УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 156, кн. 2 Физико-математические науки *2014*

УДК 517.546

МНОЖЕСТВО ГАХОВА В ТЕОРЕМЕ МЕРКЕСА О ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЯХ

Т.В. Жаркова, А.В. Казанцев

Аннотация

Теорема Меркеса утверждает звездообразность любой выпуклой комбинации f_λ тождественного отображения и голоморфной выпуклой функции f в единичном круге, удовлетворяющей условию $f''(0) = 0$. Оказывается, при этом все функции f_λ (кроме отображений на полосу при $\lambda = 1$) принадлежат множеству Гахова, характеризуемому свойством (не более чем) единственности корня уравнения Гахова. Оба указанных утверждения допускают аналоги для внешности единичного круга. Исследовано действие выпуклых комбинаций на функциях классов Александера. Для исчерпания каждого такого класса семействами «линий уровня» обнаружен «момент остановки», соответствующий выходу из множества Гахова, и описаны все траектории такого выхода.

Ключевые слова: гиперболическая производная, конформный радиус, множество Гахова, уравнение Гахова, классы выпуклых и звездообразных функций, классы Александера.

Введение

Будем использовать традиционные обозначения геометрической теории функций (см., например, [1]). Пусть S – класс голоморфных однолистных функций $f(\zeta) = \zeta + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n\zeta^n$ в единичном круге $\mathbb{D} = \{|\zeta| < 1\}$; S^0 и S^* – подклассы S, элементы которых соответственно выпуклы и звездообразны в $\mathbb{D}$. Отправной точкой предпринятого исследования послужил следующий результат [2].

Теорема Меркеса. *Если $f \in S^0$ и $f''(0) = 0$, то выпуклая комбинация $f_\lambda(\zeta) = (1-\lambda)\zeta + \lambda f(\zeta)$ принадлежит классу S^* для любого $\lambda \in [0,1]$.*

Данная теорема допускает существенное уточнение. Для того чтобы его сформулировать, напомним определение множества Гахова [3, с. 11].

Пусть H – класс всех функций f, голоморфных в $\mathbb{D}$, H_0 – подкласс H, состоящий из локально однолистных в $\mathbb{D}$ функций f: $f'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$. При этом (в отличие от [3]) в определение H_0 включаются классические нормировки $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Через M_f обозначим множество всех критических точек гиперболической производной (конформного радиуса)

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)| \tag{1}$$

функции $f \in H_0$ или, что то же самое, корней уравнения Гахова

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2) \tag{2}$$

для f. Такая «двойная природа» элементов M_f была установлена в результате исследований, восходящих к работам Х. Хиги [4] и Ф.Д. Гахова [5] и объединенных в одно направление статьями [6–9]. При этом были выделены две характеристики точек $a \in M_f$ – гауссова кривизна $K_f(\zeta)$ поверхности $h = h_f(\zeta)$ над единичным кругом и индекс $\gamma_f(a)$ векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$. Критические точки $\zeta = a$ функции (1) могут быть только трех типов: локальный максимум ($\gamma_f(a) = +1$), седло ($\gamma_f(a) = -1$) и полуседло ($\gamma_f(a) = 0$); кроме того, если $K_f(a) \neq 0$, то $\gamma_f(a) = \operatorname{sgn} K_f(a)$, $a \in M_f$.

Пусть k_f – количество элементов M_f. Множество Гахова определяется как $\mathcal{G} = \{f \in H_0 : k_f \leq 1\}$ и распадается в дизъюнктное объединение $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \bigsqcup \mathcal{G}_0 \bigsqcup \mathcal{G}_s$, где $\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) = +1\}$, $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$ и $\mathcal{G}_s = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) \neq +1\}$. Условие $f''(0) = 0$, означающее наличие нулевого корня уравнения (2), отражается в обозначениях тильдой: для $X \subset H_0$ полагаем $\widetilde{X} = \{f \in X : f''(0) = 0\}$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}_1 \bigsqcup \widetilde{\mathcal{G}}_s$. Теперь приведем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f \in \widetilde{S}^0$ и $f_\lambda(\zeta) = (1-\lambda)\zeta + \lambda f(\zeta)$. Тогда $f_\lambda \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$, $\lambda \in [0,1]$, за исключением случая, когда $\lambda = 1$ и $f(\mathbb{D})$ – полоса. При этом отрезок $[0,1]$ изменения параметра λ неулучшаем.*

Доказательство этой теоремы приведено в разд. 1 и основано на получении оценки

$$|f_\lambda''(\zeta)/f_\lambda'(\zeta)| \leq 2|\zeta|/(1-|\zeta|^2), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

с последующим анализом равенства. На протяжении всей статьи предполагается, что $\zeta = 0$ – корень уравнения (2).

