Известия вузов. Математика
2018, №3, с. 62–69

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. ТАРАСЕНКО

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана–Лиувилля исследована однозначная разрешимость нелокальной задачи в конечной области. Краевое условие данной задачи содержит линейную комбинацию операторов дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля от значений производной функции на линии вырождения и обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго от значений функции на характеристиках. Теорема единственности поставленной задачи доказана с помощью модифицированного метода Трикоми. Доказательство существования решения эквивалентно сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение смешанного типа, операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

УДК: 517.956

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y} u = 0 \quad (y > 0,\ 0 < \alpha < 1), \\ y^{2m} u_{xx} + y\, u_{yy} + \lambda u_y = 0 \quad (y < 0), \end{gathered} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1)$ от функции $u(x,y)$ по второй переменной ([1], с. 341):

$$\left(D^{\alpha}_{0+,y} u\right)(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x,t)\, dt}{(y-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0), \tag{2}$$

m — натуральное число, $\lambda = \mathrm{const}$, $\frac{1-2m}{2} \leqslant \lambda < 1$, в конечной области D, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно и характеристиками уравнения (1) при $y < 0$

$$AC : x - \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1.$$

Пусть $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $I \equiv AB$ — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

Поступила 11.01.2017

$$a(x)\big(I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\eta_1}w(t)u[\Theta_0(t)]\big)(x)+b(x)\big(I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}\delta(t)u[\Theta_1(t)]\big)(x)+$$
$$+c(x)\big(D_{0x}^{2\beta-1}\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(t,y)\big)(x)+d(x)\big(D_{x1}^{2\beta-1}\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(t,y)\big)(x)+$$
$$+g(x)\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(x,y)+h(x)u(x,0)=\gamma(x)\quad\forall\, x\in I, \quad (4)$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+0}y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to 0-0}u(x,y)\quad\forall\, x\in\overline{I}, \quad (5)$$

$$\lim_{y\to 0+0}[y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big)_y]=\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(x,y)\quad\forall\, x\in I, \quad (6)$$

где $\varphi_i(y)$, $i=1,2$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $\gamma(x)$, $w(x)$, $\delta(x)$ — заданные функции такие, что

$$a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)+d^2(x)+g^2(x)+h^2(x)\neq 0,$$
$$a(x),\, b(x),\, c(x),\, d(x),\, g(x),\, h(x),\, \gamma(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^3(I),$$
$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0, \quad (7)$$
$$y^{1-\alpha}\varphi_1(y),\quad y^{1-\alpha}\varphi_2(y)\in C(\overline{I}), \quad (8)$$

$\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристиками AC и BC соответственно; $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ — операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$, введенный М. Сайго [2] (см. также [1], с. 326–327); $(D_{0x}^{\alpha}f)(x)$ и $(D_{x1}^{\alpha}f)(x)$ — операторы дробного интегрирования порядка $(-\alpha)$ при $\alpha<0$, и обобщенные производные в смысле Лиувилля порядка $\alpha>0$ ([3], с. 7–8); α_1, β_1, η_1, α_2, β_2, η_2 — действительные числа, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, которые будут указаны далее.

Будем искать решение $u(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{D_1}),\quad u(x,y)\in C(\overline{D_2}),$$
$$y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u\big)_y\in C(D_1\cup\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}),$$
$$u_{xx}\in C(D_1\cup D_2),\quad u_{yy}\in C(\overline{D}_2).$$

Уравнение (1) при $y<0$ является моделью гиперболических уравнений второго порядка, тип и порядок которых вырождаются на одном и том же $(n-1)$-мерном континууме ([4], с. 274), а при $y>0$ является уравнением диффузии дробного порядка [5].

Краевая задача для уравнения вида (1) исследовалась в публикации [6], а при $y<0$ — в [7]. Данная статья является продолжением и обобщением результатов работы [6] для уравнения (1). Новизна постановки заключается в более общем краевом условии. Заметим, что если $c(x)=0$ и $d(x)=0$ в условии (4), то получим краевую задачу работы [6].

2. Единственность решения задачи.

