КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

О.А. Задворнов

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

(Выпуклые и невыпуклые множества ограничений)

Учебное пособие

КАЗАНЬ – 2009

;

Оглавление

Введение

Настоящее учебное пособие посвящено построению и исследованию итерационных методов решения вариационных и квазивариационных неравенств, возникающих при математическом моделировании стационарных задач теории мягких сетчатых оболочек, находящихся под воздействием поверхностных и массовых сил, при наличии препятствия.

Математические модели сформулированы в виде вариационных и квазивариационных неравенств с операторами монотонного типа в банаховых пространствах. Доказаны теоремы существования и исследованы свойства решений этих неравенств. Предложены итерационные методы решения квазивариационных неравенств с псевдомонотонным оператором в банаховых пространствах, итерационные методы решения вариационных неравенств с обратно сильно монотонными операторами в гильбертовых пространствах. Проведено построение конечномерных аппроксимаций вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами, конечномерных аппроксимаций квазивариационных неравенств, доказаны теоремы разрешимости и сходимости. Получены оценки точности.

В **первой** главе проведено исследование итерационных методов решения вариационных и квазивариационных неравенств в гильбертовых и банаховых пространствах, установлены критерии слабой сходимости итерационных последовательностей. Естественно, что при использовании этих методов для решения аппроксимирующих задач, получается сходимость последовательностей в нормах конечномерных пространств. Численная реализация рассмотренных итерационных процедур сводится к решению сеточных уравнений и неравенств, теория которых хорошо развита.

Во **второй** главе рассмотрены пространственные задачи о равновесном состоянии мягких оболочек, находящихся под воздействием внешних нагрузок и ограниченных в перемещении препятствием. В случае мягких оболочек сложность этих задач возрастает в связи с сильной формоизменяемостью этих оболочек. Следует отметить, что наличие препятствия приводит к необходимости использовать при математическом описании этих задач квазивариационные неравенства.

В первом параграфе, исходя из уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат, сформулирована дифференциальная задача. Затем на основе принципа виртуальных перемещений получена вариационная формулировка. При условии достаточной гладкости решения установлена эквивалентность указанных задач.

Затем рассмотрен случай мягкой сетчатой оболочки, силовой основой которой являются два семейства взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких упругих нитей. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными. Нити, образующие разные семейства, могут описываться разными физическими законами. В предположении степенного роста функций, задающих физические соотношения в нитях, поставлена обобщенная задача в виде квазивариационного неравенства в банаховом пространстве и установлена ее разрешимость.

Для задачи с препятствием выпуклой формы установлены свойства множества допустимых перемещений, позволяющие использовать предложенный в § 3 главы 1 итерационный метод для решения квазивариационных неравенств.

Наконец, рассмотрена задача с выпуклым допустимым множеством (с препятствием вогнутой формы) при наличии следящей поверхностной нагрузки. При этом обобщенная задача сформулирована в виде вариационного неравенства. Получены критерии существования решения обобщенной задачи.

В **третьей** главе проведено построение и обоснование приближенных методов для решения задач теории мягких оболочек. Доказаны существование решения и сходимость конечномерных аппроксимаций указанных задач, обосновано применение итерационных методов, предложенных в первой главе, для их решения.

Настоящее пособие является изложением курсов лекций, прочитанных студентам кафедры вычислительной математики факультета вычислительной математики и кибернетики казанского государственного университета.

В заключении хотим отметить, что некоторые результаты, приведенные в пособии получены при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00633, 07-01-00674, 09-01-00814).

Глава 1

Итерационные методы решения вариационных и квазивариационных неравенств

§ 1. Итерационный метод решения квазивариационных неравенств с псевдомонотонным потенциальным оператором в банаховом пространстве.

Пусть V – рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным пространством V^*, $\|\cdot\|_V$ – норма в V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*, M – замкнутое в слабой топологии, вообще говоря, невыпуклое подмножество пространства V. Каждому элементу $u \in M$ сопоставлено выпуклое, замкнутое множество $M(u) \subseteq M$, причем $u \in M(u)$, и выполнено условие: пусть последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty} \subset M$ слабо сходится к элементу u ($u \in M$ в силу слабой замкнутости M), тогда для произвольного элемента $\eta \in M(u)$ найдется такая последовательность $\{\eta^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, $\eta^{(k)} \in M(u^{(k)})$, что:

$$\lim_{k\to+\infty} \eta^{(k)} = \eta. \tag{1.1}$$

Рассматривается задача поиска элемента $u \in M \subseteq V$, являющегося решением следующего квазивариационного неравенства:

$$\langle Au, \eta - u\rangle \geq \langle f, \eta - u\rangle \quad \forall \eta \in M(u). \tag{1.2}$$

где $f \in V^*$ – заданный элемент, $A : V \to V^*$ – псевдомонотонный, потенциальный, коэрцитивный оператор, удовлетворяющий условию:

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq \mu(R)\Psi(\|u - v\|_V) \quad \forall u, v \in V, \tag{1.3}$$

$R = \max\{\|u\|_V, \|v\|_V\}$, μ – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Ψ – непрерывная, строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Напомним (см. [1, стр. 190]), что оператор A называется псевдомонотонным, если A – ограниченный оператор, и из слабой сходимости последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty} \subset V$ к u в V и неравенства

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Au^{(k)}, u^{(k)} - u\rangle \leq 0 \tag{1.4}$$

следует, что

$$\liminf_{k\to\infty} \langle Au^{(k)}, u^{(k)} - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle \; \forall\, v \in V. \tag{1.5}$$

