Задача A. Подарки Деда Мороза

Имеется три множества из a, b и c элементов соответственно. Требуется подсчитать количество двухэлементных наборов, составленных из элементов разных множеств.

(Автор задачи — Киндер М.И.)

Основные темы задачи:

- сортировка;
- логика, разбор случаев.

Упорядочим исходные числа по возрастанию, для удобства будем считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Рассмотрим два случая.

1 случай. Пусть $a + b \leqslant c$. Тогда Дед Мороз сможет приготовить $a + b$ подарков. Для этого он сначала приготовит a подарков из a пряников и a мандаринов, затем из b конфет и b мандаринов он может сделать ещё b подарков, при этом оставшиеся $c-a-b$ мандаринов будут неиспользованными. Поскольку первые два множества содержат всего $a+b$ элементов, сделать больше чем $a+b$ подарков не удастся.

2 случай. Пусть $a + b > c$. Тогда Дед Мороз сможет приготовить $(a + b + c)/2$ подарков.

Операция / здесь означает целочисленное деление, то есть ответом будет целое значение без остатка. (Доказать это можно, например, так. Дед Мороз уравнивает количества угощений, приготовив вначале $c - b$ подарков из пряников и мандаринов, после чего остаётся $x = a - (c - b)$ пряников и $c - (c - b) = b$ мандаринов. Затем из конфет и мандаринов он делает еще $(b - x)$ подарков, и значит, останется $b - (b - x) = x$ конфет и столько же мандаринов. Теперь у Деда Мороза x пряников, x конфет и x мандаринов, из которых получаются $3x/2$ подарков. Всего приготовлено $(c - b) + (b - x) + \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c)$ подарков. Поскольку все три множества содержат $a + b + c$ элементов, очевидно, сделать больше чем $\frac{1}{2}(a + b + c)$ подарков не удастся.)

Задача B. Больше-меньше

Задана строка из n символов `<` и `>`. Числа заданного массива $a[]$ нужно расставить между символами этой строки так, чтобы все неравенства оказались верными. Если это сделать невозможно, вывести `-1`.

(Фольклор.)

Основные темы задачи:

- жадный алгоритм;
- сортировка.

Будем расставлять карточки последовательно слева направо с помощью «жадного» алгоритма.

Если сразу после текущей искомой карточки идет знак `<`, то пишем в искомую карточку самое *маленькое* из оставшихся чисел массива $a[]$; иначе — самое *большое* из оставшихся чисел. При таком «жадном» алгоритме заполнения все неравенства в итоге окажутся верными.

В самом деле, если на текущем шаге написано число b, а до этого было написано число a, то при знаке $a < b$ неравенство верно, так как по алгоритму a меньше всех стоящих правее чисел (в частности, меньше b); и при $a > b$ неравенство верно, так как по построению a больше всех стоящих правее чисел (в частности, больше b).

Из приведённого «жадного» алгоритма следует, что расстановка карточек возможна для *произвольной* строки символов `<` и `>`.

Задача C. Отмерь и отрежь

Провод длиной L разрезали произвольным образом на m частей. Из этих частей необходимо вырезать куски с заданными длинами $l[1], l[2], \ldots, l[n]$. Требуется найти наименьшую длину L

такую, что при *любом* способе разрезания провода на m частей удастся вырезать куски длины $l[1], l[2], \ldots, l[n]$ ($1 \leqslant m, n \leqslant 10^5$; $1 \leqslant l[i] \leqslant 10^9$).

(Автор задачи — Киндер М.И.)

Основные темы задачи:

- динамическое программирование;
- индукция, рекурсия.

Отсортируем массив длин в порядке неубывания; будем считать, что $l[1] \leqslant l[2] \leqslant \ldots \leqslant l[n]$.

Обозначим через $L[k]$ *наименьшую* длину провода в задаче, где нужно получить k кусков длиной $l[1]$, $l[2], \ldots, l[k]$. Сначала убедимся, что $L[1] = m * l[1]$.

