

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.374

doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.167-180

## НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

*А.С. Бегун*<sup>1,2</sup>, *Л.В. Ковтанюк*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
г. Владивосток, 690041, Россия*

<sup>2</sup>*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,  
г. Владивосток, 690014, Россия*

### Аннотация

В работе исследовано деформирование диска, вращающегося с изменяющейся скоростью (разгон, торможение, вращение с постоянной скоростью), в условиях последовательного накопления необратимых деформаций ползучести и пластических деформаций. Рассмотрено деформирование полого диска и диска с включением. В предположении плоского напряженного состояния в рамках теории течения получены решения дифференциальных уравнений для расчета полей напряжений, деформаций, перемещений и скоростей с использованием конечно-разностных схем. В случае осесимметричной задачи решение получено методом конечных элементов. Выявлены закономерности развития областей вязкопластического течения, в достаточно толстом диске радиус упруго-пластической границы существенно изменяется по толщине диска. Проведено сравнение полученного решения со случаем идеальной упругопластичности, учет вязкости приводит к замедлению течения. Показано, что наличие углового ускорения при быстром разгоне значительно сказывается на распределении интенсивностей напряжений.

**Ключевые слова:** упругость, ползучесть, вращающийся диск, вязкопластическое течение

### Введение

Вращающиеся диски являются важными элементами конструкций и машин. В большинстве случаев диски работают в условиях, приводящих к накоплению необратимых деформаций. Изучению вращающихся дисков посвящено множество публикаций ([1–12] и др.), в том числе учитывающих неоднородность материалов [4, 5, 7, 12] и теплофизические эффекты [5, 7, 11]. Как правило, расчеты проводились при фиксированной скорости вращения диска, что не позволяет исследовать напряженное состояние вращающихся дисков, работающих при изменяющихся режимах эксплуатации. При расчете напряженно-деформированного состояния диска, вращающегося с ускорением, необходимо учитывать не только центробежные силы инерции, но и силы инерции, связанные с угловым ускорением. Поведение упругого диска из функционально-градиентного материала при уменьшающейся скорости вращения исследовано в работах [5, 12]. Расчету вязкоупругого диска, вращающегося с изменяющейся скоростью, когда напряженное состояние ниже предела текучести, посвящены работы [13, 14]. В настоящей работе изучается необратимое деформирование кольцевого диска, вращающегося с ускорением, как на стадии, предшествующей пластическому течению, так и в процессе развития вязкопластического течения.

### 1. Модельные соотношения

Решение задачи будем искать в рамках малых деформаций. Когда в среде есть необратимые деформации, компоненты полных деформаций  $d_{ij}$  определяются как суммы обратимых  $e_{ij}$  и необратимых (деформации ползучести  $p_{ij}^v$  и пластичности  $p_{ij}^p$ )  $p_{ij}$  составляющих

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = e_{ij} + p_{ij}^p + p_{ij}^v = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $x_j$  – координаты точки среды.

Напряжения в среде определяются обратимыми деформациями и связаны с ними законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1)$$

В соотношениях (1)  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ламе.

Диссипативный механизм деформирования связан с накоплением необратимых деформаций. Считаем, что до начала пластического течения накопление необратимых деформаций связано с механизмом ползучести. Для конкретизации этого механизма воспользуемся теорией течения. Скорость деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}^v$  определим в виде

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (2)$$

Здесь  $V(\sigma_{ij})$  – потенциал ползучести,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  – главные значения тензора напряжений,  $B$  и  $n$  являются параметрами ползучести.  $\Sigma$  зададим в виде

$$\Sigma = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}, \quad (3)$$

где  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ .

Когда напряженное состояние в материале достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования меняется, появляется область пластического течения. Связь скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  с напряжениями в таких областях согласно принципу максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad \lambda > 0.$$

С целью учета вязкости при пластическом течении среды воспользуемся обобщением условия пластичности Мизеса

$$(s_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p)(s_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p) = 2k^2, \quad (4)$$

где  $s_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $k$  – предел текучести,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

### 2. Постановка задачи.

#### Деформирование до начала пластического течения

Рассмотрим кольцевой диск с внутренним радиусом  $r = r_0$  и внешним радиусом  $r = R$ , который вращается с угловой скоростью  $\omega(t)$ . Считаем, что реализуется плоское напряженное состояние, в случае осевой симметрии отличными от нуля остаются компоненты напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{r\varphi}$ .

Для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью граничные условия запишутся в виде

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad (5)$$

для диска с жестким включением

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

Считаем, что в начальный момент времени напряжения и деформации в материале отсутствуют.

Отличными от нуля компонентами полных деформаций остаются следующие:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right),$$

$$d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Напряжения связаны с обратимыми деформациями законом Гука (1), тогда компоненты тензора скоростей обратимых деформаций определяются по формулам

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr} - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} - \lambda\dot{\sigma}_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}.$$

Здесь и далее точкой обозначается производная по времени.

