

УДК 514

## А.П. НОРДЕН – ВЫДАЮЩИЙСЯ СОВЕТСКИЙ ГЕОМЕТР

*M.A. Малахальцев, B.B. Шурыгин*

Александр Петрович Норден – выдающийся казанский математик, оказавший существенное влияние на направление геометрических исследований во второй половине XX века как у нас в стране, так и за рубежом, с его именем связана целая эпоха в истории Казанского университета.

А.П. Норден родился 24 июля 1904 года в Саратове, в семье юриста. После окончания математического факультета Московского университета, где он учился в 1926–30 годах, А.П. Норден был оставлен в аспирантуре при Институте математики и механики МГУ. Его учителями были известные московские геометры С.П. Фиников и В.Ф. Каган. В 1932 году А.П. Норден защитил кандидатскую диссертацию «Релятивная геометрия поверхностей проективного пространства», а уже в 1937 году – докторскую диссертацию «О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства», в которой им был предложен универсальный метод построения связностей на поверхностях проективного пространства, вошедший в историю науки как метод нормализации Нордена.

В своих исследованиях А.П. Норден использовал самый современный аппарат геометрии того времени – тензорный анализ, общую теорию пространств аффинной связности, проективную дифференциальную геометрию. Результаты докторской диссертации были опубликованы в «Трудах семинара по векторному и тензорному анализу» [22] Московского университета и вошли в монографию «Пространства аффинной связности» [35]. В течение долгого времени метод нормализации Нордена был основным инструментом исследования геометрии подмногообразий в аффинном и проективном пространствах, а его монография «Пространства аффинной связности» для нескольких поколений геометров стала настольной книгой.

Метод нормализации позволяет определить на всякой  $m$ -мерной поверхности  $\Sigma$   $n$ -мерного проективного пространства  $P_n$  внутреннюю геометрию. Внутренняя геометрия поверхности – это геометрия поверхности, рассматриваемой как самостоятельное геометрическое пространство. Одним из основных понятий внутренней геометрии поверхности является понятие параллельного перенесения векторов вдоль линий, расположенных на поверхности.

В евклидовом пространстве  $E_n$  вектор  $v(t)$ , заданный вдоль линии  $x(t)$  на поверхности  $\Sigma$  и лежащий в касательной плоскости к  $\Sigma$ , по определению является параллельным вдоль линии  $x(t)$ , если производная  $v'(t)$  в каждой точке  $x(t)$  направлена перпендикулярно поверхности. В отличие от параллельного перенесения на плоскости, при параллельном переносе вектора из одной точки в другую вдоль различных линий на поверхности результаты перенесения не совпадают (причиной этого явления является искривленность поверхности). Линия  $x(t)$  на поверхности  $\Sigma$  называется геодезической, если вдоль нее переносится параллельно ее касательный вектор  $x'(t)$ . В соответствии с этим определением при движении точки вдоль геодезической линии ее вектор ускорения  $x''(t)$  направлен перпендикулярно поверхности. Геодезические линии – это «прямейшие» линии на поверхности: при

движении по геодезической линии точка не поворачивает ни влево, ни вправо, поскольку ускорение либо прижимает точку к поверхности, либо отталкивает от нее. Например, на сфере  $S^2$  трехмерного евклидова пространства геодезическими линиями являются большие окружности – линии пересечения сферы с плоскостями, проходящими через ее центр.

В аффинном пространстве  $A_n$ , которое отличается от евклидова тем, что в нем нет скалярного произведения, для того, чтобы определить параллельное перенесение вдоль линий на поверхности  $\Sigma \subset A_n$ , необходимо дополнительно в каждой точке  $x \in \Sigma$  задать плоскость  $N_x$ , играющую роль нормальной плоскости поверхности  $\Sigma$ . Задание такого поля нормальных плоскостей называется оснащением поверхности. В этом случае вектор  $v(t)$ , заданный вдоль линии  $x(t)$  на поверхности  $\Sigma$ , считается переносящимся параллельно, если его производная  $v'(t)$  в каждой точке  $x(t)$  лежит в оснащающей плоскости  $N_{x(t)}$ .