Условие потенциальности оператора A эквивалентно равенству (см. Лемму 4.1 [2, стр. 112])

$$\int_0^1 (\langle A(t(u+v)), u+v\rangle - \langle A(tu), u\rangle)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u+tv), v\rangle dt \quad \forall\, u, v \in V. \tag{1.6}$$

Под коэрцитивностью оператора понимаем выполнение следующего неравенства

$$\langle Av, v\rangle \geq \rho(\|v\|_V)\|v\|_V \quad \forall\, v \in V, \quad \lim_{\xi\to+\infty} \rho(\xi) = +\infty. \tag{1.7}$$

Определим функционал $F : V \to R^1$ соотношением

$$F(u) = F_A(u) - \langle f, u\rangle,\; F_A(u) = \int_0^1 \langle A(tu), u\rangle dt,\; f \in V^*. \tag{1.8}$$

При этом из (1.6), (1.8) вытекает, что для любых $u, v \in V$ справедливо равенство

$$F(u) - F(v) = \int_0^1 \langle A(v + t(u-v)), u - v\rangle dt - \langle f, u - v\rangle. \tag{1.9}$$

Отметим, что в силу условия (1.7) функционал F коэрцитивен:

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} F(v) \geq \lim_{\|v\|_V \to +\infty} \int\limits_0^{\|v\|_V} (\rho(\xi) - \|f\|_{V^*}) d\xi = +\infty.$$

Для решения задачи (1.2) рассмотрим следующий итерационный процесс, позволяющий свести ее к вариационному неравенству с оператором двойственности, обладающим существенно более лучшими свойствами по сравнению с исходным псевдомонотонным оператором.

Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элемент из M. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, определим $u^{(k+1)} \in M(u^{(k)})$ как решение вариационного неравенства:

$$\langle J(u^{(k+1)} - u^{(k)}), v - u^{(k+1)} \rangle \geq$$

$$\geq \tau \langle f - Au^{(k)}, v - u^{(k+1)} \rangle \quad \forall v \in M(u^{(k)}), \tag{1.10}$$

где $\tau > 0$ итерационный параметр, $J : V \to V^*$ - оператор двойственности, порождаемый функцией Ψ и удовлетворяющий условиям (см. [1, стр. 185]):

$$\langle Jv, v \rangle = \|Jv\|_{V^*} \|v\|_V = \Psi(\|v\|_V) \|v\|_V \quad \forall v \in V, \tag{1.11}$$

Существование и единственность решения вариационного неравенства (1.10) следует из строгой монотонности и хеминепрерывности оператора двойственности [1, стр. 186-187].

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть оператор A, функционал F и множество M удовлетворяют сформулированным выше условиям, и, кроме того,*

$$0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}, \quad \mu_0 = \mu(d_0 + \Psi^{-1}(d_1)), \tag{1.12}$$

где

$$d_0 = \sup_{u \in S^0} \|u\|_V, \quad d_1 = \sup_{u \in S^0} \|Au - f\|_{V^*},$$

$$S^0 = \{u \in M : F(u) \leqslant F(u^{(0)})\}. \tag{1.13}$$

Тогда итерационная последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, построенная согласно (1.10), ограничена в V, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (1.2).

Доказательство. Отметим, что из коэрцитивности функционала F вытекает, что $d_0 < +\infty$, а из ограниченности оператора A следует, что $d_1 < +\infty$. Таким образом, $0 < \mu_0 < +\infty$, то есть итерационный параметр τ в (1.12) определен корректно.

Докажем сначала ограниченность итерационной последовательности, а именно, проверим, что выполнено условие:

$$\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty} \subset S^0, \text{ то есть } \quad \|u^{(k)}\|_V \leq d_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

По определению $u^{(0)} \in S^0$. Пусть $u^{(N)} \in S^0$, докажем, что тогда и $u^{(N+1)} \in S^0$.

Подставляя в (1.10) $v = u^{(k)}$, пользуясь (1.11) и тем, что $\tau \leq 1$, имеем

$$\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V = \langle J(u^{(k+1)} - u^{(k)}), u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle \leq$$

$$\leq \tau\langle f - Au^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)} \leq\rangle \|Au^{(k)} - f\|_{V^*}\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V,$$

откуда вследствие строгого возрастания Ψ получаем

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V \leq \Psi^{-1}\left(\|Au^{(k)} - f\|_{V^*}\right). \tag{1.15}$$

Далее, согласно (1.3) для $t \in [0, 1]$ имеем

$$|\langle A(u^{(k)} + t(u^{(k+1)} - u^{(k)})) - Au^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle| \leq$$

$$\leq \mu(d^*)\Psi(\|t(u^{(k+1)} - u^{(k)})\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V \leq$$

$$\leq \mu(d^*)\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V, \tag{1.16}$$

где $d^* = \max\{\|u^{(k)} + t(u^{(k+1)} - u^{(k)})\|_V, \|u^{(k)}\|_V\}$.