Теорема. *В области D не может существовать более одного решения задачи* (1), (3)–(4), *если*

$$w(x)=x^{\beta},\quad \delta(x)=(1-x)^{\beta},\quad \alpha_1=\alpha_2=-\beta,\quad \beta_1=\beta_2=\beta,\quad \beta=\frac{2m-1+2\lambda}{2(2m+1)}, \quad (9)$$

и выполняются условия

$$k(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}a(x) + \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}b(x) + h(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \overline{I}, \tag{10}$$

$$\frac{g(x)}{k(x)} \leqslant 0, \quad \left[\frac{a(x)}{k(x)}\right]' \leqslant 0, \quad \left[\frac{c(x)}{k(x)}\right]' \geqslant 0, \quad \left[\frac{b(x)}{k(x)}\right]' \geqslant 0, \quad \left[\frac{d(x)}{k(x)}\right]' \leqslant 0 \quad \forall x \in \overline{I}, \tag{11}$$

$$a_1(1) > 0, \quad b_1(0) < 0, \tag{12}$$

где

$$a_1(x) = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}\frac{a(x)}{k(x)} - \frac{c(x)}{k(x)}, \tag{13}$$

$$b_1(x) = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}\frac{b(x)}{k(x)} - \frac{d(x)}{k(x)}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0-0} u(x,y) = \tau_2(x),$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big)_y = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(x,y) = \nu_2(x).$$

Известно (например, [8]), что решение уравнения (1) в области D_1, удовлетворяющее условию (3) и условию

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{I},$$

задается формулой

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,y,0,\eta)\,d\eta - \int_0^y \varphi_2(\eta)G_\xi(x,y,1,\eta)d\eta + \Gamma(\alpha)\int_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y,\xi,0)d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right) - e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right], \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$e^{p,q}_{b,c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(bk+p)\Gamma(q-ck)}, \quad b > c, \quad b > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Также известно (например, [8]), что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из параболической части D_1 на линию $y=0$, имеет вид

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{15}$$

Найдем соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $y=0$ из гиперболической части D_2 области D. Для этого воспользуемся решением задачи Коши, которое в области D_2 имеет вид ([4], с. 277)

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \tau\left[x + \frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right][t(1-t)]^{\beta-1}dt -$$
$$- \frac{2}{2m+1}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(-y)^{1-\lambda}\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right][t(1-t)]^{-\beta}dt. \tag{16}$$

Используя формулу (16), получим

$$u[\Theta_0(x)]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1-2\beta}\big(D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau_2(t)\big)(x)-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}\big(D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu_2(t)\big)(x),$$

$$u[\Theta_1(x)]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(1-x)^{1-2\beta}\big(D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau_2(t)\big)(x)-$$
$$-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}\big(D_{x1}^{\beta-1}(1-x)^{-\beta}\nu_2(t)\big)(x).$$

Пусть справедливы условия (9) теоремы.

Подставляя $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ в краевое условие (4), учитывая свойства операторов дробного интегро-дифференцирования ([1], с. 50–51) и операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго

$$D_{0x}^{l}D_{0x}^{-l}f(x)=D_{x1}^{l}D_{x1}^{-l}f(x)=f(x),$$
$$D_{0x}^{l}D_{0x}^{m}f(x)=D_{0x}^{l+m}f(x),\quad D_{x1}^{l}D_{x1}^{m}f(x)=D_{x1}^{l+m}f(x),\quad l>0,\quad m<0,$$
$$\big(I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}f\big)(x)=\big(D_{0x}^{\alpha}f\big)(x),\quad \big(I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta}f\big)(x)=\big(D_{x1}^{\alpha}f\big)(x),\quad \alpha>0,$$

получим

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}a(x)\tau_2(x)-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}a(x)\big(D_{0x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+$$
$$+\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}b(x)\tau_2(x)-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}b(x)\big(D_{x1}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+$$
$$+c(x)\big(D_{0x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+d(x)\big(D_{1x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+g(x)\nu_2(x)+h(x)\tau_2(x)=\gamma(x).$$

Из последнего выражения выразим

$$\tau_2(x)=a_1(x)\big(D_{0x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+b_1(x)\big(D_{1x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+g_1(x)\nu_2(t)+\gamma_1(x),\tag{17}$$

где $g_1(x)=\frac{g(x)}{k(x)}$, $\gamma_1(x)=\frac{\gamma(x)}{k(x)}$, $k(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$ имеют вид (10), (13), (14) соответственно.

Далее рассмотрим соответствующую однородную задачу ($\varphi_1(y)=0$, $\varphi_2(y)=0$, $\gamma(x)=0$) и применим методику, представленную в монографии Трикоми ([9], с. 382–388).