Проективное пространство  $P_n$  получается из аффинного пространства  $A_n$  добавлением к каждой его прямой еще одной точки, называемой идеальной или бесконечно удаленной, которая замыкает прямую, превращая ее в окружность. У параллельных прямых бесконечно удаленная точка одна и та же, поэтому параллельные прямые аффинной геометрии после добавления идеальных точек оказываются пересекающимися. Все вместе идеальные точки проективного пространства  $P_n$  образуют идеальную гиперплоскость (плоскость размерности  $n-1$ )  $P_{n-1}$ . Топологически проективное пространство  $P_n$  представляет собой  $n$ -мерную сферу  $S^n$  со склеенными диаметрально противоположными точками и является компактным. Добавленная гиперплоскость  $P_{n-1}$  становится обычной плоскостью проективного пространства  $P_n$ , ничем не отличающейся от других гиперплоскостей: при движениях проективного пространства она может перейти в любую другую гиперплоскость. Поэтому, удалив из проективного пространства любую его гиперплоскость (объявив ее бесконечно удаленной), мы получим аффинное пространство.

Основной идеей метода нормализации Нордена является отнесение каждой точке  $x$   $m$ -мерной поверхности  $\Sigma$  в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n$  двух плоскостей:  $(n-m)$ -мерной плоскости  $P_1(x)$ , проходящей через точку  $x$  и не имеющей с касательной плоскостью  $T_x\Sigma$  поверхности  $\Sigma$  в точке  $x$  других общих точек, и  $(m-1)$ -мерной плоскости  $P_2(x)$ , расположенной в касательной плоскости  $T_x\Sigma$  и не проходящей через точку  $x$ . Плоскость  $P_1(x)$  называется нормалью первого рода, а плоскость  $P_2(x)$  – нормалью второго рода.

Нормаль второго рода играет роль бесконечно удаленной гиперплоскости  $P_{m-1}$  в ( $m$ -мерной) касательной плоскости к  $\Sigma$ , превращая ее в аффинное пространство  $A_m$ , а нормаль первого рода выполняет ту же функцию, что и нормальная плоскость  $N_x$  в аффинном пространстве.

Направление, касательное к  $\Sigma$ , переносится параллельно во внутренней геометрии этой поверхности тогда и только тогда, когда точка, соответствующая этому направлению на нормали второго рода, смещается по прямой, пересекающей нормаль первого рода. Внутренняя геометрия поверхности определяется деривационными уравнениями

$$\begin{cases} \partial_i \mathbf{x} = \mathbf{y}_i + l_i \mathbf{x}, \\ \partial_j \mathbf{y}_i = l_j \mathbf{y}_i + \Gamma_{ij}^k \mathbf{y}_k + p_{ji} \mathbf{x} + b_{ij}^a \mathbf{X}_a, \\ \partial_j \mathbf{X}_a = m_{ja}^k \mathbf{y}_k + m_{ja} \mathbf{x} + \Gamma_{ja}^b \mathbf{X}_b, \end{cases}$$

где  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор точки поверхности,  $\mathbf{X}_a$  – базисные точки нормали первого рода, а  $\mathbf{y}_i = \partial_i \mathbf{x} - l_i \mathbf{x}$  – базисные точки нормали второго рода. Эти деривационные

уравнения определяют связность  $\Gamma_{ij}^k$  в касательном расслоении и связность  $\Gamma_{ja}^b$  в нормальном расслоении поверхности  $\Sigma$ .

Объектами связности и тензорами, входящими в деривационные уравнения, нормализованная поверхность определяется однозначно с точностью до проективного преобразования. Это утверждение является основной теоремой теории нормализованных поверхностей проективного пространства, доказанной А.П. Норденом.

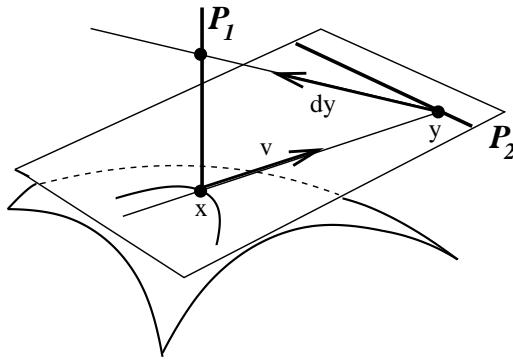


Рис. 1. Параллельное перенесение на нормализованной поверхности трехмерного проективного пространства

Поверхность  $\Sigma$  является вложенным подмногообразием в  $P_n$ , и метод нормализации А.П. Нордена применим и в том случае, когда это подмногообразие совпадает со всем проективным пространством  $P_n$  (или представляет собой область в  $P_n$ ). В этом случае нормаль первого рода  $P_1(x)$  имеет нулевую размерность и поэтому совпадает с точкой  $x$ , а нормаль второго рода  $P_2(x)$  является гиперплоскостью. Касательная связность нормализованного проективного пространства  $P_n$  оказывается проективно-евклидовой.

