

УДК 538.941+539.18

## ФОТОИНДУЦИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ БОЗЕ-КОДЕНСАТА В ОПТИЧЕСКИХ СВЕРХРЕШЕТКАХ

*С. О. Елютин*

### Аннотация

На основе модели Бозе–Хаббарда описана динамика ультрахолодных атомов в узлах оптической решетки (сверхрешетки). Линейная и кольцевая решетки рассмотрены для двух типов взаимодействия бозонов: отталкивание и притяжение. Численно наблюдаемое квантовомеханическое токовое состояние атомов бозе-конденсата возникает из-за прыжкового транспорта холодных атомов, вызванного возбуждением системы бигармоническим электромагнитным полем при рамановском резонансе. Когда энергия взаимодействия бозонов становится близкой к энергии фотоактивации, ток бозонов уменьшается, что может быть отнесено к признаку фазового перехода от сверхтекучести к изолятору. В разупорядоченной линейной цепочке потенциалов, в которой глубина оптических потенциалов меняется от узла к узлу, растекание тока по сайтам решетки подавлено аналогично действию эффекта локализации Андерсона в твердых телах.

**Ключевые слова:** бозе-эйнштейновский конденсат, оптическая сверхрешетка, бигармоническое поле, рамановский резонанс, фазовый переход.

### Введение

Интерференция нескольких плоских монохроматических световых волн создает дифракционную картину, в которой напряженность электрического поля периодически меняется в пространстве. Такую периодическую систему называют оптической решеткой (ОР) [1]. ОР – массив микроскопических потенциалов (узлов), сформированных под действием высокочастотного штарк-эффекта в поле интерферирующих лазерных лучей. Ультрахолодные бозоны, захваченные на такие потенциалы, широко используются в качестве модельной системы для изучения фундаментальных эффектов в квантовой физике, таких, как фазовый переход от сверхтекучести к моттовскому изолятору [2].

Система оптических ловушек с каплями бозе-конденсированного разреженного газа представляет, по существу, искусственную среду, в которой атомная система пребывает в когерентном состоянии, а параметры массива бозе-эйнштейновских конденсатов (БЭК) могут эффективно управляться с помощью резонанса Фешбаха [3] или внешним полем. Вследствие квантовой интерференции между конденсатами их решетка может поддерживать коллективные возбуждения, которые в приближении сильной связи между бозонами в ячейке решетки представляют собой нелинейные уединенные волны, или солитоны в широком понимании этого термина. При определенных условиях неоднородный ансамбль капель БЭК в узлах ОР способен производить эффект эха [4].

Недавно ОР с двумя типами микроскопических потенциалов в одной ячейке (сайте) решетки (оптическая сверхрешетка – ОСР) привлекла особое внимание [5].

Сверхрешеточные структуры характеризуются разностью энергий уровней в соседних микроскопических потенциалах, такой, что при сверхнизкой температуре квантовое туннелирование между близлежащими узлами и сайтами подавлено. Термоактивированный переход с одного узла на другой также маловероятен. В отсутствие прямого туннелирования прыжки через оптический барьер между узлами происходят в результате рассеяния внешнего бигармонического электромагнитного поля на решетке в условиях рамановского резонанса с основными состояниями конденсата в узловых потенциалах ячеек [6]. Параметры возбуждения могут контролироваться внешним излучением, которое определяет вероятность прыжков бозонов между сопряженными сайтами.

В рассматриваемой задаче бозе-конденсат в виде массива капель удерживается в ячейках одномерной оптической решетки, представляющей собой набор чередующихся двухъямных асимметричных оптических дипольных потенциалов (ячеек или сайтов). Ультрахолодные атомы занимают нижние колебательные состояния каждого узла, соответственно  $a$  и  $b$ , с энергиями  $\varepsilon_{a,j}$ ,  $\varepsilon_{b,j}$ , находясь в своем основном состоянии. Атомы взаимодействуют лишь на коротком расстоянии. Конденсат как целое помещен во внешнюю магнитную ловушку в форме «сигары». Уровень энергии основного состояния в узле типа  $a$  совпадает с нижним уровнем магнитной ловушки. Для описания такой системы в приближении сильной связи использовалась модель Бозе–Хаббарда в виде уравнений движения для амплитуд вероятности населенности узлов ОСР [7, 8].