Оценим интеграл $I^*=\int\limits_0^1\tau_2(x)\nu_2(x)dx$. В силу условий сопряжения (5) и (6) имеем

$$\tau_2(x)=\tau_1(x),\quad \nu_2(x)=\nu_1(x),\tag{18}$$

а согласно (15) получим $\nu_2(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x)$. Тогда

$$I^*=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\tau_1(x)\tau_1''(x)dx.$$

Интегрируя по частям, используя условия (7), (8), получаем

$$I^*=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\big[\tau_1'(x)\big]^2dx\leqslant 0.$$

Докажем, что $I^*\geqslant 0$. Действительно, при $\gamma(x)=0$ и выполнении условий (9) теоремы уравнение (17) примет вид

$$\tau_2(x)=a_1(x)\big(D_{0x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+b_1(x)\big(D_{1x}^{2\beta-1}\nu_2(t)\big)(x)+g_1(x)\nu_2(x).$$

В результате получим

$$I^* = \int_0^1 g_1(x)\nu_2^2(x)\,dx + \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int_0^1 a_1(x)\nu_2(x)dx\int_0^x \frac{\nu_2(t)\,dt}{(x-t)^{2\beta}}+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int_0^1 b_1(x)\nu_2(x)\,dx\int_x^1 \frac{\nu_2(t)\,dt}{(t-x)^{2\beta}}. \quad (19)$$

Воспользуемся формулой для гамма-функции $\Gamma(\mu)$ ([9], с. 385)

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\cos(kt)dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right), \quad k>0, \quad 0<\mu<1.$$

Полагая в ней $k=|x-\xi|$, $\mu=2\beta$, получим

$$\frac{1}{|x-\xi|^{2\beta}} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)}\int_0^\infty t^{2\beta-1}\cos(t|x-\xi|)dt.$$

Откуда соотношение (19) примет вид

$$\Gamma(1-2\beta)\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)I^* = \Gamma(1-2\beta)\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)\int_0^1 g_1(x)\nu_2^2(x)dx+$$
$$+\int_0^1 a_1(x)\nu_2(x)dx\int_0^x \nu_2(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{2\beta-1}\cos(t|x-\xi|)\,dt+$$
$$+\int_0^1 b_1(x)\nu_2(x)\,dx\int_x^1 \nu_2(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{2\beta-1}\cos(t|x-\xi|)dt. \quad (20)$$

С учетом формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ и выражений

$$\left[\left(\int_0^x \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2\right]' = 2\nu_2(x)\cos(tx)\int_0^x \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi,$$
$$\left[\left(\int_0^x \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]' = 2\nu_2(x)\sin(tx)\int_0^x \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi,$$
$$\left[\left(\int_x^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2\right]' = -2\nu_2(x)\cos(tx)\int_x^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi,$$
$$\left[\left(\int_x^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]' = -2\nu_2(x)\sin(tx)\int_x^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi$$

получим, что равенство (20) примет вид

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}I^* = \frac{\pi}{2\sin(\pi\beta)}\int_0^1 g_1(x)\nu_2^2(x)dx+$$
$$+\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 a_1(x)\left[\left(\int_0^x \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2+\left(\int_0^x \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]'dx-$$
$$-\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 b_1(x)\left[\left(\int_x^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2+\left(\int_x^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]'dx.$$

Интегрируя по частям последнее выражение, будем иметь

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}I^* = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}\int_0^1 g_1(x)\nu_2^2(x)dx+$$
$$+\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\bigg\{a_1(1)\bigg[\bigg(\int_0^1\nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\bigg)^2+\bigg(\int_0^1\nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\bigg)^2\bigg]-$$
$$-\int_0^1 a_1'(x)\bigg[\bigg(\int_0^x\nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\bigg)^2+\bigg(\int_0^x\nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\bigg)^2\bigg]dx\bigg\}-$$
$$-\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\bigg\{b_1(0)\bigg[\bigg(\int_0^1\nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\bigg)^2+\bigg(\int_0^1\nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\bigg)^2\bigg]-$$
$$-\int_0^1 b_1'(x)\bigg[\bigg(\int_x^1\nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\bigg)^2+\bigg(\int_x^1\nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\bigg)^2\bigg]dx\bigg\}. \quad (21)$$

Учитывая условия (11), (12) теоремы и принимая во внимание, что

$$\beta=\frac{2m-1+2\lambda}{2(2m+1)},\quad 0<\beta<\frac{1}{2},\quad 0<\pi\beta<\frac{\pi}{2},\quad \sin(\pi\beta)>0,$$

из (21) получаем $I^*\geqslant 0$.