К особо интересным конструкциям метод нормализации приводит в случае пространств с проективной метрикой (и, в частности, в случае пространства Лобачевского): если в проективном пространстве  $P_n$  задана гиперквадрика (абсолют), то можно использовать так называемые полярные нормализации, когда нормали первого и второго рода в каждой точке  $x$  поверхности  $\Sigma$  являются взаимными полярными. В этом случае индуцированная связность оказывается связностью Вейля. Полярная же нормализация проективного пространства относительно невырожденного абсолюта приводит к пространствам постоянной кривизны.

Вскоре после издания монография «Пространства аффинной связности» [35] стала библиографической редкостью, и в 1976 году она была переиздана, дополненная новыми разделами. В новом издании [49] теория нормализации была изложена с использованием разработанного А.П. Норденом аппарата ковариантного дифференцирования сечений расслоенных пространств с одномерными слоями, названного им «продолженным дифференцированием». Это позволило с новой точки зрения осмысливать строение основных уравнений нормализованной поверхности в проективном пространстве. Новое издание также вскоре исчезло с прилавков книжных магазинов.

С 1930 года А.П. Норден начал вести занятия на физическом факультете Московского университета, сначала в качестве ассистента, а затем доцента (с 1932 года) и профессора (с 1937 года). В 1941 году он назначается заведующим кафедрой математики Новосибирского института военных инженеров железнодорожного транспорта.

С 1945 года А.П. Норден заведует кафедрой геометрии Казанского университета. В Казани он продолжает активно заниматься научными исследованиями, успешно применяя метод нормализации при изучении геометрии обобщенных пространств [28, 29]. Его научные интересы чрезвычайно широки, они охватывают такие области дифференциальной геометрии, как пространства аффинной связности [25, 26], биаксиальные и биаффинные пространства [27, 36], конформная геометрия [31, 34], линейчатая геометрия [32], теория сетей [24], а также научное наследие Н.И. Лобачевского [37, 38, 40]. В этот период в научном творчестве А.П. Нордена появляется новый круг идей, связанных с использованием в геометрических исследованиях комплексных чисел и их обобщений: так называемых двойных и дуальных чисел [33, 39, 45, 47].

Комплексные числа всегда привлекали внимание геометров возможностью расширения привычного нам пространства с помощью дополнения его комплексными точками. При таком расширении оказывается, например, что прямая на плоскости, не пересекающая гиперповерхность второго порядка в обычных вещественных точках, пересекает ее в мнимых комплексных точках. Более того, развитие идей К.Ф. Гаусса, осознавшего, что одномерное комплексное пространство (комплексная прямая) является двумерным вещественным пространством (вещественной плоскостью), открыло перед геометрами новые возможности применения комплексных чисел: обычную двумерную поверхность можно было представлять как комплексную кривую, а четырехмерное пространство – как комплексную поверхность.

В работах [45, 47] А.П. Норден ввел структуру комплексного келерова пространства на многообразии прямых в пространстве постоянной кривизны и подробно изучил геометрию этого пространства (следует отметить, что пространства, называемые сейчас келеровыми, были открыты другим замечательным казанским геометром П.А. Широковым в 20-х годах прошлого столетия [72]). Существенным достижением А.П. Нордена стало также построение комплексного представления тензоров пространства Лоренца – пространства специальной теории относительности А. Эйнштейна [43].

Дуальные числа  $a + b\varepsilon$  были введены в начале XX века немецким геометром Е. Штуди [81]. Принципиальным отличием алгебры дуальных чисел от алгебр комплексных и вещественных чисел является наличие в ней делителей нуля, то есть произведение двух ненулевых дуальных чисел может быть равно нулю, в частности, нулю равен квадрат дуальной единицы:  $\varepsilon^2 = 0$ . Дуальные числа оказались очень удобными для описания линейчатых поверхностей (то есть поверхностей, образованных движением прямой линии) и многообразий, образованных касательными векторами к поверхности. В конце XIX века известный казанский математик А.П. Котельников [19] построил соответствие между прямыми трехмерного пространства и касательными векторами к сфере, называемое в настоящее время «принципом перенесения Котельникова–Штуди». При этом соответствие прямой трехмерного евклидова пространства относится точка дуальной сферы  $S^2(\varepsilon)$ . Принцип перенесения Котельникова–Штуди был изложен немецким геометром В. Бляшке в книге «Дифференциальная геометрия» [3], которую А.П. Норден изучал еще будучи молодым преподавателем Московского университета (позже, в 30-х годах XX века А.П. Норден лично познакомился с В. Бляшке и некоторое время будет поддерживать с ним научные контакты). В 1950 году в «Ученых записках Казанского университета» выходит статья А.П. Нордена «О параллельном перенесении дуальных векторов» [33], в которой он охарактеризовал абсолютный параллельный перенос вектора дуального пространства в терминах геометрии линейчатой поверхности. Применение А.П. Нордена алгебр комплексных, двойных и дуальных чисел при изучении биаксиальных, биаффинных и бипланарных