С другой стороны, в силу (1.15)

$$\|u^{(k)} + t(u^{(k+1)} - u^{(k)})\|_V - \|u^{(k)}\|_V \le \|t(u^{(k+1)} - u^{(k)})\|_V \le$$

$$\le \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V \le \Psi^{-1}\left(\|Au^{(k)} - f\|_{V^*}\right).$$

Поэтому, пользуясь (1.13), получаем

$$d^* \le \|u^{(k)}\|_V + \Psi^{-1}\left(\|Au^{(k)} - f\|_{V^*}\right) \le d_0 + \Psi^{-1}(d_1).$$

Поскольку μ – не убывающая функция, то $\mu(d^*) \le \mu_0$, следовательно, из (1.16) вытекает, что

$$|\langle A(u^{(k)} + t(u^{(k+1)} - u^{(k)})) - Au^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle| \le$$

$$\le \mu_0 \Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V. \tag{1.17}$$

Далее, из (1.9) имеем

$$F(u^{(k+1)}) - F(u^{(k)}) = \int\limits_0^1 \langle A(u^{(k)} + t(u^{(k+1)} - u^{(k)})), u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle dt -$$

$$-\langle f, u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle A(u^{(k+1)} + t(u^{(k)} - u^{(k+1)})) - Au^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle dt +$$

$$+\langle f - Au^{(k)}, u^{(k)} - u^{(k+1)}\rangle.$$

Отсюда, пользуясь (1.10) с $v = u^{(k)}$ и (1.17), с учетом (1.11) получаем

$$F(u^{(k+1)}) - F(u^{(k)}) \le$$

$$\le \int\limits_0^1 |\langle A(u^{(k+1)} + t(u^{(k)} - u^{(k+1)})) - Au^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle| dt -$$

$$-\frac{1}{\tau}\langle J(u^{(k+1)} - u^{(k)}), u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle \le$$

$$\leq \mu_0 \Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V -$$
$$-\frac{1}{\tau}\,\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\,\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V =$$
$$= -\lambda\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V, \tag{1.18}$$

причем в силу (1.12) $\lambda = 1/\tau - \mu_0 > 0$. Таким образом, имеем

$$F(u^{(k+1)}) + \lambda\,\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V \leq F(u^{(k)}). \tag{1.19}$$

Суммируя эти неравенства по $k = 0, 1, \ldots, N$, получим, что

$$F(u^{(k+1)}) + \lambda \sum_{k=0}^{N} \Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\,\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V \leq F(u^{(0)}),$$

следовательно $F(u^{(N+1)}) \leq F(u^{(0)})$, то есть $u^{(N+1)} \in S^0$. Утверждение (1.14) доказано.

Из ограниченности итерационной последовательности и рефлексивности пространства V следует существование подпоследовательности $\{u^{(k_m)}\}_{m=1}^{+\infty}$, сходящейся слабо к u в V при $m \to +\infty$, а в силу слабой замкнутости множества M получаем, что $u \in M$. Покажем, что u является решением задачи (1.2).

Из определения функционала F в виде (1.8) и условия (1.3) следует, что

$$F(u) \geq -\mu(\|u\|_V)\,\Psi\left(\|u\|_V\right)\|u\|_V - \|A(0)\|_{V^*}\|u\|_V - \|f\|_{V^*}\|u\|_V\ .$$

Из этого неравенства и ограниченности итерационной последовательности вытекает ограниченность снизу последовательности $\{F(u^{(k)})\}_{k=0}^{+\infty}$ Значит, невозрастающая числовая последовательность $\{F(u^{(k)})\}_{k=0}^{+\infty}$ имеет конечный предел. Поэтому из (1.19) имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V = 0.$$

Из этого неравенства в силу непрерывности и строгого возрастания функции Ψ вытекает, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V = 0. \tag{1.20}$$

Далее, для произвольной функции $v \in M(u^{(k)})$ из (1.10) получаем:

$$\begin{gathered}
\langle Au^{(k)}, u^{(k)} - v\rangle = \langle Au^{(k)}, u^{(k)} - u^{(k+1)}\rangle + \langle Au^{(k)}, u^{(k+1)} - v\rangle \le \\
\le \langle Au^{(k)}, u^{(k)} - u^{(k+1)}\rangle + \frac{1}{\tau}\langle J(u^{(k+1)} - u^{(k)}), v - u^{(k+1)}\rangle + \\
+\langle f, u^{(k+1)} - u^{(k)}\rangle + \langle f, u^{(k)} - v\rangle \le (\|Au^{(k)}\|_{V^*} + \|f\|_{V^*})\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V + \\
+\frac{1}{\tau}\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|v - u^{(k+1)}\|_V + \langle f, u^{(k)} - v\rangle = \\
= C^{(k)}(v) + \langle f, u^{(k)} - v\rangle,
\end{gathered} \tag{1.21}$$

где

$$\begin{gathered}
C^{(k)}(v) = (\|Au^{(k)}\|_{V^*} + \|f\|_{V^*})\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V + \\
+\frac{1}{\tau}\Psi(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_V)\|v - u^{(k+1)}\|_V.
\end{gathered}$$

Поскольку $u \in M(u)$, то найдется такая последовательность $\{u^{(m)}\}_{m=0}^{+\infty}$, $u^{(m)} \in M(u^{(k_m)})$, что

$$\lim_{m\to+\infty} u^{(m)} = u \tag{1.22}$$

Пользуясь неравенством (1.21) с $v = u^{(m)}$ и учитывая (1.20), (1.22), получаем:

$$\begin{gathered}
\limsup_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, u^{(k_m)} - u^{(m)}\rangle \le \limsup_{m\to+\infty} C^{(k_m)}(u^{(m)}) + \\
+\limsup_{m\to+\infty}\langle f, u^{(k_m)} - u^{(m)}\rangle = 0.
\end{gathered}$$

Далее, имеем

$$\limsup_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, u^{(k_m)} - u\rangle \le \limsup_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, u^{(k_m)} - u^{(m)}\rangle +$$

$$+\limsup_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, u^{(m)}-u\rangle \le 0. \tag{1.23}$$

Используя определение псевдомонотонности (1.4), (1.5), из неравенства (1.23) получаем, что

$$\liminf_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, u^{(k_m)}-v\rangle \ge 0 \qquad \forall\, v\in V\,. \tag{1.24}$$

