УДК 530.12:531.51

СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И РАВНОВЕСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Р.А. Даишев

Аннотация

В работе рассмотрены пространства-времена V_4, допускающие группы гомотетических преобразований H_r, источниками которых служит заряженная жидкость. Предполагалось, что вектор скорости такой жидкости коллинеарен времениподобному вектору $\mathbf{Y} = \xi^i \partial_i$ алгебры Ли этой группы. Показано, что при условии $(\rho + 3p) \neq 0$, где ρ – плотность энергии, а p – равновесное давление жидкости, этот вектор является вектором алгебры Ли, соответствующий изометрическим преобразованиям группы, и порождает времениподобный идеал алгебры Ли группы H_r. Среди всех пространств-времен V_4 с группами гомотетических преобразований выделены пространства-времена, допускающие группы с указанными свойствами. Уравнения $(T^{ik} + E^{ik})_{|k} = 0$ полностью проинтегрированы и найдены все возможные уравнения состояния исследуемой жидкости. Оказалось, что уравнение состояния жидкости практически однозначно фиксируется симметрией пространства-времени, а давление, плотность энергии жидкости и плотность электрических зарядов выражаются исключительно через «полевые» величины: $A_k\xi^k$ и $\xi_k\xi^k$, где A_k – 4-потенциал электромагнитного поля.

Введение

Из кинетической теории газов известно [1–3], что если число частиц, равно как и энтропия газа как целого, сохраняется, равновесное распределение идеального газа заряженных или незаряженных частиц с ненулевой массой покоя возможно только в случае, если пространство-время допускает группу изометрических преобразований с времениподобным вектором Киллинга, а макроскопическое движение газа происходит в направлении этого вектора. В случае же частиц с нулевой массой покоя равновесное распределение возможно только тогда, когда пространство-время допускает группу конформных преобразований, при этом макроскопическое движение газа происходит в направлении времениподобного вектора алгебры Ли этой группы. В обоих случаях тензор энергии-импульса газа имеет структуру тензора энергии-импульса идеальной жидкости, причем давление и плотность энергии газа выражаются определенным образом через функцию распределения такого газа. Если мы отвлечемся от связи давления и плотности энергии жидкости с функцией распределения и будем трактовать их чисто феноменологически, мы придем к задаче исследования гравитационного поля, создаваемого жидкостью, вектор скорости которой коллинеарен времениподобному вектору или группы изометрических, или группы конформных преобразований. Распределение такой жидкости естественно, на наш взгляд, назвать равновесным распределением.

В работах [4–6] исследованы конфигурации жидкости, в которой могут происходить процессы рождения частиц. В общем случае показано, что рождение частиц возможно только в случае, когда тензор энергии-импульса жидкости отличен от тензора энергии-импульса идеальной жидкости. Оказалось, что тензор энергии-импульса такой жидкости может, в частности, иметь структуру тензора энергии-импульса идеальной жидкости, но, в отличие от неё, давление жидкости должно состоять из двух частей: равновесной, с $p > 0$ и неравновесной $\Pi \leq 0$, которая связана с производством энтропии (идеальная жидкость характеризуется условием $\Pi = 0$). Вектор же макроскопической скорости такой жидкости не должен быть коллинеарен вектору Киллинга. Если вектор скорости коллинеарен вектору изометрического движения, рождение частиц отсутствует. Дальнейшее исследование в этих работах проводилось в случае, когда пространство-время допускает группу конформных преобразований, а вектор скорости жидкости коллинеарен времениподобному вектору алгебры Ли этой группы. Состояния такой жидкости авторы назвали обобщенно-равновесными состояниями.

В работе [7] рассмотрена динамика жидкости, находящейся в состоянии обобщенного равновесия в пространствах-временах, допускающих группы гомотетических движений. В этой работе исследованы некоторые термодинамические свойства жидкости и указано возможное уравнение состояния такой жидкости.

Пространства-времена с группами гомотетических преобразований достаточно подробно изучены в общей теории относительности как с математической, так и с физической точки зрения (см., например, впечатляющий обзор в [8]). Их исследование вызывает несомненный интерес, поскольку пространства-времена, допускающие группы гомотетических преобразований, являются одним из простейших обобщений хорошо изученных полей тяготения с группами изометрических движений, и кроме того, они играют важную роль в описании асимптотических свойств более общих моделей. Свойства жидкостей в пространствах-временах с группами гомотетических движений изучены также достаточно полно [9, 10]. Однако свойства заряженной жидкости в полях тяготения с симметриями более сложными, нежели симметрии изометрических групп, исследованы значительно меньше. В то же время, исследования в области космической плазмы зачастую приводят к необходимости рассматривать материальные среды с тензором энергии-импульса заряженной жидкости, например, идеальный газ заряженных частиц.

В данной работе рассмотрены пространства-времена V_4, допускающие группы гомотетических преобразований H_r, источниками которых служит заряженная жидкость. Предполагалось, что вектор скорости такой жидкости коллинеарен времениподобному вектору $\mathbf{Y} = \xi^i \partial_i$ алгебры Ли этой группы.

Статья является продолжением предыдущей работы [11], в которой были исследованы поля тяготения, допускающие простотранзитивные группы гомотетических преобразований и предложен метод нахождения точных решений самосогласованной системы уравнений Эйнштейна – Максвелла. Оказалось, что в таких пространствах-временах можно найти все возможные точные решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна – Максвелла с заряженной жидкостью в правой части. Поля же тяготения, допускающие группы низшей подвижности, не могут быть исследованы указанным выше методом. Тем не менее, инвариантно-групповой подход и в этом случае позволяет выявить некоторые существенные особенности пространств-времен, создаваемых равновесными распределениями заряженной жидкости.

1. Динамика заряженной жидкости и уравнения состояния.

Самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Максвелла имеет вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa (T_{ik} + E_{ik}), \tag{1}$$

$$F^{ik}_{|k} = J^i = \sigma U^i, \tag{2}$$

$$\tilde{F}^{ik}_{|k} = 0, \tag{3}$$

где $T_{ik} = (\rho + p)U_i U_k + p g_{ik}$ – компоненты тензора энергии-импульса жидкости, $(U^i U_i = -1)$, а $E_{ik} = g^{ab} F_{ai} F_{bj} - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} g_{ik}$ – компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля, σ – плотность электрических зарядов. Здесь и далее вертикальная черта обозначает ковариантную производную.

Для того чтобы пространство-время допускало группу гомотетических движений H_r с векторами алгебры Ли $\mathbf{X}_\alpha = \underset{\alpha}{\xi}{}^i \partial_i$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены уравнения:

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} g_{ij} = \underset{\alpha}{\xi}{}_{i|j} + \underset{\alpha}{\xi}{}_{j|i} = \varphi_\alpha g_{ij}, \tag{4}$$

где $\varphi_\alpha = \mathrm{const} \neq 0$.