пространств, линейчатой геометрии неевклидовых пространств привело к появлению нового научного направления – теории многообразий над алгебрами [13, 14], которое стало одним из основных направлений исследований кафедры геометрии Казанского университета.

В работах Г.Е. Изотова [17], А.П. Широкова [67], Р.Г. Бухараева [5, 6], В.В. Вишневского [10], А.С. Подковырина [53, 54], Н.В. Талантовой [60] и ряда других казанских геометров, выполненных под руководством А.П. Нордена, с использованием алгебр комплексных, двойных и дуальных чисел была изучена геометрия биаксимальных, бипланарных, биаффинных и унитарных пространств. Г.В. Бушманова изучала инварианты сетей в метрических пространствах [7]. В.И. Шуликовским была построена теория сетей в двумерных пространствах аффинной связности [74], в основу которой был положен оригинальный подход А.П. Нордена, предполагающий систематическое использование бивектора в качестве версора. Теория пространств над алгебрами общего вида развивалась в работах А.П. Широкова и В.В. Вишневского. А.П. Широков детально изучил геометрию  $G$ -структур, определяемых ассоциативными алгебрами [68]. Им были открыты структуры гладких многообразий над алгебрами на расслоениях  $A$ -близких точек Вейля, и, в частности, на касательных расслоениях, что позволило построить естественную теорию лифтов геометрических объектов на эти расслоения [69, 70]. В.В. Вишневский развил теорию многообразий над алгебрами, определяемых интегрируемыми аффинными структурами общего вида, что привело его в дальнейшем к открытию важного класса расслоенных многообразий – полукасательных расслоений [11, 12] (подробнее о работах В.В. Вишневского можно прочитать в статье [55], опубликованной в настоящем издании). В 1984 году вышла монография [13], посвященная геометрии многообразий над алгебрами. В работах В.В. Шурыгина были построены глобальные инварианты многообразий над локальными алгебрами и изучено действие функтора Вейля на категории многообразий над алгебрами [75]. В работах В.Е. Фомина метод нормализации был обобщен на бесконечномерные многообразия [61]. М.А. Малахальцевым изучались слоения с тангенциальными структурами, являющимися обобщением структур, естественно возникающих на слоях канонического слоения многообразия над алгеброй [20]. К.Б. Игудесманом исследовались бесконечномерные многообразия над алгебрами [16]. А.В. Бояршинова изучала пространства существенных инфинитезимальных деформаций структуры многообразия над алгеброй плуральных чисел [4]. Т.И. Гайсин исследовал пространство базовых функций канонического слоения многообразия над алгеброй [15].

В 1970-х годах А.П. Норден разработал общую теорию, названную им «теорией композиций», содержащую эффективные методы исследования геометрии расслоенных пространств и многообразий со слоениями [50]. В дальнейшем связь между геометрией тотального пространства расслоенного многообразия и геометрией его базы подробно изучалась Б.Н. Шапуковым [63]. Развивая идеи замечательного казанского геометра и историка науки Б.Л. Лаптева [65], он построил теорию дифференцирования Ли на расслоенных многообразиях [64]. В.И. Ведерниковым метод нормализации был обобщен на случай инфинитезимальной связности в расслоенном пространстве [8], им также изучались сопряженные связности в симметрических пространствах [9]. А.В. Чакмазяном метод нормализации был применен к изучению геометрии нормальных расслоений поверхностей многомерногоективного пространства [62]. Э.Г. Нейфельдом изучалась аффинные связности на многообразии плоскостей проективного пространства [21]. Информацию о других научных исследованиях, проводившихся в русле тематики казанской геометрической школы, можно найти в работах [13, 14, 51, 66, 70, 71].