Во втором разделе исследовано действие выпуклых комбинаций на функциях из $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$, где $\mathcal{A}(\alpha) = \{f \in H_0 : \operatorname{Re} f'(\zeta) > \alpha,\ \zeta \in \mathbb{D}\}$ – классы Александера порядка $\alpha \in [0,1)$ (см. [10]). Кроме того, установлено, что если $\alpha \in [0, 1/2)$, то для функций $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ при движении вдоль «линий уровня» $f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r$, $0 \leq r \leq 1$, единственность нулевого корня уравнения Гахова теряется, начиная со значений $r \geq \rho_\alpha = 1/\sqrt{2(1-\alpha)}$. Дано полное описание множества всех $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$, для которых указанные значения r равны ρ_α. (В случае $\alpha \in [1/2, 1)$ легко показать, что $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \tilde{\mathcal{G}}_1$ с единственным исключением при $\alpha = 1/2$, когда $f(\mathbb{D})$ – полоса).

В третьем разделе получены аналоги теоремы Меркеса и теоремы 1 для внешности единичного круга.

Первые шаги проведенного в настоящей статье исследования были отражены вторым автором в его части доклада [11].

1. Доказательство теоремы 1

1.1. Будем считать, что $\lambda \neq 0$, так как при $\lambda = 0$ теорема тривиальна. Воспользуемся представлением $\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\varphi(\zeta)/(1-\varphi(\zeta))$ [6], где функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца с $|\varphi(\zeta)| \leq |\zeta|^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Имеем

$$\zeta \frac{f_\lambda''}{f_\lambda'}(\zeta) = \frac{\lambda f'(\zeta)}{1-\lambda+\lambda f'(\zeta)} \zeta \frac{f''}{f'}(\zeta) = \frac{f'(\zeta)}{(1-\lambda)/\lambda + f'(\zeta)} \frac{2\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

Оценим модуль выражения (4). Отметим, что при любом $\lambda \in (0,1]$ справедливо неравенство

$$|f'(\zeta)/((1-\lambda)/\lambda + f'(\zeta))| \leq 1, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

которое легко проверить, переписав его с помощью представления $f' = u + iv$ в виде системы неравенств

$$(1-\lambda)/\lambda \geq 0, \quad u \geq -(1-\lambda)/(2\lambda), \tag{6}$$

очевидных в силу $\lambda \in (0,1]$ и $u = \operatorname{Re} f' \geq 0$ [2].

Требуемая оценка (3) получается с помощью (5). Сравнение структуры уравнения (2) (для f_λ) и неравенства (3) демонстрирует, что предположение $k_{f_\lambda} > 1$ означает выполнение равенства в (3) при некотором $\zeta = \zeta_0 \neq 0$. С одной стороны, по лемме Шварца это приводит к представлению $\varphi(\zeta) = \eta\zeta^2$, $|\eta| = 1$, так что $f(\zeta) = \bar{\varepsilon}s(\varepsilon\zeta)$, $|\varepsilon| = 1$, – вращение функции

$$s(\zeta) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \tag{7}$$

с другой – влечет за собой равенство в (5) при $\zeta = \zeta_0$, откуда ввиду (6) следует $\lambda = 1$. Таким образом, мы получили, что $f_\lambda \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $\lambda \in [0,1]$ либо $\lambda = 1$ и $f(\mathbb{D})$ – полоса. Как известно [4], в последнем случае критические точки функции (1) имеют нулевую кривизну и целиком заполняют диаметр единичного круга. Отметим, что если $0 < \lambda < 1$, то и при $f(\zeta) = \bar{\varepsilon}s(\varepsilon\zeta)$, $|\varepsilon| = 1$, будет $f_\lambda \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$.

