

УДК 537.868:535

БРЭГГОВСКИЙ СОЛИТОН В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ КОНЦЕНТРАЦИИ РЕЗОНАНСНЫХ АТОМОВ

Л.В. Фролова, Б.И. Манцызов

Аннотация

В рамках полуклассического приближения с помощью двухволновых уравнений Максвелла – Блоха аналитически и численно исследовано нелинейное взаимодействие когерентного интенсивного оптического излучения с непрерывным резонансным фотонным кристаллом с четной функцией пространственного распределения концентрации резонансных атомов. Получено аналитическое решение, представляющее собой брэгговский солитон самоиндуцированной прозрачности. На конкретном примере фотонного кристалла с концентрацией резонансных атомов, меняющейся по кубическому закону, получено хорошее соответствие аналитических и численных результатов.

Ключевые слова: брэгговский солитон, самоиндуцированная прозрачность, непрерывный резонансный фотонный кристалл.

Введение

Активные исследования процессов взаимодействия лазерного излучения с пространственно периодическими структурами, или фотонными кристаллами, позволили в последние годы обнаружить целый ряд новых оптических эффектов, таких, например, как распространение оптических солитонов [1], медленный свет [2], солитонное сжатие импульсов [3]. Важной особенностью фотонных кристаллов (ФК) является наличие в них фотонных запрещенных зон (ФЗЗ) – частотных диапазонов, в которых линейно взаимодействующее со средой излучение не распространяется вследствие закона дисперсии. Однако в случае нелинейного взаимодействия дисперсионные соотношения изменяются, в результате чего на брэгговской частоте внутри линейной ФЗЗ становится возможным распространение нелинейных уединенных оптических импульсов, брэгговских солитонов. Брэгговские солитоны формируются в ФК с различными типами нелинейностей: квадратичной, керровской, а также с нелинейностью резонансного типа, обусловленной примесными резонансными двухуровневыми атомами. Большой интерес представляют брэгговские солитоны самоиндуцированной прозрачности (БС СИП). Явление самоиндуцированной прозрачности состоит в прохождении достаточно мощного ультракороткого импульса света в резонансной среде без искажения его формы и потерь энергии. БС СИП могут формироваться при достаточно низкой интенсивности импульса, равной 100 МВт/см^2 , что немаловажно с прикладной точки зрения. Поэтому резонансные фотонные кристаллы в настоящее время активно изучаются. Проводились теоретические исследования, которые выявили существование БС СИП в различных видах резонансных фотонных кристаллов:

а) дискретном фотонном кристалле, который состоит из набора тонких параллельных слоев, легированных двухуровневыми резонансными атомами [4];

б) дискретном резонансном фотонном кристалле с синусоидальной модуляцией линейного коэффициента преломления [5];

в) непрерывном фотонном кристалле с однородным пространственным распределением резонансных атомов [6].

Периодические структуры с непрерывным распределением резонансных атомов, или непрерывные резонансные фотонные кристаллы, являются пока малоизученными. Полезно исследовать характер формирования и взаимодействия импульсов в таких структурах, так как разумно ожидать, что профиль концентрации резонансных атомов может оказывать существенное влияние на динамику распространения интенсивных импульсов в непрерывных резонансных кристаллах.

1. Развитие полуклассической теории резонансного взаимодействия интенсивности лазерного излучения с непрерывным фотонным кристаллом

В настоящей работе в рамках полуклассического приближения рассматривается взаимодействие когерентного интенсивного оптического излучения с непрерывным резонансным фотонным кристаллом с произвольным распределением концентрации резонансных атомов.

В случае произвольного периодического распределения резонансных атомов взаимодействие оптического излучения и резонансной среды описывается системой двухволновых уравнений Максвелла–Блоха (МБ) для непрерывного резонансного ФК [7]:

$$\pm \Omega_{\xi}^{(\pm)}(\xi, \tau) + \Omega_{\tau}^{(\pm)}(\xi, \tau) = 4 \left\langle P(\xi, \tau) \tilde{\rho}(\xi) e^{\mp ik' \xi} \right\rangle_{\lambda'}, \quad (1)$$

$$P_{\tau}(\xi, \tau) = n(\xi, \tau) [\Omega^{(+)}(\xi, \tau) e^{ik' \xi} + \Omega^{(-)}(\xi, \tau) e^{-ik' \xi}], \quad (2)$$

$$n_{\tau}(\xi, \tau) = -\text{Re} \left\{ P * (\xi, \tau) [\Omega^{(+)}(\xi, \tau) e^{ik' \xi} + \Omega^{(-)}(\xi, \tau) e^{-ik' \xi}] \right\}, \quad (3)$$

