УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 493–508 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Соболев, М.Р. Тимербаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена построению схем метода конечных элементов высокого порядка точности для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с вырождающимися на границе коэффициентами. Метод решения задачи основан на мультипликативном и аддитивно-мультипликативном выделении особенности. Полученные оценки скорости сходимости доказывают оптимальность предложенного метода на заданном классе гладкости правых частей.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, схемы метода конечных элементов, весовые пространства функций, мультипликативное и аддитивно-мультипликативное выделение особенности

В работе рассматривается двухточечная краевая задача четвертого порядка

$$Au \equiv D^2\big(x^\alpha a(x)D^2u(x)\big) - D\big(a_1(x)Du(x)\big) + a_0(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$x \in \Omega = (0,1), \quad D = d/dx;$$

$$u(0) = Du(0) = u(1) = Du(1) = 0 \quad \text{при} \;\; \alpha < 1; \tag{2}$$

$$u(0) = x^\alpha D^2u(x)\big|_{x=0} = u(1) = Du(1) = 0 \quad \text{при} \;\; 1 \le \alpha < 3. \tag{3}$$

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что $a(x) \ge c_0 > 0$, $a_1(x) \ge 0$, $a_0(x) \ge 0$. Дополнительные условия на эти функции сформулированы ниже.

Поскольку коэффициент $x^\alpha a(x)$ вырождается в окрестности точки $x = 0$, решение задачи имеет неограниченные производные в окрестности этой особой точки. Для эффективного численного решения задач с вырождением нужно учитывать указанные особенности. Схемы метода конечных элементов (МКЭ) высокого порядка точности для вырождающегося уравнения второго порядка были предложены в [1]. В статье [2] при $\alpha < 1$ рассматривалась краевая задача Дирихле для уравнения (1) с $a_1 \equiv 0$.

В настоящей работе показано, что решение при $\alpha < 1$ можно представить в виде $u(x) = x^{2-\alpha}\hat{u}(x)$, а при $1 \le \alpha < 3$ – в виде $u(x) = u_0\varphi_0(x) + x^{3-\alpha}\hat{u}(x)$, где φ_0 – некоторая фиксированная функция, $u_0 \in R$, $\hat{u}$ – новая неизвестная функция, которая, как следует из априорных оценок, является гладкой. В соответствии с этими представлениями приближенное решение мы ищем в виде: $u_h = x^{2-\alpha}\hat{u}_h$ при $\alpha < 1$ – мультипликативное выделение особенности [3] и $u_h = z_0\varphi_0 + x^{3-\alpha}\hat{u}_h$

при $1 \leq \alpha < 3$ – аддитивно-мультипликативное выделение особенности [1], где $\hat{u}_h$ – кусочно-полиномиальная функция. Для указанных аппроксимаций с выделением особенности получены оценки погрешности, являющиеся оптимальными в энергетической норме.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Определим весовые классы функций на интервале Ω. Для вещественного γ через $L_{2,\gamma} \equiv L_{2,\gamma}(\Omega)$ (далее символ Ω будем опускать, когда он подразумевается из контекста) обозначим пространство измеримых функций с нормой $\|u\|_{L_{2,\gamma}} = \|x^{-\gamma}u\|_{L_2}$. Для целого неотрицательного s множество функций, у которых почти всюду ограничена обобщенная производная порядка s, обозначим через W^s_∞. Пространство функций u таких, что $x^{-\gamma}D^s u \in C[0,1]$, обозначим $C^s_\gamma[0,1]$. Через H^s_γ будем обозначать гильбертово пространство функций, имеющих обобщенную производную порядка s класса $L_{2,\gamma}$, с нормой

$$\|u\|_{H^s_\gamma} = \left(\|D^s u\|^2_{L_{2,\gamma}} + \|u\|^2_{L_2(1/2,1)}\right)^{1/2}.$$

Иногда удобнее использовать другую, эквивалентную норму

$$\|u\|_{H^s_\gamma} = \left(\|D^s u\|^2_{L_{2,\gamma}} + \sum_{j=0}^{s-1} |D^j u(1)|^2\right)^{1/2}.$$

Через $C^\infty_0(\Omega)$ обозначается множество бесконечное число раз дифференцируемых функций, имеющих компактные носители в интервале Ω. Замыкание множества функций C^∞_0 в норме пространства H^s_γ обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma$. Замыкание в H^s_γ бесконечно дифференцируемых финитных в окрестности точки $x = 1$ функций обозначим через $\dot{H}^s_\gamma$. При $\gamma = 0$ этот символ в обозначениях пространств будет опускаться. Отметим, что полунорма $\|D^s u\|_{L_{2,\gamma}}$ эквивалентна норме пространства H^s_γ на подпространствах $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma$ и $\dot{H}^s_\gamma$.

Известны следующие результаты, доказательство которых можно найти в [4], [5, с. 378], [6, с. 319].

Теорема 1.

(i) *Пространство H^s_γ непрерывно вложено в пространство H^k_ν ($H^s_\gamma \subset H^k_\nu$) тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $k < s$, $\nu < 1/2$, $s + \gamma - k - \nu \geq 0$; если последнее неравенство строгое, то данное вложение компактно.*

(ii) *Если $\gamma > -1/2$, то пространство $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma$ состоит из тех функций u, для которых $D^k u(0) = D^k u(1) = 0$ при всех $k = 0, \dots, s-1$; если $\gamma + s < 1/2$, то $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma$ состоит из функций u, для которых $D^k u(1) = 0$ при $k = 0, \dots, s-1$, то есть $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma = \dot{H}^s_\gamma$.*

(iii) *Пространство $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma$ непрерывно вложено в пространство $\overset{\circ}{H}{}^{s-k}_{\gamma+k}$, $k = 0, \dots, s$.*

(iv) *При $s + \gamma > -1/2$ имеет место компактное вложение $H^s_\gamma \subset L_1$.*

(v) *Для натурального s и произвольного $\varepsilon > 0$ пространство H^s_γ компактно вложено в $C^k_\nu[0,1]$, если $\nu \leq \min(0,\, s + \gamma - 1/2 - k - \varepsilon)$.*

Для произвольного вещественного μ определим интегральный оператор Харди

$$K_\mu u(x) = x^{\mu-1} \int_0^x y^{-\mu} u(y)\, dy.$$

Естественной областью определения $\operatorname{dom} K_\mu$ оператора Харди K_μ является множество измеримых на Ω функций u, для которых функция $y^{-\mu}u(y)$ интегрируема по Лебегу на интервале $(0,x)$ для каждого $x\in(0,1)$.

Теорема 2. *Для оператора Харди справедливы утверждения:*

(i) *если* $\delta = 1/2+\gamma-\mu > 0$, *то оператор* K_μ *непрерывен в* $L_{2,\gamma}$ *и* $\|K_\mu\|_{L_{2,\gamma}\to L_{2,\gamma}} = \dfrac{1}{\delta}$;

(ii) *если* $\mu < \min(1,\gamma+s+1/2)$, *то* K_μ *непрерывен как оператор из* H^s_γ *в* $H^{s+k}_{\gamma-k}$, $k=0,1$;

(iii) *для* $\mu\neq\nu$ *имеет место псевдорезольвентное тождество*

$$K_\mu K_\nu = K_\nu K_\mu = \frac{1}{\mu-\nu}(K_\mu - K_\nu);$$

(iv) *для оператора Харди справедливы формулы дифференцирования:*
если $u\in\operatorname{dom} K_\mu$, *то* $xDK_\mu u = u + (\mu-1)K_\mu u$;
если, кроме того, $Du\in\operatorname{dom} K_\mu$, *то* $DK_\mu u = K_{\mu-1}Du$.

Доказательство утверждений теоремы 2 имеются в [1, 7]. Имеет место

Лемма 1 [1]. *Пусть* U *произвольное нормированное пространство. Для того чтобы линейный непрерывный оператор* $L: U\to H^s_\gamma$ *был компактен, необходимо и достаточно, чтобы был компактен оператор* $D^sL: U\to L_{2,\gamma}$.