Идеи А.П. Нордена оказали существенное влияние на развитие геометрии не только в нашей стране, но и за рубежом. Обратившийся к реферативному журналу «Zentralblatt für Mathematik» легко получит список более чем из 50-ти статей российских и зарубежных ученых, только в названии которых присутствует имя Нордена. Оно прочно вошло в современную математическую терминологию, в названиях научных публикаций можно встретить: обобщенные пространства Нордена, сопряженные связности в смысле Нордена, пространства Оцуки–Нордена, нормализованное подмногообразие в смысле Нордена, комплексные координаты Нордена, преобразования Нордена–Мирона, эндоморфизм Нордена, неголономные композиции Нордена, метрики Нордена, теорему Картана–Нордена, связности Нордена–Тимофеева и другие термины, содержащие его имя. В настоящее время переживает второе рождение классическая область геометрических исследований – аффинная дифференциальная геометрия (см. монографии [78, 79], а также статью У. Симона [58], опубликованную в журнале «Известия вузов. Математика», № 11 за 2004 год, посвященном 100-летию со дня рождения А.П. Нордена). В современных исследованиях по аффинной дифференциальной геометрии активно используются сопряженные связности, введенные А.П. Норденом [23] и примененные им при изучении дифференциальной геометрии гиперповерхностей в аффинном пространстве [44]. Метод нормализации Нордена и теория сопряженных связностей активно применяются и в современных исследованиях по проективной и конформной дифференциальной геометрии (см., например, монографии [76, 77], а также статьи М.А. Акивиса, В.В. Гольдберга, А.В. Чакмазяна [1] и А.В. Столярова [59], опубликованные в журнале «Известия вузов. Математика», № 10 за 2004 год, посвященном 100-летию со дня рождения А.П. Нордена).

Александр Петрович Норден обладал ярким педагогическим талантом. Его лекции по общему курсу дифференциальной геометрии, лаконичные, но проясняющие основные идеи, оставляющие в памяти четкие геометрические образы, помнят многие поколения студентов. Учебник А.П. Нордена «Дифференциальная геометрия» [30], позже переизданный в переработанном варианте как «Краткий курс дифференциальной геометрии» [42] и переведенный на ряд иностранных языков, до сих пор исключительно высоко оценивается студентами за простоту, доступность и, вместе с тем, полноту и глубину изложения основных фактов дифференциальной геометрии кривых и поверхностей трехмерного пространства. Другой его учебник «Теория поверхностей» [41] представляет большой интерес и для специалистов, так как в нем на современном языке, с использованием тензорного анализа, изложены классические результаты теории поверхностей, которые нелегко отыскать в других изданиях.

Еще одна сторона педагогической деятельности А.П. Нордена – научное руководство. Обладая образным геометрическим мышлением, А.П. Норден никогда не ограничивался формальным аналитическим исследованием геометрических объектов, но стремился добиться их четкой геометрической интерпретации. Такого же глубокого понимания геометрической природы изучаемых объектов он требовал и от своих учеников. Это сформировало одно из характерных качеств исследователей Казанской геометрической школы – внимание именно к геометрической стороне проводимых исследований. Под руководством А.П. Нордена защищено около 40 кандидатских диссертаций, его ученики работают в Прибалтике и Средней Азии, Закавказье и Болгарии, один его ученик Хосе Рикардо Артеага преподает в далекой Колумбии. Семь его учеников Р.Г. Бухараев, В.И. Ведерников, В.В. Вишневский, А.И. Чахтаури, А.П. Широков, В.И. Шуликовский, В.В. Шурыгин стали докторами наук.

Известный советский геометр и историк науки Б.А. Розенфельд, автор монографий по неевклидовой геометрии и геометрии групп Ли [56, 80], в 1939 году, будучи в то время студентом МГУ, написал под руководством А.П. Нордена свою первую работу по геометрии, посвященную линейчатой геометрии трехмерного эллиптического пространства, которая, по его словам, определила все дальнейшее направление его геометрических исследований [57].

А.П. Норден обладал выдающимися организаторскими способностями. Он сыграл ключевую роль в организации журнала «Известия вузов. Математика» и с самого его основания более двадцати лет (1957–1979) возглавлял работу редакции, создав в конечном итоге журнал, имеющий авторитет мирового уровня.

Под руководством А.П. Нордена в Казанском университете активно функционировал геометрический семинар, на котором выступали с докладами как известные, так и молодые геометры из всех регионов Советского Союза. Многие ведущие советские геометры защитили докторские диссертации в Казани при непосредственной поддержке А.П. Нордена.

В Казани прошел ряд Всесоюзных геометрических конференций, в организации которых А.П. Норден принимал самое активное участие (см., например, [46]). О признании роли А.П. Нордена в жизни Казанской математической школы свидетельствует и тот факт, что свыше тридцати лет он был председателем Казанского физико-математического общества.