### 1. Формулировка модели. Основные уравнения

Динамические уравнения для амплитуд вероятности  $a_j$  и  $b_j$  нахождения бозонов на узлах типа  $a$  и  $b$  в  $j$ -й ячейке решетки получены на основе модельного гамильтониана Бозе–Хаббарда

$$\begin{aligned} \hat{H} = & - \sum_{j(\text{sites})} \left( \mathcal{J}_b \times \hat{b}_j (\hat{a}^+_{j+1} + \hat{a}^+_j) + \mathcal{J}_a \times \hat{a}_j (\hat{b}^+_j + \hat{b}^+_{j-1}) + \text{э.с.} \right) + \\ & + \sum_j \varepsilon_{a,j} \hat{a}^+_j \hat{a}_j + \sum_j \varepsilon_{b,j} \hat{b}^+_j \hat{b}_j + \\ & + \frac{1}{2} U_{aa} \sum_j \hat{a}^{+2}_j \hat{a}^2_j + \frac{1}{2} U_{bb} \sum_j \hat{b}^{+2}_j \hat{b}^2_j + \frac{1}{2} U_{ab} \sum_j \hat{a}^+_j \hat{a}_j (\hat{b}^+_j \hat{b}_j + \hat{b}^+_{j-1} \hat{b}^+_{j-1}), \end{aligned}$$

учитывающего взаимодействие  $U_{aa}$ ,  $U_{bb}$  между атомами в одном узле и взаимодействия  $U_{ab}$  между атомами из соседних узлов, а также индуцированные за счет ВКР перескоки между соседними узлами решетки ( $\mathcal{J}_{a,b}$ ). В гамильтониане (2)  $\hat{a}^+_j$  ( $\hat{a}_j$ ) – операторы рождения (уничтожения) бозонов в оптической ячейке  $j$ , для которых выполнены правила коммутации  $[\hat{b}_m, \hat{b}^+_k] = \delta_{km}$ ,  $[\hat{a}_m, \hat{a}^+_k] = \delta_{km}$ . Прямое туннелирование внутри ячейки и между ячейками отсутствует из-за разности в энергиях  $\varepsilon_a$  и  $\varepsilon_b$  сильно локализованных основных состояний в узлах. Силу взаимодействия бозонов на узлах  $a$  и  $b$  для простоты можно считать одинаковой, то есть  $U_{aa} = U_{bb} = U$ , причем  $U > 0$  соответствует взаимодействию отталкивания, а  $U < 0$  – притяжения. Пусть также  $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_b + \mathcal{J}_0$ .

Прыжки через оптический барьер между узлами типа  $a$  и  $b$  как в пределах одной ячейки, так и между узлами соседних ячеек происходят в результате рамановского рассеяния внешних ультракоротких бигармонических импульсов света с несущими частотами  $\omega_2$  и  $\omega_1$  на равномерно освещаемой решетке.

Частота рамановского резонанса  $\Delta\omega_0$  равна разности между некоторой средней по всем ячейкам величиной энергии  $\varepsilon_b^{(0)}$  на узлах типа  $b$  и энергией основного состояния на узлах типа  $a$ . Поскольку считается, что потенциал магнитной ловушки меняется слабо по сравнению с пространственным периодом оптической решетки, то есть  $\varepsilon_{a,(j)}$  слабо зависит от  $j$ , то можно считать что

$$\hbar\Delta\omega_0 = \hbar(\omega_1 - \omega_2) = \varepsilon_b^{(0)} - \varepsilon_{a,(j)}.$$

Уравнения модели, являющиеся уравнениями Гайзенберга, с учетом коммутационных правил для бозонных операторов выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{a}_j &= -\mathcal{J}_0^* e^{i\Delta\omega_0 t}(\hat{b}_j + \hat{b}_{j-1}) + \varepsilon_{a,j}\hat{a}_j + U_{aa}\hat{a}_j^+\hat{a}_j + U_{ab}(\hat{b}_j^+\hat{b}_j + \hat{b}_{j-1}^+\hat{b}_{j-1})\hat{a}_j, \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{b}_j &= -\mathcal{J}_0 e^{-i\Delta\omega_0 t}(\hat{a}_j + \hat{a}_{j+1}) + \varepsilon_{b,j}\hat{b}_j + U_{bb}\hat{b}_j^+\hat{b}_j + U_{ab}(\hat{a}_{j+1}^+\hat{a}_{j+1} + \hat{a}_j^+\hat{a}_j)\hat{b}_j. \end{aligned}$$