Через b обозначим линейный оператор умножения на функцию $b(x)$. Для натурального k и вещественных μ, γ справедлива

Лемма 2. *Пусть* $|b(x)|\le cx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k}$ *при* $k+\mu\le 1/2$, *где* $\varepsilon>0$ *достаточно мало и* $b\in L_{2,\gamma}$ *при* $k+\mu>1/2$. *Тогда оператор* $b: H^k_\mu\to L_{2,\gamma}$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $k+\mu\le 1/2$. Тогда по теореме 1 вложение $H^k_\mu\subset L_{2,k+\mu-\varepsilon}$ компактно. Имеем $x^{-\gamma}b(x)u(x) = x^{k+\mu-\gamma-\varepsilon}b(x)x^{\varepsilon-\mu-k}u(x)$. Поскольку $x^{\varepsilon-\mu-k}u$ принадлежит пространству компактно вложенному в L_2, то оператор b будет компактным, когда $|b(x)|\le cx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k}$, что выполнено по условию леммы.

Если $k+\mu>1/2$, то по теореме 1 пространство H^k_μ компактно вложено в $C[0,1]$. Поэтому для компактности оператора b достаточно, чтобы $b\in L_{2,\gamma}$, что выполняется по условию леммы. □

Теорема 3. *Пусть* $\gamma<1/2$, $\varepsilon>0$ *достаточно мало. Если для* $j=0,\dots,s$ $|D^jb(x)|\le cx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j}$ *при* $k+j+\mu\le 1/2$, $D^sb\in L_{2,\gamma}$ *при* $k+j+\mu>1/2$, *то оператор* $b: H^{s+k}_\mu\to H^s_\gamma$ *компактен.*

Доказательство. По лемме 1 для компактности оператора b необходимо и достаточно, чтобы был компактен оператор $D^sb: H^{s+k}_\mu\to L_{2,\gamma}$. Для произвольной функции $u\in H^{s+k}_\mu$ по формуле дифференцирования произведения имеем

$$D^sbu = \sum_{j=0}^{s} C^j_s D^jb(x)D^{s-j}u(x).$$

Оператор $D^{s-j}: H^{s+k}_\mu\to H^{k+j}_\mu$ непрерывен для $j=0,\dots,s$. Нужно показать, что оператор $b_j = D^jb$ компактен из пространства H^{k+j}_μ в $L_{2,\gamma}$ для каждого $j = 0,\dots,s$. Пусть $k+j+\mu\le 1/2$. По лемме 2 оператор b_j будет компактным, когда

$|D^j b(x)| \le cx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j}$, что выполнено по условию теоремы. Если $k+j+\mu > 1/2$, то по лемме 2 для компактности оператора b_j достаточно, чтобы $D^j b \in L_{2,\gamma}$. Это выполняется, так как при $\gamma < 1/2$ в силу условия теоремы $D^s b$ принадлежит $L_{2,\gamma}$, поэтому младшие производные $D^j b$ также принадлежат пространству $L_{2,\gamma}$. $\square$

Определим оператор B_1 по формуле
$$B_1 u = -D\big(b_1(x) D(x^\beta u(x))\big).$$

Теорема 4. *Пусть $\gamma < 1/2$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда оператор $B_1 : H^{s+k}_\mu \to H^s_\gamma$ компактен, если для $j = 0,\dots,s+1$ справедливы неравенства $|D^j(x^{\beta-1} b_1(x))| \le cx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+1}$ при $k+j+\mu \le 3/2$ и $D^{s+1}(x^{\beta-1}b_1) \in L_{2,\gamma}$ при $k+j+\mu > 3/2$.*

Доказательство. По формуле дифференцирования произведения двух функций имеем
$$B_1 u = -D\big(\beta b_1(x) x^{\beta-1} u(x) + b_1(x) x^\beta Du(x)\big).$$
Из этого равенства следует, что оператор $B_1 : H^{s+k}_\mu \to H^s_\gamma$ компактен, если компактны операторы $B_2 u = b_1(x) x^{\beta-1} u(x)$, действующий из пространства H^{s+k}_μ в пространство H^{s+1}_γ, и $B_3 v = b_1(x) x^\beta v(x)$, действующий из H^{s+k-1}_μ в H^{s+1}_γ. Используя теорему 3, получим, что для компактности оператора B_2 достаточно, чтобы $|D^j(x^{\beta-1}b_1(x))| \le cx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+1}$ при $k-1+j+\mu \le 1/2$ и $D^{s+1}(x^{\beta-1}b_1) \in L_{2,\gamma}$ при $k-1+j+\mu > 1/2$ (что выполнено по условию теоремы). Оператор B_3 является компактным, когда $|D^j(x^\beta b_1(x))| \le c_1 x^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+2}$ при $k-2+j+\mu \le 1/2$ и $D^{s+1}(x^\beta b_1) \in L_{2,\gamma}$ при $k-2+j+\mu > 1/2$.

Справедливо равенство
$$D^{s+1}(x^\beta b_1) = D^{s+1}(x x^{\beta-1} b_1) = x D^{s+1}(x^{\beta-1}b_1) + (s+1) D^s(x^{\beta-1}b_1),$$
откуда вытекает, что $D^{s+1}(x^\beta b_1) \in L_{2,\gamma}$ и
$$|D^j(x^\beta b_1(x))| \le x|D^j(x^{\beta-1}b_1(x))| + j|D^{j-1}(x^{\beta-1}b_1(x))| \le xcx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+1} + \\ + jcx^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-(j-1)+1} \le c_1 x^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+2}.$$
При $k+j+\mu > 3/2$ и $\gamma < 1/2$ функция $x^{\beta-1}b_1$ принадлежит H^j_γ. По теореме 1 имеет место вложение $H^j_\gamma \subset C^j_{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+1}[0,1]$, так как $\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+1 < j+\gamma-1/2-j$. Следовательно, $|D^j(x^\beta b_1(x))| \le c_1 x^{\varepsilon+\gamma-\mu-k-j+2}$, когда $3/2 < k+j+\mu \le 5/2$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $|D^s b(x)| \le c_1 x^{\nu-s}$, где $\nu < 0$. Тогда $|D^j b(x)| \le cx^{\nu-j}$ для $j = 0,\dots,s-1$.*

Доказательство. Доказательство утверждения для $j = s-1$ следует из цепочки неравенств
$$|D^{s-1}b(x)| \le |D^{s-1}b(x) - D^{s-1}b(1)| + |D^{s-1}b(1)| \le \Big|\int_x^1 D^s b(t)\,dt\Big| + |D^{s-1}b(1)| \le \\ \le c_1\Big|\int_x^1 t^{\nu-s}\,dt\Big| + |D^{s-1}b(1)| \le \frac{c_1}{|\nu-(s-1)|}|1-x^{\nu-(s-1)}| + |D^{s-1}b(1)| \le \\ \le 3\max\Big(1, \frac{c_1}{|\nu-(s-1)|}, |D^{s-1}b(1)|\Big) x^{\nu-(s-1)}.$$

Последнее неравенство верно, поскольку $\nu < 0$ по условию настоящей леммы. Повторяя последовательно рассуждения для $j = s-2, s-3, \ldots, 0$, получим утверждение леммы. $\square$

2. Весовые оценки решения задачи при $\alpha < 1$

Пусть $\hat{u}(x) = u(x)/\sigma(x)$, где u – решение задачи (1), (2), $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. Определим оператор $\hat{A}$ формулой $\hat{A}\hat{u} = A(\sigma\hat{u})$. Вместо исходной задачи рассмотрим задачу о нахождении функции $\hat{u}$ такой, что

$$\hat{A}\hat{u}(x) = f(x), \quad \sigma\hat{u}\big|_{x=0} = D(\sigma\hat{u})\big|_{x=0} = \hat{u}(1) = D\hat{u}(1) = 0. \tag{4}$$