Таким образом, окончательно имеем $I^*=0$, левая часть в соотношении (21) также равна нулю. Поскольку слагаемые в правой части (21) неотрицательны, то они также равны нулю. В частности,

$$\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\bigg(\int_0^1\nu(\xi)\cos(t\xi)d\xi\bigg)^2=0,\quad \int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\bigg(\int_0^1\nu(\xi)\sin(t\xi)d\xi\bigg)^2=0.$$

Так как $t^{2\beta-1}>0$, то

$$\int_0^1\nu(\xi)\cos(t\xi)d\xi=0,\quad \int_0^1\nu(\xi)\sin(t\xi)d\xi=0$$

для всех $t\in[0,\infty)$, в частности, при $t=2\pi k$, $k=0,1,2,\dots$. При этих значениях t функции $\sin(t\xi)$, $\cos(t\xi)$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2 ([10], сс. 319, 320). Следовательно, $\nu_2(\xi)=0$ почти всюду, а так как $\nu_2(x)$ непрерывна по условию, то $\nu_2(\xi)=0$ всюду. Отсюда $\nu_2(x)=0$ и из (17) при $\gamma_1(x)=0$ следует $\tau_2(x)=0$. Значит, $u(x,y)\equiv 0$ в области D_2 как решение задачи Коши для уравнения (1) с нулевыми данными.

3. Существование решения задачи. Для доказательства существования решения исходной задачи достаточно найти $\nu_1(x)$. Для этого воспользуемся соотношением $\Gamma(1+\alpha)\nu_1(x)=\tau_1''(x)$. Проинтегрируем его дважды от 0 до x. Получим

$$\tau_1(x)=\Gamma(1+\alpha)\int_0^x(x-\xi)\nu_1(\xi)d\xi. \quad (22)$$

В силу равенств (18), принимая во внимание (17) и (22), имеем

$$\frac{a_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)}\int_0^x\frac{\nu_1(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}+\frac{b_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)}\int_x^1\frac{\nu_1(t)}{(t-x)^{2\beta}}dt+g_1(x)\nu_1(x)-$$
$$-\Gamma(1+\alpha)\int_0^x(x-\xi)\nu_1(\xi)d\xi=-\gamma_1(x).$$

Последнему уравнению придадим вид

$$g_1(x)\nu_1(x) + \int_0^1 \frac{\nu_1(\xi)K(x,\xi)d\xi}{|x-\xi|^{\beta+\beta^*}} = -\gamma_1(x), \tag{23}$$

где

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \frac{a_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)} - \Gamma(1+\alpha)(x-\xi)^{2\beta+1}, & \xi \leqslant x; \\ \frac{b_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)}, & \xi \geqslant x. \end{cases}$$

При $g_1(x) \neq 0$ или, что то же самое, $g(x) \neq 0$, уравнение (23) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре, правая часть которого $\gamma_1(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^2(I)$. Безусловная разрешимость уравнения (23) в требуемом классе функций следует из единственности решения исследуемой задачи.

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).

[2] Saigo M. *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function*, Math. Rep. Kyushu Univ. **11** (2), 135–143 (1978).

[3] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение* (Физматлит, М., 2003).

[4] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).

[5] Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка*, Дифференц. уравнения **26** (4), 660–670 (1990).

[6] Репин О.А., Тарасенко А.В. *Нелокальная задача для уравнения с частной производной дробного порядка*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **19** (1), 78–86 (2015).

[7] Репин О.А., Кумыкова С.К. *Об одном классе нелокальных задач для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки, № 4 (37), 22–32 (2014).

[8] Геккиева С.Х. *Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной*, Изв. Кабардино-Балкарск. научного центра РАН, № 2 (7), 78–80 (2001).

[9] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* (Ин. лит., М., 1957).

[10] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика.* Учебник для вузов. Т. 3. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* (Дрофа, М., 2004).

Анна Валерьевна Тарасенко

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Молодогвардейская, д. 194, г. Самара, 443001, Россия,

e-mail: Tarasenko.A.V@mail.ru

A.V. Tarasenko

On solvability of nonlocal problem for loaded parabolic-hyperbolic equation

Abstract. We study unique solvability of a nonlocal problem for equations of mixed type in a finite domain. This equation contains partial fractional Riemann–Liouville derivative. The boundary condition of the problem contains a linear combination of operators of fractional differentiation in the sense of Riemann–Liouville and generalized operators of fractional integro-differentiation in the sense of M. Saigo. The uniqueness theorem of the problem is proved by a modified Tricomi method. The existence of solutions is equivalently reduced to the solvability of Fredholm integral equation of the second kind.

Keywords: boundary-value problem, equation of mixed type, operators of fractional integro-differentiation in the Riemann–Liouville sense, generalized operators of fractional integro-differentiation in the M. Saigo sense, Fredholm integral equation of the second kind.

Anna Valer'evna Tarasenko

Samara State Architecture and Civil Engineering University,
194 Molodogvardeiskaya str., Samara, 443001 Russia,

`e-mail:` Tarasenko.A.V@mail.ru