В классическом пределе операторы заменены  $c$ -числовыми полями:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial a_j}{\partial t} &= -\mathcal{J}_0^* e^{i\Delta\omega_0 t}(b_j + b_{j-1}) + \varepsilon_{a,j}a_j + U_{aa}|a_j|^2 a_j + U_{ab}(|b_j|^2 + |b_{j-1}|^2)a_j, \\ i\hbar\frac{\partial b_j}{\partial t} &= -\mathcal{J}_0 e^{-i\Delta\omega_0 t}(a_j + a_{j+1}) + \varepsilon_{b,j}b_j + U_{bb}|b_j|^2 b_j + U_{ab}(|a_j|^2 + |a_{j+1}|^2)b_j. \end{aligned}$$

Замена

$$a_j \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(\varepsilon_{b,j} + \varepsilon_{a,j} - \hbar\Delta\omega_0)t\right] = a_j, \quad b_j \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(\varepsilon_{b,j} + \varepsilon_{a,j} + \hbar\Delta\omega_0)t\right] = b_j$$

в системе уравнений приводит к уравнениям для медленных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j}{\partial \tau} &= \frac{i}{2}\eta_j a_j - iu|a_j|^2 a_j - iu_{ab}(|b_j|^2 + |b_{j-1}|^2)a_j + \\ &\quad + if^* \left[ b_j + b_{j-1} \exp(i\tau(\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1} + \frac{1}{2}(\eta_j - \eta_{j-1}))) \right], \\ \frac{\partial b_j}{\partial \tau} &= -\frac{i}{2}\eta_j b_j - iu|b_j|^2 b_j - iu_{ab}(|a_j|^2 + |a_{j+1}|^2)b_j + \\ &\quad + if \left[ a_j + a_{j+1} \exp(i\tau(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} + \frac{1}{2}(\eta_j - \eta_{j+1}))) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tau = tT_0^{-1}$ ,  $f = T_0\hbar^{-1}\mathcal{J}_0$ ,  $u_{ab} = T_0\hbar^{-1}U_{ab}$ ,  $u = T_0\hbar^{-1}U$ ,  $\varepsilon_j = \varepsilon_{a,j}/U$ ,  $\eta_j = T_0\hbar^{-1}\Delta\varepsilon_{b,j}$ ,  $\Delta\varepsilon_{b,j} = \varepsilon_{b,j} - \varepsilon_b^{(0)}$ . Параметр  $T_0$  представляет собой некоторое характерное время.

В дальнейшем в настоящей работе возникновение волн БЭК рассматривается в двух типах ОСР: кольцевой и линейной. В случае кольцевой решетки с периодическими граничными условиями все сайты считаются идентичными, и тогда  $\eta_j = 0$ ,  $T_0 = \hbar/U$ . В линейной решетке величины расстройек  $\eta_j$  задаются нормально распределенными случайными числами с обратной полушириной распределения  $T_0$ .

Квантовомеханическая плотность тока вероятности записывается следующим образом:

$$I = g/N \sum_j ((a_j^+ b_j + b_j^+ a_j) + (b_j^+ a_{j+1} + a_{j+1}^+ b_{j+1})), \quad I = J(t) \exp(-i\Delta\omega_0 t) + \text{э.с.}$$

$$J(\tau) = g/N \sum_{j=1}^N \left[ a_j^+ b_j + b_j a_{j+1}^+ \exp \left( -i\tau \left( \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} + \frac{1}{2}(\eta_j - \eta_{j+1}) \right) \right) \right], \quad (2)$$

где  $g$  – нормировочный множитель. В (2) первое слагаемое в квадратных скобках отвечает току внутри ячейки, второе – току между соседними ячейками.

Отметим, что псевдоток (2) представляет собой некоторое когерентное состояние системы, подобное квантовомеханической когерентности в форме поляризации. Полное число атомов постоянно, так что  $\sum_{j=1}^N (|a_j|^2 + |b_j|^2) = N_{\text{at}}$ . Плотность бозонов по ячейкам ОСР

$$n_j(\tau) = |a_j(\tau)|^2 + |b_j(\tau)|^2. \quad (3)$$

## 2. Оценки параметров модели

Частота колебаний  $\omega_h$  в узловом квазигармоническом потенциале глубины  $V_{\text{opt}}$  может быть оценена как  $\omega_h \sim (E_R V_{\text{opt}})^{1/2}/\hbar$ , где энергия отдачи атома есть  $E_R = \hbar^2 k^2/2m$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ . Энергия  $\hbar\omega_h$  определяет расстояние между основным состоянием и энергией первой зоны блоховских возбуждений.