До начала пластического течения для определения скоростей необратимых деформаций воспользуемся законом ползучести (2)

$$\varepsilon_{rr}^\nu = \frac{1}{2} Bn (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{n/2-1}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{1}{2} Bn (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) Q^{n/2-1},$$

$$\varepsilon_{zz}^\nu = -(\varepsilon_{rr}^\nu + \varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu), \quad \varepsilon_{r\varphi}^\nu = \frac{3}{2} Bn \sigma_{r\varphi} Q^{n/2-1},$$

$$Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2.$$

При вращении диска с изменяющейся скоростью на каждую точку диска помимо центростремительного ускорения  $r\omega^2$  будет действовать вращательное ускорение  $r \frac{d\omega}{dt}$ . Тогда на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с наличием центростремительного и вращательного ускорений. Следовательно, уравнения равновесия в рассматриваемом случае запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\rho r \omega^2, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = \rho r \frac{d\omega}{dt}. \quad (7)$$

Интегрируя (7) и используя соотношения для скоростей деформаций

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0,$$

найдем

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \left( r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right),$$

где  $\varphi(r, t)$  – функция напряжений.

Для определения функции напряжений  $\varphi(r, t)$  получим дифференциальное уравнение

$$\frac{r^3(7\lambda + 6\mu)\rho\omega^2 + 2(\lambda + \mu) \left( r \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + r \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 r \partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{2r\mu(3\lambda + 2\mu)} + \frac{BnQ^{n/2-1}}{2} \times$$

$$\times \left( 7r^2\rho\omega^2 - \frac{2\varphi}{r} + 2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \right) + r \frac{Bn}{2} \left[ 2 \left( r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\varphi}{r} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left( Q^{n/2-1} \right),$$

$$Q(\varphi(r, t), r, t) = \frac{\varphi^2}{r^2} - \frac{\varphi}{r} \left( r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \left( r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + 3 \left( \frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right)^2.$$

Данное уравнение может быть проинтегрировано численно с использованием конечно-разностной схемы при следующих граничных и начальных условиях:

для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(r_0, t) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0; \quad (8)$$

для диска с жестким включением

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0,$$

$$2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \Big|_{r=r_0} + 2\rho r_0^2 \omega(t) \omega'(t) \right) - \frac{\lambda}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} +$$

$$+ \mu(3\lambda + 2\mu) Bn \left( 2 \left( r_0^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{\varphi(r_0)}{r_0} \right) \left[ Q(\varphi(r_0, t), r_0, t) \right]^{n/2-1} = 0.$$

По найденной функции  $\varphi(r, t)$  находятся напряжения, обратимые и необратимые деформации. Компонента перемещений  $u_r$  находится из известных деформаций:  $u_r = r(e_{rr} + p_{rr})$ . Для определения компоненты перемещений  $u_\varphi$  получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2(e_{r\varphi} + p_{r\varphi}), \quad e_{r\varphi} = \frac{\rho}{8\mu} \frac{d\omega}{dt} \left( r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right), \quad p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^p dt,$$

$$u_\varphi \Big|_{r=r_0} = r_0 \sin \theta(t), \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt.$$

При расчетах изменение угловой скорости задавалось в виде: в промежутке времени  $0 \leq t \leq t_3$  возрастает, затем при  $t_3 \leq t \leq t_4$  поддерживается постоянной и далее уменьшается до нуля  $t_4 \leq t \leq t_7$ .

Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tau = t\sqrt{\alpha}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{R}$$

при значении постоянных:  $\lambda = 79.61$  ГПа,  $\mu = 119.42$  ГПа,  $B = 3.5 \cdot 10^{-25} c^{-1} \text{Па}^{n-1}$ ,  $n = 3$ ,  $\rho = 8000$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ ,  $r_0/R = 0.2$ ,  $\alpha = 400$  с $^{-2}$ ,  $\beta = 200$  с $^{-2}$ .

На рис. 1 показано распределение напряжений в зависимости от радиуса в различные моменты времени, результаты приведены для кусочно-линейного закона изменения углового ускорения. Различие в распределении  $\Sigma$  при разных режимах разгона диска видно на рис. 2, при более резком разгоне  $\Sigma$  может существенно увеличиваться даже при одинаковых итоговых конечных скоростях.

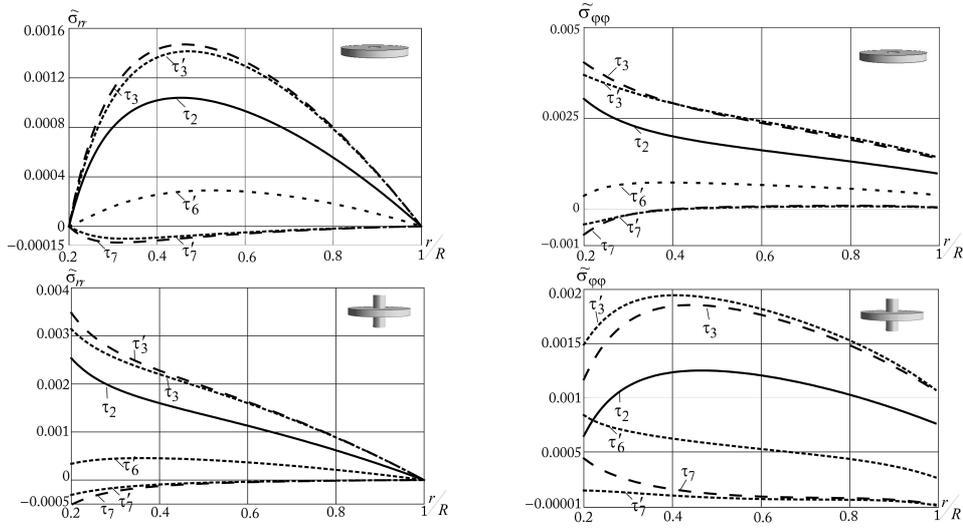


Рис. 1. Распределение напряжений в зависимости от радиуса

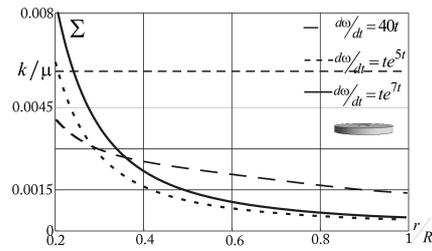


Рис. 2. Распределения  $\Sigma$  при различных режимах разгона диска

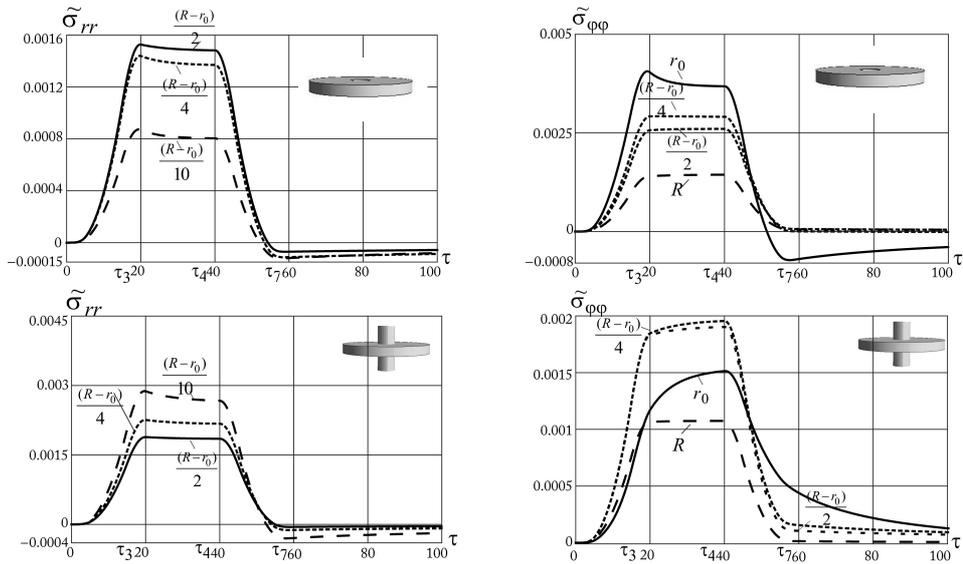


Рис. 3. Изменение напряжений с течением времени

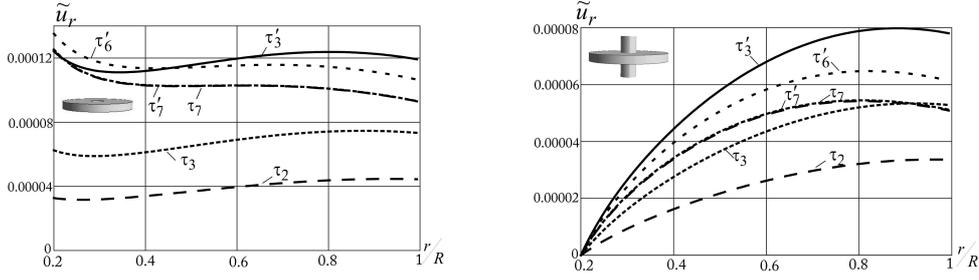


Рис. 4. Распределение перемещений в зависимости от радиуса

### 3. Вязкопластическое течение

Далее рассмотрим вязкопластическое течение материала. Вязкость на стадии пластического течения учитывается с помощью соответствующего обобщения условия пластичности (4). Тогда компоненты скоростей пластических деформаций находятся по формулам

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{3\eta} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), & \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{1}{3\eta} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \\ \varepsilon_{zz}^p &= -\frac{1}{3\eta} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), & \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{\sigma_{r\varphi}}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right).\end{aligned}$$

Для определения параметров напряженно-деформированного состояния получим систему уравнений

$$\begin{aligned}r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p &= 0, \\ \varphi^e &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho\omega^2 \left(r^3 - \frac{R^4}{r}\right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho\omega^2 (r_1^2 + R^2)\right) \left(r - \frac{R^2}{r}\right), \\ \frac{\varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2} - \frac{\varphi^p|_{r=r_1}}{r_1} \left(r_1^2 \rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r}\bigg|_{r=r_1}\right) + \\ &+ \left(r_1^2 \rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r}\bigg|_{r=r_1}\right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r_1^2 - \frac{R^2}{r_1}\right)\right)^2 = k^2,\end{aligned}$$

которая может быть решена с использованием конечно-разностной схемы. Для численной реализации вводятся две изменяющиеся во времени сетки по переменной  $r$ : в упругой  $r = m_{i+1} + h_{i+1}^e j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N^e - 1$ ,  $h_{i+1}^e = (1 - m_{i+1})/N^e$  и пластической области  $r = r_0 + h_{i+1}^p j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N^p$ ,  $h_{i+1}^p = [(m_{i+1}) - r_0]/N^p$ . На каждом временном шаге  $t = t_0 + dt(i + 1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  сетка меняется из-за изменения упругопластической границы. Значения функции напряжений для новой сетки на предыдущем временном шаге находятся интерполяцией. Далее вычисляются остальные параметры напряженно-деформированного состояния. Развитие области вязкопластического течения отличается от случая идеальной пластичности (область пластического течения перестает изменяться сразу, как только скорость вращения становится постоянной) (рис. 5), при постоянной скорости вращения область вязкопластического течения продолжает увеличиваться и затем выходит на асимптоту. При уменьшении скорости вращения область деформирования разбивается на три части: область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_2$ , область

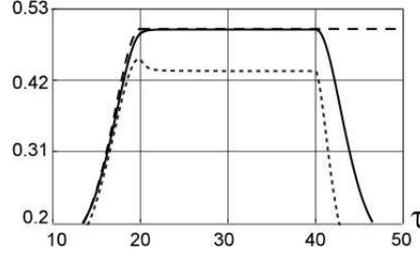


Рис. 5. Граница областей пластического течения (---) и вязкопластического течения (- - - и —)

$r_2 \leq r \leq r_1$ , где пластические деформации перестают изменяться, и область обратимого деформирования  $r_1 \leq r \leq R$ . Граница  $r_2(t)$  движется от  $r = r_1(t_5)$  в сторону  $r = r_0$ , и через некоторое время пластические деформации перестают изменяться везде. Здесь и далее значения постоянных принимались равными:  $k/\mu = 0.00586$ ,  $\sqrt{\alpha\eta}/\mu = 3.35$ .

Если учитывать вязкость как на стадии, предшествующей пластическому течению, так и на этой стадии, для определения функции напряжений получается аналогичная система уравнений, где скорости необратимых деформаций складываются из скоростей деформаций ползучести и скоростей пластических деформаций

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial (\varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\nu})}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\nu} - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{rr}^{\nu} = 0,$$

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^{e1}}{\partial r} + r \frac{\partial (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{\nu1})}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{e1} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\nu1} - \varepsilon_{rr}^{e1} - \varepsilon_{rr}^{\nu1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2} - \frac{\varphi^p|_{r=r_1}}{r_1} \left( r_1^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right) + \\ + \left( r_1^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( r_1^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \right) \right)^2 = k^2. \end{aligned}$$

Численное решение получено аналогичным образом, что и выше, с использованием непрерывности напряжений на упругопластической границе. При постоянной скорости вращения диска область вязкопластического течения уменьшается, затем выходит на асимптоту (рис. 5). С уменьшением скорости вращения диска область вязкопластического течения уменьшается, и в момент времени  $t = t'_5$  пластические деформации перестают изменяться во всем диске. Распределения напряжений по радиусу в различные моменты времени показаны на рис. 6.

#### 4. Осесимметричная задача

В большинстве случаев при расчете вращающихся дисков полагают, что реализуется плоское напряженное состояние. При исследовании утолщенных вращающихся дисков уже нельзя использовать эту гипотезу, для более точного расчета необходимо решить пространственную задачу. Здесь рассмотрим осесимметричное нагружение диска. Для решения осесимметричной задачи будем использовать метод конечных элементов. Для этого запишем вариационную формулировку задачи. Пусть  ${}^0V$  – объем, занимаемый телом, в начальный момент времени  $t = 0$ ,  ${}^0S$  – поверхность, ограничивающая этот объем, на части поверхности тела  ${}^0S_u$  заданы

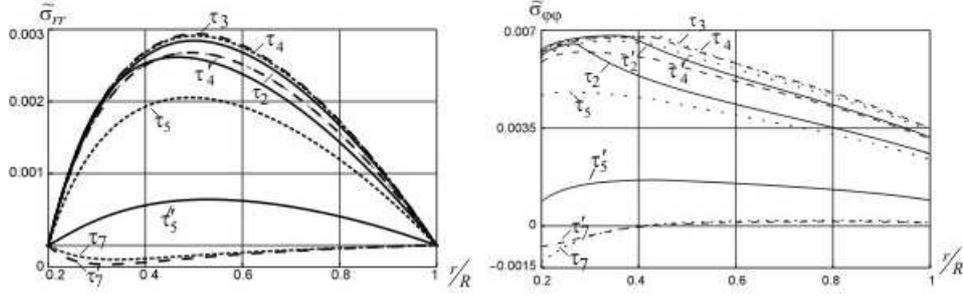


Рис. 6. Распределение напряжений в зависимости от радиуса

перемещения, на  ${}^0S_t$  – поверхностные силы. Принцип возможных перемещений запишем в виде

$$\int_V {}^0\sigma : \delta \mathbf{d} d^0V = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d^0V + \int_{{}^0S_T} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} d^0S \quad (\delta \mathbf{u} = 0 \text{ на } {}^0S_u), \quad (9)$$

где  $\sigma$ ,  $\mathbf{d}$  – тензоры напряжений и полных деформаций,  $\mathbf{f}$  – вектор массовых сил (в рассматриваемом случае силы инерции, связанные с наличием центробежного и вращательного ускорений),  $\mathbf{T}$  – вектор поверхностных сил.

Рассмотрим два близких момента времени  $t$  и  $t + \Delta t$ , шаг по времени  $\Delta t$  выберем достаточно малым. Предполагаем, что в момент времени  $t$  все величины известны, и необходимо их определить в следующий момент времени  $t + \Delta t$ . Тогда линейризованное уравнение принципа возможных перемещений, записанное в приращениях

$$\int_{{}^0V} \Delta \sigma : \delta \mathbf{d} d^0V = \int_{{}^0V} \rho^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d^0V + \int_{{}^0S_T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} d^0S - \int_{{}^0V} {}^t \sigma : \delta \mathbf{d} d^0V. \quad (10)$$

Кинематические зависимости, записанные относительно приращений, имеют вид

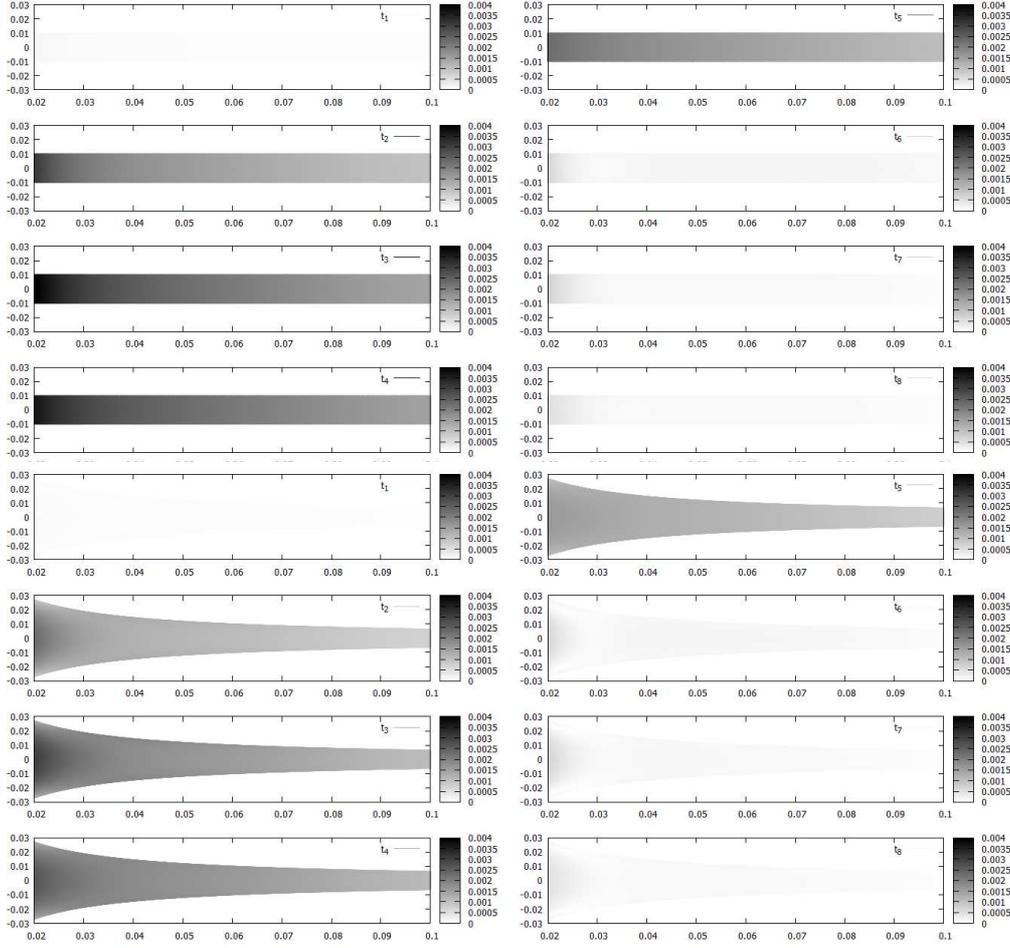
$$\begin{aligned} \Delta d_{rr} &= \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r}, \quad \Delta d_{\varphi\varphi} = \frac{\Delta u_r}{r}, \quad \Delta d_{zz} = \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r}, \\ \Delta d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_\varphi}{\partial r} - \frac{\Delta u_\varphi}{r} \right), \quad \Delta d_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right), \quad \Delta d_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_\varphi}{\partial z} \right), \\ \Delta \mathbf{d} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{d} - {}^t \mathbf{d}, \quad \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Приращения напряжений связаны с приращением обратимых деформаций законом Гука (1)

$$\Delta \sigma_{ij} = \lambda \Delta e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \Delta e_{ij}, \quad \Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{p}.$$

Приращения необратимых деформаций ( $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}^\nu + \Delta \mathbf{p}^p$ ) складываются из приращений деформаций ползучести

$$\begin{aligned} \Delta p_{rr}^\nu &= \frac{1}{2} Bn (2 {}^t \sigma_{rr} - ({}^t \sigma_{\varphi\varphi} + {}^t \sigma_{zz})) Q^{n/2-1}, \\ \Delta p_{\varphi\varphi}^\nu &= \frac{1}{2} Bn (2 {}^t \sigma_{\varphi\varphi} - ({}^t \sigma_{rr} + {}^t \sigma_{zz})) Q^{n/2-1}, \\ \Delta p_{r\varphi}^\nu &= \frac{3}{2} Bn {}^t \sigma_{r\varphi} Q^{n/2-1}, \quad \Delta p_{rz}^\nu = \frac{3}{2} Bn {}^t \sigma_{rz} Q^{n/2-1}, \quad \Delta p_{z\varphi}^\nu = \frac{3}{2} Bn {}^t \sigma_{z\varphi} Q^{n/2-1}, \\ \Delta p_{zz}^\nu &= -(\Delta p_{rr}^\nu + \Delta p_{\varphi\varphi}^\nu), \quad Q = Q({}^t \sigma) \end{aligned}$$


 Рис. 7. Распределение интенсивностей напряжений  $\Sigma/\mu$  зависимости от радиуса

и приращений пластических деформаций

$$\begin{aligned} \Delta p_{rr}^p &= \frac{1}{3\eta} (2 {}^t\sigma_{rr} - ({}^t\sigma_{\varphi\varphi} + {}^t\sigma_{zz})) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \\ \Delta p_{\varphi\varphi}^p &= \frac{1}{3\eta} (2 {}^t\sigma_{\varphi\varphi} - ({}^t\sigma_{rr} + {}^t\sigma_{zz})) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \\ \Delta p_{r\varphi}^p &= \frac{{}^t\sigma_{r\varphi}}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \quad \Delta p_{z\varphi}^p = \frac{{}^t\sigma_{rz}}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \quad \Delta p_{z\varphi}^p = \frac{{}^t\sigma_{r\varphi}}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \\ \Delta p_{zz}^p &= -(\Delta p_{rr}^p + \Delta p_{\varphi\varphi}^p), \quad Q = Q({}^t\sigma). \end{aligned}$$

Для областей, где напряженное состояние меньше предела текучести, имеем  $\Delta p^p = 0$ .

Для свободного диска с переменной толщиной  $h(r)$  граничные условия запишутся в виде

$$\sigma_{rr}(r = r_0, z) = \sigma_{rr}(r = R, z) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r = R, z) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \pm h) = 0, \quad (11)$$

для диска с жестким включением

$$u_r(r = r_0, z) = 0, \quad \sigma_{rr}(r = R, z) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r = R, z) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \pm h) = 0. \quad (12)$$

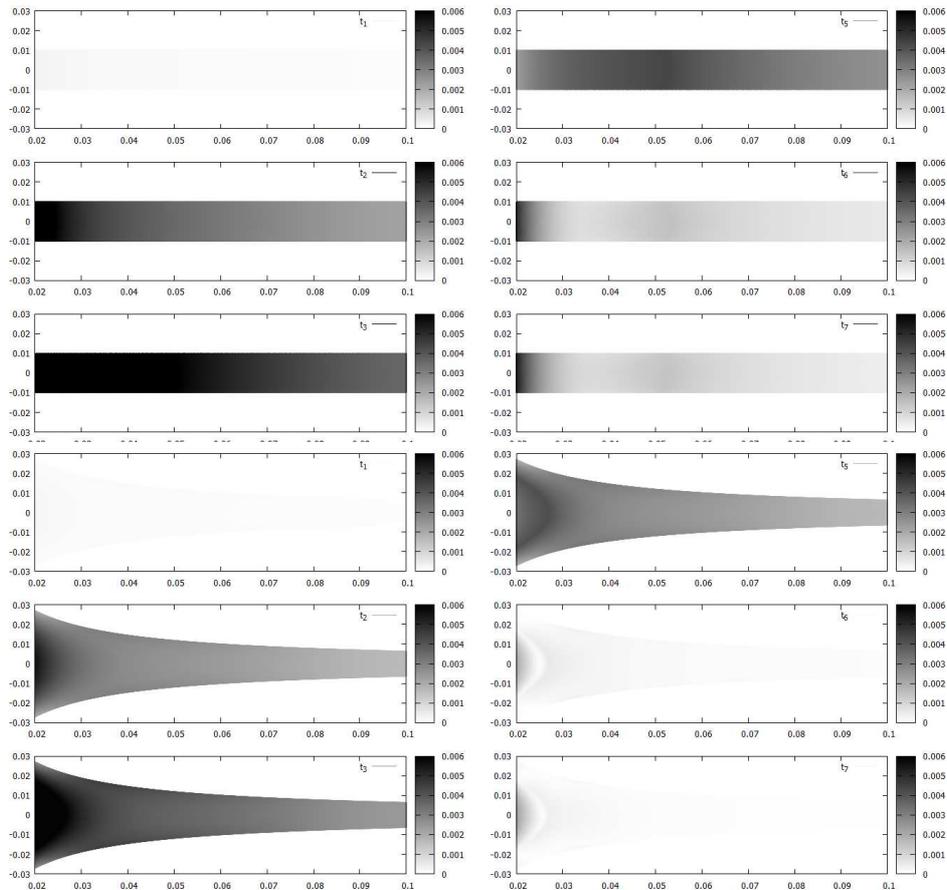


Рис. 8. Распределение интенсивностей напряжений  $\Sigma/\mu$  зависимости от радиуса

Численная реализация метода конечных элементов проведена с помощью пакета FreeFem++. После нахождения приращений перемещений  $\Delta \mathbf{u}$  находятся перемещения  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ , деформации  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{d}$  и напряжения  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ . На рис. 7 показаны распределения интенсивностей напряжений в зависимости от радиуса в различные моменты времени для диска постоянной толщины и диска параболического профиля (масса дисков одинаковая) в случае вязкоупругого деформирования, на рис. 8 – в случае вязкопластического течения. Распределение напряжений, а также радиус упругопластической границы существенно меняются в достаточно толстом диске.

### Заключение

В настоящей работе получены решения краевых задач о деформировании диска, вращающегося с ускорением, в условиях ползучести и вязкопластического течения как в предположении плоского напряженного состояния, так и в случае трехмерной осесимметричной задачи. Показано, что учет сил инерции, связанных с наличием углового ускорения, приводит к значительному изменению в распределении интенсивностей напряжений и для плоского напряженного состояния, и для осесимметричной задачи. При этом наличие отличного от нуля касательного напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  не сказывается существенным образом на распределении нормальных напряжений. Учет вязких свойств материала как в упругой области, так и в области

пластического течения приводит к замедлению течения. Решение осесимметричной задачи показало, что распределение напряжений в достаточно толстом диске может существенно изменяться по толщине диска.

#### Литература

1. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
2. Левин А.В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 624 с.
3. Aleksandrova N. Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – V. 51. – P. 333–337. – doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.006.
4. Bayat M., Sahari B.B., Saleem M., Ali A., Wong S.V. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory // Appl. Math. Modell. – 2009. – V. 33, No 11. – P. 4215–4230. – doi: 10.1016/j.apm.2009.03.001.
5. Dai T., Dai H.-L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed // Appl. Math. Modell. – 2016. – V. 40, No 17–18. – P. 7689–7707. – doi: 10.1016/j.apm.2016.03.025.
6. Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ing.-Arch. – 1984. – V. 54. – P. 345–354. – doi: 10.1007/BF00532817.
7. Gupta V.K., Chandrawat H.N., Singh S.B., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient // Metall. Mater. Trans. A. – 2004. – V. 35, No 4. – P. 1381–1391. – doi: 10.1007/s11661-004-0313-3.
8. Gupta S.K., Sonia T.P. Creep transition in a thin rotating disc of variable density // Def. Sci. J. – 2000. – V. 50, No 2. – P. 147–153.
9. Nyashin Y., Shishlyayev V. Analytic creep durability of rotating uniform disks // Int. J. Rotating Mach. – 1998. – V. 4, No 4. – P. 249–256. – doi: 10.1155/S1023621X98000219.
10. Rees D.W.A. Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca // ZAMM – J. Appl. Math. Mech. – 1999. – V. 79, No 4. – P. 281–288. – doi: 10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V.
11. Wahl A.M. A comparison of flow criteria applied to elevated temperature creep of rotating disks with consideration of the transient condition // Creep in Structures. IUTAM Symp. (International Union of Theoretical and Applied Mechanics) / Hoff N.J. (Ed.) – Berlin, Heidelberg: Springer, 1962. – P. 195–214. – doi: 10.1007/978-3-642-86014-0\_11.
12. Zheng Y., Bahaloo H., Mousanezhad D., Vaziri A., Nayeb-Hashemi H. Displacement and stress fields in a functionally graded fiber-reinforced rotating disk with nonuniform thickness and variable angular velocity // J. Eng. Mater. Technol. – 2017. – V. 139, No 3. – Art. 031010, P. 1–10. – doi: 10.1115/1.4036242.
13. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В. Расчет напряжений, деформаций и перемещений во вращающемся диске в условиях ползучести // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2019. – № 1. – С. 84–93.
14. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В. Деформирование вязкоупругого диска, вращающегося с ускорением // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2020. – № 3. – С. 143–151.

Поступила в редакцию  
18.01.2021

**Бегун Александра Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; доцент кафедры математики и моделирования

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН  
ул. Радио, д. 5, г. Владивосток, 690041, Россия

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса  
ул. Гоголя, д. 41, г. Владивосток, 690014, Россия

E-mail: *asustinova@mail.ru*

**Ковтанюк Лариса Валентиновна**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН  
ул. Радио, д. 5, г. Владивосток, 690041, Россия

E-mail: *lk@iacp.dvo.ru*

---

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2021, vol. 163, no. 2, pp. 167–180

---

---

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.167-180

### Irreversible Deformation of a Rotating Disc under Plasticity and Creep

*A.S. Begun<sup>a,b\*</sup>, L.V. Kovtanyuk<sup>a\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Institute of Automation and Control Processes Far Eastern Branch,  
Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 690041 Russia*

<sup>b</sup>*Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, 690014 Russia*