Производная Ли от тензора Эйнштейна в направлении вектора $\mathbf{X}_\alpha$ группы H_r равна нулю: $\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} G_{ij} = 0$. Следовательно, производная Ли от тензора энергии-импульса в направлении этого вектора также должна быть равна нулю: $\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}}(T_{ij} + E_{ij}) = 0$. Согласно [12], это равенство означает, что $\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} T_{ij} = 0$, $\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} E_{ij} = 0$. В [12] показано, что из первого равенства следует:

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} \rho + \rho \varphi_\alpha = 0, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} p + p \varphi_\alpha = 0, \tag{6}$$

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} U_i = \frac{1}{2} U_i \varphi_\alpha, \tag{7}$$

тогда как второе равенство эквивалентно соотношению

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} F_{ik} = \frac{1}{2} \varphi_\alpha F_{ik} + \psi_\alpha \hat{F}_{ik}, \tag{8}$$

где ψ_α – скаляры. Если при этом вектор U^i не является собственным вектором тензора E_{ik}, то

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} \sigma + \varphi_\alpha \sigma = 0, \tag{9}$$

$$\psi_\alpha \sigma = 0, \tag{10}$$

и $\psi_\alpha = \mathrm{const}$. Если же вектор U^i является собственным вектором тензора E_{ik}, то выполнено соотношение

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} (\sigma \cos \alpha) + \varphi_\alpha \sigma \cos \alpha = 0, \tag{11}$$

где α – некоторый скаляр, удовлетворяющий условиям $\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} \alpha = \psi_\alpha$, , $U^i\, \partial_i \psi_\alpha = 0$. Если к тому же $\sigma = 0$, то $\psi_\alpha = \mathrm{const}$.

Предположим, что вектор скорости жидкости направлен вдоль времениподобного вектора $\mathbf{Y} = \xi^i \partial_i$ алгебры Ли группы H_r:

$$U^i = \frac{\xi^i}{\sqrt{-\xi^k \xi_k}}\ , \tag{12}$$

а вектор $\mathbf{Y}$ является произвольной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами всех векторов алгебры $\mathbf{X}_\alpha$: $\mathbf{Y} = a^\alpha \mathbf{X}_\alpha$, $a^\alpha = \mathrm{const}$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Возьмем производную Ли от уравнения (12) в направлении вектора $\mathbf{X}_\alpha$ алгебры Ли группы H_r. С помощью уравнения (4) и уравнения структуры группы

$$\underset{\alpha}{\xi}^i \underset{\beta}{\xi}^k{}_{|i} - \underset{\beta}{\xi}^i \underset{\alpha}{\xi}^k_{|i} = C^\gamma_{\alpha\beta} \underset{\gamma}{\xi}^k \tag{13}$$

эта производная может быть записана в виде

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}} U^i = \frac{1}{\sqrt{-\xi\xi}} \left[a^\beta C^\sigma_{\alpha\beta} \underset{\sigma}{\xi}_i - \frac{\xi_i}{(\xi\xi)} a^\beta C^\sigma_{\alpha\beta} \underset{\sigma}{\xi}^s \xi_s \right] + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \frac{\xi_i}{\sqrt{-\xi\xi}}, \tag{14}$$

где $\xi^i \equiv a^\alpha \underset{\alpha}{\xi}^i$, $(\xi\xi) \equiv (\xi^k \xi_k)$ и $C^\sigma_{\alpha\beta}$ – структурные постоянные алгебры Ли. Из соотношений (7) и (14) следует

$$a^\beta C^\sigma_{\tau\beta} \underset{\sigma}{\xi}_i = \alpha_\tau a^\sigma \underset{\sigma}{\xi}_i, \tag{15}$$

где $\alpha_\tau \equiv (a^\alpha C^\sigma_{\tau\alpha} \underset{\sigma}{\xi}^j \xi_j)/(\xi\xi)$. Покажем, что $\alpha_\tau = \mathrm{const}$. Для этого ковариантно продифференцируем (15) по x^k и просимметрируем получившееся выражение по индексам i и k; используя (4) и хорошо известную для любых групп конформных преобразований формулу $C^\sigma_{\tau\alpha}\varphi_\sigma = 0$, получим $\underset{\tau}{\alpha}_{|i} = 0$. Отсюда следует, что $\alpha_\tau = \mathrm{const}$.

Вследствие линейной независимости векторов $\mathbf{X}_\alpha$ равенство (15) может быть выполнено тогда и только тогда, когда равны друг другу коэффициенты при компонентах векторов в правой и левой стороне равенства (15), то есть

$$a^\beta C^\sigma_{\tau\beta} = \alpha_\tau a^\sigma. \tag{16}$$

Векторы $\mathbf{X}_\alpha$ алгебры Ли удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\mathbf{X}_\alpha \mathbf{X}_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{X}_\gamma$. Свернем коммутационные соотношения с a^β; вследствие (16) получим $[\mathbf{X}_\tau \mathbf{Y}] = \alpha_\tau \mathbf{Y}$. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{Y}$ порождает идеал алгебры Ли группы гомотетических преобразований H_r. Не каждая алгебра Ли обладает идеалом с времениподобным вектором $\mathbf{Y}$. Поэтому среди всех пространств-времен с группами гомотетических движений должны будем выбрать только такие V_4, которые обладают указанным свойством.

Равенство нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса $(T^{ik} + E^{ik})_{|k} = 0$ с учетом уравнений Максвелла (2) и (3), может быть записано в виде следующих двух равенств:

$$\rho_{|i} U^i + (\rho + p) U^i_{|i} = 0, \tag{17}$$

$$(\rho + p) U^i_{|k} U^k + (U^i U^k + g^{ik})\, p_{|k} = \sigma F_{ik} U^k. \tag{18}$$

Уравнение (17), вследствие нашего предположения о векторе скорости (12), можно переписать в виде:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \rho + \frac{3}{2} (\rho + p) a^\alpha \varphi_\alpha = 0. \tag{19}$$

Свернем соотношение (5) с постоянными a^α. Сравнивая результат с (19), получим, что $(\rho + 3p) \cdot a^\alpha \varphi_\alpha = 0$.

