УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 119–126 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.18 doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.119-126

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НА НЕСКОЛЬКИХ ЛУЧАХ, ИНДУЦИРОВАННОЙ КВАДРАТОМ

Ф.Н. Гарифьянов[1], *Е.В. Стрежнева*[2]

[1]*Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия*
[2]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Рассмотрены линейные уравнения для функций, аналитических в плоскости с разрезами по «половине» границы квадрата. Предложен метод их равносильной регуляризации. Решение ищется в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью, причем существенно используется теория краевой задачи Карлемана и метод локально-конформного склеивания. Применением метода сжимающих отображений в банаховом пространстве установлена безусловная разрешимость полученных интегральных уравнений Фредгольма второго рода Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа. Эти задачи являются обобщением классической степенной проблемы моментов Стильтьеса на случай нескольких лучей с кусочно-экспоненциальным весом.

Ключевые слова: краевая задача Карлемана, метод регуляризации, моменты целых функций экспоненциального типа

Введение

Пусть D – квадрат с вершинами $t_j = i^{j+1},\ j = 1, 2, 3, 4$ и сторонами ℓ_j, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы ∂D (ℓ_1 – отрезок с концами $-1,\ -i$). Если добавить к D «половину» границы, то получим фундаментальное множество двоякопериодической группы с порождающими преобразованиями $\sigma_1(z) = z - 1 + i$ и $\sigma_2(z) = z + 1 + i$. Они индуцируют инволютивный сдвиг Карлемана, разрывный в вершинах. Некоторые приложения ядра, введенного Т. Карлеманом в [1], к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), были рассмотрены в работе [2]. Введем гомеоморфизм $\alpha(t) : \partial D \to \partial D$, где $\alpha(t) = \overline{t} \ \Leftrightarrow\ \alpha(t) = \{\sigma_j(t),\ t \in \ell_j\}$, $\alpha\left[\alpha(t)\right] = t$, изменяющий ориентацию контура и производная которого разрывна в вершинах. Здесь $\sigma_1(t) = i(t + 1) - 1,\ \sigma_4 = \sigma_1^{-1},\ \sigma_2(t) = -i(t - 1) + 1,\ \sigma_3 = \sigma_2^{-1}$. Преобразования σ_1 и σ_2 порождают группы вращений относительно точек -1 и 1 соответственно. Это неподвижные точки сдвига.

Цель настоящей работы – исследовать некоторые интерполяционные задачи для ц.ф.э.т., порождаемые гомеоморфизмом $\alpha(t)$. Для этого введем, следуя [2], множество $\Gamma \subset \partial D$, удовлетворяющее двум условиям:

1) Γ – кусочно-гладкая кривая (или конечная совокупность таких кривых Γ_j, причем $\Gamma_k \bigcap \Gamma_m = \varnothing$ при $k \neq m$), причем $t \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha(t) \notin \Gamma$.

2) $\Gamma \bigcup \alpha(\Gamma) = \partial D$ (с точностью до узлов Γ).

Рассмотрим девятиэлементное функциональное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv f(z) + \sum_{\sigma \in S} f\left[\sigma(z)\right] = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где S – множество преобразований, образованных суперпозициями σ_1 и σ_2, а также обратных к ним, при этом $\sigma(\overline{D})\bigcap\overline{D}\neq\varnothing$, при следующих предположениях.

1. Решение $f(z)$ ищется в классе функций, голоморфных вне Γ и исчезающих на бесконечности. Граничные значения $f^{\pm}(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на любом компакте $\overline{d}\subset\Gamma$, не содержащем узлов, а в узлах возможны лишь логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B. По поводу определения класса B более подробно см. введение в [3] или [4, с. 551].

2. Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^{+}(t)\in \in H(\partial D)$. За счет того, что в выборе Γ имеется значительный произвол, возникают различные интерполяционные задачи, классические и неклассические.

Множество Γ назовем особым множеством.

Заметим, что интерполяционные задачи для ц.ф.э.т., порожденные правильным шестиугольником, были рассмотрены ранее в работе [5]. Но это были задачи, порожденные разрывным сдвигом, индуцированным порождающими преобразованиями соответствующей двояко-периодической группой.