Для произвольного элемента η из множества $M(u)$ найдется такая последовательность $\{\eta^{(m)}\}_{m=0}^{+\infty}$, $\eta^{(m)}\in M(u^{(k_m)})$, что:

$$\lim_{m\to+\infty}\eta^{(m)}=\eta. \tag{1.25}$$

Из (1.21) для $v=\eta^{(m)}$ имеем:

$$C^{(k_m)}(\eta^{(m)}) \ge \langle Au^{(k_m)}, u^{(k_m)}-\eta\rangle + \langle Au^{(k_m)}, \eta-\eta^{(m)}\rangle + \langle f, \eta^{(m)}-u^{(k_m)}\rangle,$$

откуда в силу (1.20), (1.24) и (1.25) получаем, что

$$0=\liminf_{m\to+\infty} C^{(k_m)}(\eta^{(m)}) \ge \liminf_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, u^{(k_m)}-\eta\rangle +$$

$$+\liminf_{m\to+\infty}\langle Au^{(k_m)}, \eta-\eta^{(m)}\rangle + \liminf_{m\to+\infty}\langle f, \eta^{(m)}-u^{(k_m)}\rangle \ge$$

$$\ge \langle Au, u-\eta\rangle + \langle f, \eta-u\rangle \qquad \forall\,\eta\in M(u), \tag{1.26}$$

то есть u – решение вариационного неравенства (1.2). **Теорема доказана.**

Замечание 1.1. *Из доказательства теоремы следует существование решения квазивариационного неравенства (1.2).*

§ 2. Итерационный метод решения квазивариационных неравенств в гильбертовом пространстве.

Отдельно рассмотрим итерационные методы решения квазивариационных неравенств с липшиц-непрерывным оператором в гильбертовом пространстве.

Итак V-гильбертово пространство, со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_V$, отождествленное со своим сопряженным, множества $M(u)$ и M удовлетворяют условиям, введенным ранее в настоящем параграфе (см. (1.1)).

Рассматривается задача поиска элемента $u \in M \subseteq V$, являющегося решением следующего квазивариационного неравенства:

$$(Au, \eta - u)_V \geq (f, \eta - u)_V \qquad \forall\, \eta \in M(u)\,, \tag{2.1}$$

где $f \in V$ – заданный элемент, $A : V \to V$ – псевдомонотонный, потенциальный, липшиц-непрерывный с постоянной L, коэрцитивный оператор:

$$\int\limits_0^1 (A(t(u+v)), u+v)_V dt - \int\limits_0^1 (A(tu), u)_V dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (A(u+tv), v)_V\, dt \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{2.2}$$

$$\|Au - Av\|_V \leq L\|u - v\|_V \qquad \forall\, u, v \in V, \tag{2.3}$$

существует $\eta_0 \in M$, для которого

$$(Au, u - \eta_0)_V \geq \rho(\|u\|_V)\|u\|_V \qquad \forall\, u \in V, \tag{2.4}$$

где функция ρ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \rho(\xi) = +\infty$.

Для решения задачи (2.1) рассмотрим следующий итерационный процесс.

Пусть u^0 – произвольный элемент из M. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, определим $u^{(n+1)} \in M(u^{(n)})$ как решение вариационного неравенства:

$$\left(u^{(n+1)} - u^{(n)}, v - u^{(n+1)}\right)_V \geq$$

$$\geq \tau \left(f - Au^{(n)}, v - u^{(n+1)}\right)_V \qquad \forall\, v \in M(u^{(n)}), \tag{2.5}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр. Поскольку множество $M(u^{(n)})$ выпуклое и замкнутое, решение неравенства (2.5) существует и единственно. Из включения $M(u^{(n)}) \subseteq M$ следует, что $u^{(n+1)} \in M$ и таким образом последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty} \in M$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (2.2)–(2.6), итерационный параметр τ удовлетворяет неравенству:*

$$0 < \tau < \frac{2}{L}\,. \tag{2.6}$$

Тогда итерационная последовательность $\{\,u^{(n)}\,\}_{n=1}^{+\infty}$, построенная согласно (2.5) ограничена в V, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (2.1).

Доказательство.

Определим функционал $F : V \to R^1$ соотношением

$$F(u) = F_A(u) - (f,u)_V\,, \quad F_A(u) = \int\limits_0^1 (A(tu),u)_V\,dt. \tag{2.7}$$

При этом из (2.2), (2.7) вытекает, что для любых $u, v \in V$ справедливо равенство

$$F(u) - F(v) = \int\limits_0^1 (A(v+t(u-v)),u-v)_V\,dt - (f,u-v)_V\,. \tag{2.8}$$

Отметим, что в силу условия (2.4) функционал F коэрцитивен на множестве M.

Докажем далее ограниченность итерационной последовательности, а именно, проверим, что

$$\{u^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty} \subset S_0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{2.9}$$

где $S_0 = \{u \in M : F(u) \leqslant F(u^0)\}$ – ограниченное (в силу коэрцитивности функционала F) множество.

По определению $u^0 \in S_0$. Пусть $u^{(n)} \in S_0$, докажем, что тогда и $u^{(n+1)} \in S_0$.