Предположим, что $(\rho + 3p) \neq 0$, тогда $a^\alpha \varphi_\alpha = 0$. Свернем теперь уравнение (4) с постоянными a^α, получим $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} g_{ij} = 0$. В исследуемом случае это означает, что вектор $\mathbf{Y}$ является вектором алгебры Ли, соответствующим изометрическим преобразованиям группы H_r. Тем самым, согласно [6], сделанное выше предположение ограничивает наше внимание лишь изучением такой жидкости, в которой отсутствуют креативные процессы, и мы можем рассматривать нашу жидкость как идеальную. Исследование жидкостей, обладающих уравнением состояния $(\rho+3p)=0$ и допускающих процессы рождения частиц, предполагается провести нами впоследствии. Отметим здесь, что из равенств (5) и (6) следует, что

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\rho=0, \quad \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}p=0, \tag{20}$$

то есть плотность энергии ρ и равновесное давление p жидкости сохраняются вдоль траекторий движения жидкости. Хорошо известно, что компоненты тензора электромагнитного поля F_{ik} могут быть разложены на электрическую E_i и магнитную H_i составляющие:

$$F_{ik}=U_iE_k-U_kE_i-\eta_{iklm}U^lH^m$$

или эквивалентно

$$E_i=F_{ik}U^k, \tag{21}$$

$$H_i=\tilde{F}_{ik}U^k. \tag{22}$$

Покажем, что вследствие предположения $U^i\sim\xi^i$ вектор электрического поля пропорционален градиентному вектору:

$$E_i=\frac{1}{\sqrt{-\xi\xi}}\cdot\partial_i(A_k\xi^k), \tag{23}$$

где A_k – 4-потенциал электромагнитного поля. Для этого воспользуемся условием сохранения 4-тока: $J^i_{|i}=(\sigma U^i)_{|i}=0$. Вследствие предположения $U^i\sim\xi^i$ это условие легко привести к виду

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\sigma=0, \tag{24}$$

что означает сохранение плотности зарядов σ вдоль траектории движения жидкости. Производная Ли от уравнения (18) ввиду (20) дает $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}E_i=0$. С другой стороны, из уравнения (8) следует, что $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}E_i=\psi\cdot H_i=0$. Отсюда или $\psi=0$, или $H_i=0$; в обоих случаях $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}F_{ik}=0$. Заметим, что верно и обратное: если выполнено последнее равенство, то из уравнения Максвелла (2) легко видеть, что также выполнено и равенство (24). Следовательно, выполнение равенства (24) является необходимым и достаточным условием выполнения $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}F_{ik}=0$. Это условие эквивалентно условию $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}A_i=0$. Свертка равенства $F_{ik}=\partial_iA_k-\partial_kA_i$ с вектором U^i легко приводит к требуемому формулой (23) результату.

Уравнение (18) в силу равенства (23) и условия $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}p=0$, может быть записано в виде:

$$(\rho+p)\cdot\partial_i\xi+\partial_ip-\mu\cdot\partial_iA=0, \tag{25}$$

где введены следующие обозначения $\xi\equiv\ln\sqrt{-\xi^k\xi_k}$, $A\equiv A_k\xi^k$, $\mu\equiv\sigma/\sqrt{-\xi^k\xi_k}$. Покажем, что если ρ, p и μ – дифференцируемые функции, то условия интегрируемости уравнений (25) приводят к функциональным связям $p=p(\xi,A)$, $\rho=\rho(\xi,A)$, $\mu=\mu(\xi,A)$. Действительно, дифференцирование уравнения (25) по x^k и альтернация результата по индексам i и k дают:

$$\partial_{[k}(\rho+p)\cdot\partial_{i]}\xi+\partial_{[i}\mu\cdot\partial_{k]}A=0. \tag{26}$$

Свернем (26) с dx^i, выразим $\partial_i\mu$ из свертки и подставим его в (26). Полученный результат может быть записан в следующем виде:

$$\det\begin{pmatrix} d(\rho+p) & dA & d\xi \\ \partial_i(\rho+p) & \partial_iA & \partial_i\xi \\ \partial_k(\rho+p) & \partial_kA & \partial_k\xi \end{pmatrix}=0.$$

Равенство нулю приведенного выше определителя эквивалентно равенству нулю якобиана трех функций от трех переменных, что является необходимым и достаточным условием функциональной зависимости $(\rho+p)$, A и ξ. Рассуждая аналогично, имеем, что $\mu=\mu(A,\xi)$, $p=p(A,\xi)$, а следовательно, и $\rho=\rho(A,\xi)$.

Далее необходимо рассматривать два случая: A и ξ функционально независимы или $A=A(\xi)$. Рассмотрим сначала первый случай, и пусть $p\neq 0$. Подстановка $p=p(\xi,A)$ в уравнение (25) дает:

$$(\rho+p+p'_\xi)\cdot\partial_i\xi+(p'_A-\mu)\cdot\partial_i A=0. \tag{27}$$

Вследствие функциональной независимости A и ξ это уравнение может быть выполнено тогда и только тогда, когда удовлетворены равенства $(\rho+p+p'_\xi)=$ $=(p'_A-\mu)=0$ или

$$\rho=-p-p'_\xi, \tag{28}$$

$$\sigma=\sqrt{-\xi\xi}\cdot p'_A. \tag{29}$$

Прямыми вычислениями легко проверить формулу $\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\xi=\alpha_\tau+\frac{1}{2}\varphi_\tau$. Свернем (25) с компонентами произвольного вектора $\mathbf{X}_\tau$. Используя (6) и полученную выше формулу, имеем

$$\left(\alpha_\tau+\frac{1}{2}\varphi_\tau\right)\rho+\left(\alpha_\tau-\frac{1}{2}\varphi_\tau\right)p=\mu\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A. \tag{30}$$

1°. Предположим, что вектор U^i не является собственным вектором тензора энергии-импульса электромагнитного поля E_{ik} и выполнены равенства (9) и (10). Далее мы везде будем предполагать, что плотность электрических зарядов не равна нулю: $\sigma\neq 0$, тогда равенство (10) означает, что $\psi_\alpha=0$. В этом случае из уравнения (8) следует, что $\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}E_i=0$. С помощью равенства (23) это последнее условие приводится к виду:

$$\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A=\left(\alpha_\tau+\frac{1}{2}\varphi_\tau\right)A. \tag{31}$$

Пусть $(\alpha_\tau+\frac{1}{2}\varphi_\tau)\neq 0$ (в противном случае из (30) и (31) следует, что $p=0$; эту ситуацию мы рассмотрим позже). Подставляя (31) в (30), получим уравнение состояния идеальной заряженной жидкости:

$$\rho=kp+A\frac{\sigma}{\sqrt{-\xi\xi}}, \tag{32}$$

где

$$k=\frac{\varphi_\tau-2\alpha_\tau}{\varphi_\tau+2\alpha_\tau}. \tag{33}$$

Поскольку коэффициент k (33) в уравнении состояния жидкости не может зависеть от индекса τ, то среди всех допускаемых групп следует выбрать только те, у которых отношение α_τ/φ_τ не зависит от индекса τ при любом значении этого индекса.

Используя уравнение состояния (32), из уравнений (28) и (29) получим явный вид функций p, ρ и σ:

$$p=\left(\sqrt{-\xi\xi}\right)^{-(k+1)}\Phi\left(\frac{A}{\sqrt{-\xi\xi}}\right), \tag{34}$$

$$\rho = \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)} \left[\, k\,\Phi\left(\frac{A}{\sqrt{-\xi\xi}}\right) + \frac{A}{\sqrt{-\xi\xi}}\,\Phi'\left(\frac{A}{\sqrt{-\xi\xi}}\right)\right], \tag{35}$$

$$\sigma = \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}\,\Phi'\left(\frac{A}{\sqrt{-\xi\xi}}\right). \tag{36}$$

Здесь $\Phi\left(A/\sqrt{-\xi\xi}\right)$ – произвольная положительная функция указанного в скобках аргумента, штрих означает дифференцирование по аргументу.