где $\Omega^{(\pm)} \equiv 4(\mu\tau_c/\hbar) E_0^{\pm}$, E_0^{\pm} – комплексные амплитуды электрического поля падающей (+) и дифрагированной (–) волн, μ – матричный элемент дипольного момента перехода, P – безразмерная характеристика среднего дипольного момента атома, n – инверсия атомов, $\rho(\xi, \tau) = \rho_0 \tilde{\rho}(\xi)$ – концентрация резонансных атомов, $\tilde{\rho}(\xi)$ – безразмерная периодическая функция концентрации резонансных атомов, $\tau_c^2 = 8T_1/3c\rho_0\lambda^2$ – кооперативное время, $\xi = x/2\tau_c c$, $\tau = t/2\tau_c$ – безразмерные координаты пространства и времени соответственно, $k' = 2\pi/\lambda'$, $\lambda' = \lambda/2\tau_c c$; угловые скобки обозначают усреднение по пространственной области $\sim \lambda'$; нижние индексы ξ , τ обозначают частные производные по ξ и τ соответственно.

Представим $\tilde{\rho}(\xi)$ в виде ряда Фурье:

$$\tilde{\rho}(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imH\xi}, \quad (4)$$

где $H = 2\pi/d$, d – безразмерный пространственный период структуры, $C_m = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \tilde{\rho}(\xi) e^{-imH\xi} d\xi$ – коэффициенты Фурье, а $d = \lambda'/2$ в силу условия Брэгга.

Для простоты будем рассматривать только четные функции $\tilde{\rho}(\xi)$, тогда

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \tilde{\rho}(\xi) \cos(mH\xi) d\xi.$$

Подставив разложение Фурье (4) в (1), получим

$$\pm \Omega_{\xi}^{(\pm)}(\xi, \tau) + \Omega_{\tau}^{(\pm)}(\xi, \tau) = 4 \left\langle P(\xi, \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{ik'\xi(2m \mp 1)} \right\rangle_{\lambda'}. \quad (5)$$

Далее, домножим (2) сначала на $\exp(ik'\xi)$:

$$P_{\tau}(\xi, \tau) e^{ik'\xi} = n(\xi, \tau) [\Omega^{(+)}(\xi, \tau) e^{2ik'\xi} + \Omega^{(-)}(\xi, \tau)], \quad (6)$$

а затем на $\exp(-ik'\xi)$:

$$P_{\tau}(\xi, \tau) e^{-ik'\xi} = n(\xi, \tau) [\Omega^{(+)}(\xi, \tau) + \Omega^{(-)}(\xi, \tau) e^{-2ik'\xi}] \quad (7)$$

и усредним выражения (5)–(7) по пространственному интервалу $\xi_0 \sim \lambda'$. При усреднении быстро осциллирующими экспонентами пренебрежем, и в результате получим следующую систему уравнений

$$\Omega_{\tau}^{(\pm)}(\xi, \tau) \pm \Omega_{\xi}^{(\pm)}(\xi, \tau) = 4(C_1 P^{\pm}(\xi, \tau) + C_0 P^{\mp}(\xi, \tau)), \quad (8)$$

$$P_{\tau}^{+}(\xi, \tau) = n(\xi, \tau) \Omega^{(-)}(\xi, \tau), \quad (9)$$

$$P_{\tau}^{-}(\xi, \tau) = n(\xi, \tau) \Omega^{(+)}(\xi, \tau), \quad (10)$$

$$n_{\tau}(\xi, \tau) = - \left[P^{-}(\xi, \tau) \Omega^{(+)}(\xi, \tau) + P^{+}(\xi, \tau) \Omega^{(-)}(\xi, \tau) \right], \quad (11)$$

где

$$P^{\pm}(\xi, \tau) \equiv \langle P(\xi, \tau) e^{\pm ik'\xi} \rangle_{\lambda'},$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \tilde{\rho}(\xi) \cos(H\xi) d\xi, \quad C_0 = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \tilde{\rho}(\xi) d\xi.$$

Решение системы уравнений (8)–(11) будем искать в виде стационарных уединенных волн

$$\Omega^{(\pm)}(\xi, \tau) = \Omega_0^{(\pm)} \operatorname{sech} \left(\frac{\xi - v\tau}{v\tau_p} \right), \quad (12)$$

где $\Omega_0^{(\pm)}$ – неизвестные амплитуды прямой (+) и обратной (–) волн; v – скорость импульса, нормированная на скорость света в вакууме c ; τ_p – длительность импульса, нормированная на $2\tau_c$.