1. Особое множество содержит смежные стороны

Пусть $\Gamma=\ell_1\bigcup\ell_2$. Будем искать решение задачи (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\tau-z)^{-1}\varphi(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau)\in H(\overline{\Gamma})$. Тогда задача (1) запишется в виде

$$(E\varphi)(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}A(z,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=g(z),\quad z\in D, \tag{3}$$

где

$$A(z,\tau)=(\tau-z)^{-1}+\sum_{\sigma\in S}(\tau-\sigma(z))^{-1} \tag{4}$$

есть аналог ядра Карлемана [1]. Если $z\to t\in\Gamma$ в соотношении (3), то

$$\left(E^{+}\varphi\right)(t)=2^{-1}\varphi(t)+(E\varphi)(t)=g^{+}(t), \tag{5}$$

где особый интеграл $(E\varphi)(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши и получен формальной заменой $z\in D$ на $t\in\Gamma$. Переходя в соотношении (3) к пределу по $z\to\alpha(t)$, получим

$$\left(E^{+}\varphi\right)(\alpha(t))=-2^{-1}\varphi(t)+\left(E^{+}\varphi\right)(\alpha(t))=g^{+}\left[\alpha(t)\right], \tag{6}$$

Вычитая из равенства (5) равенство (6), имеем

$$(T\varphi)(z)\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=g^{+}(t)-g^{+}\left[\alpha(t)\right]. \tag{7}$$

Ядро интегрального уравнение (7) имеет вид

$$K(t,\tau)=A(t,\tau)-A\left[\alpha(t),\tau\right]. \tag{8}$$

Лемма 1. *Ядро* (8) *ограничено на* Γ.

Доказательство. Оно сводится к непосредственному перебору всех возможных вариантов взаимного расположения точек τ и t на звеньях ломаной Γ (см. ниже оценки, приведенные при доказательстве теоремы 1). Более того, любая частная производная ядра в точках, отличных от узлов, ограничена на Γ, а вершина t_2 для них может быть только точкой разрыва первого рода. Таким образом, осуществлена регуляризация полиэлементного уравнения (1). □

Лемма 2. *Однородное уравнение Фредгольма*

$$T\varphi = 0 \tag{9}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство $C\left(\overline{\Gamma}\right)$ с нормой

$$M = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)|\,. \tag{10}$$

Оценим модуль интегрального слагаемого в (9). В силу симметрии без ограничения общности считаем, что равенство (10) достигается при $t \in \ell_1$, то есть

$$|K(t,\tau)| = \Big|(\tau + t - 2)^{-1} + (\tau + t - 2i)^{-1} + (\tau - it + i - 1)^{-1} -$$

$$- (\tau + it + 3i - 1)^{-1} - (\tau + it + i - 3)^{-1} - (\tau - t - 2 - 2i)^{-1}\Big| < 0.75, \quad \tau \in \Gamma. \tag{11}$$

Поскольку длина ломаной равна $2\sqrt{2}$ и $1.5\sqrt{2} < 2\pi$, то $\varphi \equiv 0$. □

Следствие 1. *Уравнение Фредгольма* (7) *безусловно разрешимо и имеет единственное решение.*

Осуществим теперь обратный переход от уравнения (7) к задаче (1). Из (5)–(7) получим $(E\varphi) = g(z) + C$, $z \in D$, поскольку задача Карлемана $a^+(t) = a^+[\alpha(t)]$, $t \in \Gamma$, в силу принципа локально-конформного склеивания [6] имеет решением лишь постоянную.

Теорема 1. *Задача* (1) *при* $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *разрешима тогда и только тогда, когда* $(E\varphi)(0) = g(0)$. *Здесь* $\varphi(t) = T^{-1}\left[g^+(t) - g^+[\alpha(t)]\right]$. *Неоднородное функциональное уравнение* $(Vf)(z) = C \neq 0$, $z \in D$, *неразрешимо. Однородное функциональное уравнение* $(Vf)(z) = 0$, $z \in D$ *имеет лишь тривиальное решение.*

Замечание 1. Если $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то можно подобрать такую постоянную C_g, что уравнение $(Vf)(z) = g(z) + C_g$, $z \in D$, разрешимо.

Замечание 2. Сопряженной индикаторной диаграммой верхней функции $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$ [7, § 1.1] является, вообще говоря, треугольник Δ с вершинами -1, $-i$, 1 (выпуклая оболочка множества Γ). Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является «меньшее» выпуклое множество $\Delta_1 \subset \Delta$, возможен, но малоинтересен, поскольку тогда задача переопределена. Соотношение (1) выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки. Необходимым (но не достаточным!) условием этого является то, что свободный член аналитически продолжим из D в окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$. Далее считаем, что оно не выполняется.

