

УДК 539.189.1

## ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА НА ХАРАКТЕР ДИНАМИКИ МЮОНА В ПОЛЕ ЯДРА

*Р.Х. Гайнутдинов, А.С. Июдин, А.А. Мутыгуллина*

### Аннотация

Исследуется динамика мюона в поле ядра с учетом эффектов поляризации электронного вакуума. С помощью обобщенного динамического уравнения проведены расчеты лэмбовского сдвига энергетических уровней атомов с различными атомными номерами. Показано, что при вычислении энергетических уровней мюонных атомов эффекты нелокальности взаимодействия мюона с ядром являются несущественными. Вместе с тем, результаты расчетов показывают, что эти эффекты становятся очень существенными при описании процессов взаимодействия мюонного атома с полем излучения, сопровождаемых рождением электрон-позитронных пар.

### Введение

В настоящее время возникшая на стыке атомной физики, квантовой электродинамики и ядерной физики теория мюонного атома дает предсказания, которые с большой точностью подтверждаются экспериментальными данными [1, 2]. Одним из важных приложений теории мюонных атомов является исследование структуры атомных ядер. В этих исследованиях мюон используется как пробная частица, которая благодаря большой массе может проникать внутрь ядра. Ввиду того, что радиус борновской орбиты для мюона в 206 раз меньше, чем у соответствующего обычного атома, в тяжелых атомах мюон в низших энергетических состояниях проводит примерно половину времени жизни внутри ядра. Поэтому расположение таких уровней очень чувствительно к распределению заряда в ядре. Другим следствием большой массы мюона является то, что в мюонных атомах важную роль играют эффекты, связанные с поляризацией электронного вакуума. Это обусловлено тем, что поляризация вакуума существенно искажает кулоновское взаимодействие между заряженными частицами на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона, а в тяжелых мюонных атомах орбиты находятся на таких расстояниях от ядра. Важность этих эффектов обусловлена тем, что эффективное взаимодействие между мюоном и ядром является нелокальным во времени, поскольку оно связано с процессами, в которых происходит рождение и последующая аннигиляция электрон-позитронных пар. В обычной теории мюонного атома эта нелокальность взаимодействия не учитывается, хотя в тяжелых атомах она может играть важную роль. В настоящей работе влияние нелокальности во времени взаимодействия на характер динамики мюона в поле ядра исследуется с помощью формализма обобщенной квантовой динамики [3], который в отличие от стандартных методов квантовой теории позволяет последовательно описывать динамику квантовых систем с нелокальным во времени взаимодействием.

### 1. Обобщенное динамическое уравнение

В работе [3] было показано, что уравнение Шредингера не является самым общим динамическим уравнением, совместным с современными концепциями квантовой физики, и более общее уравнение движения было выведено как следствие основополагающих физических принципов. Являясь эквивалентным уравнению Шредингера в случае, когда взаимодействие в системе является мгновенным, это обобщенное динамическое уравнение позволяет расширить квантовую динамику на случай нелокальных во времени взаимодействий. Развитый таким образом формализм обобщенной квантовой динамики (ОКД) открывает новые возможности для решения многих проблем квантовой физики [4, 5]. В данной работе этот формализм используется для исследования взаимодействия мюонного атома с электронным вакуумом. В формализме ОКД оператор эволюции представляется в следующей форме [3]

$$\langle \psi_2 | U(t, t_0) | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \langle \psi_2 | \tilde{S}(t_2, t_1) | \psi_1 \rangle. \quad (1)$$

Здесь  $\langle \psi_2 | \tilde{S}(t_2, t_1) | \psi_1 \rangle$  – амплитуда вероятности того, что если в момент времени  $t_1$  состояние системы было  $|\psi_1\rangle$ , то взаимодействие в системе начнется в момент времени  $t_1$ , закончится в момент времени  $t_2$ , и в тот же момент система будет обнаружена в состоянии  $|\psi_2\rangle$ . Первый член в правой части (1) описывает вклад от процесса, в котором взаимодействие в системе не происходит ни в один момент времени. Используя представление (1), для оператора эволюции можем записать выражение

$$U(t, t_0) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i(z - H_0)t)}{(z - H_0)} T(z) \frac{\exp(i(z - H_0)t)}{(z - H_0)} dz, \quad (2)$$