1.2. Докажем второе утверждение теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$f_\alpha(\zeta) = \int\limits_0^\zeta \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha}$$

при $\alpha \in (0,1)$. Чтобы доказать ее выпуклость, положим $\zeta^2 = \rho e^{i\theta}$, $0 < \rho < 1$, тогда $\operatorname{Re}\zeta(f''_\alpha/f'_\alpha)(\zeta) = 2\alpha\operatorname{Re}(\zeta^2/(1-\zeta^2)) = 2\alpha g(\rho,\cos\theta) \geq 2\alpha\min_{|x|\leq 1} g(\rho,x)$, где

$$g(\rho,x) = \rho\frac{x-\rho}{1+\rho^2-2\rho x}. \tag{8}$$

Легко проверить, что функция (8) возрастает по $x \in [-1,1]$, поэтому $g(\rho,x) \geq g(\rho,-1) = -\rho/(1+\rho) \geq 1/2$, откуда окончательно $\operatorname{Re}\zeta(f''_\alpha/f'_\alpha)(\zeta) \geq -\alpha > -1$, то есть $f_\alpha \in \widetilde{S}^0$ $(0 < \alpha < 1)$.

Уравнение (2) для функции $f_{\alpha,\lambda}(\zeta) = (1-\lambda)\zeta + \lambda f_\alpha(\zeta)$ имеет вид

$$\frac{\alpha}{(1-\lambda)(1-\zeta^2)^\alpha/\lambda + 1}\cdot\frac{2\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}. \tag{9}$$

Переход к вещественным значениям $\zeta = x$ позволяет переписать (9) в форме $\alpha = (1-\lambda)(1-x^2)^\alpha/\lambda + 1$. Последнее уравнение уже легко разрешить относительно x: при $\lambda < 0$ корни существуют для всех $\alpha \in (0,1)$, при $\lambda > 1$ – для $\alpha \in (1/\lambda, 1)$. Теорема 1 доказана.

1.3. Как показывают результаты статьи [12], теорему 1 можно также установить с использованием включения $\widetilde{S}^0 \subset \mathcal{A}(1/2) := \{f \in H_0 : \operatorname{Re} f'(\zeta) > 1/2, \zeta \in \mathbb{D}\}$. Продемонстрируем, как это делается.

Пусть $f(\zeta) = \zeta + a_3\zeta^3 + \cdots \in \widetilde{S}^0$. Рассмотрим функцию $F(z)$, задаваемую во внешности $\mathbb{D}^- = \{|z| > 1\}$ единичного круга соотношением $F'(z) = 1/f'(1/z)$; при этом условие $f''(0) = 0$ обеспечивает отсутствие в разложении для F члена с $\ln z$, так что $F(z) = z + 3a_3/z + \cdots$ Так как $f \in \widetilde{S}^0$ и $1 + z(F''/F')(z) = 1 + \zeta(f''/f')(\zeta)$ при $z = 1/\zeta$, то F принадлежит классу Σ^0 функций, отображающих $\mathbb{D}^-$ на области с выпуклым дополнением. В классе Σ^0 имеет место оценка $|F'(z) - 1| < 1$, $z \in \mathbb{D}^-$ [12]. Переписывая ее в терминах f, получим $\operatorname{Re} f'(\zeta) > 1/2$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Это означает, что $f' = 1/(1-\varphi)$, следовательно, $f''/f' = \varphi'/(1-\varphi)$ в $\mathbb{D}$, где функция φ – из леммы Шварца, применение которой и завершает доказательство принадлежности $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$, вновь с исключением, когда $f(\mathbb{D})$ – полоса.

Отметим, что условие $\operatorname{Re} f'(\zeta) > 1/2$ упоминается в [6] как условие единственности критической точки функции (1) (без обоснования), но не как расширение класса $\widetilde{S}^0$, сохраняющее данное условие.

1.4. Переформулируем теорему 1 в терминах операторов $H_\lambda : H_0 \to H_0 : f \mapsto f_\lambda$; $H_\lambda[f](\zeta) = f_\lambda(\zeta) = (1-\lambda)\zeta + \lambda f(\zeta)$. Обозначим через $\mathcal{S} = \{\bar{\varepsilon} s(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}$ множество всех вращений функции (7); для подкласса $X \subset H_0$ образуем выпуклую оболочку $\mathcal{M}(X, I) = \bigcup\limits_{\lambda \in I} H_\lambda(X)$. С учетом теоремы Меркеса окончательный результат получается таким.