Много размышлял А.П. Норден о драматической истории открытия неевклидовой геометрии, и, в частности, о той роли, которую сыграл в ней К.Ф. Гаусс [37, 40]. Под его редакцией и с его комментариями были изданы труды Н.И. Лобачевского, сборник «Об основаниях геометрии» [52], содержащий ставшие классическими работы Гаусса, Бельтрами, Римана, Клейна, Гильберта, Пуанкаре, Ли, Картана по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Популяризации идей Лобачевского немало способствовала его книга «Элементарное введение в геометрию Лобачевского», которая для многих молодых людей послужила импульсом, побудившим их заняться геометрическими исследованиями. Пристальное внимание А.П. Норден уделял историческим документам времени открытия неевклидовой геометрии, в частности, рукописям Н.И. Лобачевского (см., например, его краткую заметку «О рукописи Н.И. Лобачевского “Начальные основания логики”» [48]).

Под редакцией А.П. Нордена вышло десять выпусков Трудов геометрического семинара Казанского университета, монографии и учебники, опубликованные в центральных издательствах.

Научная и педагогическая деятельность А.П. Нордена была по достоинству оценена присвоением ему почетных званий Заслуженного деятеля науки ТАССР (1954 г.) и РСФСР (1964 г.). Правительство СССР наградило его орденами Трудового Красного Знамени и Знак Почета. В 1992 году ему была присуждена медаль имени Н.И. Лобачевского «За выдающиеся работы в области геометрии».

Александр Петрович Норден скончался 13 февраля 1993 года на 89-ом году жизни, он похоронен в Казани на Арском кладбище.

Столетие со дня рождения А.П. Нордена широко отмечалось в Казанском университете. Была проведена научная конференция, посвященная его памяти. Выпущено два номера научного журнала «Известия вузов. Математика» (№ 10, № 11 за 2004 г.), содержащие научные статьи, посвященные памяти А.П. Нордена, присланные учеными из научных центров России, Армении, Белоруссии, Германии, Израиля, Норвегии, Польши, США, Украины, Чехии. Редакция журнала готовит третий выпуск (№ 5 за 2005 г.), посвященный его памяти. Издательством Казанского университета опубликована книга «Александр Петрович Норден, 1904–1993» [2].

**Литература**

1. *Акивис М.А., Гольдберг В.В., Чакмазян А.В.* Индуцированные связности на многообразиях в пространствах с фундаментальными группами // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 3–18.
2. *Александр Петрович Норден (1904–1993)* / Ред. и сост. М.А. Малахальцев, В.В. Шурыгин. Сер. Выдающиеся ученые Казанского университета. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2001. – 40 с.
3. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. – М.-Л.: ОНТИ-НКТП, 1935. – 330 с.
4. *Бояршинова А.В.* Пространство существенных инфинитезимальных деформаций // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 8. – С. 3–12.
5. *Бухараев Р.Г.* Теория конгруэнций биаксиального пространства // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 5. – С. 67–69.
6. *Бухараев Р.Г.* К теории поверхностей биаффинного пространства // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 3. – С. 67–69.
7. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Об инвариантах сетей в метрических пространствах // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1951. – Т. 111, Кн. 8. – С. 5–12.
8. *Ведерников В.И.* Обобщение метода нормализации А.П. Нордена на случай расслоенного пространства // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1963. – Т. 123, Кн. 1 – С. 3–23.
9. *Ведерников В.И.* Симметрические пространства. Сопряженные связности как нормализованные связности // Тр. геом. сем. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 1. – С. 63–88.
10. *Вишневский В.В.* О комплексных структурах одного класса пространств Кэлера–Рашевского // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 149, Вып. 2. – С. 233–236.
11. *Вишневский В.В.* Многообразия над плуральными числами и полукасательные структуры // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 20. – М.: ВИНИТИ, 1988. – С. 35–75.
12. *Вишневский В.В.* Интегрируемые аффинорные структуры и их плуральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная матем. и ее прилож. Т. 73. – М.: ВИНИТИ, 2002. – С. 6–64.
13. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 264 с.
14. *Вишневский В.В., Розенфельд Б.А., Широков А.П.* О развитии геометрии пространств над алгебрами // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 7. – С. 38–44.
15. *Гайсин Т.И.* К вопросу о принципе максимума для многообразий над локальными алгебрами // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46, № 1. – С. 79–89.
16. *Игудесман К.Б.* Дифференциальная геометрия бесконечномерных многообразий над алгебрами // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1999. – 12 с.
17. *Изотов Г.Е.* Поверхности второго порядка бипланарного пространства // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 1(2). – С. 89–102.
18. *Конн В.Г., Лаптев Б.Л., Широков А.П., Шумиковский В.И.* Александр Петрович Норден (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. – 1964. – Т. 19, Вып. 5. – С. 171–179.
19. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые его приложения к геометрии и механике. – Казань, 1895. – 216 с.
20. *Малахальцев М.А.* Слоения с листовыми  $(X, G)$ -структурами // Итоги науки и техники. Современная матем. и ее прилож. Т. 73. – М.: ВИНИТИ, 2002. – С. 65–102.