где

$$T(z) = i \int_0^{\infty} \exp[iz\tau] \tilde{T}(\tau) d\tau$$

и

$$\tilde{T}(\tau) = \exp(-iH_0 t_2) \tilde{S}(t_2, t_1) \exp(iH_0 t_1).$$

В терминах оператора  $T(z)$  обобщенное динамическое уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{d\langle \psi_2 | T(z) | \psi_1 \rangle}{dz} = - \sum_n \frac{\langle \psi_2 | T(z) | n \rangle \langle n | T(z) | \psi_1 \rangle}{(z - E_n)^2} \quad (3)$$

с граничным условием

$$T(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} B(z), \quad (4)$$

где

$$B(z) = i \int_0^{\infty} d\tau \exp[iz\tau] \exp(-iH_0 t_2) H(t_2, t_1) \exp(iH_0 t_1).$$

Физический смысл граничного условия (4) заключается в том, что в пределе бесконечно больших энергий основной вклад в оператор  $T(z)$  вносят процессы с бесконечно малыми временами взаимодействия, описываемые обобщенным оператором

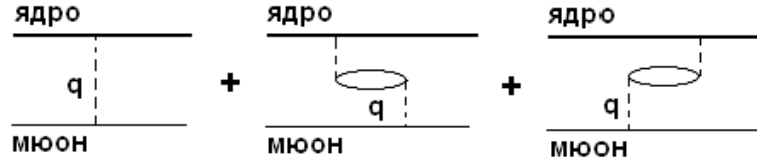


Рис. 1. Упорядоченные во времени диаграммы, описывающие взаимодействие между мюоном и ядром

взаимодействия  $H_{\text{int}}(t_2, t_1)$ . Таким образом, характер динамики системы зависит от поведения оператора  $T(z)$  в пределе бесконечно больших энергий. Если в этом пределе оператор  $T(z)$  стремится к некоторому оператору  $H_I$ , то есть  $B(z) = H_I$ , то динамика системы описывается уравнением Шредингера с гамильтонианом взаимодействия  $H_I$  (в представлении Шредингера). Однако, поскольку ни одна теория не может быть справедливой для всех энергий, граничное условие (4) для уравнения (3) следует рассматривать как условие, определяющее поведение оператора  $T(z)$  для  $z \in D$ , где  $D$  – некоторая область значений, для которых  $z$  много больше характерной энергии рассматриваемой теории, но много меньше характерной энергии более фундаментальной теории.

## 2. Динамика мюонов в поле ядра

Для рассматриваемой в работе динамики в поле ядра область  $D$  должна лежать много выше характерного энергетического масштаба этой системы, определяемого энергией ионизации атома  $E_{\text{ion}}$ , так, чтобы основной вклад в  $T$ -матрицу, описывающую динамику мюона в поле ядра, вносили упорядоченные во времени диаграммы квантовой электродинамики, представленные на рис. 1. Однопетлевые диаграммы описывают вклад от процессов, связанных с поляризацией вакуума. Вычисляя вклады от каждой из этих упорядоченных во времени диаграмм, для оператора взаимодействия получим следующее выражение [6]

$$\langle \mathbf{p}_2 | B(z) | \mathbf{p}_1 \rangle = -\frac{Ze^2}{q^2} + \langle \mathbf{p}_2 | B_{\text{pol}}(z) | \mathbf{p}_1 \rangle, \quad (5)$$