Теорема 1′. *Имеет место включение* $\mathcal{M}(\tilde{S}^0, [0,1]) \setminus \mathcal{S} \subset \tilde{S}^* \cap \tilde{\mathcal{G}}_1$, *неулучшаемое по отрезку* $[0,1]$ *изменения параметра* λ.

2. Классы Александера

Классом Александера порядка $\alpha \in [0,1)$ называется класс $\mathcal{A}(\alpha)$ всех функций $f \in H_0$ с условием $\operatorname{Re} f'(\zeta) > \alpha$, $\zeta \in \mathbb{D}$ [10]. Семейство $\{\mathcal{A}(\alpha)\}_{\alpha \in [0,1)}$ монотонно по α: из $0 \le \beta < \alpha < 1$ следует, что $\mathcal{A}(\alpha) \subset \mathcal{A}(\beta)$. Принадлежность $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ означает, что

$$f'(\zeta) = \frac{1 + (1-2\alpha)\varphi(\zeta)}{1 - \varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{10}$$

где φ – функция из леммы Шварца; $|\varphi(\zeta)| \le |\zeta|$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Классы $\mathcal{A}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, инвариантны относительно действия операторов H_λ, $\lambda \in [0,1]$: $H_\lambda(\mathcal{A}(\alpha)) \subset \mathcal{A}(\alpha)$. Более того, с использованием (10) легко проверить, что

$$H_\lambda(\mathcal{A}(\alpha)) = \mathcal{A}(1 - (1-\alpha)\lambda) \tag{11}$$

и $1 - (1-\alpha)\lambda \ge \alpha$ при $\alpha \in [0,1)$, $\lambda \in [0,1]$.

Мы изучаем классы $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$, выделяемые из $\mathcal{A}(\alpha)$ дополнительным ограничением $f''(0) = 0$; эквивалентное представление (10) для функций $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ сохраняется, но уже с оценкой $|\varphi(\zeta)| \le |\zeta|^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$. В предыдущем разделе установлено включение $\widetilde{\mathcal{A}}(1/2) \setminus \mathcal{S} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$, откуда легко следует, что $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ для любого $\alpha \in (1/2, 1)$. Над полуинтервалом $\alpha \in [0, 1/2)$ это уже не так, однако можно предложить конструкцию, которая любому классу $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1/2)$, ставит в соответствие его «гаховскую часть», получающуюся «сжатием» класса вдоль «линий уровня»

$$f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r, \quad 0 \le r \le 1, \tag{12}$$

функций $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$. Предварительно рассмотрим следующий

Пример 1. Пусть

$$g_\alpha(\zeta) = 2(1-\alpha)s(\zeta) + (2\alpha - 1)\zeta, \tag{13}$$

где $0 \le \alpha < 1$, а $s(\zeta)$ – функция (7). Из (13) имеем $g'_\alpha(\zeta) = (1 + (1-2\alpha)\zeta^2)/(1 - -\zeta^2)$, то есть $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ с $\varphi(\zeta) = \zeta^2$. Далее, вычисляя $(g''_{\alpha,r}/g'_{\alpha,r})(\zeta) = r(g''_\alpha/g'_\alpha)(r\zeta)$, получим уравнение Гахова для $g_{\alpha,r}$:

$$\frac{2(1-2\alpha)r^2\zeta}{1 + (1-2\alpha)r^2\zeta^2} + \frac{2r^2\zeta}{1 - r^2\zeta^2} = \frac{2\bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^2}. \tag{14}$$

Картина его разрешимости такова. При $\alpha \in [1/2, 1)$ и $r \in [0,1]$ уравнение (14) имеет единственный корень (максимум h_{g_α}) $\zeta = 0$, за исключением случая $(\alpha, r) = = (1/2, 1)$, когда $g_\alpha(\zeta) = s(\zeta)$ (полоса).

Пусть теперь α – любое число из промежутка $[0,1/2)$. Уравнение (14) имеет единственный корень (максимум) при $0 \le r \le \rho_\alpha \equiv 1/\sqrt{2(1-\alpha)}$ и три корня: $\zeta = 0$ и $\zeta = \zeta_\pm(r) = \pm(1/r)[1-[2(1-\alpha)(1-r^2)/(1-2\alpha)]^{1/2}]^{1/2}$ при выполнении $\rho_\alpha < r < 1$, – соответственно седло и два максимума, причем $\lim\limits_{r\to 1}\zeta_\pm(r) = \pm 1$ и $h_{g_\alpha}(\pm 1) = \infty$.