Относительно параметров и коэффициентов задачи (4) предполагаются выполненными следующие условия: $\alpha - 5/2 - s < \gamma < 1/2$, $|D^{s+2}a| \le c$; для достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства $|D^{s+1}(x^{1-\alpha}a_1)| \le cx^{\varepsilon-2-s}$, $|D^s(x^{2-\alpha}a_0)| \le \le cx^{\varepsilon-2-s}$ при $\alpha - 5/2 - s < \gamma \le -3/2 - s$ и $D^{s+1}(x^{1-\alpha}a_1) \in L_{2,\gamma}$, $D^s(x^{2-\alpha}a_0) \in L_{2,\gamma}$ при $-3/2 - s < \gamma < 1/2$. Тогда имеет место

Теорема 5. *При сформулированных выше условиях оператор $\hat{A}$ осуществляет изоморфизм пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \bigcap \dot{H}^2_\gamma$ на H^s_γ и для решения задачи* (4) *имеет место двусторонняя оценка $c_1\|f\|_{H^s_\gamma} \le \|\hat{u}\|_{H^{s+4}_{\gamma-2}} \le c_2\|f\|_{H^s_\gamma}$.*

Доказательство. Оператор $\hat{A}$ представим в виде $\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{B}$, где

$$\hat{A}_0\hat{u}(x) = D^2\big(x^\alpha a(x) D^2(x^{2-\alpha}\hat{u}(x))\big),$$

$$\hat{B}\hat{u}(x) = \hat{B}_1\hat{u}(x) + \hat{B}_0\hat{u}(x) = -D\big(a_1(x)D(x^{2-\alpha}\hat{u}(x))\big) + x^{2-\alpha}a_0(x)\hat{u}(x).$$

При выполнении условий теоремы на коэффициенты a, a_1 и a_0 непосредственным дифференцированием проверяется, что операторы $\hat{A}_0$, B и $\hat{A}$ непрерывны из $H^{s+4}_{\gamma-2}$ в H^s_γ.

Покажем, что оператор $\hat{A}_0$ является изоморфизмом пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \bigcap \dot{H}^2_\gamma$ на H^s_γ, а оператор $\hat{B}$ компактен из $H^{s+4}_{\gamma-2}$ в H^s_γ. Тогда оператор $\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{B}$ будет компактным возмущением изоморфизма $\hat{A}_0$. Так как однородное уравнение $\hat{A}\hat{u} = Au = 0$ имеет только тривиальное решение (это следует из эллиптичности оператора A), то в силу альтернативы Фредгольма оператор $\hat{A} : H^{s+4}_{\gamma-2} \bigcap \dot{H}^2_\gamma \to H^s_\gamma$ будет изоморфизмом.

Пусть $f \in H^s_\gamma$. Дважды интегрируя уравнение (1) с $a_1(x) \equiv 0$, $a_0(x) \equiv 0$, получим $x^\alpha a(x) D^2 u(x) = p(x) + f_1(x)$, где $p(x)$ – полином первой степени, который строится из граничных условий в точке $x = 1$, функция $f_1(x)$ такая, что $D^2 f_1 = = f$, то есть $f_1 \in H^{s+2}_\gamma$. Положим $g(x) = a^{-1}(x)(p(x) + f_1(x))$. Тогда $g \in H^{s+2}_\gamma$, так как $|D^{s+2}a| \le c$ и $a(x) \ge c_0 > 0$. Поскольку $\alpha - j < \min(1, \gamma - j + s + 2 + 1/2)$ для $j = 0, 1, \ldots s+2$, то $D^j g \in \operatorname{dom} K_{\alpha-j}$. Следовательно, $x^{-\alpha} g \in L_1(0,t)$ для любого $t \in (0,1)$, и с учетом граничных условий в точке $x = 0$ получим

$$u(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^{-\alpha} g(t)\, dt\, dy,$$

соответственно,

$$\hat{u}(x) = x^{\alpha-2} \int\limits_0^x y^{1-\alpha} y^{\alpha-1} \int\limits_0^y t^{-\alpha} g(t)\, dt\, dy = K_{\alpha-1} K_\alpha g.$$

Используя формулы дифференцирования оператора Харди (теорема 2) и условие $\alpha - 5/2 - s < \gamma$, будем иметь

$$D^{s+2}\hat{u} = D^{s+2}(K_\alpha g - K_{\alpha-1} g) = K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g - K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g \in L_{2,\gamma},$$

$$D^{s+3}\hat{u} = \frac{D^{s+2}g}{x} + \frac{\alpha - s - 3}{x} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g - \frac{D^{s+2}g}{x} - \frac{\alpha - s - 4}{x} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g = \\ = \frac{4 + s - \alpha}{x} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g - \frac{3 + s - \alpha}{x} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g \in L_{2,\gamma-1},$$

$$D^{s+4}\hat{u} = \frac{(4+s-\alpha)(\alpha - s - 5)}{x^2} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g - \\ - \frac{(3+s-\alpha)(\alpha-s-4)}{x^2} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g + \frac{D^{s+2}g}{x^2} \in L_{2,\gamma-2}.$$

Следовательно, $\hat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-2}$, и в силу непрерывности операторов Харди справедлива оценка $\|\hat{u}\|_{H^{s+4}_{\gamma-2}} \le c\|f\|_{H^s_\gamma}$. Поскольку при $\gamma < 1/2$ выполнены вложения $H^{s+4}_{\gamma-2} \subset \subset H^{s+2}_{\gamma} \subset H^2_\gamma$, то с учетом граничных условий для $\hat{u}$ в точке $x = 1$ получим, что $\hat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-2} \bigcap \dot{H}^2_\gamma$. Таким образом, оператор $\hat{A}_0$ есть изоморфизм пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \bigcap \dot{H}^2_\gamma$ на H^s_γ.

Покажем, что оператор $\hat{B} : H^{s+4}_{\gamma-2} \to H^s_\gamma$ компактен. По теореме 3 при $k = 4$, $\mu = \gamma - 2$, $b = x^{2-\alpha}a_0$ оператор $\hat{B}_0 : H^{s+4}_{\gamma-2} \to H^s_\gamma$ компактен, если для $j = 0, \dots, s$ справедливы неравенства $|D^j(x^{2-\alpha}a_0)| \le cx^{\varepsilon-2-j}$ при $\gamma \le -3/2-j$ и $D^s(x^{2-\alpha}a_0) \in \in L_{2,\gamma}$ при $-3/2 - j < \gamma < 1/2$. Пусть $\gamma \le -3/2 - s$, тогда $|D^s(x^{2-\alpha}a_0)| \le cx^{\varepsilon-2-s}$ и $|D^j(x^{2-\alpha}a_0)| \le cx^{\varepsilon-2-j}$, $j = 0, \dots, s-1$ по лемме 3. При $-3/2 - s < \gamma < 1/2$ имеет место непрерывное вложение $H^s_\gamma \subset C^s_{\varepsilon-2-s}[0,1]$, так как $\varepsilon - 2 - s < s + \gamma - - 1/2 - s$ (теорема 1). Поэтому неравенства $|D^j(x^{2-\alpha}a_0)| \le cx^{\varepsilon-2-j}$, $j = 0, \dots, s$, выполнены, когда $D^s(x^{2-\alpha}a_0) \in L_{2,\gamma}$.

По теореме 4 ($k = 4$, $\mu = \gamma - 2$, $b_1 = a_1$, $\beta = 2 - \alpha$) оператор $\hat{B}_1$ компактен из пространства $H^{s+4}_{\gamma-2}$ в пространство H^s_γ, когда $|D^{s+1}(x^{1-\alpha}a_1)| \le cx^{\varepsilon-2-s}$ при $\gamma \le -3/2 - s$ и $D^{s+1}(x^{1-\alpha}a_1) \in L_{2,\gamma}$ при $-3/2 - s < \gamma < 1/2$, что выполнено по условию теоремы. □

Следствие 1. *Если* a, $x^{1-\alpha}a_1$, $x^{2-\alpha}a_0$, f *– функции класса* $C^\infty[0,1]$, *то* $\hat{u} \in C^\infty[0,1]$.