В экспериментах на ультрахолодных атомах  $^{87}\text{Rb}$  [9] с массой  $m = 1.4 \cdot 10^{-25}$  кг (взаимодействие отталкивания), длина волны лазерного излучения, формирующего оптическую ловушку, составляет 800 нм, что дает величину  $E_R \approx 2.0 \cdot 10^{-30}$  Дж. Протяженность волновой функции основного состояния осциллятора есть  $\Delta x_h = (\hbar/m\omega_h)^{1/2}$ . Условие малости  $\Delta x_h$  по сравнению с периодом оптической решетки  $\lambda/2$  ведет к неравенству  $V_{\text{opt}} > \frac{1}{2}E_R$ . С другой стороны, приняв температуру конденсирования  $T_c \sim 1$  мкК, имеем неравенство  $V_{\text{opt}} > k_B T_c \approx 10^{-29}$  Дж  $\approx 5.0E_R$ , что позволяет принять  $V_{\text{opt}}$  как минимум на порядок большим, чем  $E_R$ . Тогда характерное значение величины  $\Delta x_h$  можно оценить как  $\Delta x_h \approx 100$  нм при  $\hbar\omega_h \approx 8 \cdot 10^{-30}$  Дж  $\approx 4E_R$ .

Отметим, что вследствие малости радиуса действия потенциала отталкивания, то есть разреженности БЭК, выполнено неравенство  $a_s \ll \Delta x_h$  (длина рассеяния  $s$ -волны  $a_s = 5.5$  нм). Это, в свою очередь, позволяет получить оценку для величины параметра взаимодействия на узле  $U \sim \hbar\omega_h a_s \Delta x_h^{-1} \approx 0.2E_R$ , то есть  $U \ll \hbar\omega_h$ , будем также считать, что  $U > U_{ab}$ .

В соответствии с видом модельного потенциала оптической решетки глубины оптических ловушек типа  $a$  и  $b$  в ячейке разнятся. Разность энергий основных колебательных состояний в потенциалах  $V_a$  и  $V_b$  должна удовлетворять неравенству  $\varepsilon_b - \varepsilon_a > U, U_{ab}$ . Если приближенно принять  $\varepsilon \sim \hbar\omega_h$ , а соотношение между глубинами потенциалов установить как  $V_a/V_b \geq 2$ , то частота рамановского резонанса составит

$$\Delta\omega_0 \simeq (\varepsilon_b - \varepsilon_a)/\hbar \approx 1.2E_R/\hbar \approx 25 \text{ кГц.}$$

## 3. Результаты численного эксперимента

Решение системы дифференциальных уравнений (1) по количеству сайтов ОСР было получено с помощью численной процедуры предиктор – корректор. Желаемая абсолютная точность порядка  $10^{-4}$  достигалась итерациями на каждом временном шаге для каждого индекса сайта  $j$ . Результатом была плотность бозонов в ячейке (3) и интегральная величина – плотность тока атомов (2) по сайтам решетки.

Самое общее заключение, которое можно сделать из результатов численного анализа модели: процесс распространения облака атомов БЭК из локализованной

