

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной деятельности КФУ

Проф. Д.К. Нурғалиев



23 сентября 2015г.

**Программа дисциплины**

Б1.В.ДВ.1 Дополнительные главы теории гладких многообразий

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика  
Профиль подготовки: 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление  
Квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь»  
Форма обучения: очная  
Язык обучения: русский

Казань  
2015

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целями освоения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы теории гладких многообразий» являются: углубленное изучение аспирантами некоторых разделов теории гладких многообразий, таких как слоения на многообразиях и ассоциированные с ними комплексы дифференциальных форм, многообразия над ассоциативными коммутативными алгебрами теоретическая и практическая подготовка в указанных областях; овладение современным математическим аппаратом, применяемым в геометрии слоений и геометрии многообразий над алгебрами для дальнейшего использования в исследованиях; подготовка к сдаче кандидатского экзамена по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина "Дополнительные главы теории гладких многообразий" включена в раздел "Б1.В.ДВ.1" вариативной части профиля 01.01.04 геометрия и топология, направления подготовки 01.06.01 математика и механика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр. Для ее успешного освоения необходимо знакомство с основными понятиями топологии, теории гладких многообразий и расслоенных пространств.

Приобретенные знания в результате освоения дисциплины «Дополнительные главы теории гладких многообразий» способствуют дальнейшему повышению квалификации в области геометрии и топологии, послужат основой для научно-исследовательской работы аспирантов. Материал дисциплины входит в программу кандидатского экзамена по специальности «геометрия и топология».

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен

знать:

определения и свойства основных геометрических объектов на слоеных многообразиях и многообразиях над алгебрами, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в указанной области теории гладких многообразий, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

владеть:

методами решения различных задач теории слоений и многообразий над алгебрами.

демонстрировать способность и готовность:

- применять результаты освоения дисциплины в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
УК-1	Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
УК-3	Готовность участвовать в работе российских и международных

	исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
ОПК-1	Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов.
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

##### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: зачет в 4 семестре.

	Раздел дисциплины	Семестр	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
1.	Слоение на многообразии. Слои слоения. Слоения, порождаемые субмерсиями. Топология слоев слоения.	4	3	3	0	12
2.	Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения. Трансверсальное расслоение слоеного многообразия.	4	3	3	0	12
3.	Расслоение трансверсальных реперов. Слоеное расслоение. Поднятое слоение. Проектируемые связности.	4	3	3	0	12
4.	Базовые когомологии многообразия со слоением. $d_F$ -когомологии многообразия со слоением. Препятствия к существованию проектируемых связностей.	4	3	3	0	12
5.	Алгебры Вейля. Модули и представления. Гладкие функции и гладкие многообразия над алгебрами Вейля.	4	3	3	0	12
6.	Расслоения Вейля. Лифты векторных полей и связностей. Когомологии многообразий над алгебрами Вейля.	4	3	3	0	12
			18	18	0	72

##### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1.** Слоение на многообразии. Слои слоения. Слоения, порождаемые субмерсиями. Топология слоев слоения.

**Тема 2.** Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения. Трансверсальное расслоение слоеного многообразия.

**Тема 3.** Расслоение трансверсальных реперов. Слоеное расслоение. Поднятое слоение. Проектируемые связности.

**Тема 4.** Базовые когомологии многообразия со слоением.  $d_F$ -когомологии многообразия со слоением. Препятствия к существованию проектируемых связностей.

**Тема 5.** Алгебры Вейля. Модули и представления. Гладкие функции и гладкие многообразия над алгебрами Вейля.

**Тема 6.** Расслоения Вейля. Лифты векторных полей и связностей. Когомологии многообразий над алгебрами Вейля.

## **5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

На лекциях: в преподавании используются мультимедийные презентации, иллюстрации, таблицы, методические пособия.

На семинарах: в преподавании курса используются активные и интерактивные технологии проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

## **6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

### **Вопросы:**

**Тема 1.** Слоение на многообразии. Примеры слоений. Топология слоев слоения. Примеры замкнутых и собственных слоев.

**Тема 2.** Фундаментальная группа. Представления голономии. Псевдогруппа голономии.

**Тема 3.** Векторные расслоения. Касательное расслоение. Трансверсальное расслоение. Поднятое слоение. Проектируемые векторные поля и связности.

**Тема 4.** Базовые функции и формы. Базовые когомологии. Оператор дифференцирования вдоль слоев.  $d_F$ -когомологии многообразия со слоением.

**Тема 5.** Примеры алгебр Вейля. Унитарные и точные модули и представления. Регулярные и свободные модули. Гладкие функции над алгебрами Вейля.

**Тема 6.** Касательные расслоения высших порядков и расслоения Эресмана. Продолжения векторных полей и связностей.

## **7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **7.1. Регламент дисциплины**

**Зачет** по курсу "Дополнительные главы теории гладких многообразий" выставляется аспиранту, успешно выступившему с докладом на практическом занятии, регулярно выполнявшему домашние задания, удовлетворительно решившему задания контрольной работы и продемонстрировавшему на зачете владение понятийным аппаратом и знание теоретического материала курса.

### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

**Темы для докладов на практических занятиях.**

1. Псевдогрупповая структура на многообразии. Слоение как псевдогрупповая структура. Категория слоеных многообразий.
2. Замкнутые и собственные слои. Насыщение подмножества.
3. Фундаментальная группа топологического пространства. Накрытие. Универсальное накрытие.
4. Локально тривиальное расслоение. Главное расслоение.
5. Касательное расслоение. Расслоение реперов.
6. Связность в главном расслоении.
7. Алгебры срезанных многочленов и их матричные представления.
8. Фробениусовы алгебры. Реализации тензоров над фробениусовыми алгебрами.
9. Теорема Бореля.