21. *Нейфельд Э.Г.* Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 11. – С. 48–55.
22. *Норден А.П.* Релятивная геометрия поверхностей в проективном пространстве // Тр. сем. по вект. и тенз. анал. – М.-Л., 1935. – Вып. 2–3. – С. 229–268. (на нем. яз.)
23. *Норден А.П.* О парах сопряженных параллельных перенесений в многомерных пространствах // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 49. – С. 649–652.
24. *Норден А.П.* Об инвариантах сопряженных сетей // Докл. АН СССР. – 1946. – Т. 53. – С. 499–502.
25. *Норден А.П.* Пространство аффинной связности, допускающее дробно-линейный интеграл геодезических // Матем. сб. – 1946. – Т. 18, Вып. 60. – С. 125–138.
26. *Норден А.П.* Проективно-евклидова геометрия Вейля // Матем. сб. – 1946. – Т. 18, Вып. 60. – С. 153–167.
27. *Норден А.П.* Внутренняя геометрия поверхностей пространства биаксиальной группы // Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 55. – С. 199–202.
28. *Норден А.П.* Риманова геометрия на поверхностях проективного пространства // Докл. АН СССР. – 1948. – Т. 60. – С. 345–347.
29. *Норден А.П.* О нормализованных поверхностях пространства Мебиуса // Докл. АН СССР. – 1948. – Т. 61. – С. 207–210.
30. *Норден А.П.* Дифференциальная геометрия. – М.: Учпедгиз, 1948 (перев. на украинский яз. – 1951 г., на корейский – 1955 г., на немецкий – 1956 и 1957 гг.).
31. *Норден А.П.* Конформная интерпретация пространства Вейля // Матем. сб. – 1949. – Т. 24, Вып. 66. – С. 75–85.
32. *Норден А.П.* Пространство линейной конгруэнции // Матем. сб. – 1949. – Т. 24, Вып. 66. – С. 429–455.
33. *Норден А.П.* О параллельном перенесении дуальных векторов // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1950. – Т. 110, Вып. 3. – С. 95–103.
34. *Норден А.П.* О нормализованных поверхностях конформного пространства // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1950. – Т. 14. – С. 105–122.
35. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.-Л.: Физматгиз, 1950. – 463 с.
36. *Норден А.П.* Биаффинное пространство и его отображение на себя // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1952. – Т. 112, Вып. 10. – С. 3–11.
37. *Норден А.П.* 125 лет неевклидовой геометрии // 125 лет геометрии Лобачевского. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
38. *Норден А.П.* Элементарное введение в геометрию Лобачевского. – М.: Гостехиздат, 1953. – 218 с. (перев. на немецкий язык – 1958 г., на китайский – 1958 г.).
39. *Норден А.П.* О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1954. – Т. 114, Вып. 8. – С. 45–53.
40. *Норден А.П.* Гаусс и Лобачевский // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. 9. – С. 145–168.
41. *Норден А.П.* Теория поверхностей. – М.: Гостехиздат, 1956. – 260 с.
42. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: Физматгиз, 1957. – 244 с.
43. *Норден А.П.* О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 1. – С. 156–163.

