	$^{-7}/_{29}$	0
x_3	0	$19^{1}/_{29}$	0	0	1	0	$^{26}/_{29}$	$^{-22}/_{29}$	0
x_7	0	$^{-28}/_{29}$	0	0	0	0	$^{-3}/_{29}$	$^{-22}/_{29}$	1
		$17^{17}/_{29}$	0	0	0	0	$^{7}/_{29}$	$^{3}/_{29}$	0

Полученную задачу решаем симплексным методом. Базисное решение $X = (8\frac{9}{29}, \frac{28}{29}, 19\frac{1}{29}, 38\frac{23}{29}, 0, 0, -\frac{28}{29})$ - недопустимое, ограничения совместны (в строке, имеющей отрицательный свободный член, есть отрицательные компоненты). В качестве разрешающего столбца примем столбец x_6. Разрешающая строка - x_7. На пересечении разрешающих строки и столбца находится разрешающий элемент, равный $(^{-22}/_{29})$.

В результате преобразования симплексной таблицы получим:

БП	*Сб*	*В*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	2	$8^{1}/_{11}$	1	0	0	0	$^{1}/_{22}$	0	$^{5}/_{22}$
x_4	0	$36^{9}/_{11}$	0	0	0	1	$^{-13}/_{22}$	0	$2^{1}/_{22}$
x_2	1	$1^{3}/_{11}$	0	1	0	0	$^{3}/_{22}$	0	$^{-7}/_{22}$
x_3	0	20	0	0	1	0	1	0	-1
x_6	0	$1^{3}/_{11}$	0	0	0	0	$^{3}/_{22}$	1	$-1^{7}/_{22}$
		$17^{5}/_{11}$	0	0	0	0	$^{5}/_{22}$	0	$^{3}/_{22}$

В оптимальном решении $X = (8\frac{1}{11}, 1\frac{3}{11}, 20, 36\frac{9}{11}, 0, 1\frac{3}{11}, 0)$ присутствуют дробные числа.

По второму уравнению с переменной x_4, получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане с наибольшей дробной частью $^9/_{11}$, составим правильное отсечение:

$$\left\{36\frac{9}{11}\right\} - \{1\}x_4 - \left\{-\frac{13}{22}\right\}x_5 - \left\{2\frac{1}{22}\right\}x_7 \le 0$$

$$\frac{9}{11} - \frac{9}{22}x_5 - \frac{1}{22}x_7 \le 0$$

Преобразуем полученное неравенство в уравнение:

$$\frac{9}{11} - \frac{9}{22}x_5 - \frac{1}{22}x_7 + x_8 = 0$$

$$x_8 = -\frac{9}{11} + \frac{9}{22}x_5 + \frac{1}{22}x_7,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

БП	*Сб*	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	2	$8^1/_{11}$	1	0	0	0	$^1/_{22}$	0	$^5/_{22}$	0
x_4	0	$36^9/_{11}$	0	0	0	1	$^{-13}/_{22}$	0	$2^1/_{22}$	0
x_2	1	$1^3/_{11}$	0	1	0	0	$^3/_{22}$	0	$^{-7}/_{22}$	0
x_3	0	20	0	0	1	0	1	0	-1	0
x_6	0	$1^3/_{11}$	0	0	0	0	$^3/_{22}$	1	$-1^7/_{22}$	0
x_8	0	$^{-9}/_{11}$	0	0	0	0	$^{-9}/_{22}$	0	$^{-1}/_{22}$	1
		$17^5/_{11}$	0	0	0	0	$^5/_{22}$	0	$^3/_{22}$	0

Базисное решение $X = (8\frac{1}{11}, 1\frac{3}{11}, 20, 36\frac{9}{11}, 0, 1\frac{3}{11}, 0, -\frac{9}{11})$ - недопустимое, ограничения совместны, поэтому определяем разрешающие строку и столбец.

На пересечении разрешающих строки и столбца находится разрешающий элемент, равный ($^{-9}/_{22}$).

В результате преобразования симплексной таблицы получим:

БП	*Сб*	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	2	8	1	0	0	0	0	0	$^2/_9$	$^1/_9$
x_4	0	38	0	0	0	1	0	0	$2^1/_9$	$-1^4/_9$
x_2	1	1	0	1	0	0	0	0	$^{-1}/_3$	$^1/_3$
x_3	0	18	0	0	1	0	0	0	$-1^1/_9$	$2^4/_9$
x_6	0	1	0	0	0	0	0	1	$-1^1/_3$	$^1/_3$
x_5	0	2	0	0	0	0	1	0	$^1/_9$	$-2^4/_9$
		17	0	0	0	0	0	0	$^1/_9$	$^5/_9$

Найденное оптимальное решение целочисленное:

$Z_{\max} = 17$ при $X^* = (8,1,18,38,2,1,0,0)$.