Выразим $P^{\pm}(\xi, \tau)$ из (8):

$$P^{\pm}(\xi, \tau) = C \left[C_0 \left(\Omega_{\tau}^{(\mp)} \mp \Omega_{\xi}^{(\mp)} \right) - C_1 \left(\Omega_{\tau}^{(\pm)} \pm \Omega_{\xi}^{(\pm)} \right) \right], \quad (13)$$

где $C \equiv \frac{1}{4(C_0^2 - C_1^2)}$.

Учтем, что

$$\Omega_{\xi}^{(\pm)} = -\frac{1}{v\tau_p} \Omega_0^{(\pm)} \operatorname{sech}(\varphi) \operatorname{th}(\varphi),$$

$$\Omega_{\tau}^{(\pm)} = \frac{1}{\tau_p} \Omega_0^{(\pm)} \operatorname{sech}(\varphi) \operatorname{th}(\varphi),$$

где $\varphi \equiv \frac{\xi - v\tau}{v\tau_p}$, и преобразуем (13) к следующему виду:

$$P^{\pm}(\xi, \tau) = \pm \frac{C}{v\tau_p} \operatorname{sech}(\varphi) \operatorname{th}(\varphi) \left[C_0 (1 \pm v) \Omega_0^{(\mp)} + C_1 (1 \mp v) \Omega_0^{(\pm)} \right]. \quad (14)$$

Теперь обратимся к уравнениям (9), (10). Подставив в них выражение (12), получим:

$$P_{\tau}^{\pm} = n\Omega_0^{(\mp)} \operatorname{sech}(\phi). \quad (15)$$

Продифференцируем (14) по τ :

$$P_{\tau}^{\pm}(\xi, \tau) = \pm \frac{C}{v\tau_p^2} (1 - 2\operatorname{sech}^2(\varphi)) \operatorname{sech}(\varphi) \left[C_0(1 \pm v)\Omega_0^{(\mp)} + C_1(1 \mp v)\Omega_0^{(\pm)} \right]. \quad (16)$$

Приравняем правые части (15) и (16):

$$n\Omega_0^{(\mp)} = \pm \frac{C}{v\tau_p^2} (1 - 2\operatorname{sech}^2(\varphi)) \left[C_0(1 \pm v)\Omega_0^{(\mp)} + C_1(1 \mp v)\Omega_0^{(\pm)} \right]. \quad (17)$$

Выразим n из (17) и получим следующую систему уравнений:

$$n = -\frac{C}{v\tau_p^2} (1 - 2\operatorname{sech}^2(\varphi)) [C_0(1 - v) + C_1k(1 + v)], \quad (18)$$

$$n = \frac{C}{v\tau_p^2} (1 - 2\operatorname{sech}^2(\varphi)) \left[C_0(1 + v) + \frac{C_1}{k}(1 - v) \right], \quad (19)$$

где $k \equiv \frac{\Omega_0^{(-)}}{\Omega_0^{(+)}}$. Приравняем (18) и (19), тогда получим, что

$$C_1(1 + v)k^2 + 2C_0k + C_1(1 - v) = 0. \quad (20)$$

Квадратное уравнение (20) имеет два корня:

$$k_{1,2} = \frac{-C_0 \pm \sqrt{C_0^2 - C_1^2(1 - v^2)}}{C_1(1 + v)}. \quad (21)$$

Продифференцируем (18) по τ :

$$n_{\tau} = \frac{4C}{v\tau_p^3} \operatorname{sech}^2(\varphi) \operatorname{th}(\varphi) [C_0(1 - v) + C_1k(1 + v)]. \quad (22)$$

Подставим (22), (14) и (12) в (11). В результате получим:

$$\frac{4}{\tau_p^2} [C_0(1 - v) + C_1k(v + 1)] = \left(\Omega_0^{(+)} \right)^2 [C_0(1 - v - k^2(1 + v)) + 2C_1kv]. \quad (23)$$

Выразим $\Omega_0^{(+)}$ из (23):

$$\Omega_0^{(+)} = \frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{C_0(1 - v) + C_1k(v + 1)}{C_0(1 - v - k^2(1 + v)) + 2C_1kv}}.$$

Используя условие локализации импульса $n(\xi = \pm\infty, \tau) = -1$ (изначально среда не возбуждена), из (18) получим:

$$\tau_p^2 = \frac{C}{v} [C_0(1 - v) + C_1k(1 + v)]. \quad (24)$$

Проанализируем выражение (24). При $k = k_2$ (21) правая часть (24) отрицательна, то есть $\tau_p^2 < 0$, что лишено физического смысла, тогда как подстановка