44. *Норден А.П.* О внутренней геометрии 2-го рода на гиперповерхности аффинного пространства. – Приложение к монографии [73]. – С. 275–291.
45. *Норден А.П.* Пространства декартовой композиции // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 4. – С. 117–128.
46. *Норден А.П., Вишневский В.В.* О третьей Всесоюзной геометрической конференции // УМН. – 1968. – Т. 23, Вып. 2. – С. 249–257.
47. *Норден А.П.* О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 84–94.
48. *Норден А.П.* О рукописи Н.И. Лобачевского «Начальные основания логики» // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 8. – С. 76.
49. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.-Л., М.: Наука, 1976.
50. *Норден А.П.* Теория композиций // Итоги науки и техники Проблемы геометрии. Т. 10. – М.: ВИНИТИ, 1978. – С. 117–145.
51. *Норден А.П., Широков А.П.* Наследие Н.И. Лобачевского и деятельность казанских геометров // УМН. – 1993. – Т. 48, Вып. 2. – С. 47–74.
52. *Об основаниях геометрии. Сб. классических работ.* – М.: Гостехиздат, 1956.
53. *Подковырин А.С.* Гиперповерхности унитарного пространства. I // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 8. – С. 41–52.
54. *Подковырин А.С.* Гиперповерхности унитарного пространства. II // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 9. – С. 75–85.
55. *Подковырин А.С., Салимов А.А., Шурыгин В.В.* Очерк научной и педагогической деятельности В.В. Вишневского (к 75-летию со дня рождения) // Тр. геом. сем. – Казань, 2005. – Вып. 25.
56. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1955. – 744 с.
57. *Розенфельд Б.А. А.П. Норден и геометрия квазипростых и k-квазипростых групп Ли и алгебр* // Тр. сем. каф. геом. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. – Вып. VII. – С. 98–106.
58. *Симон У.* К аффинной теории гиперповерхностей: калибровочно инвариантные структуры // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 53–81.
59. *Столяров А.В.* Конформно-дифференциальная геометрия плоских ортогональных сетей // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 61–70.
60. *Талантова Н.В.* Биаксиальное пространство параболического типа // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 3. – С. 214–228.
61. *Фомин В.Е.* Основные уравнения нормализованной поверхности бесконечномерного проективного пространства // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – Вып. 13. – С. 81–89.
62. *Чакмазян А.В.* Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия  $V_m$  в  $P_n$  // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 10. – М.: ВИНИТИ, 1978. – С. 55–74.
63. *Шапуков Б.Н.* Связности на дифференцируемых многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 15. – М.: ВИНИТИ, 1983. – С. 61–93.
64. *Шапуков Б.Н.* Производная Ли на расслоенных многообразиях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Т. 73. – М.: ВИНИТИ, 2002. – С. 103–134.

65. Шапуков Б.Н. Борис Лукич Лаптев (1905–1989) // Сер. «Выдающиеся ученые Казанского университета». – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2001. – 23 с.
66. Шапуков Б.Н. Кафедра геометрии // Механико-математический факультет Казанского университета: Очерки истории 1960–2000. – Казань: УНИПРЕСС, 2000. – С. 27–44.
67. Широков А.П. Геометрия обобщенных биаксиальных пространств // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1954. – Т. 114, Кн. 2. – С. 123–166.
68. Широков А.П. Об одном типе  $G$ -структур, определяемых алгебрами // Тр. геом. сем. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 1. – С. 425–456.
69. Широков А.П. Замечания о структурах в касательных расслоениях // Тр. геом. сем. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – Т. 5. – С. 311–318.
70. Широков А.П. Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 12. – М.: ВИНИТИ, 1981. – С. 61–95.
71. Широков А.П. Пространства над алгебрами и их применение // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Т. 73. – М.: ВИНИТИ, 2002. – С. 135–161.
72. Широков П.А. Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в римановых пространствах // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. Сер. 2. – 1925. – Т. 25. – С. 48–55.
73. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 320 с.
74. Шумиловский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. – М.: Физматгиз, 1963. – 540 с.
75. Шурыгин В.В. Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Т. 73. – М.: ВИНИТИ, 2002. – С. 162–236.
76. Akivis M.A., Goldberg V.V. Projective Differential Geometry of Submanifolds. – Amsterdam: North-Holland, 1993. – 362 p.
77. Akivis M.A., Goldberg V.V. Conformal Differential Geometry and its Generalizations. – N.-Y.: John Wiley and Sons, 1996. – 383 p.
78. Li A.M., Simon U., Zhao G. Global affine differential geometry of hypersurfaces. – Berlin and New York: De Gruyter, 1993.
79. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. – Cambridge Univ. Press, 1993.
80. Rosenfeld B.A. Geometry of Lie Groups. – Boston: Kluwer Academic Publishers. – 393 p.
81. Study E. Geometrie der Dynamen. – Leipzig, 1902. – 603 s.

Поступила в редакцию  
10.12.04

---

**Малахальцев Михаил Арменович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Mikhail.Malakhaltsev@ksu.ru*

**Шурыгин Вадим Васильевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Vadim.Shurygin@ksu.ru*