Практическая работа № 5

Транспортная задача

В пунктах A_i (i=1…4) сосредоточено a_i единиц однородного груза, который нужно перевезти в пункты B_j (j=1…4). При этом в пункт B_j нужно доставить b_j единиц груза. Мощности поставщиков и потребителей, а также стоимость перевозки единицы груза заданы в таблице. Требуется составить план перевозок, минимизирующий общие транспортные издержки.

$a_i \backslash b_j$	50	100	50	50
40	5	7	5	1
60	3	5	4	2
60	4	5	4	3
100	5	2	3	4

Данная задача сводится к определению такого плана перевозок некоторого продукта из пунктов его производства в пункты потребления ($\left|x_{i,j}\right|_{m\times n}$), который минимизирует целевую функцию $F(x) = \sum c_{ij} \cdot x_{ij}$.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 40 + 60 + 60 + 100 = 260$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 50 + 100 + 50 + 50 = 250$$

Следовательно $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$, то данная задача открытого типа.

Для того чтобы привести задачу к закрытому типу ($\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$), введем фиктивного поставщика $B_5 = 10$ ($260 - 250 = 10$).

Составим распределительную таблицу с помощью метода минимальной стоимости. Среди элементов таблицы выбираем наименьший элемент (коэффициент затрат). В соответствующую клетку записываем максимально возможную поставку: $x_{15} = \min\{10;\ 40\} = 10$ т.е. минимум между запасами 5-го поставщика и запросами (возможности) 1-го потребителя. Таким образом, мы удовлетворили запасы 5-ого поставщика, и оставшиеся клетки этой строки исключаем из дальнейшего рассмотрения (обозначим их в таблице пунктиром), но 1-ому потребителю нужно еще $\{40 - 10\} = 30$.

$x_{14} = min\{30; 50\} = 30$, т.е. минимум между запасами 1-го поставщика и запросами 4-го потребителя.

Запросы 4-го потребителя уменьшаем $\{50 - 30\} = 20$, т.к. его потребности не удовлетворены ему нужно еще 20 единиц.

Исключаем из рассмотрения 1-го поставщика, так как его запросы полностью удовлетворены. В таблице вычеркивается 1-ая строка.

В оставшейся части таблицы минимальным элементом является $x_{24} = min\{20;\ 60\} = 20$. Максимально возможная поставка, которую можно осуществить от 2-го поставщика 4-ому потребителю.

Потребности 4-го потребителя удовлетворены. Исключаем его из рассмотрения и вычеркиваем 4-й столбец в таблице, а 2-ому поставщику необходимо еще $\{60 - 20\} = 40$.

В оставшейся части таблицы минимальный элемент равен $x_{42} = min\{100;\ 100\} = 100$. Поскольку мощности одинаковые можем удовлетворить или поставщика или потребителя (выберем поставщика).

Возможности 4-го поставщика полностью удовлетворены, поэтому исключаем его из рассмотрения и уменьшим возможности 2-го потребителя на 100, т.к. ему нужно еще $\{100 - 100\} = 0$.

Следующим элементом в таблице является $x_{21} = min\{40,50\} = 40$, т.к. возможности 2-го поставщика удовлетворены, а 1-ому потребителю необходимо $\{50 - 40\} = 10$.

Рассмотрим $x_{33} = min\{50;\ 60\} = 50$, 3-ий потребитель полностью удовлетворен, а 3-ему поставщику необходимо $\{60 - 50\} = 10$.

Рассматриваем следующий элемент $x_{31} = min\{10,10\} = 10$, 1-ый поставщик удовлетворен, исключаем его из рассмотрения, а 3-ему потребителю необходимо еще $\{10 - 10\} = 0$.

Следующий элемент равен $x_{32} = min\{0,0\} = 0$. Количество распределений должно быть $(n + m - 1)$ штук. В нашем примере – (4+5-1=8)

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		50	**100**	**50**	**50**	**10**
A_1	**40**	5	7	5	1 30	0 10
A_2	**60**	3 40	5	4	2 20	0
A_3	**60**	4 10	5 0	4 50	3	0
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0

Первоначально затраты на перевозку составили:

$$F(X) = 30 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 40 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 630.$$

Далее, с помощью метода потенциалов найдем оптимальное распределение поставок. Согласно теореме о потенциалах в каждой заполненной клетке выполняется условие $c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$.