С учетом замечания 2 множество $\Delta_2 = D \setminus \Delta$ – это треугольник с вершинами $-1,\ 1,\ i$. Пусть $z \in \Delta_2$. Перепишем соотношение (1) в терминах ц.ф.э.т., используя свойства преобразования Бореля. Возьмем ряд

$$g(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k\,(z-z_0)^k}{k!}, \quad z_0 \in \Delta_2. \tag{12}$$

Постоянную c_0 подберем так, чтобы задача (1) была разрешима. Предполагаем, что у ряда (12) радиус сходимости $R > \max(|z-z_0|, |z_0-1|, |z_0+i|)$. Тогда при $z_0 \in \Delta_2$ задача (1) запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\theta_k} F(\tau) H_k(z,\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D. \tag{13}$$

Здесь $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ – лучи $\arg\tau = 3\pi/2$, $\arg\tau = \pi/4$, $\arg\tau = 3\pi/4$ соответственно и

$$H_1(z,\tau) = \sum_{j=0}^{2} \exp[-\sigma_j(z)\tau] + \exp[(z-2i)\tau], \quad \sigma_0(z) = z,$$

$$H_2(z,\tau) = \sum_{j=1}^{3} \exp[-\sigma_{2j+1}(z)\tau], \quad \sigma_5(z) = 2 - z, \quad \sigma_7(z) = -2i - z,$$

$$H_3(z,\tau) = \sum_{j=2}^{3} \exp[-\sigma_{2j}(z)\tau], \quad \sigma_6(z) = -2 - z.$$

Приравнивая коэффициенты Тейлора в точке $z_0 \in \Delta_2$ левой и правой частей (13), получаем обобщение степенной проблемы моментов Стильтьеса на случай трех лучей

$$\sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\theta_j} F(\tau) \left.\frac{\partial^k H_j(z,\tau)}{\partial z^k}\right|_{z=z_0} d\tau = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty \tag{14}$$

с кусочно-экспоненциальным весом. Итак, справедлива

Теорема 2. *Проблема моментов* (14) *в классе ц.ф.э.т., ассоциированных по Борелю с нижней функцией* $f(z) \in B$, *безусловно разрешима и имеет единственное решение.*

2. Особое множество содержит противоположные стороны

Пусть теперь $\Gamma = \ell_1 \bigcup \ell_3$, то есть Γ симметрично относительно начала координат и свободный член есть

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

причем радиус сходимости этого ряда $R > 1$. Легко проверить, что выполняется оценка (11), то есть справедлива лемма 2. Но теперь плотность $\varphi(t)$ и решение $f(z)$ также нечетны. Действительно, достаточно заменить в (7) переменные τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно и воспользоваться очевидным равенством $\alpha(-t) = -\alpha(t)$. Тогда функция $-\varphi(-t)$ также удовлетворяет (7) и остается воспользоваться леммой 2. Другими словами, задача (1) при сделанных предположениях безусловно разрешима. Сопряженной индикаторной диаграммой ц.ф.э.т. $F(z)$ является сам квадрат D, поэтому придем к неклассической интерполяционной задаче, связывающей коэффициенты Маклорена нижней функции и моменты Стильтьеса четной верхней функции $F(z)$ с кусочно-экспоненциальным весом на двух лучах. Тогда задача (1) запишется в виде

$$f(z)+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\theta_j}F(\tau)H_j(z,\tau)\,d\tau=g(z),$$

где θ_1 и θ_2 – лучи $\arg\tau=7\pi/4$ и $\arg\tau=5\pi/4$ соответственно. Здесь $H_1(z,\tau)=$ $=2\,[\exp(-2\tau)+\exp(-2i\tau)]\,\mathrm{sh}(\tau z)+2i\exp[-(1+i)\tau]\cdot\sin(\tau z)$ и $H_2(z,\tau)=-2i\exp(1-$ $-\,i)\tau\sin(\tau z)$, то есть

$$f^{(2k+1)}(0)+2\int\limits_{\theta_1}F(\tau)\left[\exp(-2\tau)+\exp(-2i\tau)+(-1)^k i\exp(-(1+i)\tau)\right]\tau^{2k+1}\,d\tau+$$

$$+2i(-1)^{k+1}\int\limits_{\theta_2}F(\tau)\exp[(1-i)\tau]\tau^{2k+1}\,d\tau=c_k. \qquad (15)$$

Теорема 3. *Интерполяционная задача* (15) *безусловно разрешима и имеет единственное решение.*

По поводу похожей задачи, порожденной разрывным сдвигом Карлемана, см. [8].