где

$$\langle \mathbf{p}_2 | B_{\text{pol}}(z) | \mathbf{p}_1 \rangle = -\frac{Ze^2}{q^4} \left( \tilde{\Pi}_{00}(z - E_{p_1}, \mathbf{q}) + \tilde{\Pi}_{00}(z - E_{p_2}, \mathbf{q}) \right) \quad (6)$$

и

$$\tilde{\Pi}_{00}(z, \mathbf{q}) = -\frac{\alpha}{\pi} q^2 \tilde{J}(z, q), \quad (7)$$

где

$$\tilde{J}(z, q) = -\frac{2m_e^2}{3} \int_1^\infty \frac{dx (x + 1/2) \sqrt{x - 1}}{x^{3/2} (4m_e^2 x - z^2 + q^2 + i0)} \left( \frac{z}{\sqrt{q^2 + 4m_e^2 x}} + \frac{z^2 - q^2}{4m_e^2 x} \right). \quad (8)$$

Первый член в правой части уравнения (5) описывает вклад от процесса, в котором ядро и мюон обмениваются одним кулоновским фотоном, а второй – процесс, при котором обмен фотоном между мюоном и ядром сопровождается рождением и поглощением виртуальной электрон-позитронной пары и, очевидно, является нелокальным во времени. Решая обобщенное динамическое уравнение с этим оператором взаимодействия, можно описать динамику мюона в поле ядра. Например,

можно описать процесс захвата мюона ядром и найти связанные состояния, которые определяют состояния мюонного атома и его энергетические уровни. Вклад от эффектов поляризации, которые в операторе взаимодействия (5) описываются нелокальным оператором  $B_{\text{pol}}(q, 0)$ , может рассматриваться как поправка к кулоновскому взаимодействию. По этой причине мы можем начать с решения уравнения (3) с оператором взаимодействия

$$\langle \mathbf{p}_2 | B(z) | \mathbf{p}_1 \rangle = -\frac{Ze^2}{q^2}. \quad (9)$$

В этом случае уравнение (3) является эквивалентным уравнению Шредингера

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (10)$$

с гамильтонианом Дирака, который в координатном представлении имеет вид

$$H = -i\boldsymbol{\alpha}\nabla + \beta m - \frac{Z\alpha}{r}, \quad (11)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi$ . Вместо свободных состояний, в качестве базисных состояний можно использовать полную систему векторов  $|\Psi_n\rangle$ , являющихся решениями уравнения Дирака

$$H\Psi = (-i\boldsymbol{\alpha}\nabla + \beta m - \frac{Z\alpha}{r})\Psi. \quad (12)$$

Состояния  $|\Psi_n\rangle$  можно рассматривать как «свободные» состояния системы. Если взаимодействие в системе, за исключением взаимодействия частиц с кулоновским полем, отсутствует, то эволюция системы описывается «свободным» оператором Грина

$$G_0(z) = \sum_n \frac{|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|}{z - E_n}, \quad (13)$$

где  $E_n$  – энергия системы в состоянии  $|\Psi_n\rangle$ . Теперь для описания динамики системы мы должны учесть, что частицы в «свободных» состояниях  $|\Psi_n\rangle$  могут участвовать в других взаимодействиях, например, в процессах рождения и поглощения фотонов и электрон-позитронных пар. Причем последний процесс является доминирующим в мюонных атомах. Процесс взаимодействия, связанный с рождением и уничтожением виртуальной электрон-позитронной пары, в таком представлении, можно рассматривать как взаимодействие мюонов, находящихся в «свободных» состояниях  $|\Psi_n\rangle$  с вакуумом. Вид оператора  $B_{\text{vac}}(z)$ , описывающего такое взаимодействие, очевидным образом связан с видом оператора  $B_{\text{pol}}(z)$

$$\langle \Psi_m | B_{\text{vac}}(z) | \Psi_n \rangle = \delta_{mn} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} U_n(q) B_{\text{pol}}(z, q), \quad (14)$$