Вычисляем α_i и β_j:

Полагаем, что $\alpha_1 \equiv 0$. Тогда, для заполненной клеточки (1,4) можем найти β_4 из условия $c_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 0 + \beta_4 = 1$, т.е. $\beta_4 = 1$. Аналогично вычисляются и оставшиеся значения:

$\beta_4 = 1$, $c_{24} = \alpha_2 + \beta_4 = \alpha_2 + 1 = 2$, т.е. $\alpha_2 = 1$;

$\alpha_2 = 1$, $c_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 1 + \beta_1 = 3$, т.е. $\beta_1 = 2$;

$\beta_1 = 2$, $c_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 + 2 = 4$, т.е. $\alpha_3 = 2$

$\alpha_3 = 2$, $c_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 2 + \beta_2 = 5$, т.е. $\beta_2 = 3$;

$\alpha_3 = 2$, $c_{33} = \alpha_3 + \beta_3 = 2 + \beta_3 = 4$, т.е. $\beta_3 = 2$;

$\beta_2 = 3$, $c_{42} = \alpha_4 + \beta_2 = \alpha_4 + 3 = 2$, т.е. $\alpha_4 = -1$

$\alpha_1 = 0$, $c_{15} = \alpha_1 + \beta_5 = 0 + \beta_5 = 0$, т.е. $\beta_5 = 0$

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
		50	**100**	**50**	**50**	**10**	
A_1	**40**	5	7	5	1 + 30	0 - 10	$\alpha_1 = 0$
A_2	**60**	3 + 40	5	4	2 - 20	0	$\alpha_2 = 1$
A_3	**60**	4 - 10	5 0	4 50	3	0 +	$\alpha_3 = 2$
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0	$\alpha_4 = -1$
β_j		$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 1$	$\beta_5 = 0$	

Для проверки оптимальности полученного решения строим матрицу оценок S с элементами $S_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$ (для не заполненных клеток таблицы).

$S_{11} = c_{11} - \alpha_1 - \beta_1 = 5 - 0 - 2 = 3;$

$S_{12} = c_{12} - \alpha_1 - \beta_2 = 7 - 0 - 3 = 4$; и так далее.

Для заполненных клеток значение $S_{ij} = 0$.

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Если все элементы матрицы оценок неотрицательные, то найденное распределение поставок является оптимальным.

Если же некоторые $S_{ij} < 0$, то распределение поставок не является оптимальным, необходимо пересчитать и найти новое распределение. Для этого из отрицательных оценок S_{ij} выбирается наименьшее число, и строится цикл пересчета, в котором поставки перераспределяются. В данном случае наименьшим элементом является (-2), для клетки (3,5) строим цикл пересчета.

Цикл начинается с клетки (3,5). Вершинам цикла соответствуют заполненные клетки, далее двигаемся так, чтобы вернуться назад. В свободной клетке цикла ставится «+», дальше знаки чередуются.

В клетках со знаком «-» находится наименьшая поставка ($x_{31} = 10$, $x_{24} = 20$, $x_{15} = 10$), которая передается по циклу: из клеток с «-» - эта поставка вычитается, а в клетках с «+» она прибавляется. В данном примере переменную $x_{31} = 10$ выводим из базиса, а переменную x_{35} введем в базис.

Выполнив пересчет, получим следующую таблицу:

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		50	**100**	**50**	**50**	**10**
A_1	**40**	5	7	5	1 40	0 0
A_2	**60**	3 50	5	4	2 10	0
A_3	**60**	4	5 0	4 50	3	0 10
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0

$$F(X_1) = 40\cdot 1 + 0\cdot 0 + 50\cdot 3 + 10\cdot 2 + 0\cdot 5 + 50\cdot 4 + 10\cdot 0 + 100\cdot 2 = 610$$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого вычислим потенциалы и найдем матрицу оценок.