E-mail: *\*asustinova@mail.ru, \*\*lk@iacp.dvo.ru*

Received January 18, 2021

#### Abstract

This paper is devoted to the study of deformation of a disk rotating with variable velocity (acceleration, deceleration, rotation at a constant rate) under consecutive accumulation of irreversible creep and plastic flow strains. The deformation processes of a hollow disk and a disk with an inclusion are studied. Under the assumption of a plane stress state within the framework of the flow theory, solutions of differential equations are obtained for calculating the fields of stresses, deformations, displacements, and velocities using finite difference schemes. In the case of an axisymmetric problem, the solution is obtained using the finite element method. The laws of viscoplastic flow area development are investigated. In a sufficiently thick disk, the radius of the elastoplastic boundary changes significantly along the thickness of the disk. The obtained solution is compared with the case of ideal elastoplasticity. Taking into account the viscosity leads to a deceleration of the flow. It is shown that the presence of angular acceleration during fast overclocking significantly affects the distribution of stress intensities.

**Keywords:** elasticity, creep, rotating disk, viscoplastic flow

### Figure Captions

- Fig. 1. Stress distribution depending on the radius.  
 Fig. 2. Distributions of  $\Sigma$  at different modes of disk acceleration.  
 Fig. 3. Stress change over time.  
 Fig. 4. Distribution of displacements depending on the radius.  
 Fig. 5. The boundary between the areas of plastic flow (---) and viscoplastic flow (- - - and —).  
 Fig. 6. Stress distribution depending on the radius.  
 Fig. 7. Distribution of stress intensities  $\Sigma/\mu$  depending on the radius.  
 Fig. 8. Distribution of stress intensities  $\Sigma/\mu$  depending on the radius.

### References

1. Dem'yanushko I.V., Briger I.A. *Raschet na prochnost' vrashchayushchikhsya diskov* [Strength Analysis of Rotating Disks]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 247 p. (In Russian)
2. Levin A.V. *Rabochie lopatki i diski parovykh turbin* [Moving Blades and Disks of Steam Turbines]. Moscow, Gosenergoizdat, 1963. 624 p. (In Russian)
3. Aleksandrova N. Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem. *Int. J. Eng. Sci.*, 2012, vol. 51, pp. 333–337. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.006.
4. Bayat M., Sahari B.B., Saleem M., Ali A., Wong S.V. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.*, 2009, vol. 33, no. 11, pp. 4215–4230. doi: 10.1016/j.apm.2009.03.001.
5. Dai T., Dai H.-L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed. *Appl. Math. Modell.*, 2016, vol. 40, nos. 17–18, pp. 7689–7707. doi: 10.1016/j.apm.2016.03.025.
6. Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk. *Ing.-Arch.*, 1984, vol. 54, pp. 345–354. doi: 10.1007/BF00532817.
7. Gupta V.K., Chandrawat H.N., Singh S.B., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient. *Metall. Mater. Trans. A*, 2004, vol. 35, no. 4, pp. 1381–1391. doi: 10.1007/s11661-004-0313-3.
8. Gupta S.K., Sonia T.P. Creep transition in a thin rotating disc of variable density. *Def. Sci. J.*, 2000, vol. 50, no. 2, pp. 147–153.
9. Nyashin Y., Shishlyayev V. Analytic creep durability of rotating uniform disks. *Int. J. Rotating Mach.*, 1998, vol. 4, no. 4, pp. 249–256. doi: 10.1155/S1023621X98000219.
10. Rees D.W.A. Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca. *ZAMM – J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 79, no. 4, pp. 281–288. doi: 10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V.
11. Wahl A.M. A comparison of flow criteria applied to elevated temperature creep of rotating disks with consideration of the transient condition. *Creep in Structures. Proc. IUTAM Symp. (International Union of Theoretical and Applied Mechanics)*. Hoff N.J. (Ed.). Berlin, Heidelberg, Springer, 1962, pp. 195–214. doi: 10.1007/978-3-642-86014-0\_11.
12. Zheng Y., Bahaloo H., Mousanezhad D., Vaziri A., Nayeb-Hashemi H. Displacement and stress fields in a functionally graded fiber-reinforced rotating disk with nonuniform thickness and variable angular velocity. *J. Eng. Mater. Technol.*, 2017, vol. 139, no. 3, art. 031010, pp. 1–10. doi: 10.1115/1.4036242.
13. Begun A.S., Kovtanyuk L.V. Calculation of stresses, strains, and displacements in a rotating disk under creep conditions. *Vestn. Chuv. Gos. Pedagog. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2019, no. 1, pp. 84–93. (In Russian)

14. Begun A.S., Kovtanyuk L.V. Deformation of a viscoelastic disk rotating with acceleration. *Vestn. Chuv. Gos. Pedagog. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2020, no. 3, pp. 143–151. (In Russian)
- 

**Для цитирования:** Бегун А.С., Ковтанюк Л.В. Необратимое деформирование вращающегося диска в условиях пластичности и ползучести // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 2. – С. 167–180. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.167-180.

**For citation:** Begun A.S., Kovtanyuk L.V. Irreversible deformation of a rotating disc under plasticity and creep. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 167–180. doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.167-180. (In Russian)