где

$$U_n(q) = \int d^3r \Psi_n^*(r) \Psi_n(r) \exp[-i\mathbf{q}\mathbf{r}]. \quad (15)$$

В теориях, в которых рассматривается взаимодействие с вакуумом,  $T$ -матрица, определяемая соотношением (3), описывает не только взаимодействие между частицами системы, но и их собственную энергию. Это отражается в том, что  $T$ -матрица содержит член, который имеет такую же структуру, как первый член в операторе эволюции (2), описывающий вклад в этот оператор от процессов, когда в

системе нет взаимодействия. Другими словами,  $T$ -матрица может быть представлена в форме

$$\langle n_2|T(z)|n_1\rangle = \langle n_2|n_1\rangle\mu(z, n_1) + \langle n_2|T'(z)|n_1\rangle,$$

где  $\mu(z, n_1)$  – некоторая функция, описывающая собственную энергию частиц, и  $\langle n_2|T'(z)|n_1\rangle$  описывает вклад в  $T$ -матрицу от процессов, когда существует взаимодействие, по крайней мере, между двумя частицами в системе. Так как в моментном базисе  $\langle n_2|n_1\rangle$  есть произведение дельта-функций  $\delta^3(p_2 - p_1)$  для каждой из частиц в состоянии  $|n_1\rangle$ , присутствие собственной энергии частиц в уравнении (3) ведет к тому, что оно оказывается расходящимся в физической области. Эту проблему можно решить используя метод, развитый в работе [7]. В основу этого метода положено преобразование, которое приводит к замене оператора эволюции

$$G_0(z) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - E_n}$$

свободных частиц оператором  $G(z)$ , описывающим эволюцию частиц, взаимодействующих с вакуумом и, соответственно, оператор  $T(z)$  заменяется оператором  $M(z)$ , который описывает процессы, когда существует взаимодействие, по крайней мере, между двумя частицами в системе. Операторы  $T(z)$  и  $M(z)$  связаны следующим образом:

$$G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z) = G(z) + G(z)M(z)G(z). \quad (16)$$

Пропагатор  $G(z)$  может быть представлен в форме [7]

$$G(z) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - E_n - C(z, n)}.$$

Функция  $C(z, n)$  определяет физические массы частиц.

В терминах  $M(z)$  и  $G(z)$  уравнение (3) может быть переписано в форме [7]:

$$\frac{d\langle n_2|M(z)|n_1\rangle}{dz} = -\langle n_2|D_\tau(z)|n_1\rangle - \langle n_2|T(z)|n_1\rangle(\langle n_1|D_\delta(z)|n_1\rangle + \langle n_2|D_\delta(z)|n_2\rangle), \quad (17)$$

$$\frac{dC(z, n)}{dz} = -\langle n|D_\delta(z)|n\rangle, \quad (18)$$

Здесь  $\langle n_1|D_\delta(z)|n_1\rangle$  и  $\langle n_2|D_\tau(z)|n_1\rangle$  связаны с операторами  $M(z)$  и  $G(z)$  следующим образом

$$\langle n_2|D(z)|n_1\rangle = \langle n_2|n_1\rangle\langle n_1|D_\delta(z)|n_1\rangle + \langle n_2|D_\tau(z)|n_1\rangle, \quad (19)$$

$$D(z) = M(z)G(z)M(z),$$

где первый член с правой стороны в уравнении (19) описывает «сингулярную» часть  $\langle n_2|D(z)|n_1\rangle$ , содержащую  $\langle n_2|n_1\rangle$ . Соответственно, из уравнений (4) и (16) следует, что граничные условия для уравнений (17) и (18) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \langle n_2|M(z)|n_1\rangle &\xrightarrow{|z|\rightarrow\infty} \langle n_2|B_\tau(z)|n_1\rangle, \\ C(z, n) &\xrightarrow{|z|\rightarrow\infty} \langle n|B_\delta(z)|n\rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $B_\delta(z)$  и  $B_\tau(z)$  описывают, соответственно, «сингулярную» и «регулярную» части оператора взаимодействия

$$\langle n_2|B(z)|n_1\rangle = \langle n_2|n_1\rangle\langle n_1|B_\delta(z)|n_1\rangle + \langle n_2|B_\tau(z)|n_1\rangle.$$