Вычисляем α_i и β_j:

Полагаем, что $\alpha_1 \equiv 0$. Тогда, для заполненной клеточки (1, 4) можем найти β_4 из условия $c_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 0 + \beta_4 = 1$, т.е. $\beta_4 = 1$. Аналогично вычисляются и оставшиеся значения:

$\beta_4 = 1$, $c_{24} = \alpha_2 + \beta_4 = \alpha_2 + 1 = 2$, т.е. $\alpha_2 = 1$;

$\alpha_2 = 1$, $c_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 1 + \beta_1 = 3$, т.е. $\beta_1 = 2$;

$\alpha_1 = 0$, $c_{15} = \alpha_1 + \beta_5 = 0 + \beta_5 = 0$, т.е. $\beta_5 = 0$;

$\beta_5 = 0$, $c_{35} = \alpha_3 + \beta_5 = \alpha_3 + 0 = 0$, т.е. $\alpha_3 = 0$;

$\alpha_3 = 0$, $c_{33} = \alpha_3 + \beta_3 = 0 + \beta_3 = 4$, т.е. $\beta_3 = 4$;

$\alpha_3 = 0$, $c_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 0 + \beta_2 = 5$, т.е. $\beta_2 = 5$;

$\beta_2 = 5$, $c_{42} = \alpha_4 + \beta_2 = \alpha_4 + 5 = 2$, т.е. $\alpha_4 = -3$.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
		50	**100**	**50**	**50**	**10**	
A_1	**40**	5	7	5	1 40	0 0	$\alpha_1=0$
A_2	**60**	3 50	5	4	2 10	0	$\alpha_2=1$
A_3	**60**	4	5 0	4 50	3	0 10	$\alpha_3=0$
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0	$\alpha_4=-3$
β_j		$\beta_1=2$	$\beta_2=5$	$\beta_3=4$	$\beta_4=1$	$\beta_5=0$	

Найдем матрицу оценок:

$$S=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$ Среди элементов матрицы есть отрицательные.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
		50	**100**	**50**	**50**	**10**	
A_1	**40**	5	7	5	1 + 40	0 - 0	$\alpha_1=0$
A_2	**60**	3 50	5 +	4	2 - 10	0	$\alpha_2=1$
A_3	**60**	4	5 - 0	4 50	3	0 + 10	$\alpha_3=0$
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0	$\alpha_4=-3$
β_j		$\beta_1=2$	$\beta_2=5$	$\beta_3=4$	$\beta_4=1$	$\beta_5=0$	

Переменную $x_{15}=10$ выводим из базиса, а переменную x_{22} введем в базис.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
		50	**100**	**50**	**50**	**10**	
A_1	**40**	5	7	5	1 40	0	$\alpha_1=0$
A_2	**60**	3 50	5 0	4	2 10	0	$\alpha_2=1$
A_3	**60**	4	5 0	4 50	3	0 10	$\alpha_3=1$
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0	$\alpha_4=-2$
β_j		$\beta_1=2$	$\beta_2=4$	$\beta_3=3$	$\beta_4=1$	$\beta_5=-1$	

$$F(X_2)=40\cdot1+50\cdot3+0\cdot0+10\cdot2+0\cdot5+50\cdot4+10\cdot0+100\cdot2=610$$

Полученное решение проверим на оптимальность. Вычислим потенциалы и элементы матрицы оценок.

$$S=\begin{pmatrix}3&3&2&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\\5&0&2&5&3\end{pmatrix} \longrightarrow \text{Альтернативное решение}$$

Все элементы полученной матрицы положительные или равны 0, следовательно, полученное решение является оптимальным. Минимальные расходы на перевозку грузов составляют 610 у.е. Оптимальный план перевозок имеет вид: $X_2=\begin{pmatrix}0&0&0&40&0\\50&0&0&10&0\\0&0&50&0&10\\0&100&0&0&0\end{pmatrix}$

Если хотя бы одна S_{ij} для свободной клетки в оптимальном решении равна 0, то задача имеет альтернативное решение.

В данном примере имеется второе оптимальное решение. Для его нахождения строится цикл пересчета, начиная с клетки, соответствующей нулевой оценке.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		50	**100**	**50**	**50**	**10**
A_1	**40**	5	7	5	1 40	0
A_2	**60**	3 *50*	5 − 0	4 +	2 10	0
A_3	**60**	4	5 + 0	4 − 50	3	0 10
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0

В вершинах цикла, которым соответствует знак «-», находятся два значения 0 и 50. Из них выбираем наименьшее и перераспределяем поставки.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		50	**100**	**50**	**50**	**10**
A_1	**40**	5	7	5	1 40	0
A_2	**60**	3 50	5	4 0	2 10	0
A_3	**60**	4	5 0	4 50	3	0 10
A_4	**100**	5	2 100	3	4	0