Доказательство. Из теоремы 5 при $\gamma = 0$ и вложения $H^{s+4}_{-2} \subset H^{s+2}$ следует оценка $\|\hat{u}\|_{H^{s+2}} \le c\|f\|_{H^s}$. Так как $H^{s+2} \subset C^{s+1}[0,1]$, то $\hat{u} \in C^{s+1}[0,1]$ для любого s, то есть $\hat{u} \in C^\infty[0,1]$. □

3. Весовые оценки решения задачи при $1 \le \alpha < 3$

Рассмотрим уравнение (1) с граничными условиями (3). Обозначим $\sigma(x) = = x^{3-\alpha}$. Функцию $\varphi_0 \in C^\infty(0,1]$ выберем так, чтобы она удовлетворяла условиям $\varphi_0(1) = D\varphi_0(1) = 0$ и в некоторой фиксированной окрестности точки $x = 0$ имела вид

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{при} \quad \alpha = 2, \\ x & \text{при} \quad \alpha \in [1,3) \setminus \{2\}. \end{cases}$$

Для решения задачи u имеет место

Теорема 6. *Пусть* $\max(-1/2, \alpha - 5/2) - s < \gamma < 1/2$, $|D^{s+2}a| \le c$, $D^{s+1}(x^{2-\alpha}a_1) \in L_{2,\gamma}$, $D^s(x^{3-\alpha}a_0) \in L_{2,\gamma}$. *Тогда для любой правой части* $f \in H^s_\gamma$ *решение задачи* (1), (3) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x) = u_0\varphi_0(x) + \sigma(x)\hat{u}(x), \quad \hat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-3} \bigcap \dot{H}^2_{\gamma-1}, \quad u_0 \in R,$$

и справедлива двусторонняя оценка

$$c_1\|f\|_{H^s_\gamma} \le |u_0| + \|\hat{u}\|_{H^{s+4}_{\gamma-3}} \le c_2\|f\|_{H^s_\gamma}.$$

Доказательство. Докажем утверждение при $\alpha \in [1,3) \setminus \{2\}$. Случай $\alpha = 2$ доказывается аналогично с соответствующими изменениями для функции φ_0. Будем использовать ту же схему доказательства, что и при исследовании задачи Дирихле. Обозначим через A_0 оператор, действующий по формуле $A_0u(x) = D^2\big(x^\alpha a(x)D^2u(x)\big)$. Рассмотрим следующую задачу:

$$A_0u = f \tag{5}$$

с граничными условиями (3). Пусть $f \in H^s_\gamma$. Так как $\gamma + s > -1/2$, то $H^s_\gamma \subset L_1$. Дважды интегрируя уравнение (5) по интервалу $(0,x)$ с учетом условия $x^\alpha D^2u(x)\big|_{x=0} = 0$, получим

$$x^\alpha a(x)D^2u(x) = c_1x + xK_0f_1, \tag{6}$$

где

$$c_1 = D\big(x^\alpha a(x)D^2u(x)\big)\big|_{x=0}, \quad f_1(x) = \int\limits_0^x f(y)\,dy,$$

$$xK_0f_1 = xx^{-1}\int\limits_0^x y^0f_1(y)\,dy = \int\limits_0^x f_1(y)\,dy.$$

Обозначим $g(x) = a^{-1}(x)K_0f_1$. Функция g принадлежит $H^{s+2}_{\gamma-1}$, поскольку оператор Харди $K_0 : H^{s+1}_\gamma \to H^{s+2}_{\gamma-1}$ непрерывен (теорема 2) и $|D^{s+2}a| \le c$, $a(x) \ge c_0 > 0$. Поделив (6) на $x^\alpha a(x)$ и интегрируя по интервалу $(x,1)$ с учетом условия $Du(1) = 0$, получим

$$Du(x) = -c_1\int\limits_x^1 \frac{y^{1-\alpha}}{a(y)}\,dy - \int\limits_x^1 y^{1-\alpha}g(y)\,dy. \tag{7}$$

По построению $g(y) = a^{-1}(y)yK_{-1}K_0f(y)$, где $f \in H^s_\gamma$, следовательно, $y^{1-\alpha}g \in L_{2,\,\overline{\gamma}+2-\alpha}$, где $\overline{\gamma} = \min(s+\gamma,\, 1/2-\varepsilon)$. Пусть $\min(s+\gamma,\, 1/2-\varepsilon) = s+\gamma$, то есть $\overline{\gamma} = s+\gamma$. Тогда $L_{2,\overline{\gamma}+2-\alpha} \subset L_1$, так как $s+\gamma+2-\alpha > -1/2$ ($\gamma > \alpha - 5/2 - s$) по условию теоремы. Если $\min(s+\gamma, 1/2-\varepsilon) = 1/2-\varepsilon$ ($\bar{\gamma} = 1/2-\varepsilon$), то $L_{2,\overline{\gamma}+2-\alpha} \subset L_1$ при $1/2-\varepsilon+2-\alpha > -1/2$, то есть при $\alpha < 3$. Следовательно,

$$\int\limits_x^1 y^{1-\alpha}g(y)\,dy = \int\limits_0^1 y^{1-\alpha}g(y)\,dy - \int\limits_0^x y^{1-\alpha}g(y)\,dy = c_2 - \int\limits_0^x y^{1-\alpha}g(y)\,dy.$$

Интегрируя равенство (7) по интервалу $(0,1)$ с учетом условий $u(0) = u(1) = 0$, получим

$$c_1 = c_1(f) = -\left(\int\limits_0^1\int\limits_x^1 y^{1-\alpha}a^{-1}(y)\,dy\,dx\right)^{-1}\int\limits_0^1\int\limits_x^1 y^{-\alpha}a^{-1}(y)\int\limits_0^y\int\limits_0^t f(z)\,dz\,dt\,dy\,dx,$$

откуда следует, что

$$|c_1(f)| \le \hat{c}\|f\|_{L_1} \int_0^1 \int_x^1 y^{-\alpha} \int_0^y dt\,dy\,dx \le \frac{\hat{c}}{(3-\alpha)}\|f\|_{L_1} \le c\|f\|_{H^s_\gamma}.$$

Для c_2 имеем

$$c_2 = c_2(f) = \int_0^1 y^{-\alpha} a^{-1}(y) \int_0^y \int_0^t f(z)\,dz\,dt\,dy = \int_0^1 y^{-\alpha} a^{-1}(y) K_{-1} K_0 f(y)\,dy.$$

Так как $f \in H^s_\gamma$, $H^s_\gamma \subset L_{2,\bar{\gamma}}$ при $\bar{\gamma} = \min(s+\gamma,\, 1/2-\varepsilon)$ и $\mu < 1/2+\overline{\gamma}$ при $\mu = -1, 0$, то операторы K_{-1}, K_0 непрерывны в пространстве $L_{2,\overline{\gamma}}$ и $K_{-1}K_0 f \in L_{2,\overline{\gamma}}$ (теорема 2). Следовательно, $y^{2-\alpha} K_{-1} K_0 f \in L_{2,\overline{\gamma}+2-\alpha}$ и $L_{2,\overline{\gamma}+2-\alpha} \subset L_1$, так как $\overline{\gamma}+2-\alpha > -1/2$. Поэтому

$$\begin{aligned} |c_2(f)| &\le \hat{c}_1 \|y^{2-\alpha} K_{-1} K_0 f\|_{L_1} \le \hat{c}\|y^{2-\alpha} K_{-1} K_0 f\|_{L_{2,\bar{\gamma}+2-\alpha}} = \\ &= \hat{c}\|K_{-1} K_0 f\|_{L_{2,\bar{\gamma}}} \le \hat{c}\|K_{-1}\|_{L_{2,\bar{\gamma}} \to L_{2,\bar{\gamma}}} \|K_0\|_{L_{2,\bar{\gamma}} \to L_{2,\bar{\gamma}}} \|f\|_{L_{2,\bar{\gamma}}} \le c\|f\|_{H^s_\gamma}. \end{aligned}$$