Пользуясь (2.5) с $v = u^{(n)}$, получаем

$$-\frac{1}{\tau}\|u^{(n)} - u^{(n+1)}\|_V^2 \geq \Big(f - Au^{(n)}, u^{(n)} - u^{(n+1)}\Big)_V. \tag{2.10}$$

Из (2.3) вытекает, что для любого $t \in [0,1]$

$$|\Big(A(u^{(n)} + t(u^{(n+1)} - u^{(n)})) - Au^{(n)}, u^{(n+1)} - u^{(n)}\Big)_V| \leq$$
$$\leq \|A(u^{(n)} + t(u^{(n+1)} - u^{(n)})) - Au^{(n)}\|_V \|u^{(n)} - u^{(n+1)}\|_V \leq$$
$$\leq L\,t\,\|u^{(n)} - u^{(n+1)}\|_V^2. \tag{2.11}$$

Далее, из (2.8) имеем

$$F(u^{(n+1)}) - F(u^{(n)}) =$$
$$\int\limits_0^1 \Big(A(u^{(n)} + t(u^{(n+1)} - u^{(n)})), u^{(n+1)} - u^{(n)}\Big)_V dt - \Big(f, u^{(n+1)} - u^{(n)}\Big)_V =$$
$$= \int\limits_0^1 \Big(A(u^{(n)} + t(u^{(n+1)} - u^{(n)})) - Au^{(n)}, u^{(n+1)} - u^{(n)}\Big)_V dt +$$
$$+ \Big(f - Au^{(n)}, u^{(n)} - u^{(n+1)}\Big)_V.$$

Отсюда, учитывая (2.10) и (2.11), получаем

$$F(u^{(n+1)}) - F(u^{(n)}) \leq$$
$$\leq \int\limits_0^1 \Big|\Big(A(u^{(n)} + t(u^{(n+1)} - u^{(n)})) - Au^{(n)}, u^{(n+1)} - u^{(n)}\Big)_V\Big| dt -$$
$$-\frac{1}{\tau}\|u^{(n)} - u^{(n+1)}\|_V^2 \leq \|u^{(n)} - u^{(n+1)}\|_V^2 \int\limits_0^1 t dt -$$

$$-\frac{1}{\tau}\,\|u^{(n)}-u^{(n+1)}\|_V^2 \le -\lambda\,\|u^{(n)}-u^{(n+1)}\|_V^2, \qquad (2.12)$$

где $\lambda = 1/\tau - L/2 > 0$ в силу условия (2.6).

Таким образом,

$$F(u^{(n+1)}) \le F(u^{(n)}) - \lambda\|u^{(n)}-u^{(n+1)}\|_V^2 \le F(u^{(n)}) \text{ для всех } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Просуммируем эти неравенства по $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

$$F(u^{(n+1)}) + \lambda\sum_{n=0}^{N}\|u^{(n)}-u^{(n+1)}\|_V^2 \le F(u^0), \qquad (2.13)$$

т.е. $u^{(n+1)} \in S_0$. Утверждение (2.9) доказано. Дальнейший ход рассуждений полностью повторяет доказательство теоремы 1.1, начиная с вывода (1.20). **Теорема доказана.**

Глава 2

Исследование стационарных задач теории мягких оболочек при наличии препятствия

В настоящей главе рассматриваются пространственные задачи о равновесном состоянии мягких оболочек при условии, что поверхность препятствия описывается достаточно гладкой (не обязательно выпуклой) функцией. Сначала, исходя из уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат, сформулирована поточечная задача. Затем на основе принципа виртуальных перемещений получена вариационная формулировка. Установлена эквивалентность указанных задач.

Далее рассмотрен случай мягкой сетчатой оболочки. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя системами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких упругих нитей. Предполагается, что узлы сети фиксированы, материал, заполняющий промежутки между нитями, не сопротивляется деформации, и ни в начальном состоянии, ни в процессе деформации соседние нити не соприкасаются. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными. При определенных условиях на функции, описывающие физические соотношения в нитях, поставлена обобщенная задача в виде квазивариационного неравенства в банаховом пространстве и установлена ее разрешимость.

Отдельно для задачи с препятствием, в случае невыпуклого множества ограничений, исследованы свойства множества допустимых перемещений, позволяющие использовать критерии сходимости предложенных в главе 1 итерационных методов для решения задач теории мягких сетчатых оболочек.

Наконец, рассмотрена задача с выпуклым допустимым множеством (с препятствием вогнутой формы) при наличии следящей поверхностной нагрузки. При этом обобщенная задача сформулирована в виде вариационного неравенства. Исследованы свойства операторов, входящих в это неравенство. Получены критерии существования решения обобщенной задачи.

§ 3. Постановка задачи о равновесии мягкой оболочки, ограниченной в перемещениях препятствием.

Введем в пространстве декартову систему координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Считаем что в недеформированном состоянии оболочка может быть описана поверхностью:

$$\xi(\alpha) = (\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha), \xi_3(\alpha)), \tag{3.1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ – лагранжевы координаты, Ω – ограниченная область из R^2 с непрерывной по Липшицу границей Γ; предполагаем, что функция ξ удовлетворяет условиям:

$$\xi \in \left[C_1(\bar{\Omega})\right]^3 \ , \ |\,[\partial_1\xi(\alpha), \partial_2\xi(\alpha)]\,| \ \geq c > 0 \quad \forall \alpha \in \bar{\Omega}. \tag{3.2}$$

Через $w(\alpha) = (w_1(\alpha), w_2(\alpha), w_3(\alpha))$ обозначим функцию, описывающую поверхность оболочки в деформированном состоянии, $G(\alpha) = |[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)]|^2$ – дискриминант метрического тензора поверхности деформированной оболочки.

Здесь использованы обозначения: $\partial_k = \partial/\partial\alpha_k\ ,\ k = 1, 2\ ,\ [\cdot,\cdot]$, $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – векторное, скалярное произведения и норма в R^3 соответственно.