Минимальные расходы на перевозку грузов составляют 610 у.е. Оптимальный план перевозок имеет вид:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 10 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем $X_{общ} = \lambda_1 X_2 + \lambda_2 X_3$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$X_{общ} = \lambda_1 \cdot X_2 + \lambda_2 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40\cdot\lambda_1 & 0 \\ 50\cdot\lambda_1 & 0 & 0 & 10\cdot\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 50\cdot\lambda_1 & 0 & 10\cdot\lambda_1 \\ 0 & 100\cdot\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40\cdot\lambda_2 & 0 \\ 50\cdot\lambda_2 & 0 & 0 & 10\cdot\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 50\cdot\lambda_2 & 0 & 10\cdot\lambda_2 \\ 0 & 100\cdot\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40\cdot(\lambda_1+\lambda_2) & 0 \\ 50\cdot(\lambda_1+\lambda_2) & 0 & 0 & 10\cdot(\lambda_1+\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & 50\cdot(\lambda_1+\lambda_2) & 0 & 10\cdot(\lambda_1+\lambda_2) \\ 0 & 100\cdot(\lambda_1+\lambda_2) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 10 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальные расходы на перевозку грузов составляют 610 у.е.

Оптимальный план перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 10 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Варианты задач для самостоятельной работы

1) Варианты задач для практических работ №1 и №2:

Вариант 1

а) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 2x_1 + 4x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 2x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 2

а) $z = 2x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 6x_1 + 7x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 7x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 4x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 2x_1 + 7x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 3

а) $z = 2x_1 + 5x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 4x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 6x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 9, \\ x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = 25x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Вариант 4

$$z = 2x_1 + 6x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = 8x_1 + 6x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 2x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Вариант 5

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = 7x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 14, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 13, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Вариант 6

а) $z = x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 9, \\ x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 7x_1 + 14x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 3x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + 5x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = x_1 + 6x_2 \to min$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 6x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 7

а) $z = x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 4x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 3x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 2x_1 + 6x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 8

а) $z = 2x_1 + x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 13, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 9

$$z = 2x_1 + x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 10x_1 + 6x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 10

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 7x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 7x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 17, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 11

а) $z = 7x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 2x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + 8x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \ge 16, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 6x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 12

а) $z = 2x_1 + 5x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 2x_1 + 7x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 9x_1 - 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 13

а) $z = 3x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = -x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \ge 23, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 14

$$z = x_1 + 3x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 6x_1 + 5x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 15, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 15

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 13, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 16

а) $z = 2x_1 + 5x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = -5x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 17

а) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 9x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 4x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 18

а) $z = 4x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 + 6x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 7x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 21, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 19

$$z = 2x_1 + x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 7x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 27, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 9x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 20

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 28, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 14, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 21

а) $$z = 5x_1 + 3x_2 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 6x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $$z = x_1 + 4x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $$z = 5x_1 + 5x_2 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 15, \\ x_1 + 6x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $$z = 2x_1 + 5x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 22, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 22

а) $$z = 3x_1 + 2x_2 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $$z = 2x_1 + 6x_2 \to min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $$z = 9x_1 + 3x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $$z = -3x_1 + 3x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 23, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 23

а) $$z = 2x_1 + 3x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $$z = 3x_1 + 3x_2 \to min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 6x_1 + 7x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 + x_2 \ge 38, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 24

$$z = 2x_1 + 2x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 4x_1 + 2x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 33, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 25

$$z = x_1 + 3x_2 \to max$$

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 6x_1 + 3x_2 \to min$$

б) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 2x_1 + 6x_2 \to max$$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$$z = 4x_1 + 5x_2 \to min$$

г) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \ge 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Вариант 26

а) $z = 2x_1 + x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = x_1 + 6x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 6x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 8x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 14, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 6x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 21, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 27

а) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 6x_1 + 5x_2 \to min$
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + 7x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 11, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 16, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 7x_1 + 2x_2 \to min$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 13, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 28

а) $z = 5x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 9x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 7x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 7x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + x_2 \ge 33, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 29

а) $z = 2x_1 + x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 4x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + 5x_2 \to max$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 2x_1 + 5x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 30

а) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $z = 8x_1 + 4x_2 \to min$
$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) $z = 2x_1 + x_2 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) $z = 9x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2) **Варианты задач для практической работы № 3:**

Предприятие выпускает продукцию 4 видов. Для этого используется 3 вида ресурсов. Общий объем ресурсов b_i $(i=1\ldots3)$ и нормы их расхода на единицу продукции j-го вида (a_{ij}) представлены в таблице 1. Там же приведены цены реализации c_j $(j=1\ldots4)$ единицы каждой продукции. Кроме того, даны цены реализации c_j $(j=5\ldots7)$ и нормы расхода ресурсов a_{ij} для новых видов продукции.