3. Особое множество содержит «половинки» сторон

До сих пор узлами Γ были только вершины квадрата. Но предложенный в [2] метод регуляризации не требует такого ограничения. Пусть точки τ_j – середины сторон ℓ_j. Положим $\Gamma=\bigcup\limits_{j=1}^{4}\ell_j'$, где множества ℓ_j' – это отрезки (t_1,τ_1), (τ_2,t_3), (τ_3,t_4) (t_4,τ_4) соответственно. Оценим модуль ядра (8) сверху. Можно считать, не ограничивая общности, что соотношение (10) достигается либо при $t\in\ell_1'$, либо при $t\in\ell_4'$. Рассмотрим два случая.

1) $t\in\ell_1'$. Справедлива оценка (11), то есть и в этом случае из (9) следует, что $\varphi\equiv 0$.

2) $t\in\ell_4'$. Тогда вместо оценки (11) имеем

$$|K(t,\tau)|=\Big|(\tau+t+2i)^{-1}+(\tau+t-2)^{-1}+(\tau+it-i-1)^{-1}-$$

$$-(\tau-t-3i-1)^{-1}-(\tau-it-i-3)^{-1}-(\tau-t+2i-2)^{-1}\Big|<1.$$

Отсюда также вытекает, что из (9) следует, что $\varphi\equiv 0$. Остается справедливой теорема 1. Сопряженной индикаторной диаграммой K ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированной по Борелю с решением $f(z)\in B$, будет пятиугольник с вершинами t_1, τ_1, τ_2, t_3, t_4.

Замечание 3. При любом выборе Γ имеем $\{t_1,t_3\}\subset\overline{\Gamma}$, поскольку t_1, t_3 – это неподвижные точки сдвига.

Перепишем задачу (1) в терминах ц.ф.э.т., используя преобразование Бореля. Множество $D\setminus K$ есть треугольник Δ' с вершинами τ_1, t_2, τ_2. Пусть $z\in\Delta'$

и $g(z)$ – это ряд (12), причем $z_0 \in \Delta'$ и постоянная c_0 подобрана так, что задача (1) разрешима. Считаем, что радиус сходимости ряда $R > |z_0 - i|$. Тогда задача (1) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{5} \int_{\theta_j} F(\tau) H_j(z,\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D. \tag{16}$$

Здесь θ_j – лучи $\arg \tau = \alpha_j$, где $\alpha_1 = 3\pi/4$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = \pi/4$, $\alpha_4 = 7\pi/4$, $\alpha_5 = 5\pi/4$ и

$$H_1(z,\tau) = \exp\left[(z+2)\tau\right] + \exp\left[(iz+i+1)\tau\right],$$

$$H_2(z,\tau) = \exp(z\tau) + \exp\left[(z+2i)\tau\right],$$

$$H_3(z,\tau) = \exp\left[(z-2)\tau\right] + \exp\left[(i-1-iz)\tau\right],$$

$$H_4(z,\tau) = \exp\left[(z-2i)\tau\right] + \exp\left[(iz-i-1)\tau\right],$$

$$H_5(z,\tau) = \exp\left[(1-i-iz)\tau\right].$$

Тогда условие (16) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{5} \int_{\theta_j} F(\tau)\, \frac{\partial^k H_j(z,\tau)}{\partial z^k}\bigg|_{z=z_0} d\tau = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{17}$$

Теорема 4. *Интерполяционная задача* (17) *безусловно разрешима и имеет единственное решение.*

Замечание 4. Возможен еще случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой ц.ф.э.т. $F(z)$ является трапеция. Достаточно положить, например, $\Gamma = \ell_1' \bigcup \ell_3 \bigcup \ell_4'$.