Уравнение равновесия оболочки, находящейся под воздействием внешних сил в декартовой системе координат имеет следующий вид (см. [3]):

$$\sum_{k,m=1}^{2} \partial_m \,(\sqrt{G}\, T^{km}\, \partial_k w) + \sqrt{G}\, P + \sqrt{G}\, \gamma\, Q = 0 \ , \tag{3.3}$$

где P, Q – вектора плотности соответственно поверхностной и массовой нагрузок, γ – плотность материала оболочки в деформированном состоянии, T^{km} – ковариантные компоненты тензора напряжений:

$$\mathrm{T} = \sum_{k,m=1}^{2} T^{km} R_k R_m \ ,$$

$R_k(\alpha) = \partial_k w(\alpha)$, $k = 1, 2$ – вектора, образующие ковариантный локальный базис на деформированной поверхности.

Далее будем считать края оболочки закрепленными

$$w(\alpha_1, \alpha_2)\Big|_{\Gamma} = \xi(\alpha_1, \alpha_2)\Big|_{\Gamma} \ , \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma, \tag{3.4}$$

и предполагать, что расположение оболочки в пространстве ограничено препятствием. Взаимодействие препятствия с оболочкой учтем, внося в уравнение (3.3) дополнительную поверхностную нагрузку P_0 – плотность силы реакции препятствия:

$$D(w) + \sqrt{G} P_0 = 0, \tag{3.5}$$

где

$$D(w) = \sum_{k,m=1}^{2} \partial_m(\sqrt{G}\, T^{km}\, \partial_k\, w) + \sqrt{G}\, P + \sqrt{G}\, \gamma\, Q. \tag{3.6}$$

Заметим, что изначально функция P_0 не известна и, наряду с равновесным положением оболочки w, является искомой.

Будем полагать в дальнейших рассуждениях, что входящие в уравнение (3.5) функции обладают необходимой гладкостью и поверхностные нагрузки P и P_0 действуют на оболочку с разных сторон.

Предположим, что во введенной декартовой системе координат поверхность препятствия задается в виде $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, где φ – непрерывно-дифференцируемая функция:

$$\varphi \in C_1(R^2)\,, \tag{3.7}$$

и оболочка находится "над препятствием", то есть

$$\xi_3(\alpha) \geq \varphi(\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha))\,, \quad \alpha \in \bar{\Omega}.$$

Для удобства изложения введем в рассмотрение функцию $F : R^3 \to R^1$ при помощи соотношения

$$F(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2)\,, \tag{3.8}$$

$$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) = (\partial_1\varphi(x_1, x_2), \partial_2\varphi(x_1, x_2), 0). \tag{3.9}$$

Обозначим также через $N : R^3 \to R^3$ вектор-функцию, связанную с единичной внешней нормалью к поверхности препятствия формулой

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{\nu(x_1, x_2)}{|\nu(x_1, x_2)|}\,,\ x \in R^3, \tag{3.10}$$

где $\nu = [\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 = (1, 0, \partial_1\varphi(x_1, x_2))\,, \tau_2 = (0, 1, \partial_2\varphi(x_1, x_2))$, и выполнено неравенство

$$| \,\nu(x_1, x_2)\, | =$$

$$= \sqrt{(\partial_1\varphi(x_1, x_2))^2 + (\partial_2\varphi(x_1, x_2))^2 + 1} > 0 \quad \forall\,(x_1, x_2) \in R^2. \tag{3.11}$$

Введем в рассмотрение множество допустимых конфигураций оболочки:

$$\widetilde{M} = \left\{ v : \bar{\Omega} \to R^3\,,\ v_3(\alpha) \geq F(v(\alpha)), \alpha \in \bar{\Omega}\,,\ v\,|_{\Gamma}\ = \xi\,|_{\Gamma}\ \right\}. \tag{3.12}$$

Функции из множества $\widetilde{M}$ описывают поверхности, находящиеся "над препятствием" и удовлетворяющие граничному условию.

Будем считать материал препятствия абсолютно твердым, а его поверхность – абсолютно гладкой, то есть препятствие при воздействии на него не деформируется и порождает усилия только в направлении внешней нормали к своей поверхности. Тогда плотность силы реакции препятствия можно представить в виде

$$P_0(\alpha) = \beta(\alpha) N(w(\alpha)),$$

где $\beta : \bar{\Omega} \to R$ – неизвестная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\beta(\alpha) \geq 0,\ \alpha \in I(w); \tag{3.13}$$

$$\beta(\alpha) = 0,\ \alpha \in I^-(w). \tag{3.14}$$

Здесь $I(w) = \{\alpha \in \bar{\Omega} : w_3(\alpha) = F(w(\alpha))\}$ – так называемое коинцидентное множество, $I^-(w) = \bar{\Omega} \setminus I(w)$. Следует отметить, что $I^-(w) = \{\alpha \in \bar{\Omega} : w_3(\alpha) > F(w(\alpha))\}$ – множество тех точек, где оболочка не контактирует с препятствием.

Таким образом, постановка задачи о равновесном положении, закрепленной по краю, мягкой оболочки, находящейся под воздействием нагрузки и ограниченной в пространстве абсолютно твердым и гладким препятствием, сводится к поиску функций $w \in \widetilde{M}$ и β, удовлетворяющих условиям (3.13), (3.14) и уравнению:

$$D(w(\alpha)) + \sqrt{G(\alpha)}\, \beta(\alpha)\, N(w(\alpha)) = 0\,, \quad \alpha \in \Omega. \tag{3.15}$$

Перейдем от поточечной к вариационной формулировке этой задачи. Для произвольного положения оболочки $u \in \widetilde{M}$ определим множество допустимых направлений, достаточно малый сдвиг по которым из u принадлежит $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{M}\ (u) = \Big\{ v : \bar{\Omega} \to R^3 :\ \exists\, t_v > 0,\ u + t\, v \in \widetilde{M}\ \ \forall\, t \in [\,0,\, t_v\,] \Big\}. \tag{3.16}$$