В альтернативном случае, кргда A и ξ функционально связаны, то есть $A = A(\xi)$, рассуждая аналогично, имеем, что $p = p(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$, $\sigma = \sigma(\xi)$. Принимая во внимание эти зависимости, из (5), (6), (9) и (31) легко получить, что

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}, \tag{37}$$

$$p = p_0 \cdot \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}, \tag{38}$$

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}, \tag{39}$$

$$A = A_0 \cdot \sqrt{-\xi\xi}, \tag{40}$$

где ρ_0, p_0, σ_0 и A_0 – постоянные, удовлетворяющие условию

$$\rho_0 = kp_0 + \sigma_0 A_0. \tag{41}$$

Если мы имеем дело с заряженной пылью и полагаем $p = 0$, то из уравнения (25) следует $\rho = \rho(\xi)$, $A = A(\xi)$, что означает справедливость формул (37)–(41) при $p_0 = 0$.

2°. Предположим теперь, что вектор U^i является собственным вектором тензора энергии-импульса электромагнитного поля E_{ik}. Сначала рассмотрим случай, когда A и ξ функционально независимы. Согласно [12] $F_{ik} = \tau_{ik}\cos\alpha + \tilde{\tau}_{ik}\sin\alpha$, где τ_{ik} – простой бивектор, а $\tilde{\tau}_{ij} \equiv \eta_{ijkl}\tau^{kl}$ – дуальный бивектор, удовлетворяющий условию $\tilde{\tau}_{ij}U^j = 0$. Из этой формулы легко получить: $E_i = \gamma H_i$, где $\gamma = -\operatorname{tg}\alpha$.

В терминах векторов E^i и H^i уравнения Максвелла (2) и (3) имеют вид:

$$E^i_{|i} - \dot{U}^i E^i + 2\omega_i H^i = \sigma, \tag{42}$$

$$H^i_{|i} - \dot{U}^i H^i - 2\omega_i H^i = 0, \tag{43}$$

$$U^j(E^i_{|j} - E^i_{j|}) + \eta^{ijkl}U_k H_{l|j} + \eta^{ijkl}\dot{U}_j U_k H_l = 0, \tag{44}$$

$$U^j(H^i_{|j} - H^i_{j|}) - \eta^{ijkl}U_k E_{l|j} - \eta^{ijkl}\dot{U}_j U_k E_l = 0, \tag{45}$$

где приняты обычные обозначения для вектора ускорения $\dot{U}^i = U^i_{|j}U^j$ и вектора вращения $\omega^i = \frac{1}{2}\eta^{ijkl}U_j U_{k|l}$ линий тока жидкости. Вследствие равенства (23) первые два слагаемых уравнения (44), содержащие E^i, равны нулю, для оставшихся имеем

$$H_{i|k} - H_{k|i} + \dot{U}_k H_i - \dot{U}_i H_k = 0. \tag{46}$$

Прямыми вычислениями легко показать, что

$$\dot{U}^i = \partial_i \xi. \tag{47}$$

С помощью (47) уравнение (46) может быть записано в виде: $\partial_k(\sqrt{-\xi\xi}H_i)-$ $-\partial_i(\sqrt{-\xi\xi}H_k) = 0$, откуда следует, что $(\sqrt{-\xi\xi}H_i)$ – градиентный вектор. Следовательно, можем записать

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{-\xi\xi}}\,\partial_i h, \tag{48}$$

где h – скаляр. В силу (23) и (48) уравнения (44) и (45) выполнены тождественно.

Из (23) и (48) следует, что $\partial_i h = \gamma\partial_i A$. Дифференцирование этого выражения по x^k и альтернирование результата по индексам i и k дают $\partial_i\gamma\cdot\partial_k A = \partial_k\gamma\cdot\partial_i A$. Это равенство означает, что $\gamma = \gamma(A)$, и, следовательно, $\alpha = \alpha(A)$; это дает возможность представить скаляр h в терминах A: $h(A) = -\int \operatorname{tg}\alpha(A)\,dA$. Используя (8), легко показать, что $\underset{\tau}{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}E_i = \psi_\tau H_i$. Подставим в это выражение E_i из равенства (23), а затем возьмем производную Ли от результата. Принимая во внимание коллинеарность векторов E_i и H_i, получим: $\partial_i(\underset{\tau}{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}A) = (\alpha_\tau + \frac{1}{2}\varphi_\tau + \lambda\psi_\tau)\partial_i A$. Условие интегрируемости этого уравнения показывает, что $\psi_\tau = \psi_\tau(A)$. Поскольку $\underset{\tau}{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}\alpha = \psi_\tau$, то $\underset{\tau}{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}A = \psi_\tau/\alpha'_A$. Подставляя это выражение в уравнение (30) и обозначая $\psi_\tau/[\alpha'_A(\varphi_\tau + 2\alpha_\tau)] \equiv f(A)$, получим уравнение состояния жидкости в исследуемом случае:

$$\rho = kp + f(A)\frac{\sigma}{\sqrt{-\xi\xi}}. \tag{49}$$

С помощью этого уравнения состояния мы можем проинтегрировать уравнения (17) и (18):

$$p = \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}\Phi\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right), \tag{50}$$

$$\rho = \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}\left[\,k\,\Phi\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right) + \frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\,\Phi'\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right)\right], \tag{51}$$

$$\sigma = \left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}\,\Phi'\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right)\,F'_A(A), \tag{52}$$

где

$$F(A) \equiv \exp\left(\int\frac{dA}{f(A)}\right). \tag{53}$$

Если A и ξ функционально зависимы, то есть если $A = A(\xi)$, то рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что

$$\rho = \rho_0\cdot\left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}, \tag{54}$$

$$p = p_0\cdot\left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}, \tag{55}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{A'_\xi}\cdot\left(\sqrt{-\xi\xi}\,\right)^{-(k+1)}, \tag{56}$$

$$\cos\alpha = A'_\xi\exp(-\xi). \tag{57}$$

Постоянные ρ_0, p_0 и σ_0 связаны между собой условием

$$\rho_0 = kp_0 + \sigma_0. \tag{58}$$

Здесь, как и прежде, $k = (\varphi_\tau - 2\alpha_\tau)/(\varphi_\tau + 2\alpha_\tau)$. Как и в предыдущем случае, из всех допускаемых групп мы должны выбрать лишь те, у которых отношение α_τ/φ_τ не зависит от индекса τ.