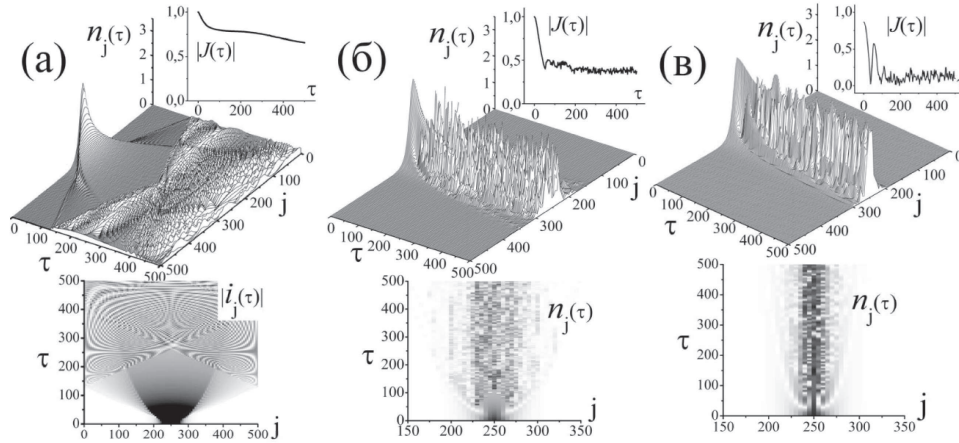


Рис. 1. Волны БЭК в кольцевой однородной ОСР в случае потенциала отталкивания бозонов на узле решетки. Признаки фазового перехода Мотта по параметру  $u/f$ .  $N_{at} = 100$ ,  $u = 1$ . (a)  $u/f = 0.5$ ,  $u_{ab}/u = 0.25$ ; (б)  $u/f = 5$ ,  $u_{ab}/u = 0.25$ ; (в)  $u/f = 50$ ,  $u_{ab}/u = 0.25$

области первоначальной концентрации при  $\tau = 0$  по сайтам  $j$  ОСР определяется прежде всего знаком длины рассеяния  $s$ -волны, то есть тем, является ли взаимодействие притяжением или отталкиванием. Для положительных величин параметра нелинейного взаимодействия  $u$  совместное действие отталкивания ультрахолодных атомов и фотоиндуцированного прыжкового механизма в соседние ловушки приводит к быстрому расплыванию сгустка бозонов. При малых значениях параметра  $u/f$  (рис. 1, а и рис. 3, в) профиль волны БЭК приобретает вид плато с резкими фронтами, характерными для ударных волн. Далее отметим, что в рамках бозонной модели Хаббарда с ростом отношения параметра взаимодействия атомов на одном узле  $U$  к параметру, учитывающему туннелирование атомов  $\mathcal{J}_0$ , при  $\mathcal{J}_0 < U$  предсказывается фазовый переход Мотта [2, 6, 8] из сверхтекучей фазы в фазу диэлектрика, когда ток в системе прекращается. С увеличением глубины оптической потенциальной ямы атомные волновые функции становятся все более и более локализованными, и взаимодействие на узле растет. В то же самое время, матричный элемент туннельного перехода уменьшается. Явные признаки такого перехода проявляются в поведении плотности тока атомов (рис. 1 от а к в), падение которого увеличивается с ростом отношения  $u/f$ . Мелкомасштабная интерференционная картина на карте в градациях серого цвета на нижней панели рис. 1, а есть результат интерференции когерентных возвратных волн вследствие периодических граничных условий. Возникает своего рода картина стоячих волн вероятности населенности узлов решетки.

Интересно, что фазовый переход по току бозонов можно зафиксировать и в случае потенциала притяжения. Для этого можно сравнить поведение псевдотоксового состояния на графиках а) и б) на рис. 2. Видно, что наличие тока, который визуально воспринимается как степень растекания исходного распределения (нижние панели рис. 2), явным образом зависит от отношения  $|u|/f$ . Так, на рис. 2, б при большом отношении  $|u|/f$  ток практически отсутствует. Волновая картина на рис. 2, а характерна тем, что первоначальная капля БЭК со временем распадается на устойчивые самостоятельные фрагменты бозонной плотности аналогично тому, как мощный оптический импульс в керровской фокусирующей среде