Поскольку $|D^{s+2} a| \le c$ и $a(y) \ge c_0 > 0$, то имеет место разложение $a^{-1}(y) = a^{-1}(0) + \tilde{a}(y)$, где $\widetilde{a}(y) = O(y)$ и $|D^{s+2}\tilde{a}| \le c$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{y^{1-\alpha}}{a(y)}\,dy &= \frac{1}{a(0)} \int_x^1 y^{1-\alpha}\,dy + \int_x^1 y^{1-\alpha}\tilde{a}(y)\,dy = \\ &= \frac{1}{(2-\alpha)a(0)} - \frac{1}{(2-\alpha)a(0)} y^{2-\alpha} + \int_0^1 y^{1-\alpha}\tilde{a}(y)\,dy - \int_0^x y^{1-\alpha}\tilde{a}(y)\,dy = \\ &= c_3 - \frac{1}{(2-\alpha)a(0)} y^{2-\alpha} - \int_0^x y^{1-\alpha}\tilde{a}(y)\,dy. \end{aligned}$$

С учетом этих преобразований равенство (7) примет вид

$$Du(x) = u_0 + (3-\alpha)c_4 y^{2-\alpha} + \int_0^x y^{1-\alpha}\tilde{g}(y)\,dy,$$

где $u_0 = -c_2 - c_1 c_3$, $c_4 = c_1/((3-\alpha)(2-\alpha)a(0))$, $\tilde{g}(y) = c_1\tilde{a}(y) + g(y) \in H^{s+2}_{\gamma-1}$. Интегрируя последнее равенство по интервалу $(0,x)$ и принимая во внимание условие $u(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 x + c_4 x^{3-\alpha} + \int_0^x \int_0^y t^{1-\alpha}\tilde{g}(t)\,dt\,dy = \\ &= u_0\varphi_0(x) + x^{3-\alpha}\Big(x^{\alpha-3} u_0(x - \varphi_0(x)) + c_4 + x^{\alpha-3} \int_0^x \int_0^y t^{1-\alpha}\tilde{g}(t)\,dt\,dy\Big) = \\ &= u_0\varphi_0(x) + x^{3-\alpha}\hat{u}(x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\widetilde{u}(x) = x^{\alpha-3} \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^{1-\alpha} \tilde{g}(t)\, dt\, dy = x^{\alpha-3} \int\limits_0^x y^{2-\alpha} y^{\alpha-2} \int\limits_0^y t^{1-\alpha} \tilde{g}(t)\, dt\, dy = K_{\alpha-2} K_{\alpha-1} \tilde{g}.$$

Имеем, что $\widetilde{g} \in H^{s+2}_{\gamma-1}$, $D\widetilde{g} \in H^{s+1}_{\gamma-1}$. Так как $y^{1-\alpha}\widetilde{g} \in L_1$, $y^{2-\alpha} D\widetilde{g} \in L_1$, то $\widetilde{g} \in \operatorname{dom} K_{\alpha-1}$, $D\widetilde{g} \in \operatorname{dom} K_{\alpha-2}$. Поэтому

$$D\widetilde{u} = K_{\alpha-3} K_{\alpha-2} D\tilde{g}.$$

По условию теоремы $\gamma > \alpha - 5/2 - s$, $\alpha < 3$. Следовательно, по теореме 2 оператор $K_{\alpha-2}$ действует непрерывно из $H^{s+1}_{\gamma-1}$ в $H^{s+2}_{\gamma-2}$, $K_{\alpha-3}$ – непрерывно из $H^{s+2}_{\gamma-2}$ в $H^{s+3}_{\gamma-3}$. В итоге получаем, что $K_{\alpha-3}K_{\alpha-2}$ является непрерывным оператором из $H^{s+1}_{\gamma-1}$ в $H^{s+3}_{\gamma-3}$, то есть $D\tilde{u} \in H^{s+3}_{\gamma-3}$, $\tilde{u} \in H^{s+4}_{\gamma-3}$. Кроме того, $\hat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-3}$, так как $\varphi_0(x) = x$ в фиксированной окрестности точки $x = 0$, а вне этой окрестности у задачи особенности нет.

Поскольку выполнены вложения $H^{s+4}_{\gamma-3} \subset H^{s+2}_{\gamma-1} \subset H^2_{\gamma-1}$, то с учетом граничных условий в точке $x = 1$ получим, что $\hat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-3} \bigcap \dot{H}^2_{\gamma-1}$. Положим $\hat{A}_0\hat{u} = A_0(x^{3-\alpha}\hat{u})$. Таким образом, оператор $\hat{A}_0$ является изоморфизмом пространства $H^{s+4}_{\gamma-3} \bigcap \dot{H}^2_{\gamma-1}$ на H^s_γ.

Согласно теоремам 3 и 4 ($k = 4$, $\mu = \gamma - 3$, $b = x^{3-\alpha}a_0$, $b_1 = a_1$, $\beta = 3 - \alpha$) оператор $\hat{B} : H^{s+4}_{\gamma-3} \to H^s_\gamma$, действующий по формуле

$$\hat{B}\hat{u}(x) = -D\big(a_1(x)D(x^{3-\alpha}\hat{u}(x))\big) + x^{3-\alpha}a_0(x)\hat{u}(x),$$

является компактным, когда $D^{s+1}(x^{2-\alpha}a_1) \in L_{2,\gamma}$, $D^s(x^{3-\alpha}a_0) \in L_{2,\gamma}$ при $-1/2 - s < \gamma < 1/2$, что выполнено по условию теоремы.

Вернемся к исходному уравнению (1) с граничными условиями (3). Решение задачи имеет вид $u(x) = u_0\varphi_0(x) + x^{3-\alpha}\hat{u}(x)$. Подставим его в уравнение и перенесем $u_0 A\varphi_0$ в правую часть, в результате получим

$$A(x^{3-\alpha}\hat{u}) = \hat{A}_0\hat{u} + \hat{B}\hat{u} = f_1,$$

где $f_1(x) = f(x) - u_0A\varphi_0(x)$. Так как $\hat{A}_0$ является изоморфизмом $H^{s+4}_{\gamma-3} \bigcap \dot{H}^2_{\gamma-1}$ на H^s_γ, оператор $\hat{B}$ является компактным из $H^{s+4}_{\gamma-3}$ в H^s_γ, то оператор $\hat{A}\hat{u} = A(x^{3-\alpha}\hat{u})$ есть изоморфизм пространства $H^{s+4}_{\gamma-3} \bigcap \dot{H}^2_{\gamma-1}$ на H^s_γ. Поэтому решение задачи существует, единственно и справедлива оценка

$$\|\hat{u}\|_{H^{s+4}_{\gamma-3}} \le c\|f_1\|_{H^s_\gamma} \le c(\|f\|_{H^s_\gamma} + |u_0|\|A\varphi_0\|_{H^s_\gamma}).$$

Оценка $|u_0| \le c\|f\|_{H^s_\gamma}$ справедлива, поскольку $u_0 = -c_2 - c_1c_3$, где $|c_1| \le c\|f\|_{H^s_\gamma}$, $|c_2| \le c\|f\|_{H^s_\gamma}$ и постоянная c_3 от f не зависит. □

Следствие 2. *Если a, $x^{2-\alpha}a_1$, $x^{3-\alpha}a_0$, f – функции класса $C^\infty[0,1]$, то $\hat{u} \in C^\infty[0,1]$.*

4. Вариационная постановка задачи

На пространстве $V = \overset{\circ}{H}{}^2_{-\alpha/2}$ с нормой $\|u\|_V = \Big(\int\limits_\Omega x^\alpha \big(D^2u\big)^2 dx\Big)^{1/2}$ определим билинейную форму $\mathfrak{a}$ и линейный функционал $\mathfrak{f}$ соответственно по формулам

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_\Omega x^\alpha a D^2u D^2v + a_1 DuDv + a_0uv\, dx, \quad \mathfrak{f}(v) = \int\limits_\Omega fv\, dx.$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти функцию $u \in V$, которая удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{a}(u,v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall\, v \in V. \tag{8}$$

Теорема 7. *Если* $\gamma \geq \alpha/2 - 2 - s$, a, $x^{2-\alpha}a_1$, $x^{4-\alpha}a_0 \in L_\infty$, *то решение* $u \in V$ *вариационной задачи* (8) *существует и единственно для любой правой части* $f \in H^s_\gamma$.