В случае незаряженной жидкости, когда $\sigma = 0$ и $A^i = 0$, для жидкости выполнено баротропное уравнение состояния $\rho = kp$, где ρ и p имеют вид (37) и (38). Существует интересное следствие этих формул. Рассмотрим равновесное распределение газа частиц (например, газа фотонов) с уравнением состояния $\rho = 3p$. Согласно кинетической теории простого релятивистского газа, равновесная температура газа равна $T = 1/\sqrt{-\xi^k\xi_k}$. При подстановке $k = 3$ и этого выражения в равенство (37), получим $p = p_0T^4$ – хорошо известную формулу Стефана для давления чернотельного излучения.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Если пространство-время V_4 с идеальной заряженной жидкостью как источником допускает группу гомотетических преобразований H_r, макроскопическое движение заряженной жидкости происходит в направлении времениподобного вектора $\mathbf{Y}$ алгебры Ли группы H_r, $(\rho + 3p) \neq 0$, то:*

1. вектор $\mathbf{Y}$ является вектором изометрического движения;

2. этот вектор $\mathbf{Y}$ порождает времениподобный идеал алгебры Ли группы H_r;

3. если вектор скорости жидкости не является собственным вектором тензора энергии-импульса электромагнитного поля, то при условии, что величины $A \equiv A_k\xi^k$ и $\xi \equiv \ln\sqrt{-\xi\xi}$ функционально независимы, давление p, плотность энергии ρ жидкости и плотность электрических зарядов σ удовлетворяют уравнению состояния (32) *и выражаются в терминах A и ξ формулами* (34)–(36). *В случае же, если $A = A(\xi)$, выполнены равенства* (37)–(41)*;*

4. если вектор скорости жидкости является собственным вектором тензора энергии-импульса электромагнитного поля, то вектор электрического поля коллинеарен вектору магнитного поля; давление p, плотность энергии ρ жидкости и плотность электрических зарядов σ удовлетворяют уравнению состояния (49) *и выражаются в терминах A и ξ согласно формулам* (50)–(53) *при условии, что A и ξ функционально независимы. В случае же, если $A = A(\xi)$, то выполнены равенства* (54)–(58).

2. Времениподобные идеалы алгебры Ли группы H_r

Согласно только что доказанной теореме, времениподобный вектор $\mathbf{Y}$ порождает идеал алгебры Ли группы H_r гомотетических преобразований. Поскольку не каждая группа обладает алгеброй Ли с времениподобным идеалом, дальнейшая наша задача заключается в том, чтобы среди всех пространств-времен V_4 с группами гомотетических движений выбрать такие пространства-времена, которые бы допускали группу с указанными свойствами. В этой связи воспользуемся результатом, общим для всех групп конформных преобразований [13], что группа G_r конформных преобразований размерности $r \leq 5$, допускаемая неконформно-плоскими пространствами-временами V_4, является группой изометрических движений в пространствах-временах $\hat{V}_4$, конформных к V_4 :

$$dS^2 = e^{2\lambda}d\hat{S}^2. \tag{59}$$

Группа конформных преобразований, действующая в конформном пространстве-времени как группа изометрических движений, называется «тривиальной конформной группой». Таким образом, для того чтобы исследовать тривиальные конформные группы, мы можем воспользоваться известной [13] классификацией пространств-времен по группам изометрических движений G_r.

В качестве примера исследования рассмотрим два случая. Первый случай – это группа G_4V с подгруппой G_3, действующей транзитивно на V_3. Коммутационные соотношения алгебры Ли этой группы и её базис имеют вид

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=0, \quad [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3]=\mathbf{X}_2, \quad [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1]=-\mathbf{X}_1,\\
[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_4]=\mathbf{X}_2, \quad [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_4]=-\mathbf{X}_1, \quad [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_4]=0.
\end{gathered}
\tag{60}
$$

$$
\mathbf{X}_1=\partial_2, \quad \mathbf{X}_2=\partial_3, \quad \mathbf{X}_3=x^3\partial_2-\partial_1+x^3\partial_3, \quad \mathbf{X}_4=x^2\partial_3-x^3\partial_2. \tag{61}
$$

Наша цель – найти a^σ и α_τ, используя условие (16). Необходимым и достаточным условием того, что уравнения (16) имеют нетривиальные решения, является условие $\det(C^\sigma_{\tau\beta}-\alpha_\tau\delta^\sigma_\tau)=0$ при каждом $\sigma=1,2,3,4$. Из равенства нулю этих детерминантов найдем α_τ. При каждом σ, решая уравнения $a^\beta(C^\sigma_{\tau\beta}-\alpha_\tau\delta^\sigma_\tau)=0$, найдем a^β : $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3=-1$, $\alpha_4=1$, и $a^1=-a^2=1$, $a^3=a^4=0$. Элементом идеала алгебры является вектор $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2=\partial_2-\partial_3$, а компоненты вектора $\xi^i=(0,1,-1,0)$ являются компонентами вектора Киллинга, коллинеарного вектору U^i. Метрика пространства-времени, в котором группа действует как группа изометрических движений, имеет вид

$$
d\hat{S}^2=a_{11}(dx^1)^2+a_{22}e^{2x^1}[(dx^2)^2+(dx^3)^2]+e_4(dx^4)^2, \tag{62}
$$

где $a_{ij}=a_{ij}(x^4)$, $e_4=1$, или -1. Легко видеть, что требование $(\xi\xi)=a_{22}e^{2x^1}< <0$ нарушает сигнатуру метрики, а переход к конформной метрике, очевидно, не меняет ситуацию. Это означает, что исследуемая идеальная заряженная жидкость не может служить источником такого пространства-времени.

Другой пример – группа G_4VI_2 с подгруппой G_3, действующей транзитивно на V_3. Коммутационные соотношения алгебры Ли таковы:

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=0, \quad [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3]=0, \quad [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1]=0,\\
[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_4]=\mathbf{X}_2, \quad [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_4]=-\mathbf{X}_1, \quad [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_4]=0.
\end{gathered}
\tag{63}
$$

Базисные векторы алгебры имеют вид

$$
\mathbf{X}_1=\partial_2, \quad \mathbf{X}_2=\partial_3, \quad \mathbf{X}_3=-\partial_1, \quad \mathbf{X}_4=x^2\partial_3-x^3\partial_2, \quad \mathbf{Y}=\mathbf{X}_3=-\partial_1. \tag{64}
$$

Исследование, аналогичное приведенному выше, показывает, что компоненты вектора $\xi^i=(0,0,0,-1)$ являются компонентами вектора Киллинга, коллинеарного вектору скорости U^i. Метрика, конформно-соответствующая исследуемому пространству-времени, имеет вид

$$
d\hat{S}^2=a_{11}(dx^1)^2+a_{22}[(dx^2)^2+(dx^3)^2]+e_4(dx^4)^2, \tag{65}
$$

где $a_{ij}=a_{ij}(x^4)$, $e_4=1$ или -1. Условие $(\xi\xi)<0$ приводит к требованию $a_{11}<0$, а это означает, что x^1 – времениподобная переменная. Эта метрика описывает класс хорошо известных пространств-времен с плоской симметрией.

Такое исследование позволяет выделить все пространства-времена, допускающие группы изометрических движений, алгебры Ли которых имеют идеал с времениподобными элементами. Далее, перейдем к конформно-соответствующим пространствам-временам, где данная группа действует как группа гомотетических преобразований, и воспользуемся при этом теоремой Кнебельмана [14] о том, что любая группа гомотетических движений H_r содержит подгруппу G_{r-1} изометрических движений. (Вектор Киллинга, времениподобный в $\hat{V}_4$, будет также времениподобным и в V_4.)