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, доставляющий предприятию максимум выручки.
2. Составить модель двойственной задачи. Используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, выписать оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач.
3. Построить матрицу коэффициентов взаимозаменяемости ресурсов. Дать экономическую интерпретацию ее элементов.
4. Определить границы изменения ресурсов, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.
5. Оценить рентабельность новой продукции.

Таблица 1

Параметры задачи	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
c_1	90	80	30	20	40	60	60	125	50	200
c_2	60	30	35	25	30	20	70	10	100	250
c_3	40	20	60	50	70	120	20	150	150	120
c_4	70	10	65	40	70	35	130	40	80	100
b_1	800	300	120	500	300	500	600	580	350	400
b_2	200	300	500	500	650	460	700	580	430	340

Параметры задачи	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b_3	800	560	550	700	490	700	600	560	470	600
a_{11}	1	2	4	5	3	5	8	3	5	4
a_{12}	0	3	4	2	3	1	1	3	2	4
a_{13}	2	3	1	3	7	0	2	5	0	3
a_{14}	1	3	4	3	1	2	1	0	3	4
a_{21}	0	2	4	2	1	4	2	1	3	2
a_{22}	1	0	3	5	3	5	4	2	2	1
a_{23}	3	2	4	2	1	3	4	2	0	4
a_{24}	2	3	5	4	2	0	1	4	6	3
a_{31}	4	1	2	4	3	2	0	1	5	4
a_{32}	2	2	3	4	2	2	1	0	0	4
a_{33}	0	3	5	0	1	0	4	3	2	5
a_{34}	4	3	2	1	2	4	2	0	1	4
c_5	75	40	45	50	80	100	56	165	80	200
a_{15}	1	2	5	6	2	0	4	5	3	2
a_{25}	2	5	6	3	4	0	2	1	3	3
a_{35}	5	4	5	20	2	4	4	0	8	5
c_6	180	200	30	87	68	65	70	80	100	95
a_{16}	2	3	5	6	0	2	4	6	9	2
a_{26}	4	3	3	4	5	2	8	0	1	3
a_{36}	3	3	4	6	0	2	1	1	3	5
c_7	90	50	70	50	80	60	90	120	40	70
a_{17}	5	2	5	9	0	4	5	3	2	1
a_{27}	1	3	6	9	5	5	6	6	0	3
a_{37}	3	3	3	4	4	5	5	2	1	4

Параметры задачи	Номер варианта									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c_1	150	180	140	130	70	180	400	70	150	180
c_2	80	150	90	70	140	130	90	150	60	70
c_3	80	60	80	90	150	100	80	100	90	80
c_4	70	80	90	60	60	90	90	150	140	90
b_1	200	180	300	600	450	500	300	500	200	500
b_2	260	360	440	500	600	600	900	600	400	400
b_3	340	250	450	600	500	450	500	400	500	500
a_{11}	2	2	5	2	3	3	4	4	1	1
a_{12}	2	3	1	3	4	4	2	3	3	2
a_{13}	5	2	0	4	2	6	2	3	2	2
a_{14}	3	1	2	0	1	0	3	2	1	1
a_{21}	3	0	3	4	3	2	2	3	2	3
a_{22}	2	3	2	4	5	1	1	2	2	3
a_{23}	1	3	1	3	0	5	4	4	3	4
a_{24}	2	4	4	2	4	3	2	3	1	0
a_{31}	5	5	5	2	3	3	6	1	1	2
a_{32}	2	1	3	3	4	6	2	2	3	3
a_{33}	0	3	1	4	2	5	3	3	4	4
a_{34}	2	2	3	2	2	0	2	0	2	1
c_5	60	75	70	80	90	120	150	40	100	160
a_{15}	1	2	1	2	1	4	3	2	2	2
a_{25}	3	3	2	5	2	3	4	3	2	2
a_{35}	4	4	4	3	3	2	3	6	3	1
c_6	70	90	97	60	60	80	170	180	80	90
a_{16}	4	2	3	4	2	3	2	2	1	1
a_{26}	2	3	3	2	2	1	5	2	5	4
a_{36}	4	4	2	3	1	4	2	3	3	3