Отметим, что для любого $r \in [0,1)$ функция $g_{\alpha,r}$ принадлежит малому классу Блоха $\mathcal{B}_0 = \{f \in H : \lim\limits_{|\zeta|\to 1} h_f(\zeta) = 0\}$. Если $\alpha \in [1/2,1)$, то $g_{\alpha,1} = g_\alpha \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_0$, а если $\alpha \in [0,1/2)$, то $g_{\alpha,1} = g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{G}}_s$; $\mathcal{B}$ – пространство Блоха, состоящее из всех функций $f \in H$, для которых $\sup\limits_{\zeta\in\mathbb{D}} h_f(\zeta) < \infty$.

2.1. Введем слоение $\mathfrak{R}_f = \bigcup\limits_{r\in[0,1]} M_{f_r}\times\{r\}$ и функционал

$$\bar{r}_f = \sup\{\xi \in [0,1] : r \in [0,\xi] \Rightarrow k_{f_r} = 1\}$$

первого выхода из множества Гахова вдоль «линий уровня» функции $f \in H_0$. Рассмотрим следующую постановку [13]. Пусть X – подкласс H_0, для которого $\widetilde{X} \ne \varnothing$. Определим

$$\rho(\widetilde{X}) = \inf\{\bar{r}_f : f \in \widetilde{X}\} \quad \text{и} \quad E(\widetilde{X}) = \{f \in \widetilde{X} : \bar{r}_f = \rho(\widetilde{X})\}. \tag{15}$$

Вычислим постоянную $\rho(\widetilde{X})$ и дадим полное описание множества $E(\widetilde{X})$ в случае, когда $X = \mathcal{A}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$. Следующий результат анонсирован в [13].

Теорема 2. *Если* $1/2 \le \alpha < 1$, *то* $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = 1$ *и* $E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$. *Если же* $0 \le \alpha < 1/2$, *то* $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = 1/\sqrt{2(1-\alpha)}$, *а* $E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha))$ *исчерпывается вращениями функции* (13).

Доказательство. При $1/2 \le \alpha < 1$ равенство $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = 1$ следует из включения $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$, установленного в начале раздела, а соотношение $E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ – из $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = 1$. Отметим, что функция (7) и ее вращения суть элементы множества $E(\widetilde{\mathcal{A}}(1/2))$, так как $\bar{r}_s = 1$.

Пусть теперь $0 \le \alpha < 1/2$ и $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$. Из (10) имеем

$$\frac{f''}{f'}(\zeta) = \frac{2(1-\alpha)\varphi'(\zeta)}{(1+(1-2\alpha)\varphi(\zeta))(1-\varphi(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{16}$$

откуда стандартными оценками с использованием леммы Шварца получаем

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| \le \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2} H(\operatorname{Re}\varphi(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad \text{и} \quad H(t) = \left[\frac{1-2\alpha}{1+(1-2\alpha)t} + \frac{1}{1-t}\right](1-|t|).$$

Легко проверить, что $H(t) < H(0) = 2(1-\alpha)$ при $0 < |t| < 1$, поэтому

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| \le \frac{4(1-\alpha)|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{17}$$

Предположение о равенстве при некотором $a \ne 0$ в оценке (17) с учетом составляющих ее неравенств приводит к соотношению $\varphi(a) = 0$, а по лемме Шварца – к явному виду $\varphi(\zeta) = \varepsilon\zeta^2$, $|\varepsilon| = 1$. В результате $a = 0$ – противоречие. Таким образом, неравенство (17) усиливается до строгого при $\zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, и переход к (12) дает

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| < \frac{4(1-\alpha)r^2|\zeta|}{1-r^2|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \quad 0 \le r \le 1. \tag{18}$$

Используя введенное выше обозначение $\rho_\alpha = 1/\sqrt{2(1-\alpha)}$, заключаем из (18), что при $r \le \rho_\alpha$ будет $k_{f_r} = 1$, то есть $\bar r_f \ge \rho_\alpha$. В силу произвольности $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ отсюда следует, что $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) \ge \rho_\alpha$, а так как $\bar r_{g_\alpha} = \rho_\alpha$ (пример 1), то окончательно имеем $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = \rho_\alpha$ и, кроме того, $g_\alpha \in E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha))$.