Группа H_1. В этом случае существует единственный вектор алгебры, в направлении которого происходит макроскопическое движение жидкости. Очевидно, что этот вектор должен быть вектором алгебры Ли, соответствующим изометрическому преобразованию группы (вектором изометрического движения).

Группы H_2. Существует две возможности: группа H_2I с коммутационным соотношением $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=0$ (на самом деле, конечно, коммутационным соотношением её алгебры Ли) и группа H_2II с коммутационным соотношением $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=\mathbf{X}_1$.

Группа H_2I: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=0$. В этом случае алгебра Ли – абелева, и без потери общности элементом идеала алгебры Ли можно выбрать вектор $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1=\partial_1$, а $\mathbf{X}_2=\partial_2$ – вектором алгебры Ли, отвечающим преобразованию гомотетии группы H_2I (вектором гомотетии). Пусть $\hat{g}_{ik}$ – компоненты метрического тензора пространства-времени, конформного данному и допускающего H_2I как группу изометрических движений: $g_{ik}=e^{2\lambda}\hat{g}_{ik}$. Хорошо известно [13], что скаляры φ_τ и величина λ формулы (59) связаны равенством

$$\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\lambda=\frac{1}{2}\varphi_\tau. \tag{66}$$

Интегрирование этого уравнения в случае группы H_2I дает $\lambda=\frac{1}{2}(\varphi_2x^2+$ $+C(x^3,x^4))$. Следовательно, компоненты метрического тензора g_{ik} имеют вид

$$g_{ik}=e^{(\varphi_2\,x^2+C(x^3,\,x^4))}\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4) & 0\\ 0 & e_4\end{pmatrix},$$

где $\alpha,\ \beta=1,2,3$; $e_4=+1$ или -1. Вид матрицы тензора $\hat{g}_{ik}$ приведен в [13]. Поскольку $\alpha_\tau=0$, то $k=1$. Уравнение состояния жидкости $\rho=p+f(A)\times$ $\times(\sigma/\sqrt{-\xi\xi})$.

Аналогичное исследование необходимо провести во всех остальных случаях.

Группа H_2II: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=\mathbf{X}_1$. В этом случае имеем $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1=\partial_1$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-1$, $\mathbf{X}_2=x^1\partial_1+\partial_2$ – гомотетический вектор, $\lambda=\frac{1}{2}(\varphi_2\ x^2+C(x^3,x^4))$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k=(\varphi_2+2)/(\varphi_2-2)$.

Группы H_3. Следующие группы имеют алгебры Ли с времениподобными идеалами. Оказалось, что допускаются только группы H_3, действующие на трехмерных поверхностях V_3 транзитивно.

Группа H_3I. Коммутационные соотношения – $[\mathbf{X}_\alpha\mathbf{X}_\beta]=0$, $(\alpha,\beta=1,2,3)$, $\mathbf{Y}=a^i\mathbf{X}_i$, $\alpha_\tau=0$, $(\tau=1,2,3)$. Без потери общности вектор $\mathbf{Y}=a^1\mathbf{X}_1+a^2\mathbf{X}_2$ для всех a^1, a^2 может быть выбран в качестве элемента идеала алгебры Ли этой группы, а $\mathbf{X}_3$ – как вектор гомотетии. Тогда $\lambda=\frac{1}{2}\varphi_3x^3$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k=1$.

Группа H_3II: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=0$, $[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3]=\mathbf{X}_1$, $[\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1]=0$, $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1$, $\alpha_\tau=0$, $(\tau=$ $=1,2,3)$. Без потери общности вектор X_3 может быть выбран как вектор гомотетии, тогда $\lambda=-\frac{1}{2}\varphi_3x^3$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k=1$.

Группа H_3III: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=0$, $[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3]=0$, $[\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1]=-\mathbf{X}_1$. Существует две возможности.

1°. $(\mathbf{X}_1;\mathbf{X}_2)$ – векторы изометрического движения, а $\mathbf{X}_3$ – вектор гомотетии; $\lambda=-\frac{1}{2}\varphi_3x^3$. Необходимо рассмотреть два подслучая:

а) Если $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1$, то $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3=-1$ и жидкость имеет уравнение состояния с $k=(\varphi_3+2)/(\varphi_3-2)$.

b) Если $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_2$, то $\alpha_\tau = 0$ $(\tau = 1,2,3)$, и жидкость имеет уравнение состояния с $k = 1$.

2°. $(\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_3)$ – векторы изометрического движения, $\mathbf{X}_2$ – вектор гомотетии; $\lambda = \frac{1}{2}\varphi_2 x^2$; $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1$, $\alpha_2 = 0$. Поскольку $\varphi_2 \neq 0$, жидкость имеет уравнение состояния с $k = 1$.

Группа H_3IV: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$, $[\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_1$. $(\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_2)$ – векторы изометрического движения, а X_3 – вектор гомотетии; $\lambda = -\frac{1}{2}\varphi_3 x^3$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k = (\varphi_3 + 2)/(\varphi_3 - 2)$.

Группа H_3V: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_2$, $[\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_1$. $(\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_2)$ – векторы изометрического движения, $\mathbf{X}_3$ – вектор гомотетии; $\lambda = -\frac{1}{2}\varphi_3 x^3$; $\mathbf{Y} = a^1\mathbf{X}_1 + a^2\mathbf{X}_2$ для всех a^1, a^2, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k = (\varphi_3 + 2)/(\varphi_3 - 2)$.

Группа H_3VI: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = q\mathbf{X}_2$, $[\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_1$. $(\mathbf{X}_1; \mathbf{X}_2)$ – векторы изометрического движения, $\mathbf{X}_3$ – вектор гомотетии; $\lambda = -\frac{1}{2}\varphi_3 x^3$. Существует две возможности:

1°. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k = (\varphi_3 + 2)/(\varphi_3 - 2)$.

2°. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -q$, $q \neq 0; 1$. Жидкость имеет уравнение состояния с $k = (\varphi_3 + 2q)/(\varphi_3 - 2q)$.

Компоненты метрического тензора пространства-времени V_4 имеет вид $g_{ik} = e^{-\varphi_3 x^3}\hat{g}_{ik}$, где $\hat{g}_{ik}$ – компоненты метрического тензора пространства-времени $\hat{V}_4$, допускающего группу H_3VI как группу изометрических движений. Эта группа действует транзитивно на трехмерных поверхностях V_3.

Все другие группы, не упомянутые выше, такие, как H_3VII – H_3IX, к примеру, равно как и группы, действующие на двумерных поверхностях транзитивности V_2 или на двумерных изотропных поверхностях $\hat{V}_2$, и т. д., или обладают алгеброй Ли без идеала, или требование временигодобности вектора алгебры Ли, порождающего идеал, нарушает сигнатуру метрики.

Группы H_4.

А. Группы H_4, действующие нетранзитивно.