Используем эти уравнения для описания динамики мюона в поле ядра. В этом случае, как уже отмечали, в качестве базисных состояний должны использовать собственные состояния  $|\Psi_n\rangle$  гамильтониана (11). При этом оператор  $G(z)$ , описывающий эволюцию мюона в поле ядра, взаимодействующего с вакуумом, будет иметь вид

$$G(z) = \sum_n \frac{|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|}{z - E_n - C_n(z)}. \quad (21)$$

Векторы  $|\Psi_n\rangle$ , относящиеся к дискретному спектру, описывают состояния мюонного атома, и, соответственно,  $E_n^0 \equiv E_n$  определяют его энергетические уровни в случае, когда атом не взаимодействует с вакуумом. Операторы  $B_\delta(z)$  и  $B_\tau(z)$ , определяющие граничные условия для уравнений (17) и (18), являются, соответственно, «сингулярной» и «регулярной» частями оператора взаимодействия. Оператор  $B_\delta(z)$  совпадает с нелокальным во времени оператором  $B_{\text{vac}}(z)$ , описывающим взаимодействие с электронным вакуумом, а оператор  $B_\tau(z)$  описывает процессы рождения фотонов, электронов и позитронов. Решение этих уравнений с точностью  $\alpha^2 Z$  дает

$$C_n(z) = \langle\Psi_n|B_{\text{vac}}(z - E_n)|\Psi_n\rangle. \quad (22)$$

Соответственно, для энергетического сдвига  $\Delta E_n$  с заданной точностью, обусловленного поляризацией вакуума, имеем

$$\Delta E_n = \langle\Psi_n|B_{\text{vac}}(0)|\Psi_n\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} U_n(q) B_{\text{pol}}(0, q), \quad (23)$$

где

$$B_{\text{pol}}(0, q) = \frac{4Z\alpha^2}{3} \int_1^\infty \frac{dx(x+1/2)\sqrt{x-1}}{x^{5/2}(4m_e^2x + q^2 + i0)}. \quad (24)$$

Это – в точности поправка Юлинга, которая была выведена в рамках стандартного подхода к теории мюонного атома. Таким образом, при описании лембовского сдвига энергетических уровней мюонных атомов подход, основанный на использовании формализма ОКД приводит к тем же результатам, что и обычные методы. Из этого можно сделать вывод, что в таких наблюдаемых, как энергии уровней мюонных атомов, нелокальность во времени взаимодействия мюона с ядром не проявляется. Это связано с тем, что пропагатор

$$\begin{aligned} & \langle\Psi_n, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_2|G(z)|\Psi_n, \mathbf{k}_1, \mathbf{p}_1\rangle = \\ & = \frac{\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{z - E_n^0 - \sqrt{m_e^2 + \mathbf{k}_1^2} - \sqrt{m_e^2 + \mathbf{p}_1^2} - C_n(z - \sqrt{m_e^2 + \mathbf{k}_1^2} - \sqrt{m_e^2 + \mathbf{p}_1^2})}, \end{aligned} \quad (25)$$

описывающий распространение виртуальной электрон-позитронной пары в мюонном атоме, при  $z \approx E_n^0$  имеет порядок  $(2m_e)^{-1}$ . Здесь  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{p}_1$  – импульсы электрона и позитрона в электрон-позитронной паре соответственно, и опущены дискретные переменные, описывающие спиновые состояния электрона и позитрона. Это означает, что для того, чтобы при энергиях  $z \approx E_n^0$ , близких к энергетическим уровням атома, эффекты нелокальности, связанные с рождением и уничтожением виртуальных электрон-позитронных пар, проявляли себя, величина  $\Delta E_n = C_n(0)$  не должна быть слишком малой по сравнению с  $2m_e$ . Как видно из рис. 2,  $\Delta E_n$  становится сопоставимой с  $2m_e$  только в случае очень тяжелых атомов. Но в этом случае упомянутая выше оценка уже неприменима, поскольку для таких атомов характерный передаваемый импульс  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$  имеет порядок  $\alpha Z M_\mu \gg m_e$ , и,