Осталось доказать, что если $f \in E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha))$, то $f(\zeta) = \bar\varepsilon g_\alpha(\varepsilon\zeta)$ для некоторого ε с $|\varepsilon| = 1$. Действительно, пусть $\alpha \in [0,1/2)$ и $f \in E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha))$. Тогда $\bar r_f = \rho_\alpha$. Из неравенства (18) следует, что $M_{f_{\rho_\alpha}} = \{0\}$ и слоение $\mathfrak{R}_f$ не имеет предельных точек на $\partial\mathbb{D}\times(0,1)$, в частности на $\partial\mathbb{D}\times\{\rho_\alpha\}$. Это означает, что нарушение единственности нулевой критической точки функции h_{f_r}, когда r, возрастая, проходит через значение ρ_α, происходит за счет бифуркации слоения $\mathfrak{R}_f$ в точке $(0,\rho_\alpha)$. По лемме 1 из [13] отсюда следует, что $|\{f_{\rho_\alpha}, 0\}| = 2$, значит,

$$|\{f,0\}| = 2/\rho_\alpha^2 = 4(1-\alpha). \tag{19}$$

(Здесь $\{f,\zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (f''/f')^2(\zeta)/2$ – шварциан.) Тогда для функции $\varphi(\zeta) = \beta\zeta^2 + \cdots$ в представлении (16) будем иметь $0 < |\beta| \le 1$ и $|\{f,0\}| = 4(1-\alpha)|\beta|$, что вместе с (19) дает $|\beta| = 1$. Но тогда лемма Шварца оставляет нам единственную возможность – функцию вида $\varphi(\zeta) = \eta\zeta^2$, $|\eta| = 1$, подстановка которой в (10) приводит к вращению функции g_α, что и требовалось. $\square$

2.2. Вернемся к выпуклым комбинациям и отметим, что, как показывает соотношение (11), действие операторов H_λ улучшает «гаховские свойства» классов Александера. Для данных классов оказывается справедливым такой аналог теоремы 1.

Теорема 3. *Если $\alpha \in (1/2,1)$, то $H_\lambda(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при всех $\lambda \in [0,1]$. Пусть $\alpha \in [0,1/2]$ и $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$. Тогда $f_\lambda = H_\lambda[f] \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $\lambda \le \lambda_\alpha := 1/(2(1-\alpha))$, за исключением случая, когда $\lambda = \lambda_\alpha$ и $f(\mathbb{D})$ – полоса. Постоянная λ_α неулучшаема при $\alpha \in [0,1/2)$.*

Доказательство. При $\lambda = 0$ теорема тривиальна, так как $H_0(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = \{f(\zeta) \equiv \zeta\} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при всех $\alpha \in [0,1)$. Если $\alpha \in (1/2,1)$, то при любом $\lambda \in (0,1]$ будет $\alpha(\lambda) \equiv 1 - \lambda(1-\alpha) \in (1/2,1)$. Поэтому в силу (11) и теоремы 2 имеем $H_\lambda(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha(\lambda)) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ для всех $\lambda \in (0,1]$. Если $\alpha \in [0,1/2]$, то включение $\alpha(\lambda) \in (1/2,1)$ выполняется только тогда, когда $\lambda < \lambda_\alpha$. Таким образом, в этом случае также $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha(\lambda)) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$. Наконец, если $\lambda = \lambda_\alpha$, то $\alpha(\lambda) = 1/2$, и тогда, как уже отмечалось выше, $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha(\lambda)) \setminus \mathcal{S} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$; $\mathcal{S} = \{\bar\varepsilon s(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}$.

Продемонстрируем неулучшаемость постоянной λ_α. Пусть $\alpha \in [0,1/2)$. Требуется доказать, что для $\lambda > \lambda_\alpha$, близких к λ_α, найдется функция $g \in H_\lambda(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha(\lambda))$ такая, что $k_g > 1$.