Доказательство. Проверим непрерывность билинейной формы $\mathfrak{a}$ по обоим аргументам

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq \int\limits_\Omega |x^\alpha a D^2u D^2v + a_1 Du Dv + a_0 uv|\, dx \leq$$
$$\leq \int\limits_\Omega |x^\alpha a D^2u D^2v|\, dx + \int\limits_\Omega |a_1 Du Dv|\, dx + \int\limits_\Omega |a_0 uv|\, dx \leq$$
$$\leq c_1 \Bigg[\Big(\int\limits_\Omega x^\alpha \big(D^2u\big)^2 dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_\Omega x^\alpha \big(D^2v\big)^2 dx \Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_\Omega x^{\alpha-2} \big(Du\big)^2 dx \Big)^{1/2} \times$$
$$\times \Big(\int\limits_\Omega x^{\alpha-2} \big(Dv\big)^2 dx \Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_\Omega x^{\alpha-4} u^2 dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_\Omega x^{\alpha-4} v^2 dx \Big)^{1/2} \Bigg] \leq c\|u\|_V \|v\|_V,$$

поскольку $\overset{\circ}{H}{}^2_{-\alpha/2} \subset \overset{\circ}{H}{}^1_{1-\alpha/2} \subset L_{2,\,2-\alpha/2}$ и выполнены условия теоремы на функции a, a_1, a_0. Эллиптичность формы $\mathfrak{a}$ на пространстве V следует из неравенств

$$\mathfrak{a}(u,u) \geq \int\limits_\Omega x^\alpha a \big(D^2u\big)^2 dx \geq c_0 \|u\|^2_V.$$

Так как $V \subset L_{2,\,2-\alpha/2}$, то линейный функционал $\mathfrak{f}$ непрерывен на V, если $f \in L_{2,\alpha/2-2} \subset V^*$. А это выполнено, поскольку $H^s_\gamma \subset L_{2,\alpha/2-2}$ при $\gamma \geq \alpha/2 - 2 - s$. Из свойств билинейной формы $\mathfrak{a}$ и линейного функционала $\mathfrak{f}$ следует, что вариационное уравнение однозначно разрешимо. □

При $\alpha < 1$, $\alpha - 5/2 - s < \gamma < 1/2$, $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$ решение задачи (1), (2) можно представить в виде $u = \sigma\hat{u}$ (теорема 5), где функция $\hat{u} \in \hat{V} = \dot{H}^2_{\alpha/2-2}$ является решением вариационной задачи

$$\mathfrak{a}(\sigma\hat{u}, \sigma\hat{v}) = \mathfrak{f}(\sigma\hat{v}) \quad \forall\, \hat{v} \in \hat{V}. \tag{9}$$

Через σ обозначим линейный оператор умножения на функцию $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. В [8] доказана

Лемма 4. *Оператор* σ *является изоморфизмом пространства* $\hat{V}$ *на пространство* V.

Из леммы 4 следует, что вариационная задача (8) на гильбертовом пространстве V эквивалентна вариационной задаче (9) на гильбертовом пространстве $\hat{V}$.

В случае $1 \leq \alpha < 3$, $\max(-1/2, \alpha - 5/2) - s < \gamma < 1/2$, $\sigma(x) = x^{3-\alpha}$ решение задачи (1), (3) представимо в виде $u = u_0\varphi_0 + \sigma\hat{u}$ (теорема 6), где пара $(u_0, \hat{u})$ ($u_0 \in R$, $\hat{u} \in \hat{V} = \dot{H}^2_{\alpha/2-3}$) удовлетворяет вариационному равенству

$$\mathfrak{a}(\sigma\hat{u}, \sigma\hat{v}) + c\mathfrak{a}(\sigma\hat{u}, \varphi_0) + u_0\mathfrak{a}(\varphi_0, \sigma\hat{v}) + u_0 c\mathfrak{a}(\varphi_0, \varphi_0) =$$
$$= \mathfrak{f}(\sigma\hat{v}) + c\mathfrak{f}(\varphi_0) \quad \forall\, (c, \hat{v}) \in R \times \hat{V}. \tag{10}$$

5. Оценки погрешности эрмитовой интерполяции в весовых нормах

Фиксируем степень полиномов на конечном элементе $m \geq 3$, степень сгущения сетки $r \geq 1$ к точке $x = 0$ и для произвольного n разобьем отрезок $[0,1]$ точками $(x_k)_{k=1}^n$ на конечные элементы $e_k = [x_{k-1}, x_k]$, положим $h_k = x_k - x_{k-1}$, $h = \max_{k=1,\dots,n} h_k$, $\mathcal{T}_h = \{e_k\}_{k=1}^n$. Предполагаем, что существуют постоянные c_1, $c_2 > 0$, не зависящие от h, такие, что

$$c_1 \big(k/n\big)^r \leq x_k \leq c_2 \big(k/n\big)^r;$$

в частности, это соотношение выполнено для квазиравномерного разбиения. Из этого условия следует, что

$$h \sim 1/n \quad \text{и} \quad h_k \sim h x_k^{1-1/r} \sim h\big(k/n\big)^{r-1}. \tag{11}$$

Определим пространство конечных элементов $S^m(\mathcal{T}_h) \equiv S_h^m$ как множество функций класса C^1, сужение каждой из которых на произвольный конечный элемент $e_k \in \mathcal{T}_h$ есть полином степени m, то есть

$$S_h^m = \{v \in C^1[0,1] : v|_{e_k} \in P_m(e_k) \ \forall\, k = 1, \dots, n\}.$$

Рассмотрим базисный эрмитовый элемент $(\hat{e}, \hat{\omega}_p, \hat{\Sigma}_p)$, где $\hat{e} = [0,1]$, $\hat{\omega}_p$ – набор узлов, занумерованных по возрастанию $\hat{\omega}_p = \{t_{pi} : i = 0, \dots, m-2\}$, $p = 1, 2$, $\hat{\omega}_1 \subset (0,1]$, $\hat{\omega}_2 \subset [0,1]$, $t_{20} = 0, t_{pm-2} = 1$, со степенями свободы $\hat{\Sigma}_p = \{q_{p0}, \dots, q_{pm}\} : q_{p0}(v) = v(t_{p0})$, $q_{p1}(v) = Dv(t_{p0})$, $q_{pi}(v) = v(t_{p\,i-1})$, $i = 2, \dots, m-2$, $q_{p\,m-1}(v) = v(t_{pm-2})$, $q_{pm}(v) = Dv(t_{pm-2})$. Соответствующие базисные функции Эрмита обозначим через $\hat{\varphi}_{pi}$, $i = 0, \dots, m$, то есть они являются полиномами степени m, удовлетворяющими условиям $q_{pi}(\hat{\varphi}_{pi}) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, \dots, m$. Для непрерывно дифференцируемых в окрестности точек $\hat{\omega}_p$ функций определим оператор эрмитовой интерполяции в пространстве полиномов $P_m(\hat{e})$ по формуле

$$\hat{\pi}_p \hat{u}(t) = \sum_{i=0}^{m} q_{pi}(\hat{u}) \hat{\varphi}_{pi}(t).$$

Известны оценки погрешности полиномиальной интерполяции в нормах пространств Соболева для функций $\hat{u} \in H^{m+1}(\hat{e})$ [9, с. 229]

$$\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_2 \hat{u})\|_{L_2(\hat{e})} \leq \hat{c} \|D^{m+1} \hat{u}\|_{L_2(\hat{e})}, \quad s = 0, \dots, m+1, \tag{12}$$

где постоянная $\hat{c}$ зависит от m, s и от выбора узлов сетки $\hat{\omega}_2$. Для весовых норм имеет место