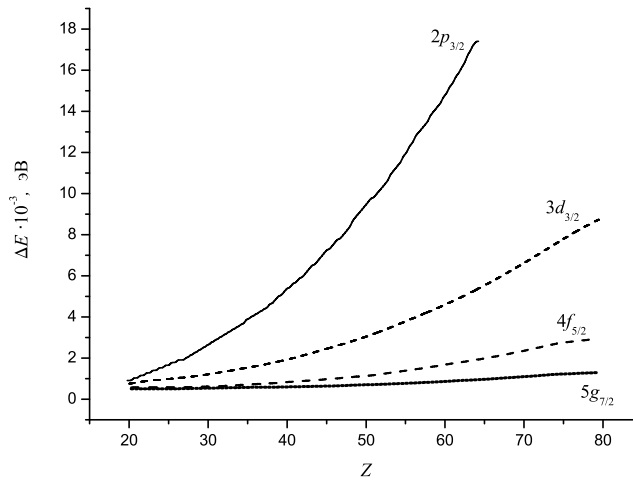


Рис. 2. Поправка Юлинга к энергетическим уровням мюонных атомов

следовательно, пропагатор, описывающий распространение виртуальной электрон-позитронной пары имеет порядок  $\alpha Z M_\mu$ . Это означает, что даже для очень тяжелых мюонных атомов эффекты нелокальности не проявляют себя при описании лэмбовского сдвига. Вместе с тем, эти эффекты могут быть очень существенными при энергиях  $z > E_n^0 + 2m_e$ . Несмотря на то, что эта область не важна с точки зрения определения лэмбовского сдвига, значения гриновского оператора (21) при этих энергиях описывают важные физические процессы, например, процессы рассеяния и поглощения фотонов в мюонных атомах, сопровождаемые рождением электрон-позитронных пар. В этой области  $C_n(z)$  становится комплексным, и мнимая часть  $\text{Im}C_n(z)$  характеризует вероятность рождения таких пар. На рис. 3 приведены результаты расчета  $\text{Im}C_n(z)$  с точностью до  $\alpha^2 Z$  для состояния  $1S_{1/2}$  при  $Z = 130$ . Приведенная на этом рисунке зависимость  $\text{Im}C_n(z)$  от  $z$ , в частности, описывает зависимость вероятности рождения электрон-позитронных пар от энергии поглощаемого фотона.

### Заключение

Мы показали, что подход, основанный на использовании формализма ОКД, позволяет воспроизвести результаты обычного подхода к теории мюонного атома, связанные с определением лэмбовского сдвига. Преимущества подхода, основанного на формализме ОКД, заключаются в том, что он позволяет последовательно учитывать эффекты нелокальности во времени взаимодействия мюона с ядром в процессах, в которых эти эффекты становятся существенными. Например, эффекты нелокальности могут быть существенными в процессах нерезонансного рассеяния фотонов на мюонном атоме, когда энергии падающего фотона достаточно для рождения электрон-позитронной пары, в процессах захвата мюона ядром в результате тормозного излучения. Амплитуды этих процессов выражаются через гриновские операторы (21) при  $z > E_n + 2m_e$ . Вместе с тем, результаты расчетов, приведенные на рис. 2, получены в лидирующем порядке теории, когда  $C_n(z)$  определяется уравнением (22). Однако такое приближение является неоправданным при  $z \gg E_n + 2m_e$ . В этом случае для определения гриновского оператора, описывающего динамику мюона в поле ядра, необходимо решить уравнение (18) с