Умножим скалярно уравнение (3.15) на произвольную функцию η из множества $\widetilde{M}\ (w)$ и затем проинтегрируем по множеству Ω :

$$\int\limits_{\Omega} (D(w), \eta)\, d\alpha + \int\limits_{\Omega} \left(\sqrt{G}\,\beta N(w), \eta\right)\, d\alpha = 0. \tag{3.17}$$

Для $\alpha \in I^-(w)$ из (3.14) следует, что

$$\left(\sqrt{G}\,\beta N(w), \eta\right) = 0. \tag{3.18}$$

Для $\alpha \in I(w)$, поскольку $\eta \in\widetilde{M}\ (w)$ (и значит, $w + t\,\eta \in\widetilde{M}$ для $t \in [0, t_\eta])$, имеем: $F(w) + t\,\eta_3 = w_3 + t\,\eta_3 \geq F(w + t\,\eta)$, откуда получаем, что

$$t\,\eta_3 \geq F(w + t\,\eta) - F(w) = t\,(\eta, \nabla F(w)) + o(t). \tag{3.19}$$

Разделив неравенство (3.19) на $t > 0$ и переходя, при фиксированном $\alpha \in I(w)$, к пределу при $t \to +0$, получаем неравенство $([\tau_1, \tau_2], \eta) = \eta_3 - (\eta, \nabla F(w)) \geq 0$. Из этого неравенства с учетом (3.10) вытекает, что

$$\left(\sqrt{G}\,\beta N(w), \eta\right) \geq 0\ ,\ \ \alpha \in I(w). \tag{3.20}$$

Таким образом, из (3.17), (3.18), (3.20) следует, что если w – решение задачи (3.15), то выполнено неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} (D(w(\alpha)), \eta(\alpha))\, d\alpha \leq 0 \quad \forall\, \eta \in\widetilde{M}\ (w). \tag{3.21}$$

Под вариационной постановкой рассматриваемой задачи будем понимать следующее: найти функцию w из множества $\widetilde{M}$ удовлетворяющую неравенству (3.21).

Предыдущие рассуждения показали, что если функция w является решением поточечной задачи (3.15), то она является решением и вариационной задачи.

Обратно, пусть функция w из $\widetilde{M}$ удовлетворяет вариационному условию (3.21). Определим функцию β соотношением

$$\beta(\alpha) = \frac{|D(w(\alpha))|}{|\,[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)]\,|}\,,\ \alpha \in \bar{\Omega}. \tag{3.22}$$

Докажем, что при этом для функций w и β выполнены уравнение (3.15) и условия (3.13), (3.14).

Проверим сначала, что

$$D(w(\alpha)) = -|\,D(w(\alpha))\,|\ N(w(\alpha))\,,\ \alpha \in I(w). \tag{3.23}$$

Допустим, что нашлась точка $\alpha^* \in I(w)$, в которой не выполнено условие (3.23). Определим вектор $g = (g_1, g_2, g_3)$ равенством:

$$g = \frac{D(w^*)/|\,D(w^*)\,| + N(w^*)}{|\,D(w^*)/|\,D(w^*)\,| + N(w^*)\,|}\,,\ \text{где } w^* = w(\alpha^*).$$

Проверим, что этот единичный вектор удовлетворяет условиям

$$(g, D(w^*)/|D(w^*)|) > 0\ ,\ (g, N(w^*)) > 0. \tag{3.24}$$

Действительно, для любых двух единичных векторов a, b, таких, что $a \neq -b$, верно неравенство $(a,b) > -1$, и, если $c = (a+b)/|a+b|$, то $(a,c) > 0$, $(b,c) > 0$, поскольку

$$(a,c) = \frac{(a, a+b)}{|a+b|} = \frac{1 + (a,b)}{|a+b|} = (b,c) > 0.$$

Левые части неравенств (3.24) по предположению, сделанному выше, непрерывны, а значит, найдутся такие $\delta, \varepsilon_0 > 0$, что

$$(g, D(w(\alpha))) > \delta, \alpha \in B_{\varepsilon_0}(\alpha^*), \tag{3.25}$$

$$(g, N(w(\alpha)))\,|\,\nu(w(\alpha))\,| > \delta\ ,\ \alpha \in B_{\varepsilon_0}(\alpha^*), \tag{3.26}$$

где $B_\varepsilon(\alpha) = \{\tau \in R^2 : |\,\tau - \alpha\,| \le \varepsilon\}$.

Далее, для $\varepsilon > 0$ введем функцию $\omega_\varepsilon \in C^\infty(R^2)$ со свойствами (см., например, [13, стр. 89]):

$$0 \le \omega_\varepsilon(\alpha) \le 1,\ \omega_\varepsilon(\alpha) = 1,\ \alpha \in B_{\varepsilon/3}(0),\ \omega_\varepsilon(\alpha) = 0,\ \alpha \notin B_\varepsilon(0),$$

и определим вектор-функцию $\eta(\alpha) = \varepsilon\, \omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*) g,\ \alpha \in \Omega$. Установим, что $\eta \in \widetilde{M}\ (w)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

При любых $t \in [\,0, 1\,]$, используя разложение в ряд Тейлора функции F, имеем:

$$w_3(\alpha) + t\eta_3(\alpha) - F(w(\alpha) + t\eta(\alpha)) = w_3(\alpha) + t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*)\, g_3 -$$

$$-\big(F(w(\alpha)) + t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*)\,(g, \nabla F(w(\alpha)) + c(\alpha)\,(t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*))^2\big) =$$

$$= w_3(\alpha) - F(w(\alpha)) +$$

$$+ t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*) \left((N(w(\alpha)), g)|\nu(w(\alpha))| - c(\alpha)\, t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*) \right), \quad (3.27)$$

где $c(\alpha) = (\nabla^2 F(x(\alpha))g, g)$, $x(\alpha) = w(\alpha) + \theta(\alpha)\eta(\alpha)$, $\theta(\alpha) \in [0, 1]$.