Прямыми вычислениями легко убедиться в том, что группы H_4, обладающие алгебрами Ли с времениподобным идеалом, могут быть только группами изометрических движений.

В. Группы H_4, действующие транзитивно на V_4.

Все эти группы имеют алгебры Ли с времениподобным идеалом. Пространства-времена, допускающие такие группы, полностью изучены нами в статье [11], где найдены все возможные точные решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна-Максвелла с заряженной жидкостью в правой части.

3. Динамика заряженной жидкости и ее уравнения состояния в пространствах-временах, допускающих группы изометрических движений

Рассмотрим пространства-времена, допускающие группы изометрических движений. В этом случае в уравнении (4) следует положить $\varphi_\alpha = 0$, после чего уравнения (5)–(8) принимают вид:

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}}\rho = \mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}}p = 0, \tag{67}$$

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}}U_i = 0, \tag{68}$$

$$\mathcal{L}_{\underset{\alpha}{\mathbf{X}}}F_{ik} = \psi_\alpha \hat{F}_{ik}, \tag{69}$$

но здесь уже нет никаких условий на скаляры ψ_α. Мы сохраним далее наше предположение (12) относительно вектора скорости U^i. Легко проверить, что условие (16) наличия идеала в алгебре Ли, равно как и условие градиентности (23) и (48) векторов E^i и H^i останутся такими же, как и в случае пространств-времен с группами гомотетических движений. Также сохранятся уравнения (25) и (26), функциональные зависимости $p = p(\xi, A)$, $\rho = \rho(\xi, A)$, $\mu = \mu(\xi, A)$, и, как следствие, будут выполнены равенства (28), (29). Имея в виду то обстоятельство, что $(\rho + p)$ и μ являются функциями ξ и A, уравнение (26) может быть переписано в виде $[(\rho + p)'_A + \mu'_\xi] \cdot (\partial_i\xi\partial_k A - \partial_k\xi\partial_i A) = 0$, штрих означает дифференцирование по указанному аргументу. Очевидно, что необходимо рассматривать два случая:

$$(\rho + p)'_A + \mu'_\xi = 0. \tag{70}$$

$$\partial_i\xi\ \partial_k A - \partial_k\xi\ \partial_i A = 0. \tag{71}$$

Пусть выполнено уравнение (70). Поскольку $\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}(\rho + p) = 0$, получим:

$$(\rho + p)'_\xi \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\xi + (\rho + p)'_A \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A = 0. \tag{72}$$

Свернем уравнение (25) с вектором $\mathbf{X}_\tau$. Вследствие (67) эта свертка приводится к виду:

$$(\rho + p) \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\xi - \mu \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A = 0. \tag{73}$$

Рассматривая (72) и (73) как однородную алгебраическую систему уравнений по отношению к $\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\xi$ и $\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A$, видим, что существуют две возможности: или детерминант этой системы равен нулю, или эти величины по отдельности раны нулю, то есть или

$$(\rho + p)'_\xi \cdot \mu + (\rho + p)'_A \cdot (\rho + p) = 0, \tag{74}$$

или

$$\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\xi = 0, \quad \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A = 0. \tag{75}$$

Пусть выполнено уравнение (74). С помощью равенства (70) это уравнение может быть проинтегрировано. Получим

$$\sigma = \sqrt{-\xi\xi} \cdot f(A) \cdot (\rho + p), \tag{76}$$

где $f(A)$ – произвольная функция от A. Используя получившееся решение (76), уравнение (73) перепишем в виде

$$\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}\xi = f(A) \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}}A, \tag{77}$$

а уравнение (72) с помощью (77) – в виде $(\rho + p)'_\xi \cdot f(A) + (\rho + p)'_A = 0$. Решение этого дифференциального уравнения в частных производных таково:

$$(\rho + p) = \Phi'\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right), \tag{78}$$

где
$$F(A) \equiv e^{(\int f(A)\, dA)},$$
штрих означает дифференцирование по аргументу. С помощью (78) уравнение (25) может быть проинтегрировано:
$$p = -\Phi\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right). \tag{79}$$
Используя (78) и (76), получим явные выражения для ρ и σ:
$$\rho = \Phi\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right) + \Phi'\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right), \tag{80}$$
$$\sigma = \frac{\sqrt{-\xi\xi}}{F(A)} \cdot \Phi'\left(\frac{F(A)}{\sqrt{-\xi\xi}}\right) \cdot F'_A(A), \tag{81}$$

Пусть теперь выполнены равенства (75). Первое из них означает, что $\alpha_\tau = 0$, и как следствие условия (16) получим $[\mathbf{X}_\tau \mathbf{Y}] = 0$. Это равенство означает, что вектор $\mathbf{Y}$ является вектором центра алгебры Ли группы G_r. Исследование уравнения (25) показывает только, что $p = p(\xi, A)$, $\rho = \rho(\xi, A)$, $\sigma = \sigma(\xi, A)$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено уравнение (71). Это равенство означает, что все якобианы двух функций от четырех переменных равны нулю, что является необходимым и достаточным условием функциональной зависимости A и ξ: $A = A(\xi)$, и, следовательно, $p = p(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$. Вследствие условий (67) имеем: $\rho'_\xi \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}} \xi = 0$ и $p'_\xi \cdot \mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}} \xi = 0$. Если $\rho'_\xi \neq 0$ и $p'_\xi \neq 0$, то $\mathcal{L}_{\underset{\tau}{\mathbf{X}}} \xi = 0$ – условие того, что вектор $\mathbf{Y}$ является вектором центра алгебры Ли группы G_r. Уравнение (25) показывает только, что $\rho = \rho(\xi)$, $p = p(\xi)$. Легко видеть, что это – частный случай ситуации, рассмотренной нами выше. Если $\rho = \mathrm{const}$, $p = \mathrm{const}$, то уравнение (26) дает только, что $A = A(\xi)$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Если пространство-время V_4 с идеальной заряженной жидкостью как источником допускает группу изометрических преобразований G_r, а макроскопическое движение заряженной жидкости происходит в направлении времениподобного вектора Киллинга $\mathbf{Y}$ алгебры Ли этой группы, то:*

1. вектор $\mathbf{Y}$ является элементом алгебры Ли группы G_r, порождающим времениподобный идеал этой алгебры, давление p, плотность энергии ρ жидкости и плотность электрических зарядов σ связаны условием (76) *и выражаются в терминах A и ξ согласно формулам* (79), (80) *и* (81)*;*

2. в случае, если вектор $\mathbf{Y}$ является вектором центра алгебры Ли группы G_r, то давление p, плотность энергии ρ жидкости и плотность электрических зарядов σ удовлетворяют только условиям $p = p(\xi, A)$, $\rho = \rho(\xi, A)$, $\sigma = \sigma(\xi, A)$.

Легко видеть, что более жесткое ограничение на допускаемую группу – наличие времениподобного центра – приводит к значительно более мягким условиям на уравнения состояния жидкости.