Лемма 5. *Пусть выполнены условия $s \leq m+1$, $m+1+\beta-s-\alpha \geq 0$, $\alpha < 1/2$. Тогда существует такая постоянная $\hat{c} > 0$, что для любой функции $\hat{u} \in H_\beta^{m+1}(\hat{e})$ справедлива оценка*

$$\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_1 \hat{u})\|_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} \leq \hat{c} \|D^{m+1} \hat{u}\|_{L_{2,\beta}(\hat{e})}. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку $H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \subset C^1(0,1]$ и $t_{10} > 0$, то оператор $\hat{\pi}_1 : H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \to P_m(\hat{e})$ непрерывен. Справедливо непрерывное вложение $H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \subset H_\alpha^s(\hat{e})$ по условию леммы (теорема 1), то есть непрерывен тождественный оператор $\hat{I} : H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \to H_\alpha^s(\hat{e})$. При $\alpha < 1/2$ справедливо непрерывное вложение $P_m(\hat{e}) \subset H_\alpha^s(\hat{e})$. Поэтому линейный оператор $L = \hat{I} - \hat{\pi}_1 : H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \to H_\alpha^s(\hat{e})$

непрерывен и для любого полинома $\psi \in P_m(\hat{e})$ выполнено равенство $L\psi = 0$. Имеем

$$\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_1\hat{u})\|_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} = \|D^s L(\hat{u} - \psi)\|_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} \le \hat{c}_1\|\hat{u} - \psi\|_{H^{m+1}_\beta(\hat{e})} \le$$
$$\le \hat{c}_2(\|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_{2,\beta}(\hat{e})} + \sum_{j=0}^{m}|D^j\hat{u}(1) - D^j\psi(1)|) \quad \forall\, \psi \in P_m(\hat{e}).$$

Выбрав $\psi \in P_m(\hat{e})$ из условий $D^j\psi(1) = D^j\hat{u}(1)$ для $j = 0, \ldots, m$, получаем требуемое утверждение. □

Замечание 1. Если $H^{m+1}_\beta(\hat{e}) \subset C^1[0,1]$ (выполнено при $m - 1/2 + \beta > 0$), то лемма останется справедливой для оператора $\hat{\pi}_2$ (вместо $\hat{\pi}_1$).

Используя аффинные отображения $F_k : \hat{e} \to e_k$, $F_k(t) = h_k t + x_{k-1}$, определим локальные операторы интерполяции $\pi_k : C^1(e_k) \to P_m(e_k)$, $k = 2, \ldots, n$ соотношением

$$\pi_k u(x) = \hat{\pi}_2\hat{u}(t), \quad \text{где } x = F_k(t), \quad \hat{u}(t) = u(F_k(t)),$$

и оператор локальной интерполяции на первом конечном элементе $\pi_1 : C^1(0, h_1] \to \to P_m(e_1)$ соотношением

$$\pi_1 u(x) = \hat{\pi}_1\hat{u}(t), \quad \text{где } x = F_1(t), \quad \hat{u}(t) = u(F_1(t)).$$

Определим также оператор глобальной интерполяции $\Pi_h : C^1(0,1] \to S^m_h$ по формуле

$$\Pi_h u(x) = \pi_k u(x), \quad x \in e_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Теорема 8. *Если $\alpha < 1/2$ и $m - 1 + \beta - \alpha > 0$, то для любой функции $u \in H^{m+1}_\beta(\Omega)$ справедливы оценки*

$$\|D^s(u - \pi_k u)\|_{L_{2,\alpha}(e_k)} \le \hat{c}_1 h_k^{m+1-s} x_k^{\beta-\alpha}\|D^{m+1}u\|_{L_{2,\beta}(e_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\|D^s(u - \Pi_h u)\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} \le \hat{c}_2 h^\theta \|D^{m+1}u\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}, \tag{15}$$

где $s \in \{0, 1, 2\}$, $\theta = \min(m + 1 - s, r(m + 1 + \beta - \alpha - s))$.

Доказательство. Используя замену переменных $x = F_1(t)$, лемму 5 и обратную замену, получим следующую локальную оценку погрешности интерполяции на конечном элементе e_1:

$$\|D^s(u - \pi_1 u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_1)} = h_1^{1-2(s+\alpha)}\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_1\hat{u})\|^2_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} \le$$
$$\le \hat{c}_1 h_1^{1-2(s+\alpha)}\|D^{m+1}\hat{u}\|^2_{L_{2,\beta}(\hat{e})} = \hat{c}_1 h_1^{2(m+1-s)} x_1^{2(\beta-\alpha)}\|D^{m+1}u\|^2_{L_{2,\beta}(e_1)}.$$

Поскольку для $k \ge 2$ $\dfrac{x_{k-1}}{x_k} \sim \left(\dfrac{k-1}{k}\right)^r \sim 1$, то существует константа $\hat{c}$ такая, что

$$\max_{x \in e_k} x^{-2\alpha} \le \hat{c} x_k^{-2\alpha} \quad \text{и} \quad x_k^{-2\beta} \le \hat{c} \min_{x \in e_k} x^{-2\beta}.$$

Проводя замену переменных $x = F_k(t)$, принимая во внимание полученные выше неравенства и оценки (12), имеем

$$\|D^s(u - \pi_k u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_k)} \le \hat{c} x_k^{-2\alpha}\|D^s(u - \pi_k u)\|^2_{L_2(e_k)} \le$$
$$\le \hat{c}_1 h_k^{2(m+1-s)} x_k^{-2\alpha}\|D^{m+1}u\|^2_{L_2(e_k)} \le \hat{c}_2 h_k^{2(m+1-s)} x_k^{2\beta-2\alpha}\|D^{m+1}u\|^2_{L_{2,\beta}(e_k)}.$$

С учетом (11) получим, что

$$h_k^{m+1-s}x_k^{\beta-\alpha} \sim h^{m+1-s}\Big(k/n\Big)^{r(m+1-s+\beta-\alpha)-(m+1-s)} \le h^{\theta},$$

где $\theta = \min(m+1-s, r(m+1+\beta-\alpha-s))$. Из полученных выше оценок следует

$$\|D^s(u-\Pi_h u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_k)} = \|D^s(u-\pi_k u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_k)} \le \ \hat{c}_2 h^{2\theta}\|D^{m+1}u\|^2_{L_{2,\beta}(e_k)}.$$

Суммируя эти неравенства по $k = 1, 2, \ldots, n$, получим глобальную оценку погрешности интерполяции(15). $\square$

6. Схемы МКЭ с выделением особенности

Пусть $\alpha < 1$, $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$, $\hat{V} = \dot{H}^2_{\alpha/2-2}$. Положим $\hat{V}_h = S_h^m \bigcap \hat{V} = \{\hat{v} \in S_h^m :$ $\hat{v}(1) = D\hat{v}(1) = 0\}$, $V_h = \sigma\hat{V}_h$. Через $u_h \in V_h$ обозначим аппроксимацию Галеркина задачи (9)

$$\mathfrak{a}(u_h, v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall\, v \in V_h. \tag{16}$$

Относительно коэффициентов предполагаем, что $|D^{m-1}a| \le c$, $|D^{m-2}(x^{1-\alpha}a_1)| \le$ $\le cx^{\varepsilon-m+1}$, $|D^{m-3}(x^{2-\alpha}a_0)| \le cx^{\varepsilon-m+1}$ при $\alpha/2 - m + 1 < \gamma \le 3/2 - m$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $D^{m-2}(x^{1-\alpha}a_1) \in L_{2,\gamma}$, $D^{m-2}(x^{2-\alpha}a_0) \in L_{2,\gamma}$ при $3/2 - m <$ $< \gamma < 1/2$.

Для оценки погрешности метода имеет место

Теорема 9. *Пусть $\alpha/2 - m + 1 < \gamma < 1/2$. Тогда для $f \in H_\gamma^{m-3}$ справедлива оценка*

$$\|u - u_h\|_V \le ch^{\theta}\|f\|_{H_\gamma^{m-3}},$$

где $\theta = \min(m-1, r(m-1+\gamma-\alpha/2))$.