Параметры задачи	Номер варианта									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
c_7	200	90	100	70	60	100	90	90	160	95
a_{17}	4	1	3	4	2	2	5	4	2	2
a_{27}	3	3	2	2	2	1	1	2	3	4
a_{37}	2	4	5	1	3	4	2	1	1	1

Параметры задачи	Номер варианта									
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
c_1	100	60	140	130	170	180	140	70	150	80
c_2	60	50	60	70	140	130	80	150	60	70
c_3	80	70	100	130	50	60	160	90	90	70
c_4	70	90	180	160	60	90	90	150	40	150
b_1	250	280	400	400	600	600	300	600	500	300
b_2	300	500	300	700	400	500	400	600	700	400
b_3	100	300	450	400	500	400	700	400	500	500
a_{11}	2	3	2	2	3	3	4	4	1	4
a_{12}	2	2	4	3	4	4	2	2	3	2
a_{13}	0	1	4	4	3	2	3	3	2	2
a_{14}	4	2	2	2	4	3	3	2	1	1
a_{21}	0	4	2	4	3	2	2	3	3	2
a_{22}	3	3	4	4	1	1	1	2	2	3
a_{23}	2	2	3	3	0	5	2	4	0	3
a_{24}	2	3	4	3	4	3	2	1	1	0
a_{31}	1	4	2	2	2	2	0	1	1	2
a_{32}	3	3	3	1	4	0	2	2	2	1
a_{33}	2	0	0	4	3	1	3	3	4	4
a_{34}	3	4	3	2	1	2	2	0	1	3
c_5	270	125	70	180	190	240	80	140	100	140

a_{15} a_{25} a_{35}	1 4 2	1 4 2	6 3 4	2 5 4	4 6 3	7 3 3	3 1 6	2 5 6	2 3 2	5 2 1
c_6 a_{16} a_{26} a_{36}	80 6 3 2	60 2 4 3	90 3 4 4	60 4 3 2	250 2 4 4	150 3 5 3	170 2 5 2	180 3 2 6	190 1 3 6	90 1 4 3
c_7 a_{17} a_{27} a_{37}	120 4 2 1	200 3 3 5	170 3 4 1	70 4 1 1	90 4 5 3	190 2 6 3	90 2 7 2	70 1 2 5	160 7 3 5	190 1 4 6

3) Варианты задач для практической работы № 4:

Вариант 1

$$z = x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{\textit{целые}}. \end{cases}$$

Вариант 2

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 16, \\ 2x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{\textit{целые}}. \end{cases}$$

Вариант 3

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 10x_1 - 8x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{\textit{целые}}. \end{cases}$$

Вариант 4

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 10x_1 - 8x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{\textit{целые}}. \end{cases}$$

Вариант 5

$$z = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 6

$$z = 2x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 7

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 + 4x_2 \le 15, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 8

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 9

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 10

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 11

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 12

$$z = 8x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 13

$$z = 4x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 14

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 15

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 16

$$z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 30, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 17

$$z = 7x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 18

$$z = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 19

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 20

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 25, \\ x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 21

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 12, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 22

$$z = 6x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 23

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 24

$$z = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 28, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 25

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 25, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 26

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 27

$$z = 7x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 28

$$z = 3x_1 - 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

Вариант 29

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 4x_1 - x_2 \le 15, \\ x_1 + 3x_2 \le 16, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

Вариант 30

$$z = 3x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

4) Варианты задач для практической работы № 5:

Вариант 1

$a_i \backslash b_j$	200	250	280
120	3	5	4
90	2	2	1
150	2	4	2
220	1	3	3

Вариант 2

$a_i \backslash b_j$	200	250	280
100	4	4	4
190	3	3	2
50	6	5	5
120	2	2	3

Вариант 3

$a_i \backslash b_j$	100	150	180
100	5	2	4
60	3	3	3
50	2	4	4
120	1	5	5

Вариант 4

$a_i \backslash b_j$	130	200	280
110	2	3	4
90	5	2	1
100	1	4	2
200	4	3	3

Вариант 5

$a_i \backslash b_j$	120	150	200
220	4	3	2
80	2	4	1
130	1	4	2
120	3	3	3

Вариант 6

$a_i \backslash b_j$	160	130	180
100	3	4	2
100	4	2	3
90	2	5	4
120	1	6	3

Вариант 7

$a_i \backslash b_j$	400	150	80
70	1	2	5
200	3	5	4
250	5	3	3
120	6	4	4

Вариант 8

$a_i \backslash b_j$	100	350	200
320	3	1	3
100	2	3	2
130	2	5	2
120	4	2	3

Вариант 9

$a_i \backslash b_j$	120	150	180
140	3	5	4
130	2	3	3
50	1	4	5
200	5	3	2

Вариант 10

$a_i \backslash b_j$	100	150	250
80	3	4	1
190	6	3	4
50	2	4	4
320	1	5	6

Вариант 11

$a_i \backslash b_j$	100	50	200
150	3	5	4
90	2	3	1
170	2	3	3
140	4	1	2

Вариант 12

$a_i \backslash b_j$	210	150	140
100	3	5	1
70	5	1	3
130	2	4	2
220	2	3	3

Вариант 13

$a_i \backslash b_j$	120	150	80
220	3	5	5
190	3	2	3
50	2	3	4
70	4	1	3

Вариант 14

$a_i \backslash b_j$	100	150	100
120	3	5	3
70	1	3	1
50	2	4	5
120	4	1	3

Вариант 15

$a_i \backslash b_j$	100	180	200
120	3	3	4
80	4	2	1
150	2	4	2
210	4	1	3

Вариант 16

$a_i \backslash b_j$	170	150	80
130	3	5	4
90	4	2	1
250	2	3	3
120	1	3	2

Вариант 17

$a_i \backslash b_j$	100	150	200
120	3	6	4
100	3	3	1
150	2	1	3
130	3	2	4

Вариант 18

$a_i \backslash b_j$	200	240	210
100	3	5	4
110	4	2	3
150	3	4	2
160	2	1	3

Вариант 19

$a_i \backslash b_j$	250	150	180
130	3	4	3
70	2	5	1
120	3	4	2
210	4	3	3

Вариант 20

$a_i \backslash b_j$	100	150	80
100	2	2	4
100	2	3	3
50	4	4	2
130	1	4	2

Вариант 21

$a_i \backslash b_j$	80	100	130
80	5	1	4
90	3	5	3
120	2	3	5
20	1	4	6

Вариант 22

$a_i \backslash b_j$	100	130	150
120	3	4	5
110	5	1	4
250	2	5	3
170	1	4	2

Вариант 23

$a_i \backslash b_j$	100	150	180
100	3	2	4
80	4	5	3
130	5	4	2
140	2	3	5

Вариант 24

$a_i \backslash b_j$	100	120	150
140	3	5	1
170	1	2	4
50	2	6	2
120	3	3	3

Вариант 25

$a_i \backslash b_j$	200	150	140
140	1	5	5
190	4	2	1
50	3	2	3
120	2	3	3

Вариант 26

$a_i \backslash b_j$	170	50	150
200	4	1	2
130	3	2	4
40	5	5	1
80	2	3	4

Вариант 27

$a_i \backslash b_j$	250	50	150
100	3	4	5
150	5	3	4
50	3	4	3
200	4	1	4

Вариант 28

$a_i \backslash b_j$	300	50	150
300	5	1	2
100	1	5	3
30	3	4	3
200	4	4	2

Вариант 29

$a_i \backslash b_j$	150	100	120
280	4	1	2
300	3	4	3
100	2	3	4
40	5	2	1

Вариант 30

$a_i \backslash b_j$	100	60	80
130	4	2	4
200	3	1	4
50	3	3	2
40	2	5	1

Список литературы

1. Колемаев,В.А. Математические методы и модели исследования операций: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 080116 «Математические методы в экономике» и другим экономическим специальностям / В. А. Колемаев; под ред. В. А. Колемаева. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. - 592 с.
2. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для студ. вузов по экон. спец. и направл. / под ред. Н.Ш.Кремера. - 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Юрайт, 2011. - 430 с.
3. Гетманчук, А.В. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие для бакалавров / А.В. Гетманчук, М. М. Ермилов. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2013. - 188 с.
4. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 140 с.

Гареева Г.А.
Григорьева Д.Р.

Методы линейного программирования

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 23.04.2019.
Формат 60х84/16. Печать ризографическая.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл.п.л. 4 Уч.-изд. л. 4
Тираж 50 экз. Заказ № 1271

Издательско-полиграфический центр
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, пр.Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru