

УДК 519.21

МНОГОМЕРНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ф.Г. Габбасов, В.Т. Дубровин

Аннотация

Для последовательности, элементы которой составлены из значений периодической по каждому аргументу непрерывной векторной функции, отображающей траектории эндоморфизмов d -мерного евклидова пространства в m -мерное евклидово пространство, доказана центральная предельная теорема с большими отклонениями.

Ключевые слова: предельная теорема, эндоморфизмы, большие отклонения.

Пусть W – невырожденная целочисленная квадратная матрица d -го порядка. Рассмотрим преобразование $T\bar{x} = \{\bar{x}W\}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, вектор \bar{x} принадлежит d -мерному тору Ω_d . Обозначим через $\text{mes}(\cdot)$ инвариантную меру на Ω_d , которую можно отождествить с мерой Лебега, определенной на единичном замкнутом гиперкубе d -мерного евклидова пространства R^d :

$$K_d = \{\bar{x} : \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_d \leq 1\}.$$

Указанное преобразование является эндоморфизмом, сохраняющим меру. Кроме того, $T\bar{x}$ является перемешиванием всех степеней, когда среди характеристических чисел матрицы W отсутствуют числа, равные по модулю единице. При этом условия для суммы $\sum_{k=1}^n (T^k \bar{x})$ справедлива центральная предельная теорема [1].

Рассмотрим на K_d векторы

$$\bar{f}(\bar{x}W^k) = \{f_1(\bar{x}W^k), f_2(\bar{x}W^k), \dots, f_m(\bar{x}W^k)\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $f_i(x)$ – вещественнозначные периодические по каждому аргументу x_1, x_2, \dots, x_d функции, заданные на K_d . Целью настоящей работы является исследование поведения функции

$$F_n(r) = \text{mes} \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \left\| n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x}W^k) \right\| > r \right\}$$

в случае, когда r растет вместе с n , то есть доказательство предельной теоремы

с большими отклонениями. Здесь и далее $\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}$.

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий.

1) Существует такая постоянная $A > 0$, что

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq A\|\bar{x} - \bar{y}\|, \quad \bar{x}, \bar{y} \in K_d.$$

- 2) Функции $f_i(\bar{x})$ интегрируемы по Лебегу на K_d и $\int_{K_d} f_i(\bar{x}) d\bar{x} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.
- 3) Матрица R с элементами

$$\rho_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{K_d} \left(\sum_{k=1}^n f_i(\bar{x} W^k) \right) \left(\sum_{k=1}^n f_j(\bar{x} W^k) \right) d\bar{x}$$

является единичной.

4. Матрица W такова, что

$$\sup_{\|\bar{x}\| < 1} \|\bar{x} W^{-1}\| < 1, \quad |\det W| > 1.$$

При выполнении этих условий в работе [2] была доказана центральная предельная теорема для сумм

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k) \tag{1}$$

с остаточным членом вида $O(n^{-1/2+\varepsilon})$, где ε – сколь угодно малое фиксированное положительное число. Используя этот результат, можно продвинуться дальше при исследовании больших уклонений в многомерной предельной теореме.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1)–4). Тогда при $r \geq 1$, $r = o(n^{1/8}/\ln n)$, для больших уклонений имеет место соотношение

$$F_n(r) = \frac{1}{2^{(m-2)/2} \Gamma(m/2)} \int_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy \left(1 + O\left(\frac{r \ln n}{n^{1/8}}\right) \right),$$

где $\Gamma(m/2) = \int_0^\infty u^{m/2-1} e^{-u} du$.

Доказательство. Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа, $p = [n/(Q+N)]$, где $[\cdot]$ – обозначение целой части числа. Введем следующие обозначения:

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=(k-1)(Q+N)+1}^{kQ+(k-1)N} \bar{f}(\bar{x} W^r), \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$\eta_k^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=kQ+(k-1)N+1}^{k(Q+N)} \bar{f}(\bar{x} W^r), \quad 1 \leq k \leq p-1,$$

$$\eta_p^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=pQ+(p-1)N+1}^n \bar{f}(\bar{x} W^r).$$

Получим, что сумма (1) разбивается на две суммы:

$$\sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k) = \sqrt{Q} \sum_{k=1}^p \eta_k + \sqrt{Q} \sum_{k=1}^p \eta_k^0 = \sqrt{Q} (\zeta_p + \zeta_p^0).$$

Далее перейдем к изучению суммы ζ_p . Обозначим $\widehat{\zeta}_p = \sum_{k=1}^p \widehat{\eta}_k$, где $\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2, \dots, \widehat{\eta}_p$ – векторы со следующими свойствами:

А) $\text{mes}\{\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \widehat{\eta}_k \in M\} = \text{mes}\{\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \eta_k \in M\}$, где M – измеримые множества из R^m ;

$$\text{В) } \int_{K_d} \exp\left(i\left(\bar{t}, \frac{\widehat{\zeta}_p}{\sqrt{p}}\right)\right) d\bar{x} = \prod_{k=1}^p \int_{K_d} \exp\left(i\left(\bar{t}, \frac{\widehat{\eta}_k}{\sqrt{p}}\right)\right) d\bar{x}.$$

Обозначим через Λ матрицу ковариаций вектора η_1 . Так же, как в работе [2], можно показать, что элементы матрицы Λ отличаются от элементов единичной матрицы R на величину $O(1/Q)$.

Пусть матрица A такова, что $A^T A = \Lambda^{-1}$, где A^T – транспонированная к A матрица. Очевидно, что вектор $A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}$ имеет единичную матрицу ковариаций.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} S_p(r) &= \text{mes}\{\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|\zeta_p/\sqrt{p}\| > r\}, \\ F_p(r) &= \text{mes}\{\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|A\zeta_p/\sqrt{p}\| > r\}, \\ \widehat{F}_p(r) &= \text{mes}\{\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| > r\}, \end{aligned}$$

$$f_p(\bar{t}) = \int_{K_d} \exp(i(\bar{t}, A\zeta_p/\sqrt{p})) d\bar{x},$$

$$\widehat{f}_p(\bar{t}) = \int_{K_d} \exp(i(\bar{t}, A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p})) d\bar{x}, \quad f(\bar{t}) = \int_{K_d} \exp(i(\bar{t}, \eta_1)) d\bar{x}.$$

Приведем необходимые в дальнейшем утверждения (через C_i будем обозначать положительные постоянные).

Лемма 1. В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\int_{K_d} \left\| \sum_{k=1}^l \bar{f}(\bar{x} W^k) \right\|^{2\nu} dx \leq (C_1)^{2\nu} (\ln l)^\nu l^\nu (2\nu)!,$$

если $\nu \leq C_2 \sqrt{l/\ln l}$.

Лемма доказывается аналогично лемме 1 из [3].

Лемма 2. Справедлива оценка

$$\int_{K_d} \exp(\bar{h}, Q^{-1/2}) \sum_{k=1}^Q \bar{f}(\bar{x} W^k) dx \leq C_3 < \infty,$$

где $0 < \|\bar{h}\| < \varepsilon_0/\sqrt{\ln Q}$, ε_0 – достаточно малое фиксированное положительное число.

Доказательство леммы почти ничем не отличается от доказательства леммы 2 из [3].

Лемма 3. Справедлива оценка

$$\text{mes}\left\{\bar{x} : \bar{x} \in K_d, l^{-1/2} \left\| \sum_{k=1}^l \bar{f}(\bar{x} W^k) \right\| \geq \omega\right\} \leq \exp(-C_4 \omega / \ln^\lambda l),$$

где $\lambda > 1/2$ – постоянная, $\omega \leq C_5 \sqrt{l} \ln^{\lambda_1} l$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda - \lambda_1 > 1/2$.

Справедливость утверждения данной леммы следует из леммы 3 [3] сведением к одномерному случаю:

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \left\| l^{-1/2} \sum_{k=1}^l \bar{f}(\bar{x} W^k) \right\| \geq \omega \right\} &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \text{mes} \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \left| l^{-1/2} \sum_{k=1}^l f_i(\bar{x} W^k) \right| > \frac{\omega}{\sqrt{m}} \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 4. Пусть

$$\hat{\mu}_\nu = \int_{K_d} \|A\eta_1\|^\nu d\bar{x}, \quad \mu_\nu = \int_{R^m} \|\bar{x}\|^\nu d\Phi(\bar{x}),$$

где $\Phi(\bar{x})$ – стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\hat{\mu}_\nu = \mu_\nu + O\left(\lambda_0^\nu \nu! Q^{\varepsilon-1/2} \ln^{(\lambda+1)\nu} Q\right), \quad \lambda_0 > 0.$$

Лемма доказывается так же, как лемма 4 из [3], с применением теоремы 1 и соотношения (15) из работы [2].

Пусть $\bar{\xi}$ – произвольный случайный вектор, имеющий функцию распределения $F(\bar{x})$ и ковариационную матрицу Δ . Следуя [4], обозначим

$$d(\bar{v}) = (h(\bar{v}), \bar{v}) - \ln R(h(\bar{v})),$$

где $R(h(\bar{v})) = E \exp(h(\bar{v}), \bar{\xi})$, $h(\bar{v}) = \Delta \bar{v} + O(\|\bar{v}\|^2)$.

Предположим, что функция $d(\bar{v})$ аналитична при $\|\bar{v}\| \leq v_0$. Разложение ее в ряд Маклорена дает

$$d(\bar{v}) = \frac{1}{2}(\bar{v}, \Delta \bar{v}) - \sum_{k=3}^{\infty} Q_k(\bar{v}), \quad (2)$$

где $Q_k(\bar{v})$ – однородные полиномы порядка k , коэффициенты которых выражаются через семинварианты вектора $\bar{\xi}$ порядка не выше, чем k .

Имеет место

Лемма 5. Если $\bar{\xi} = A\eta_1$, $F(\bar{x}) = F_Q(\bar{x}) = \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, A\eta_1 \leq \bar{x} \}$, то

$$\left| \sum_{k=3}^{\infty} Q_k(\bar{v}) \right| \leq C_6 \|\bar{v}\|^3 / Q^{1/2-\varepsilon}$$

при $\|\bar{v}\| \leq C_7 / \ln^{3/2+\varepsilon_0} Q$, где ε_0 – сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Доказательство. Из теоремы 1 [2] следует, что $F_Q(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) + O(Q^{\varepsilon-1/2})$, где

$$\Phi(\bar{x}) = 1/(2\pi)^{m/2} \int_{-\infty}^{\bar{x}} \exp(-\|\bar{y}\|^2/2) d\bar{y}.$$

Далее, пусть

$$R_1(\bar{h}) = \int_{K_d} \exp(\bar{h}, A\eta_1) d\bar{x} = \int_{R^m} \exp(\bar{h}, \bar{x}) dF_Q(\bar{x}),$$

$$R(\bar{h}) = \int_{R^m} \exp(\bar{h}, \bar{x}) d\Phi(\bar{x}) = \exp(\|\bar{h}\|^2/2),$$

$$K_1(\bar{h}) = \ln R_1(\bar{h}), \quad K(\bar{h}) = \ln R(\bar{h}) = \|\bar{h}\|^2/2.$$

Функция $R_1(\bar{h})$ будет аналитической при $\|\bar{h}\| \leq C_8/\ln^{1/2} Q$, что гарантируется леммой 2. Имеем

$$\begin{aligned} R_1(\bar{h}) - R(\bar{h}) &= \int_{R^m} \exp(\bar{h}, \bar{x}) d(F_Q(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \int_{R^m} \frac{(\bar{h}, \bar{x})^k}{k!} d(F_Q(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\|\bar{h}\|^k}{k!} \int_{R^m} \|\bar{x}\|^k d(F_Q(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})). \end{aligned}$$

Из леммы 4 следует, что

$$R_1(\bar{h}) = R(\bar{h}) + O(\|\bar{h}\|^3 Q^{\varepsilon-1/2})$$

при $\|\bar{h}\| \leq C_8/\ln^{3/2+\varepsilon_0} Q = h_0$.

Далее,

$$\begin{aligned} K_1(\bar{h}) &= K(\bar{h}) + \ln \frac{R_1(\bar{h})}{R(\bar{h})} = \|\bar{h}\|^2/2 + \ln(1 + \|\bar{h}\|^3 Q^{\varepsilon-1/2}) = \\ &= \|\bar{h}\|^2/2 + O(\|\bar{h}\|^3/Q^{\varepsilon-1/2}) \quad \text{при } \|\bar{h}\| \leq h_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того,

$$\frac{1}{R(\bar{h})} \int_{R^m} \bar{x} \exp(\bar{h}, \bar{x}) d\Phi(\bar{x}) = \bar{h}.$$

Так же, как при доказательстве оценки для $R_1(\bar{h})$, при $\|\bar{h}\| \leq h_0$ получаем

$$\bar{v} = v(\bar{h}) = \frac{1}{R_1(\bar{h})} \int_{R^m} \bar{x} e^{(\bar{h}, \bar{x})} dF_Q(\bar{x}) = \bar{h} + O(\|\bar{h}\|^2 Q^{\varepsilon-1/2}). \quad (4)$$

Якобиан преобразования $\bar{h} \rightarrow v(\bar{h})$ положителен при $\|\bar{h}\| \leq h_0$, следовательно, преобразование обратимо, и из (4) вытекает, что

$$\bar{h} = h(\bar{v}) = \bar{v} + O(\|\bar{h}\|^2 Q^{\varepsilon-1/2}), \quad \text{если } \|\bar{v}\| \leq C_9 h_0. \quad (5)$$

Из (2), (3) и (5) следует справедливость утверждения леммы. \square

Теперь рассмотрим сумму $A_{\hat{\zeta}_p}/\sqrt{p}$. Свойства этой суммы позволяют применить к ней теорему о больших отклонениях для независимых и одинаково распределенных векторов. По теореме 3 [4] при $1 \leq r \leq C_{10}\sqrt{p}/\sqrt{\ln Q}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \hat{F}_p(r) &= (2\pi)^{-m/2} \int_{u \in \Omega_0} \exp\left(p \sum_{k=3}^{\infty} Q_k(ur/\sqrt{p})\right) ds \times \\ &\quad \times \int_r^{\infty} \exp(-(u, u)y^2/2) y^{m-1} dy (1 + O(r/\sqrt{p})), \end{aligned} \quad (6)$$

где ds – элемент поверхности $\Omega_0 = \{\bar{u} : \|\bar{u}\| = 1\}$. Сужение зоны действия этого равенства происходит за счет того, что по лемме 2 производящая функция $R_1(\bar{h}) < \infty$ при $\|\bar{h}\| < \varepsilon/\sqrt{\ln Q}$.

В силу леммы 4 выражение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\widehat{F}_p(r) = \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy (1 + O(r/\sqrt{p} + r^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon}))), \quad (7)$$

где $1 \leq r \leq C_{11} \min(\sqrt{p}/\ln^{3/2+\varepsilon_0} Q, p^{1/6}Q^{1/6-\varepsilon})$.

Сделаем переход от векторов $A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}$ к векторам $A\zeta_p/\sqrt{p}$.

Имеет место неравенство

$$|f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})| \leq C_{12} \sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_{13}N), \quad (8)$$

вытекающее из леммы 3 [5].

Пусть

$$J_1^2 = \int_{\|\bar{t}\| \leq 1} \|\bar{t}\|^{-2} |f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})|^2 d\bar{t}, \quad J_2^2 = \int_{1 < \|\bar{t}\| \leq T} |f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})|^2 d\bar{t}.$$

Воспользуемся неравенством С.М. Садиковой [6, 7], которое при

$$T = \exp(C_{14}N/2m), \quad b = \ln T, \quad \delta_1 = b\sqrt{m \ln T}/T \quad (9)$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} |F_p(r) - \widehat{F}_p(r)| &\leq C_{15} (\ln T)^{(m-1)/4} \left[J_1 + 2\sqrt{2}J_2 + \frac{1}{T} \right] + \\ &+ 3 \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, r - \delta_1 \leq \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| \leq r + \delta_1 \} + \\ &+ 2 \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| \geq b \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, выбрав $C_{14} < 2C_{13}$, оценим интегралы J_1 и J_2 .

Обозначим $\alpha = \sqrt{p/Q} \exp(-C_{13}N)$, тогда

$$\begin{aligned} J_1^2 &= \int_{\|\bar{t}\| \leq \sqrt{\alpha}} \|\bar{t}\|^{-2} |f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})|^2 d\bar{t} + \int_{\sqrt{\alpha} < \|\bar{t}\| \leq 1} \|\bar{t}\|^{-2} |f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})|^2 d\bar{t} \leq \\ &\leq C_{15} \left(\int_{\|\bar{t}\| \leq \sqrt{\alpha}} d\bar{t} + \int_{\sqrt{\alpha} < \|\bar{t}\| \leq 1} \alpha d\bar{t} \right) \leq C_{16} \sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_{13}N). \end{aligned}$$

Здесь использованы оценка (8) и тривиальное неравенство $|f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})| \leq C_{17}\|\bar{t}\|$.

Применяя оценку (8), получим

$$\begin{aligned} J_2^2 &\leq C_{12}^2 \int_{1 < \|\bar{t}\| \leq T} p/Q \exp(-2C_{13}N) d\bar{t} \leq \\ &\leq C_{17}p/Q \exp(-2C_{13}N) T^m \leq C_{18}p/Q \exp(-C_{13}N). \end{aligned}$$

Оценим остальные слагаемые в (10). Из соотношения (7) следует

$$\begin{aligned} \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|A\widehat{\zeta}/\sqrt{p}\| \geq b \} &= \\ &= \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int_b^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy (1 + O(b/\sqrt{p} + b^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon}))). \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, r - \delta_1 \leq \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| \leq r + \delta_1 \} &= \\ &= e^{-r^2/2} r^{m-1} O(r\delta_1 + r/\sqrt{p} + r^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})). \end{aligned}$$

С учетом полученных оценок и (9) имеем

$$\begin{aligned} |F_p(r) - \widehat{F}_p(r)| &\leq C_{19}N^{(m-1)/4} \sqrt[4]{p/Q} \exp(-C_{14}N/2m) + \\ &\quad + 3e^{-r^2/2} r^{m-1} O(r/\sqrt{p} + r^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})) + \\ &\quad + C_{20}N^{(m-1)/2} \exp(-C_{14}N/2m) O(1 + \sqrt{N}/\sqrt{p} + N^{3/2}/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь совершим переход от векторов $A\zeta_p/\sqrt{p}$ к векторам ζ_p/\sqrt{p} . Нам известно, что элементы ковариационной матрицы векторов η_k отличаются от элементов единичной матрицы на величину порядка $O(1/Q)$. Поэтому

$$S_p(r) = \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|\zeta_p/\sqrt{p}\| > r \} = \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, A\zeta_p/\sqrt{p} \subset M^c \},$$

где M – множество, полученное из шара радиуса r незначительной трансформацией его границы, M^c – дополнение к M .

Очевидно, что $M \subset O_{r+\delta}$, а $O_{r-\delta} \subset M$, где O_r – шар радиуса r , $\delta = O(1/Q)$. При этом

$$F_p(r + \delta) \leq S_p(r) \leq F_p(r - \delta).$$

Воспользовавшись выражениями (11) для $F_p(r)$ и (7) для $\widehat{F}_p(r)$, имеем

$$\begin{aligned} S_p(r) &= \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy \left(1 + O(r\delta + r/\sqrt{p} + r^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})) + \right. \\ &\quad \left. + O\left(N^{(m-1)/4} \sqrt[4]{p/Q} \exp(-C_{14}N/2m) + N^{(m-1)/2} \exp(-C_{14}N/2m) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times O(1 + \sqrt{N}/\sqrt{p} + N^{3/2}/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})) \right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Оценим вклад ζ_p^0/\sqrt{p} в правую часть формулы (12).

Нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} S_p(r + \varepsilon_1) - \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\| > \varepsilon_1 \} &\leq \\ &\leq \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|(\zeta_p + \zeta_p^0)/\sqrt{p}\| > r \} \leq \\ &\leq S_p(r - \varepsilon_1) + \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\| > \varepsilon_1 \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как

$$\text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\| > \varepsilon_1 \} \leq \sum_{i=1}^m \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, |\zeta_{ip}^0/\sqrt{p}| > \varepsilon/\sqrt{m} \},$$

где $\zeta_p^0 = (\zeta_{1p}^0, \zeta_{2p}^0, \dots, \zeta_{mp}^0)$, то достаточно рассмотреть одномерный случай, который изучался в работе [3] (лемма 6).