В самом деле, если длина провода меньше $m * l[1]$, то после разрезании его на m равных частей каждая часть будет меньше $l[1]$, и мы не сможем вырезать кусок длиной $l[1]$. Если же $L[1] \geqslant m * l[1]$, при любом способе разрезания провода на m частей одна из них будет не меньше, чем $l[1]$ (иначе их суммарная длина меньше $L[1]$), и из этой части всегда можно вырезать кусок длиной $l[1]$.

Несложно сообразить, что $L[2] = \max\{\, m * l[2],\ m * l[1] + l[2]\,\}$.

Действительно, первое из этих двух чисел не меньше второго при условии $(m-1) * l[2] \geqslant m * l[1]$, и в этом случае из провода длиной $L[2] = m * l[2]$ можно вырезать куски с длинами $l[1]$ и $l[2]$. В самом деле, после разрезания провода на m частей произвольной длины одна из них будет не меньше, чем $l[2]$. Удалив из неё кусок длиной $l[2]$, мы получим m частей общей длиной $L[2] - l[2] = (m-1) * l[2]$, и поскольку выполнено условие $(m-1) * l[2] \geqslant m * l[1]$ можно вырезать ещё кусок длиной $l[1]$, как это доказано в рассуждениях с $L[1] = m * l[1]$.

Если же $(m-1) * l[2] \leqslant m * l[1]$, то в этом случае из провода длиной $L[2] = m * l[1] + l[2]$ можно вырезать куски с длинами $l[1]$ и $l[2]$, причём эта длина наименьшая. В самом деле, из условия следует, что $L[2] \geqslant m * l[2]$, и значит, после разрезания провода на m частей произвольной длины одна из них снова будет длиной не меньше $l[2]$. Снова удалив из неё кусок $l[2]$, мы получим m частей общей длиной $L[2] - l[2] = m * l[1]$, и как доказано в рассуждениях для $L[1] = m * l[1]$, из этих частей всегда можно вырезать кусок длиной $l[1]$.

Таким образом, доказано, что $L[2] = \max\{\, m * l[2],\ m * l[1] + l[2]\,\}$.

Осталось заметить, что величина $m * l[1]$ совпадает с $L[1]$; после такой замены в формуле приходим к формулировке утверждения в общем случае.

Лемма. $L[k] = \max\{\, m * l[k],\ L[k-1] + l[k]\,\}$ для всех $k \geqslant 1$.

Доказательство леммы использует уже знакомые идеи, поэтому если это утверждение кажется очевидным, его обоснование можно пропустить.

Вновь сравним два числа из формулировки леммы. Первое число не меньше второго при условии $L[k-1] \leqslant (m-1) * l[k]$. Докажем, что в этом случае из провода длиной $L[k] = m * l[k]$ можно вырезать требуемые куски с длинами $l[1], l[2], \ldots, l[k]$. В самом деле, при любом способе разрезания провода на m частей одна из них будет не меньше, чем $l[k]$, и из этой части всегда можно вырезать кусок длиной $l[k]$. Удалив из неё кусок длиной $l[k]$, мы получим m частей общей длиной $L[k] - l[k] = (m-1) * l[k]$, и поскольку выполнено условие $(m-1) * l[k] \geqslant L[k-1]$, из них можно вырезать ещё куски длиной $l[1]$, $l[2], \ldots, l[k-1]$. (Последнее следует из определения числа $L[k-1]$.)

Итак, в первом случае доказано, что из провода длиной $L[k] = m * l[k]$ можно вырезать *все* требуемые куски с длинами $l[1], l[2], \ldots, l[k]$, причем минимальность $L[k]$ фактически уже доказана.

Аналогично разбирается ситуация с неравенством $L[k-1] \geqslant (m-1) * l[k]$.

Действительно, в этом случае из провода длиной $L[k] = L[k-1] + l[k]$ можно вырезать кусок $l[k]$ — это следует из легко проверяемого неравенства $L[k] \geqslant m * l[k]$. После удаления куска длиной $l[k]$ получим m частей суммарной длины $L[k] - l[k] = L[k-1]$. По определению числа $L[k-1]$ из них можно вырезать остальные требуемые куски длиной $l[1]$, $l[2], \ldots, l[k-1]$.