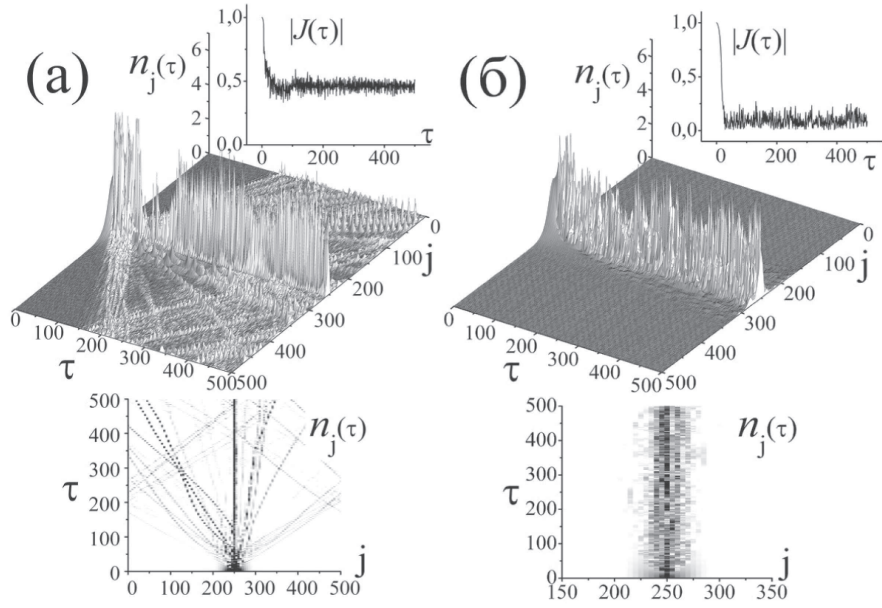


Рис. 2. Волны БЭК в кольцевой однородной ОСР в случае потенциала притяжения бозонов на узле решетки. Признаки фазового перехода Мотта по параметру  $|u|/f$ .  $N_{at} = 100$ ,  $u = -1$ . (a)  $|u|/f = 0.5$ ,  $u_{ab}/|u| = -0.25$ ; (б)  $|u|/f = 5$ ,  $u_{ab}/|u| = -0.25$

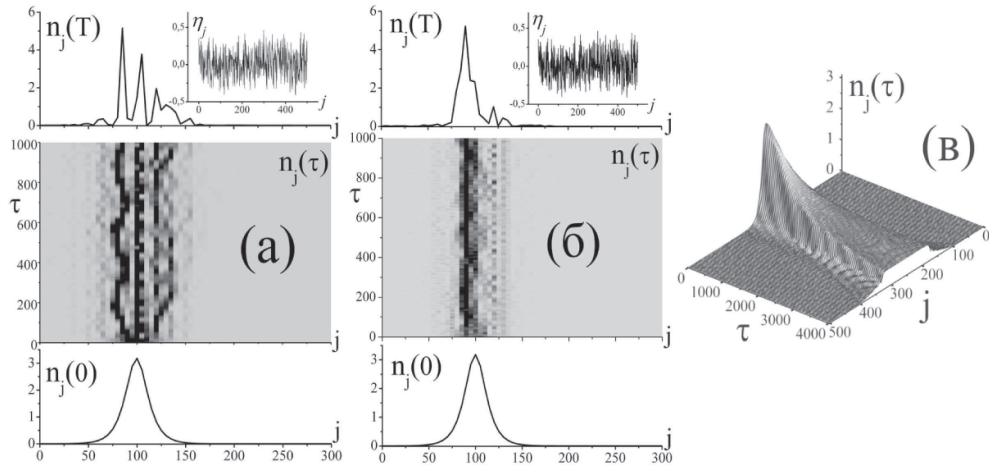


Рис. 3. Волны БЭК в линейной ОСР: (a) атомы притягиваются в узловых ловушках со случайно распределенными расстройками (на вставке)  $N_{at} = 100$ , (a) потенциал притяжения,  $f = 1.0$ ,  $u = -0.01$ ,  $|u|/f = 0.01$ ,  $u_{ab} = -0.0025$ ; (б) потенциал отталкивания,  $f = 1.0$ ,  $u = 0.1$ ,  $u/f = 0.1$ ,  $u_{ab} = 0.025$ ; (в) фотоиндуцированное расплывание облака бозонов по сайтам ОСР в случае однородной кольцевой решетки с отталкиванием атомов на узлах,  $f = 0.06$ ,  $u = 0.01$ ,  $u/f = 0.13$ ,  $u_{ab} = 0$

с дисперсией групповых скоростей разбивается на уединенные импульсы – солитоны. Здесь следует заметить, что для ординарной оптической решетки уравнения движения для амплитуд вероятности заселенности сайтов в континуальном пределе

дают нелинейное уравнение Шредингера с его солитонными решениями. Взаимодействие на узлах играет роль керровской фокусирующей нелинейности, тогда как прыжковые слагаемые – дифракции. Уравнения обсуждающейся модели (1) более сложные, но для однородной кольцевой ОСР они также могут быть сведены к уравнениям, близким к НУШ, но не обладающим свойством полной интегрируемости. Устойчивость оптических солитонов, как известно, обеспечивается балансом дифракционной расходимости волны и нелинейной самофокусировки. В нашем случае подобными механизмами являются нелинейное взаимодействие притяжения бозонов внутри ячейки ОСР и между ячейками и прыжковая подвижность атомов, индуцированная рамановским резонансом внешнего бигармонического поля. Отсюда понятна природа уединенных волн плотности БЭК, хорошо заметных на рис. 2, *a* (нижняя панель).