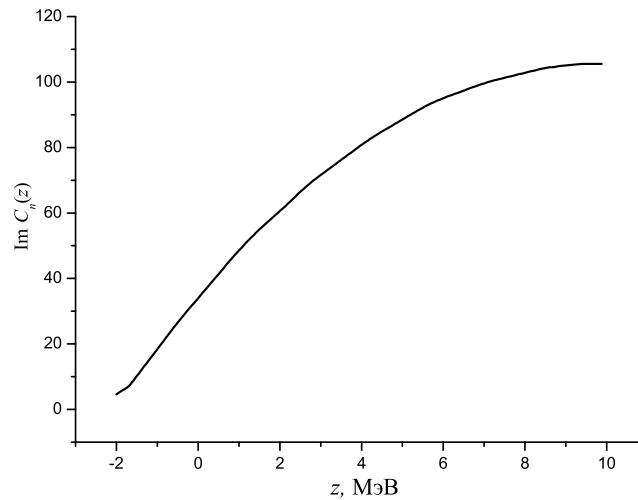


Рис. 3. Зависимость вероятности рождения электрон-позитронных пар  $\text{Im}C_n(z)$  от энергии системы  $z$

граничным условием (20). В то же время, результаты расчетов, проведенных даже в таком приближении, позволяют сделать вывод о важности учета эффектов нелокальности во времени взаимодействия мюона с ядром при описании различных динамических процессов, в которых участвуют мюонные атомы.

### Summary

*R.Kh. Gainutdinov, A.S. Iyudin, A.A. Mutygullina.* Electronic vacuum polarisation effect on the muon dynamics in nuclear field.

Muon dynamics in the nuclear field is investigated when taking into account the electronic vacuum polarization. We present the results of numerical solution of the generalized dynamical equation for the Lamb shifts of energy levels of muonic atoms with the different atomic numbers. It is shown that in describing the energy levels of muonic atoms the effect of the nonlocality of the interaction of the muon with the nucleus is not significant. It is also shown that this effect can be significant in the processes of the interaction of muon with the radiation field accompanied by the creation of the electron-positron pairs.

### Литература

1. *Kinoshita T., Nio M.* Sixth-order vacuum-polarization contribution to the lamb shift of muonic hydrogen // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – V. 82. – P. 3240–3243.
2. *Borei E., Rinker G.A.* The energy levels of muonic atoms // *Rev. Mod. Phys.* – 1982. – V. 54. – P. 67–118.
3. *Gainutdinov R.Kh.* Nonlocal interactions and quantum dynamics // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1999. – V. 32. – P. 5657–5677.
4. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A.* Nonlocality of the NN interaction in an effective field theory // *Phys. Rev. C.* – 2002. V. 66. – Art. 014006.
5. *Gainutdinov R.Kh., A.A. Mutygullina A.A., Scheid W.* Effects of nonlocality in time of interactions of an atom with its surroundings on the broadening of spectral lines of atoms // *Phys. Lett. A.* – 2002. – V. 306. – P. 1–9.



6. *Гайнутдинов Р.Х., Июдин А.С., Мутыгуллина А.А.* Обобщенная квантовая динамика и нелокальность взаимодействия атома с квантовым полем // Изв. РАН. Сер. Физическая. – 2006. – Т. 70. – С. 525–527.
7. *Гайнутдинов Р.Х.* Естественное уширение спектральных линий многозарядных ионов и проблема поверхностных расходимостей // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108. – С. 1600–1613.

Поступила в редакцию  
07.02.06

---

**Гайнутдинов Ренат Хамитович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и спектроскопии Казанского государственного университета.

E-mail: *Renat.Gainutdinov@ksu.ru*

**Июдин Алексей Сергеевич** – магистрант кафедры оптики и спектроскопии Казанского государственного университета.

**Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Казанского государственного университета.

E-mail: *Aigul.Mutygullina@ksu.ru*