Доказательство. Используя лемму Сеа [9, с. 109], весовые оценки конечноэлементной аппроксимации (15) и теорему 5 для $s = m-3$, получим оценку

$$\|u - u_h\|_V \sim \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}} \le c_1 \min_{\varphi \in \hat{V}_h} \|\hat{u} - \varphi\|_{\hat{V}} \le c_1\|\hat{u} - \Pi_h\hat{u}\|_{\hat{V}} \le$$

$$\le c_2 h^{\theta}\|D^{m+1}\hat{u}\|L_{2,\gamma-2} \le c_3 h^{\theta}\|\hat{u}\|_{H^{m+1}_{\gamma-2}} \le ch^{\theta}\|f\|_{H_\gamma^{m-3}}.$$

$\square$

Следствие 3. *Для $r = \max\{1, (m-1)/(m-1+\gamma-\alpha/2)\}$ имеет место оптимальная оценка*

$$\|u - u_h\|_V \le ch^{m-1}\|f\|_{H_\gamma^{m-3}}.$$

Следствие 4. *Если $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{1-\alpha}a_1 \in W_\infty^{m-2}$, $x^{2-\alpha}a_0, f \in W_\infty^{m-3}$, то на равномерной сетке ($r = 1$) справедлива оценка*

$$\|u - u_h\|_V \le ch^{m-1}\|f\|_{W_\infty^{m-3}}.$$

Справедливость следствия 4 непосредственно вытекает из теоремы 9, поскольку при $\alpha < 1$ имеет место вложение $W_\infty^{m-3} \subset H_{\alpha/2}^{m-3}$.

Пусть $1 \le \alpha < 3$, $\sigma(x) = x^{3-\alpha}$, $\hat{V} = \dot{H}^2_{\alpha/2-3}$. Обозначим $\hat{V}_h = S_h^m \bigcap \hat{V}$, $\dim \hat{V}_h = N$ ($N = nm - n + 2$). В пространстве $\hat{V}_h$ выберем кусочно-полиномиальный базис $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ и обозначим $\varphi_i = \sigma\psi_i$, $i = 1, \ldots, N$. В качестве приближенного решения задачи (10) возьмем функцию $u_h = z_0\varphi_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} z_j\varphi_j$ из пространства $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$, удовлетворяющую системе алгебраических уравнений

$$\mathfrak{a}(u_h, \varphi_i) = \mathfrak{f}(\varphi_i), \quad i = 0, \ldots, N, \tag{17}$$

из которой коэффициенты разложения функции u_h определяются однозначно.

Теорема 10. *Пусть* $\max(5/2, \alpha + 1/2) - m < \gamma < 1/2$, $|D^{m-1}a| \le c$, $D^{m-2}(x^{2-\alpha}a_1) \in L_{2,\gamma}$, $D^{m-3}(x^{3-\alpha}a_0) \in L_{2,\gamma}$. *Тогда для* $f \in H_\gamma^{m-3}$ *имеет место оценка погрешности метода*

$$\|u - u_h\|_V \le ch^\theta \|f\|_{H_\gamma^{m-3}},$$

где $\theta = \min(m - 1, r(m - 1 + \gamma - \alpha/2))$.

Доказательство. Через $\hat{u}_I$ обозначим интерполянт функции $\hat{u}$, то есть $\hat{u}_I = \Pi_h\hat{u}$. Положим $u_I = u_0\varphi_0 + x^{3-\alpha}\hat{u}_I \in V_h$, где u_0 – коэффициент в представлении функции u (теорема 6). Используя лемму Сеа, весовые оценки конечно-элементной аппроксимации (15) и теорему 6 для $s = m - 3$, получим оценку

$$\|u - u_h\|_V \le c_1 \min_{\varphi \in V_h} \|u - \varphi\|_V \le c_1\|u - u_I\|_V = c_1\|x^{3-\alpha}(\hat{u} - \hat{u}_I)\|_V \le$$
$$\le c_1\|\hat{u} - \hat{u}_I\|_{\hat{V}} \le c_2h^\theta\|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_{2,\gamma-3}} \le c_3h^\theta\|\hat{u}\|_{H_{\gamma-3}^{m+1}} \le ch^\theta\|f\|_{H_\gamma^{m-3}}.$$

□

Следствие 5. *Для* $r = \max\{1, (m-1)/(m-1+\gamma-\alpha/2)\}$ *справедлива оптимальная оценка*

$$\|u - u_h\|_V \le ch^{m-1}\|f\|_{H_\gamma^{m-3}}.$$

Литература

1. *Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р.* Схемы МКЭ высокого порядка точности для неоднородной двухточечной граничной задачи с вырождением // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 63–75.
2. *Соболев А.А., Тимербаев М.Р.* О схемах МКЭ высокого порядка точности для двухточечной задачи Дирихле четвертого порядка с вырождением // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 235–244.
3. *Тимербаев М.Р.* Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т.36, № 7. – С. 1086–1093.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Об эквивалентных нормах в весовых пространствах // Труды МИАН им. Стеклова. – 1984. – Т. 170, Ч. 10. – С. 161–190.
5. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
7. *Тимербаев М.Р.* Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 1. – С. 60–73.

8. *Тимербаев М.Р.* О схемах МКЭ для 2-точечной граничной задачи Дирихле 4-го порядка со слабым вырождением // Исслед. по прикл. матем. и инф. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – Вып. 25. – С. 78–85.

9. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. - М.: Мир, 1980. - 512 с.

Поступила в редакцию
12.04.17

Соболев Андрей Анатольевич, сотрудник кафедры вычислительной математики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *andreyasob@yandex.ru*

Тимербаев Марат Равилевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *marat.timerbayev@sofoil.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 4, pp. 493–508

High-Order Accuracy Approximation for the Two-Point Boundary Value Problem of the Fourth Order with Degenerate Coefficients

A.A. Sobolev, M.R. Timerbaev***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **andreyasob@yandex.ru*, ***marat.timerbayev@sofoil.com*

Received April 12, 2017

Abstract

The paper deals with the construction of high-order accuracy finite element schemes for the fourth-order ordinary differential equation with degenerate coefficients on the boundary. The method for solving the problem is based on both multiplicative and additive-multiplicative separation of singularities. For the given class of smoothness of the right-hand sides, the optimal convergence rate has been proved.

Keywords: two-point boundary value problem, finite element schemes, weight function space, multiplicative and additive-multiplicative decomposition of singularity

References

1. Tayupov Sh.I., Timerbaev M.R. Finite element schemes of a high accuracy order for two-pointed heterogenous boundary-value problem with designation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2006, vol. 148, no. 4, pp. 63–75. (In Russian)

2. Sobolev A.A., Timerbaev M.R. On finite element method of high-order accuracy for two-point degenerated Dirichlet problem of 4th order. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, no. 1, pp. 235–244. (In Russian)
3. Timerbaev M.R. Multiplicative extraction of singularities in FEM solvers for degenerate elliptic equations. *Differ. Equations*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 1086–1093. doi: 10.1007/BF02754511.
4. Kudryavtsev L.D. On equivalent norms in weighted spaces. *Tr. MIAN im. Steklova*, 1984, vol. 170, pt. 10, pp. 161–190. (In Russian)
5. Nikol'skii S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. Moscow, Nauka, 1977. 456 p. (In Russian)
6. Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Elsevier Sci. Publ., 1978. 500 p.
7. Timerbayev M.R. Weighted estimates of solution of the Dirichlet problem with anisotropic degeneration on a part of boundary. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 1, pp. 58–71.
8. Timerbaev M.R. On FEM schemes for two-point boundary-value Dirichlet problems of the fourth order with weak degeneration. *Issled. Prikl. Mat. Inf.*, 2004, no. 25, pp. 78–85. (In Russian)
9. Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland, 1978. 529 p.

⟨ ***Для цитирования***: *Соболев А.А., Тимербаев М.Р.* Аппроксимация высокого порядка точности двухточечной краевой задачи четвертого порядка с вырождающимися коэффициентами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 493–508. ⟩

⟨ ***For citation***: Sobolev A.A., Timerbaev M.R. High-order accuracy approximation for the two-point boundary value problem of the fourth order with degenerate coefficients. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 493–508. (In Russian) ⟩