Отметим, что при $\lambda \in (\lambda_\alpha, 1)$ величина $\alpha(\lambda)$ пробегает интервал $(\alpha, 1/2)$, и воспользуемся результатом примера 1. Легко проверить, что $H_\lambda(g_\alpha) = g_{\alpha(\lambda)} \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha(\lambda))$. Рассмотрим «линии уровня» $g_{\alpha(\lambda),r}$ функции $g_{\alpha(\lambda)}$. При $r \in (1/\sqrt{2\lambda(1-\alpha)}, 1)$ имеем $k_{g_{\alpha(\lambda),r}} = 3$. Доказательство завершается проверкой соотношения $g_{\alpha(\lambda),r} \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha(\lambda))$ на основе равенства $g'_{\alpha(\lambda),r}(\zeta) = (1 + (1-2\alpha(\lambda)) \times r^2\zeta^2)/(1 - r^2\zeta^2)$. $\square$

Замечание 1. Постановка задачи (15) для «линий уровня» допускает аналоги для параметрических семейств вида (10) и $f_\lambda(\zeta) = (1-\lambda)\zeta + \lambda f(\zeta)$. Однако, в отличие от (12), для получения утверждений типа теоремы 2 в случае α- и λ-семейств требуется дополнительный контроль за приближением соответствующих слоений $\mathfrak{R}_f$ к $\partial\mathbb{D}\times(0,1)$.

3. Теорема Меркеса для внешности единичного круга

Рассматриваются функции $g(z)$, заданные во внешности $\mathbb{D}^-$ единичного круга и голоморфные при $1 < |z| < \infty$ с разложением $g(z) = z + a_0 + a_1/z + \cdots$, $z \in \mathbb{D}^-$. Через Σ^* обозначается класс всех таких функций, однолистно отображающих $\mathbb{D}^-$ на области со звездообразным дополнением. Его подкласс Σ^0 уже фигурировал выше в разд. 1.

3.1. Внешний аналог теоремы Меркеса устанавливается по той же схеме, что и оригинал [2]; будем обозначать $g_\lambda(z) = (1-\lambda)z + \lambda g(z)$, $z \in \mathbb{D}^-$. Следующее утверждение доказывается точно так же, как его прототип в [2].

Лемма 1. *Если $g \in \Sigma^*$ и $\mathrm{Re}\,(g' + g/z) \geq 0$ при $z \in \mathbb{D}^-$, то $g_\lambda \in \Sigma^*$ для всех $\lambda \in [0,1]$.*

Теперь нужно выяснить, когда для функции $g \in \Sigma^0$ выполняется неравенство $\mathrm{Re}\,(g' + g/z) \geq 0$, $z \in \mathbb{D}^-$. Данную задачу решает следующая

Лемма 2. *Если $g \in \Sigma^0$, то $|g'(z) - 1| < 1$, $z \in \mathbb{D}^-$.*
Если $g \in \Sigma^*$ и $\lim\limits_{z\to\infty}[g(z) - z] = 0$, то $|g(z)/z - 1| < 1$, $z \in \mathbb{D}^-$.

Оба утверждения леммы 2 являются следствиями неравенства Голузина $|g(z) - z| \leq 1/|z|$, $z \in \mathbb{D}^-$ [14]; как уже упоминалось в п. 1.3, первое из них было получено в [12]. (Условие $\lim\limits_{z\to\infty}[g(z) - z] = 0$ означает, что разложение $g(z) = z + a_1/z + \cdots$ не содержит свободного члена.) С учетом лемм 1 и 2 следующий результат почти очевиден.

Теорема 4. *Если $g \in \Sigma^0$ и $\lim\limits_{z\to\infty}[g(z) - z] = 0$, то $g_\lambda \in \Sigma^*$ для каждого $\lambda \in [0,1]$.*

3.2. Аналог теоремы 1 формулируется в терминах основного решения

$$g(z) = \int f'(1/z)dz, \quad z \in \mathbb{D}^-, \tag{20}$$

внешней обратной краевой задачи по параметру s, функция $f \in \widetilde{H}_0$ выступает здесь как решение соответствующей внутренней обратной краевой задачи (см. [5]). В работе [15] показано, что принадлежность решения (20) классу Σ^0 означает его единственность. Переход к выпуклым комбинациям сохраняет структуру решения:

$$g_\lambda(z) = \int f_\lambda'(1/z)dz, \quad z \in \mathbb{D}^-; \tag{21}$$

если $g \in \Sigma^0$, то при этом сохраняется и единственность g_λ. Отличие от теоремы 1 состоит в том, что областью изменения параметра λ будет уже не отрезок, а область – замыкание $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга. Справедлива