В линейных неоднородных цепочках оптических микропотенциалов, когда индивидуальные расстройки каждого сайта каким-либо образом упорядочены, начальное облако бозонного газа со временем перемещается по ОСР в направлении градиента расстроек  $\eta_j$ . Если же величины  $\eta_j$  распределены случайно, положение фрагментов первоначального сгустка хаотически меняется от одного момента времени к другому так, что в результате облако газа ультрахолодных атомов остается практически на месте (рис. 3, *a*). Интересно, что первоначальная плотность атомов сохраняет свою локализацию даже в случае потенциала отталкивания, как представлено на рис. 3, *b*. Отсутствие заметного тока бозонов в разупорядоченной решетке аналогично эффекту Андерсона [10] локализации электронов в полупроводнике при низких температурах при наличии случайных дефектов. В качестве аргумента в пользу этой гипотезы можно предложить график на рис. 3, *в*, где для примерно того же отношения  $u/f$ , но в отсутствие случайного распределения расстроек  $\eta_j$ , численный эксперимент дает характерный расплывающийся профиль бозонной плотности, что означает наличие тока в ОСР.

Автор выражает благодарность А.И. Маймистову и А.М. Башарову за плодотворные дискуссии по затронутым в работе вопросам.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 09-02-00701-а, 09-07-12144-офи) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

### Summary

*S. O. Elyutin.* Photo-Induced Waves of the Bose Condensate in Optical Superlattices.

The dynamics of ultracold atoms loaded in an optical lattice (superlattice) is described in the article on the basis of the Bose–Hubbard model. Both linear and circular lattices are considered in terms of attractive and repulsive types of interaction between the bosons. The numerically observed quantum-mechanical current state of the Bose condensate atoms is due to a hopping transfer of the ultracold atoms caused by the excitation of the system by the biharmonic electromagnetic field under the Raman resonance condition. When the energy of interaction between the bosons is close to the energy of photoactivation, the boson current decreases, which may be the sign of the superfluidity-insulator phase transition. In the disordered linear chain of potentials, where the depth of optical potentials alters from one site to another, the current spreading over the sites of optical lattice is suppressed in the same way as in the Anderson localization effect.

**Key words:** Bose–Einstein condensate, optical superlattice, biharmonic field, Raman resonance, phase transition.

**Литература**

1. *Berg-Sørensen K., Mølmer K.* Bose-Einstein condensates in spatially periodic potentials // *Phys. Rev. A.* – 1998. – V. 58. – P. 1480–1484.
2. *Greiner M., Mandel O., Esslinger T., Hänsch T.W., Bloch I.* Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms // *Nature.* – 2002. – V. 415. – P. 39–44.
3. *Abdullaev F.Kh., Tsoy E.N., Malomed B.A. et al.* Array of Bose-Einstein condensates under time-periodic Feshbach-resonance management // *Phys. Rev. A.* – 2003. – V. 68. – P. 053606-1–053606-8.
4. *Елютин С.О.* Эхо-отклики ансамбля охлажденных атомов в оптических решетках // *Оптика и спектроскопия.* – 2005. – Т. 98. – С. 680–692.
5. *Buonsante P., Penna V., Vezzani A.* Fractional-filling loop-hole insulator domains for ultracold bosons in optical superlattices // *Phys. Rev. A.* – 2004. – V. 70. – P. 061603(R)-1–061603(R)-4.
6. *Jaksch D., Bruder C., Cirac J.I., Gardiner C.W., Zoller P.* Cold bosonic atoms in optical lattices // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – V. 81. – P. 3108–3111.
7. *Maimistov A.I.* Nonlinear polariton waves in an optical double lattice with photo-induced transport of atoms // *Optics and spectroscopy.* – 2004. – V. 97. – P. 920–928.
8. *Jaksch D., Zoller P.* The cold atom Hubbard toolbox // *Ann.Phys.* – 2005. – V. 315. – P. 52–79.
9. *Anderson B.P., Kasevich M.A.* Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays // *Science.* – 1998. – V. 282. – P. 1686–1689.
10. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Phys. Rev.* – 1958. – V. 109. – P. 1492–1505.

Поступила в редакцию  
19.01.10

---

**Елютин Сергей Олегович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (Московского инженерно-физического института).

E-mail: [soelyutin@mephi.ru](mailto:soelyutin@mephi.ru); [elyutin@mail.ru](mailto:elyutin@mail.ru)