Замечание 5. Применение разрывного сдвига Карлемана, индуцированного порождающими преобразованиями соответствующей двоякопериодической группы и рассмотренного здесь гомеоморфизма, приводит, вообще говоря, к ц.ф.э.т. с различными индикаторами. Так как в первом случае конгруэнтными являются противоположные стороны, а во втором – пары соседних сторон ℓ_1 и ℓ_4, ℓ_2 и ℓ_3. Только что рассмотренный пятиугольник не мог возникнуть в первом случае, поскольку, например, отрезки ℓ_1' и ℓ_3' тогда оказываются конгруэнтными.

Данный метод регуляризации без труда обобщается на случай произвольного ромба с острым углом π/n, $n > 2$.

Литература

1. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verh. Int. Math. Kongress. Zürich. – 1932. – Bd. 1. – S. 138–151.

2. *Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А.* Ядро Карлемана и его приложения // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1263–1273.

3. *Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А.* О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции, и его приложениях // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 2. – С. 243–249.

4. *Гарифьянов Ф.Н* Разностные уравнения для функций, аналитических вне нескольких квадратов // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 550–559.

5. *Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В.* Интерполяционные задачи для целых функций, индуцированные правильным шестиугольником // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 1. – С. 78–85. – doi: 10.17377/smzh.2018.59.107.

6. *Зверович Э.И.* Метод локально-конформного склеивания // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205, № 4. – С. 767–770.

7. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. – М.: Наука.– 1967. – 241 с.

8. *Гарифьянов Ф.Н., Кац Д.Б.* Об одном уравнении с ядром Т. Карлемана и его приложении к проблеме моментов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 3. – С. 112–120.

Поступила в редакцию
18.12.17

Гарифьянов Фархат Нургаязович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *f.garifyanov@mail.ru*

Стрежнева Елена Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры специальной математики

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *o.strezh@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 1, pp. 119–126

doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.119-126

Square-Induced Interpolation Problems for Entire Functions

F.N. Garifyanov[a*], *E.V. Strezhneva*[b**]

[a]*Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia*
[b]*A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia*
E-mail: **f.garifyanov@mail.ru*, ***strezh@yandex.ru*

Received December 18, 2017

Abstract

Linear equations for functions that are analytic in the plane with cuts along the “half” of the square boundary have been considered. A method for their equivalent regularization has been proposed. The solution has been sought in the form of an integral of the Cauchy type with unknown density; the theory of the Carleman boundary value problem and the method of locally conformal pasting have been used. Applying the method of contracting mappings in a Banach space, the unconditional solvability of the obtained Fredholm integral equations of the second kind has been established. Applications of the moment problem for entire functions of the exponential type have been given. These problems are a generalization of the classical power-law problem of Stieltjes moments to the case of several rays with piecewise exponential weight.

Keywords: Carleman's boundary value problem, regularization method, moments of entire functions of exponential type

References

1. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. *Verh. Int. Math. Kongress. Zürich*, 1932, Bd. 1, S. 138–151. (In French)
2. Garif'yanov F.N., Modina S.A. The Carleman kernel and its applications. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1011–1020. doi: 10.1134/S0037446612060055.
3. Garif'yanov F.N., Modina S.A. On the four-element equation for the functions analytic beyond a trapezoid and its applications. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 2. pp. 191–196. doi: 10.1134/S0037446611020017.
4. Garif'yanov F.N. Difference equations for functions analytic beyond several squares. *Sib. Math. J.*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 435–442. doi: 10.1023/A:1023856613786.
5. Garif'yanov F.N., Strezhneva E.V. Interpolation problems for entire functions induced by regular hexagons. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 1, pp. 59–64. doi: 10.1134/S003744661801007X.
6. Zverovich E.I. A method of locally conformal gluing. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 205, no. 4, pp. 767–770. (In Russian)
7. Bieberbach L. *Analytische Fortsetzung*. Springer, 1955. iv, 168 S. doi: 10.1007/978-3-662-01270-3. (In German)
8. Garifyanov F.N., Kats D.B. On an equation with Carleman kernel and its application to the moment problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 3, pp. 112–120. (In Russian)

Для цитирования: *Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В.* О проблеме моментов для целых функций на нескольких лучах, индуцированной квадратом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 1. – С. 119–126. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.119-126.

For citation: Garifyanov F.N., Strezhneva E.V. Square-induced interpolation problems for entire functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 1, pp. 119–126. doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.119-126. (In Russian)