Теорема 5. *Пусть $f \in \tilde{H}_0$ и $g(z) = \int f'(1/z)dz$. Тогда если $g \in \Sigma^0$, то $M_{f_\lambda} = \{0\}$ и $f_\lambda \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ для любого $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$. Область изменения параметра λ нельзя увеличить, не выходя из $\widetilde{\mathcal{G}}_1$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы 2 устанавливает неравенство $|g'(z) - 1| < 1$, $z \in \mathbb{D}^-$. Данное неравенство, будучи условием единственности [16], сохраняется при переходе к g_λ, $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$: $|g'_\lambda(z) - 1| = |\lambda||g'(z) - 1| < 1$, $z \in \mathbb{D}^-$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Убедимся в неулучшаемости области изменения параметра. Рассмотрим функцию $g(z) = z + 1/z \in \Sigma^0$ и запишем уравнение Гахова для f_λ в терминах (21):

$$z\frac{g''_\lambda}{g'_\lambda}(z) \equiv \frac{2}{z^2/\lambda - 1} = -\frac{2}{|z|^2 - 1}.$$

Если теперь взять произвольное $\lambda = |\lambda|e^{i\gamma}$ с $|\lambda| > 1$, то легко проверить, что точка $z = \sqrt{2|\lambda|/(1 + |\lambda|)}e^{i\gamma/2} \in \mathbb{D}^-$ является корнем указанного уравнения. □

Summary

T.V. Zharkova, A.V. Kazantsev. Gakhov Set in the Merkes Theorem on Convex Combinations.

The Merkes theorem deduces the starlikeness of any convex combination f_λ of identity mapping and a holomorphic convex function f in the unit disk with $f''(0) = 0$. Under the same conditions, all of the functions f_λ (except the mappings onto a strip when $\lambda = 1$) are proved to belong also to the Gakhov set characterized by the property of (no more than) uniqueness of the root of the Gakhov equation. These results allow for the analogies for the exterior of the unit disk. The behavior of convex combinations is studied on the functions of the Alexander classes. For the exhaustion of each such class by the "level curves", the "stopping moment" is found which corresponds to the exit out of the Gakhov set, and all of the trajectories of such an exit are described. **Keywords:** hyperbolic derivative, conformal radius, Gakhov set, Gakhov equation, classes of convex and starlike functions, Alexander classes.

Литература

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Merkes E.P.* On the convex sum of certain univalent functions and the identity function // Revista Colombiana de Matemáticas. – 1987. – V. 21. – P. 5–12.
3. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова: учебное пособие. – Йошкар-Ола: Мар. ун-т, 2012. – 64 с.
4. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen // Compositio Math. – 1950. – V. 8, F. 2. – P. 81-111.
5. *Гахов Ф.Д.* Об обратных краевых задачах // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649–652.
6. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
7. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.
8. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.
9. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киндер М.И., Киселев А.В.* О классах единственности внешней обратной краевой задачи // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1990. – Вып. 24. - С. 39–62.

10. *Alexander J.W.* Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions // Ann. of Math. Ser. 2. – 1915. – V. 17, No 1. – P. 12–22.

11. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Свойства поверхности конформного радиуса и разрешимость внешней обратной краевой задачи // Алгебра и анализ: Тез. докл. междунар. науч. конф., посв. 100-летию со дня рожд. Н.Г. Чеботарева (Казань, 5–11 июня 1994 г.). – Казань: Казан. ун-т, 1994. – Ч. 2. – С. 13–14.

12. *Аксентьев Л.А., Авхадиев Ф.Г.* Об одном классе однолистных функций // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 10. – С. 12–20.

13. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.

14. *Голузин Г.М.* Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций // Матем. сборник. – 1938. – Т. 3, № 2. – С. 321–330.

15. *Кудряшов С.Н.* О числе решений внешних обратных краевых задач // Изв. вузов. Матем. – 1969. – № 8. – С. 30–32.

16. *Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24, № 3. – С. 319–333.

Поступила в редакцию
01.04.13

Жаркова Татьяна Васильевна – ассистент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *zharkova89@yandex.ru*

Казанцев Андрей Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *kazandrey0363@rambler.ru*