Если $\varepsilon_1 = r\omega\sqrt{N \ln n/Q}$, ω – достаточно большое фиксированное число, то

$$\text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\| > \varepsilon_1 \} = O(e^{-r^2/2}/(rn^\omega) + \sqrt{p/Q}e^{-C_{21}Q})$$

при $r \geq 1$, $r = O(\min(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p \ln n} \ln^{-2} N))$, $N = o(Q)$.

Используя эту оценку и соотношение (12), из (13) имеем

$$\begin{aligned} \text{mes} \{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \|(\zeta_p + \zeta_p^0)/\sqrt{p}\| > r \} &= \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy \times \\ &\times \left(1 + O(r\varepsilon_1 + r\delta + r/\sqrt{p} + r^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})) + \right. \\ &+ N^{(m-1)/4} \sqrt[4]{p/Q} r^{2-m} \exp((r^2 - C_{14}N/m)/2) + \\ &+ N^{(m-1)/2} r^{2-m} \exp((r^2 - C_{14}N/m)/2) \times \\ &\times O(1 + \sqrt{N}/\sqrt{p} + N^{3/2}/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon})) + \\ &\left. + r^{1-m}/n^\omega + \sqrt{p/Q} r^{2-m} \exp(r^2/2 - C_{21}Q) \right). \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь использовали то, что $\int_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy > C_{21}r^{m-2} \exp(-r^2/2)$.

Для r справедливы соотношения $r \geq 1$ и

$$r = O(\min(\sqrt{p}/\ln^{3/2+\varepsilon_0} Q, p^{1/6}Q^{1/6-\varepsilon}, \sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p \ln n} \ln^{-2} N, \sqrt{Q})).$$

Выберем $N = [n^{1/4}]$, $Q = [n^{3/4} \ln^2 n]$, а p – из условия

$$|n - p(Q + N)| \leq p. \quad (15)$$

После подстановки выбранных значений в (14) получим, что

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \left\| \frac{(\zeta_p + \zeta_p^{(0)})}{\sqrt{p}} \right\| > r \right\} &= \\ &= \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy \left(1 + O\left(\frac{r \ln n}{n^{1/8}}\right) \right) \end{aligned}$$

при

$$1 \leq r \leq O\left(\frac{n^{1/8}}{\omega(n) \ln n}\right).$$

Далее, в силу (15)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k) = \frac{1}{\sqrt{pQ}} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k) + C_{22} \frac{N}{Q^{3/2} p^{1/2}} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k).$$

Из леммы 3 вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in K_d, \left\| \frac{N}{Q^{3/2} p^{1/2}} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k) \right\| > n^{-1/8} \right\} &\leq \\ &\leq \exp\left(-C_{22} \frac{Q^{3/2} p^{1/2}}{N n^{5/8} \ln^2 n}\right) \leq \exp(-C_{23} n^{1/4}). \quad (16) \end{aligned}$$

Теперь поступая так же, как и при оценке вклада ζ_p^0/\sqrt{p} в остаток формулы (12) и используя оценку (16), получаем утверждение теоремы.

Summary

F.G. Gabbasov, V.T. Dubrovin. Multi-Dimensional Limit Theorem on Large Deviations for Endomorphisms of Euclidean Space.

We prove a central limit theorem on large deviations for a sequence with elements being formed by the values of a continuous vector function periodic in each variable, which represents the trajectories of the endomorphisms of the d -dimensional Euclidean space in the m -dimensional Euclidean space.

Keywords: limit theorem, endomorphisms, large deviations.

Литература

1. *Леонов В.П.* Некоторые приложения старших семиинвариантов в теории случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 69 с.
2. *Габбасов Ф.Г., Дубровин В.Т.* Оценка скорости сходимости в многомерной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 55–66.
3. *Дубровин В.Т.* Большие отклонения в центральной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 195–210.
4. *Bahr V.von* Multi-dimensional integral limit theorems for large deviations // Ark. Mat. – 1967. – Bd. 7, N. 1. – S. 89–99.
5. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1971. – Вып. 9. – С. 45–46.
6. *Садикова С.М.* Расстояния между распределениями, связанные с их значениями на выпуклых множествах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 787–789.
7. *Садикова С.М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятности и её применения. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1968. – Т. XIII, № 1. – С. 164–170.

Поступила в редакцию
03.03.14

Габбасов Фарит Гаязович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: gabbasov@kgasu.ru

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.