Для того чтобы завершить исследование, мы должны привести список пространств-времен, допускающих группы изометрических преобразований, обладающих алгеброй Ли с времениподобным идеалом. Поскольку список допускаемых групп гомотетических преобразований H_r для размерностей $r \leq 3$ совпадает (с теми лишь небольшими изменениями, которые касаются только выделения вектора гомотетии) со списком групп G_r изометрических движений, достаточно к вышеупомянутому списку добавить список групп изометрических движений высшей подвижности.

Группы G_4. Следующие группы имеют интересующие нас алгебры Ли:

A. Группы G_4, действующие на трехмерных поверхностях транзитивности. Алгеброй Ли с времениподобным вектором идеала обладают следующие группы:

Группа G_4III: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = 0,\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1,\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = 0,\ [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_4] = 0,\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_4] = \mathbf{X}_3,\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_4] = -\mathbf{X}_2.\ \mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 = \partial_2,\ \alpha_\tau = 0,\ (\tau = 1,2,3,4)$.

Группа G_4VI_2: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = 0,\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = 0,\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = 0,\ [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_4] = \mathbf{X}_2,\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_4] = -\mathbf{X}_1,\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_4] = 0,\ \mathbf{Y} = \mathbf{X}_3 = -\partial_1,\ \alpha_\tau = 0,\ (\tau = 1,2,3,4)$.

Группа G_4VIII: $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3,\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1,\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = \mathbf{X}_2,\ [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_4] = 0,\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_4] = 0,\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_4] = 0,\ \mathbf{Y} = \mathbf{X}_4 = \partial_3,\ \alpha_\tau = 0,\ (\tau = 1,2,3,4)$.

B. Подгруппа G_3 группы G_4 действует на двумерной поверхности транзитивности. Только две группы имеют алгебры Ли с времениподобными векторами, порождающими идеал этой алгебры. Это группа G_4VII и группа G_4VIII. Пространства-времена, допускающие эти группы, – это хорошо известные пространства-времена со сферической и псевдосферической симметриями. Метрики этих пространств-времен таковы:

$$dS^2 = a_{11}[(dx^1)^2 + \cos^2 x^1 (dx^2)^2] + a_{33}(dx^3)^2 + e_4(dx^4)^4, \tag{77}$$

$$\mathbf{X}_1 = \partial_2, \quad \mathbf{X}_2 = \cos x^2\,\partial_1 + \sin x^2 \operatorname{tg} x^1\,\partial_2, \quad \mathbf{X}_3 = -\partial_2\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X}_4 = \partial_3. \tag{78}$$

$$dS^2 = a_{11}[(dx^1)^2 + \operatorname{ch}^2 x^1 (dx^2)^2] + a_{33}(dx^3)^2 + e_4(dx^4)^4, \tag{79}$$

$$\mathbf{X}_1 = \partial_2, \quad \mathbf{X}_2 = \operatorname{ch} x^2\,\partial_1 - \operatorname{sh} x^2 \operatorname{th} x^1\,\partial_2, \quad \mathbf{X}_3 = \partial_2\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X}_4 = \partial_3. \tag{80}$$

В обоих случаях $a_{ij} = a_{ij}(x^4)$, а условие $(\xi\xi) < 0$ приводит к требованию $a_{33} < 0$, что означает, что x^3 – есть времениподобная переменная.

C. Группы G_4 транзитивно действуют на V_4. Все эти группы обладают алгебрами Ли с времениподобными идеалами. Пространства-времена, допускающие такие группы были полностью изучены нами в работе [15].

Summary

R.A. Daishev. The space-times symmetries and equilibrium distributions of the charged fluids. The equations of the state.

Space-times V_4, admittings a groups of homothetic motions H_r with charged fluid as its source are discussed. It is assumed that the vector of macroscopic velocity of the fluid is collinear to the time-like vector $\mathbf{Y} = \xi^i\partial_i$ of the group's Lie algebra. We prove that if $(\rho + p) \neq 0$, the vector $\mathbf{Y}$ is the vector of the Lie algebra, corresponding to isometric transformations of the group H_r and giving rise to time-like ideal of the Lie algebra of the group H_r. All space-times V_4, admitting a groups of homothetic transformations with indicated properties, are selected. Equations $(T^{ik} + E^{ik})_{|k} = 0$ are integrated entirely, and all possible equations of state of investigated fluid are presented. It is founded that equation of state of the fluid practically uniquely fixed by the space-time's symmetry and pressure, energy density as well as electrical charges expressed solely through “field” quantities: $A_k\xi^k$ and $\xi_k\xi^k$, where A_k is the 4-potential of an electromagnetic field.

Литература

1. *Черников Н.А.* Релятивистский газ в гравитационном поле. – Препринт № 1027. – Дубна: ОИЯИ, 1962.
2. *Черников Н.А.* Равновесное распределение релятивистского газа. – Препринт № 1159. – Дубна: ОИЯИ, 1962.
3. *Stewart J.M.* Non-equilibrium relativistic kinetic theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1971.
4. *Zimdahl W., Triginer J., Pavon D.* Collisional equilibrium, particle production, and the inflationary universe // Phys. Rev. D. – 1996. – V. 54, No 10. – P. 6101–6110.
5. *Zimdahl W.* Reacting fluids in the expanding universe: a new mechanism for entropy production // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1997. – V. 288, No 3. – P. 665–673.
6. *Zimdahl W.* Cosmological particle production and generalized thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. D. – 1998. – V. 57, No 4. – P. 2245–2254.
7. *Daishev R.A., Zimdahl W.* On homothetic cosmological dynamics // Class. Quantum Grav. – 2003. – V. 20, No 23. – P. 5017–5024.
8. *Burd A., Coley A.A.* Viscous fluid cosmology // Class. Quantum Grav. – 1994. – V. 11, No 1. – P. 83–105.
9. *Carr B.J., Coley A.A.* Self-similarity in general relativity // Class. Quantum Grav. – 1999. – V. 16, No 7. – P. R31–R71.
10. *Carot J., Sintes A.M.* Homothetic perfect fluid space-times // Class. Quantum Grav. – 1997. – V. 14, No 5. – P. 1183–1205.
11. *Даишев Р.А., Карин В.А.* Равновесные распределения заряженной жидкости в пространствах-временах с простотранзитивными группами гомотетических движений // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, Кн. 2. – С. 37–53.
12. *Wainright J., Yaremovicz P.A.E.* Killing vector fields and Eistein – Maxwell field equations with perfect-fluid source // Gen. Rel. Grav. – 1976. – V. 7, No 4. – P. 345–359.
13. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука. – 1966. – 495 с.
14. *Knebelman M.S.* Homothetic mappings of the Riemann spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 9, No 6. – P. 926–927.
15. *Даишев Р.А.* Однородные решения уравнений Эйнштейна с идеальной заряженной жидкостью // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 12. – С. 74–79.

Поступила в редакцию
21.09.06

Даишев Ринат Абдурашидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории относительности и гравитации физического факультета Казанского государственного университета.

E-mail: *Rinat.Daishev@ksu.ru*