Осталось доказать *точность* приведённой оценки длины провода. Другими словами, нужно доказать, что при уменьшении длины $L[k] = L[k-1] + l[k]$ на сколь угодно малое число вырезать требуемые куски не удастся при некотором специально подобранном способе разрезания провода на m частей.

Рассмотрим последовательность чисел $L[1], L[2], \ldots, L[k]$. Будем просматривать её *справа налево*, и пусть $L[s]$ — первое *справа* число из этого набора, где нарушается неравенства вида $L[i-1] \geqslant (m-1) * l[i]$, то есть $L[s] \leqslant (m-1) * l[s+1]$ и для всех чисел $L[i]$ с номерами $i > s$ выполняется $L[i] \geqslant (m-1) * l[i+1]$. Тогда по предположению индукции $L[s+1] = m * l[s+1]$ и $L[i+1] = L[i] + l[i+1]$ для всех $i \geqslant s+1$. Имеем

$$L[k] = L[k-1] + l[k] = L[k-2] + l[k-1] + l[k] = \ldots = L[s+1] + l[s+2] + \ldots + l[k] = \\ = m * l[s+1] + l[s+2] + \ldots + l[k].$$

Рассмотрим провод меньшей длины $L'[k] = L[k] - m \cdot \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Разрежем его на m частей, где первые $(m-1)$ частей длиной $a = l[s+1] - \varepsilon$, а последняя m-я часть — оставшейся длины $L'[k] - (m-1) \cdot a$. Из первых $(m-1)$ частей невозможно вырезать куски длиной $l[s+1], \ldots, l[k]$, и значит, их придётся вырезать из последней m-й части, а это сделать невозможно, потому что её длина меньше $l[s+1] + \ldots + l[k]$:

$$L'[k] - (m-1) \cdot a = m * l[s+1] + l[s+2] + \ldots + l[k] - (m-1) * l[s+1] - \varepsilon = \\ = l[s+1] + l[s+2] + \ldots + l[k] - \varepsilon.$$

Таким образом, при уменьшении длины $L[k] = L[k-1] + l[k]$ можно подобрать такой разрез провода на m частей, при котором не удастся получить куски требуемой длины. Лемма доказана.

Сложность алгоритма — $O(n)$, техническая реализация — простая.

Задача D. Самое красивое число

Дан массив из n целых положительных чисел $(1 \leqslant n \leqslant 10^3)$, каждое не превосходит $2 \cdot 10^9$. Необходимо определить элемент массива, который имеет наибольшее количество представлений в виде суммы последовательных положительных целых чисел. Если таких чисел несколько, вывести наименьшее из них.

(Автор задачи — Киндер М.И.)

Основные темы задачи:
- теория чисел;
- факторизация, подсчёт делителей числа.

Пусть a — произвольное число из данного массива чисел, его запись в форме красивой суммы имеет вид:

$$a = (m+1) + (m+2) + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}(n-m)(n+m+1).$$

Сомножители $n-m$ и $n+m+1$ имеют разную чётность, ровно один из них *нечётный*. Значит, красивое разложение числа a обязательно имеет нечётный множитель. Легко доказать обратное утверждение — каждому нечётному множителю соответствует разложение a с нечётным множителем. Итак, *количество нечётных делителей у числа a равно количеству красивых разложений числа a*. Например, число 15 имеет четыре нечётных делителя 1, 3, 5 и 15, поэтому у него четыре красивых разложения.

Таким образом, алгоритм решения следующий. Каждое числа a исходного массива раскладываем на простые множители с учетом их кратности:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s},$$

отбрасываем все двойки, если они входят в разложение a, и для оставшихся нечётных простых делителей числа a вычисляем общее количество нечётных делителей числа a. Например, если все $p_i \neq 2$, то красота числа a будет равна $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_s+1)$.

Осталось среди всех чисел a_i массива найти то, у которого красота принимает наибольшее возможное значение. Если таких чисел несколько, в ответе записываем наименьшее среди них.

Если использовать стандартный алгоритм факторизации, то общая сложность представленного метода — $\mathrm{O}(n \cdot \sqrt{\max a_i})$.