$k = k_1$ в (24) приводит к физически правильному неравенству $\tau_p^2 > 0$. Таким образом, оставляем лишь один корень $k = k_1$ (21). Окончательно получаем следующее аналитическое решение:

$$\begin{aligned}\Omega^{(\pm)} &= \Omega_0^{(\pm)} \operatorname{sech}(\varphi), \\ P^+ &= C \frac{1}{v\tau_p} \left[C_1(1-v)\Omega_0^{(+)} + C_0(1+v)\Omega_0^{(-)} \right] \operatorname{sech}(\varphi) \operatorname{th}(\varphi), \\ P^- &= -C \frac{1}{v\tau_p} \left[C_0(1-v)\Omega_0^{(+)} + C_1(1+v)\Omega_0^{(-)} \right] \operatorname{sech}(\varphi) \operatorname{th}(\varphi), \\ n &= C \frac{C_0v - \sqrt{C_0^2 - C_1^2(1-v^2)}}{v\tau_p^2} \left[1 - 2\operatorname{sech}^2(\varphi) \right],\end{aligned}\tag{25}$$

где

$$\tau_p = \sqrt{\frac{C}{v} \left[\sqrt{C_0^2 - C_1^2(1-v^2)} - C_0v \right]},\tag{26}$$

$$\Omega_0^{(+)} = \frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{C_0(1-v) + C_1k(v+1)}{C_0(1-v - k^2(1+v)) + 2C_1kv}}, \quad \Omega_0^{(-)} = k\Omega_0^{(+)},\tag{27}$$

$$k = \frac{\sqrt{C_0^2 - C_1^2(1-v^2)} - C_0}{C_1(1+v)}.\tag{28}$$

Из (26)–(28) следует, что $\lim_{v \rightarrow 0} \Omega_0^{(\pm)} = 0$, то есть в случае четной периодической функции концентрации резонансных атомов $\tilde{\rho}(\xi)$ система двухволновых уравнений МБ не имеет решения с нулевой скоростью в виде стоячего солитона, существующего в дискретной решетке. Естественно ожидать, что импульсы, распространяющиеся с малыми скоростями в среде с такой функцией $\tilde{\rho}(\xi)$, будут неустойчивыми.

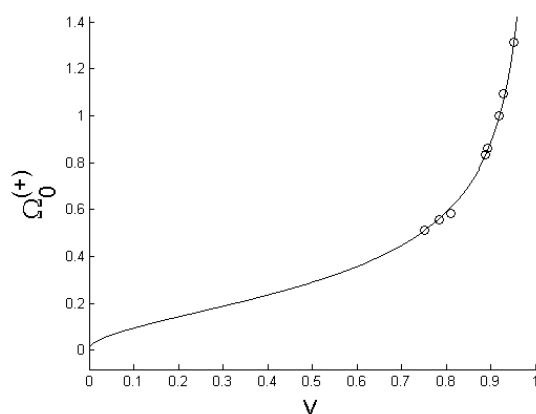
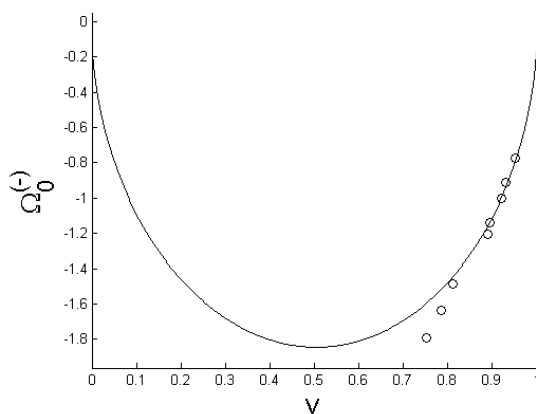
Следует отметить, что, оставляя при усреднении в (5) только члены с коэффициентами Фурье C_0, C_1, C_{-1} , мы фактически любую периодическую четную функцию $\tilde{\rho}(\xi)$ сводим к функции вида $\tilde{\rho}(\xi) = C_0 + 2C_1 \cos(H\xi)$, $H = 2k'$, тем самым подразумевая, что члены с коэффициентами Фурье C_m , где $|m| \geq 2$, вносят в аналитическое решение столь незначительный вклад, что ими можно пренебречь. Для того чтобы выяснить, до какой степени верно это предположение, проведено прямое численное интегрирование системы двухволновых уравнений МБ (1)–(3) с последующим сравнением результатов аналитического и численного решений.