#### Пример контрольной работы.

1. Найти уравнения полного и вертикальных лифтов данного векторного поля  $v$  на сумму Уитни касательных расслоений.

2. Для слоения на торе, полученном факторизацией плоскости без нуля по отношению эквивалентности  $x \sim 3^n x$ , вычислить представления голономии и найти замыкания и насыщения слоев.

3. Для данной дифференцируемой над локальной алгеброй  $A$  функция  $Y=F(X)$  найти производную и первообразные функции.

4. Выяснить, является ли данное представление  $\Phi:A \rightarrow \text{Mat}$  алгебры  $A$  точным или унитарным.

5. Показать, что для любого  $B$ -модуля  $L$  расслоение Вейля  $T^A L$  обладает структурой модуля над алгеброй  $A \otimes B$ .

#### 7.3. Вопросы к зачету

1. Слоение на многообразии. Слоение, порождаемое субмерсией. Примеры.
2. Насыщенные подмножества в слоеном многообразии. Насыщение.
3. Замкнутые и собственные слои. Примеры.
4. Доказать, что слой слоения является слабо вложенным подмногообразием.
5. Трансверсальные подмногообразия. Представление голономии слоения.
6. Псевдогруппа голономии на полной трансверсали.
7. Трансверсальное расслоение слоеного многообразия.
8. Расслоение трансверсальных реперов.
9. Поднятое слоение.
10. Адаптированные и проектируемые связности.
11. Базовые функции, формы и когомологии.
12. Дифференциал  $d_F$  и порождаемые им когомологии.
13. Локальные алгебры в смысле А.Вейля. Примеры.
14. Модули и представления. Точные и унитарные представления. Примеры.
15. Гладкие функции над алгебрами Вейля. Условия Шеффера. Примеры гладких функций над алгебрами плуральных чисел.
16. Касательные расслоения высших порядков.
17. Расслоения струй Эресмана.
18. Расслоения реперов высших порядков.
19.  $d^A$ -когомологии многообразия над локальной алгеброй.

#### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции	Оценочное средство
		для	

		<b>данной дисциплины</b>	
УК-1	Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Способность представлять место и роль изучаемой дисциплины в ряду других математических теорий. Способность устанавливать связи материала дисциплины с темой научного исследования и видеть возможности применения изучаемого материала в научных исследованиях. Способность к самостоятельной работе с научной литературой и решению теоретических задач домашних заданий.	Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
УК-3	Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач	Способность методически правильно организовать материал доклада на практическом занятии. Способность к самостоятельной работе с научной литературой и решению теоретических задач домашних заданий.	Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
ОПК-1	Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Способность к самостоятельной работе с научной литературой. Способность решать теоретические задачи, строить новые примеры известных конструкции или модифицировать имеющиеся примеры.	Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов.	Способность к самостоятельной работе с научной литературой. Способность решать теоретические задачи, строить новые примеры известных конструкции или модифицировать имеющиеся примеры.	Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на	Способность методически правильно организовать материал доклада на практическом занятии. Способность в сжатой и математически строгой	Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, Изложение решений задач на практических занятиях, контрольной работе и зачете.

	российских и международных научно-практических конференциях.	форме изложить решение решенной задачи.	
--	--	---	--

## **8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Аспиранту необходимо изучить теоретический материал, изложенный на лекции. Особое внимание следует обратить на определения основных понятий и формулировки основных теорем, выделяя трудные для усвоения места для последующего обсуждения на практических занятиях. При подготовке к практическому занятию следует кроме лекций воспользоваться предложенной дополнительной литературой и электронными ресурсами. Эти источники следует также использовать при решении задач по изучаемой теме. При подготовке к докладу необходимо особое внимание обратить на организацию и изложение материала доклада. Выполненное домашнее задание должно быть сдано преподавателю перед началом следующего практического занятия.

## **9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

### **9.1. Основная литература**

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. Москва URSS [Либликом 2013] 335 с.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия и топология многообразий. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 2. Москва URSS [Либликом 2013] 295 с.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Теория гомологий. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 3. Москва URSS [Либликом 2013] 287 с.

### **9.2. Дополнительная литература**

1. Шурыгин В.В. Многообразия над алгебрами и расслоения Вейля. Учебное пособие для проведения семинарских занятий. Казанск. ун-т. Казань. 2002 . 80 с.
2. Гайнуллин Ф.Р., Шурыгин В.В. Голоморфные тензорные поля и линейные связности на касательном расслоении второго порядка. Ученые записки Казанского госуд. университета. Т.151, Кн.4. С. 183-191, 2009.
3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 3-е, перераб. и доп. Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 512 с.

### **9.3. Интернет-ресурсы:**

1. On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds Lobachevskii Journal of Mathematics. V.18. P.53-105, 2005 Bushueva G.N., Shurygin V.V. <http://ljm.ksu.ru/vol18/19.html>
2. В. В. Шурыгин. Джеты Ли и симметрии продолжений геометрических объектов. Фундаментальная и прикладная математика, 2010, т. 16, № 2, с. 163-181. [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=1317&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=1317&option_lang=rus)

## **10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием вместимостью до 45 человек, компьютерный класс на 15 рабочих мест с выходом в интернет, принтер, проектор, экран, ноутбук.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и с учетом рекомендаций по направлению подготовки.

Автор: зав. каф. геометрии, доктор физ.-мат. наук Шурыгин В.В.

Рецензент: доц. каф. геометрии, доктор физ.-мат. наук Сосов Е.Н.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2014 года, протокол № 7.