При численном решении системы двухволновых уравнений МБ (1)–(3) функция концентрации резонансных атомов в структуре выбиралась в виде: $\tilde{\rho}(\xi) = [1 + \cos^3(2k'\xi)]/2$. На рис. 1, 2 сплошными линиями изображены зависимости амплитуд импульса $\Omega_0^{(\pm)}$ от скорости v , рассчитанные аналитически (амплитуды нормированы на значения $\Omega_0^{(\pm)}$ при $v = 0.92$). Белыми кругами обозначены значения амплитуд (также нормированные на величины амплитуд при $v = 0.92$), полученные при численном решении системы уравнений (1)–(3) со следующими начальными и граничными условиями:

$$\Omega^{(\pm)}(x, t = 0) = 0, \quad P(x, t = 0) = 0, \quad n(x, t = 0) = -1,$$

$$\Omega^{(+)}(x = 0, t) = \Omega_0^{(+)} \operatorname{sech}(\phi), \quad \Omega^{(-)}(x = L, t) = 0,$$

где L – длина резонансной структуры.

Рис. 1. Зависимость амплитуды $\Omega_0^{(+)}$ прямой волны от скорости импульсаРис. 2. Зависимость амплитуды $\Omega_0^{(-)}$ обратной волны от скорости импульса

Численное решение проводилось методом характеристик. Из рисунков видно хорошее совпадение аналитического и численного решений в случае больших скоростей импульсов. Однако закономерно возникает вопрос, почему значения $\Omega_0^{(-)}$, полученные численно при скоростях v , меньших 0.8, не совпадают с аналитическими результатами при тех же скоростях? Как упоминалось выше, отсутствие решения системы двухволновых уравнений МБ с нулевой скоростью свидетельствует о возможной неустойчивости импульсов, распространяющихся с малыми скоростями. Численное решение действительно демонстрирует неустойчивость при $v < 0.8$ (соответствующие круги на рис. 2). На рис. 1, 2 приведены значения амплитуд устойчивых импульсов при скоростях $v \geq 0.8$.

Заключение

Отметим, что развитая выше теория взаимодействия интенсивного когерентного излучения с непрерывным РФК с произвольной концентрацией резонансных атомов позволяет обобщить ряд нелинейных эффектов на широкий класс структур. Можно ожидать, например, что, подобрав определенный профиль периодической концентрации резонансных атомов, удастся добиться появления в непрерывном РФК стоячих солитонов, которые существуют в дискретном случае [4], а также

усиления и сжатия импульсов. Это представляет значительный интерес для различных практических разработок.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-02-00-786).

Summary

L.V. Frolova, B.I. Mantsyzov. Bragg Soliton in a Periodic Resonance Structure with Arbitrary Resonant Atom Concentration Profile.

Nonlinear interaction between the intense coherent optical radiation and the continuous resonant photonic crystal with an even function of the resonant atom concentration distribution is numerically and analytically investigated within the framework of semi-classical approach using the two-wave Maxwell – Bloch equations. An analytical solution is found, which represents a Bragg soliton of self-induced transparency. By the specific example of the photonic crystal with the resonant atom concentration that changes according to the cube law a good agreement between analytical and numerical results is obtained.

Key words: Bragg soliton, self-induced transparency, continuous resonant photonic crystal.

Литература

1. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
2. *Mok J.T., de Srerke C.M., Littler I.C.M.* Dispersionless slow light using gap solitons // *Nature Phys.* – 2006. – V. 2, No 11. – P. 775–780.
3. *Mok J.T., Littler I.C.M., Tsoy E., Eggleton B.J.* Soliton compression and pulse-train generation by use of microchip Q-switched lasers in Bragg gratings // *Optics Lett.* – 2005. – V. 30, No 18. – P. 2457–2459.
4. *Манцызов Б.И., Кузьмин Р.Н.* О когерентном взаимодействии света с дискретной периодической резонансной средой // *ЖЭТФ.* – 1986. – Т. 91, Вып. 1. – С. 65–77.
5. *Kozhokin A.E., Kurizki G., Malomed B.* Standing and moving gap solitons in resonantly absorbing gratings // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – V. 81, No 17. – P. 3647–3650.
6. *Aközбек N., John S.* Self-induced transparency solitary waves in a doped nonlinear photonic band gap material // *Phys. Rev. E.* – 1998. – V. 58, No 3. – P. 3876–3895.
7. *Манцызов Б.И., Петров Е.В., Федотов М.В.* Брэгговский солитон самоиндуцированной прозрачности в периодической структуре с произвольной модуляцией плотности резонансных атомов // *Изв. РАН. Сер. физ.* – 2006. – Т. 70, № 1. – С. 144–148.

Поступила в редакцию
18.01.10

Фролова Лидия Викторовна – студент физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *phisiya@rambler.ru*

Манцызов Борис Иванович – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *bmantsyzov@gmail.com*