Предполагая, что $|c(\alpha)| \le c_0$ при $\alpha \in B_\varepsilon(\alpha^*)$, из неравенства (3.26) для $\varepsilon \le \min\{\varepsilon_0, \delta/(2\,c_0)\}$ получаем:

$$(N(w(\alpha)), g)|\nu(w(\alpha))| - c(\alpha)\, t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*) \ge \delta - c_0\delta/(2c_0) = \delta/2 > 0.$$

Для $\alpha \notin B_\varepsilon(\alpha^*)$ имеем $\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*) = 0$, а значит,

$$t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*)\ ((N(w(\alpha)), g)|\nu(w(\alpha))| - c(\alpha)\, t\,\varepsilon\,\omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*)) = 0.$$

Таким образом, поскольку $w \in \widetilde{M}$ (то есть $w_3(\alpha) \ge F(w(\alpha))$), то из (3.27) следует, что при $t \in [0, 1]$

$$w_3(\alpha) + t\eta_3(\alpha) - F(w(\alpha) + t\eta(\alpha)) \ge 0, \quad \alpha \in \bar{\Omega},$$

и поэтому $\eta \in \widetilde{M}\ (w)$.

Для построенной функции η, пользуясь (3.25) и свойствами функции ω_ε, имеем

$$\int\limits_{\Omega} (D(w(\alpha)), \eta(\alpha))\, d\alpha = \int\limits_{B_\varepsilon(\alpha^*)\bigcap\Omega} \varepsilon\, \omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*)\, (D(w(\alpha)), g)\, d\alpha \geq$$

$$\geq \delta\, \varepsilon \int\limits_{B_{\varepsilon/3}(\alpha^*)\bigcap\Omega} \omega_\varepsilon(\alpha - \alpha^*)\, d\alpha = \delta\, \varepsilon\, \mathrm{mes}(B_{\varepsilon/3}(\alpha^*) \bigcap \Omega) > 0, \qquad (3.28)$$

что противоречит (3.21). Справедливость (3.23) тем самым установлена.

Далее, докажем равенство:

$$D(w(\alpha)) = 0, \quad \text{для} \quad \alpha \in I^-(w). \qquad (3.29)$$

Предположим, что существует точка $\alpha^* \in I^-(w)$, в которой не выполнено условие (3.29). Положим $g = D(w^*)/|D(w^*)|$, тогда найдутся такие $\delta, \varepsilon_0 > 0$, что выполнено (3.25). Поскольку $\alpha^* \in I^-(w)$, то $w_3(\alpha^*) > F(w(\alpha^*))$, и в силу непрерывности функций w, F, найдется окрестность точки α^*, в которой

$$w_3(\alpha) - F(w(\alpha)) \geq \delta_1 > 0.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (3.27), получаем, что функция $\eta = \varepsilon\, \omega_\varepsilon g$ принадлежит $\widetilde{M}\,(w)$, и для нее выполнено неравенство (3.28). Получено противоречие с (3.21), и тем самым установлена справедливость равенства (3.29).

Из равенств (3.22), (3.23) и (3.29) следует, что функции w и β удовлетворяют уравнению (3.15) и условиям (3.13), (3.14). Таким образом, дифференциальная и вариационная формулировки задачи (3.15), (3.21) эквивалентны.

В рассмотренных задачах неизвестная функция w описывает равновесное положение оболочки. Сформулируем теперь задачу относительно перемещений u оболочки из известного первоначального положения ξ (то есть $w = \xi + u$). Введем множества

$$M = \left\{ v : \bar{\Omega} \to R^3 \; , \; v_\Gamma = 0 \; , \; \xi_3 + v_3 \geq F(\xi + v), \alpha \in \bar{\Omega}, \right\} \tag{3.30}$$

$$M(u) = \{ v \in M : \; u + s(v - u) \in M \; , \; \forall s \in [0,1] \} \, . \tag{3.31}$$

Тогда вариационная задача относительно перемещений оболочки сводится к следующей: найти функцию u из множества M, удовлетворяющую условию:

$$\int\limits_{\Omega} \left(D(\xi(\alpha) + u(\alpha)), v(\alpha) - u(\alpha) \right) d\alpha \leq 0 \quad \forall \, v \in M(u). \tag{3.32}$$

Докажем, что задачи (3.21) и (3.32) эквивалентны. Действительно, пусть u – решение задачи (3.32). Тогда равновесное положение оболочки задается функцией $w = \xi + u$. Для произвольного η из $\widetilde{M}\ (w)$ имеем, что $v = u + t_\eta \eta$ принадлежит множеству $M(u)$, и из (3.32) получаем, что w является решением задачи (3.21). Аналогично доказывается что, если w – решение вариационной задачи (3.21), то $u = w - \xi$ является решением (3.32).

Заметим, что если множество M выпукло, то $M(u) = M$ для любого u из M, и квазивариационное неравенство (3.32) становится вариационным. Отметим, что, в частности, множество M является выпуклым, если функция φ, описывающая поверхность препятствия, выпукла во введенной декартовой системе координат.

§ 4. Существование решения обобщенной задачи для мягкой сетчатой оболочки при наличии препятствия.

В настоящем параграфе рассматривается обобщенная задача в перемещениях об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки, закрепленной по краям, находящейся под воздействием массовых сил, ограниченной препятствием, и устанавливается существование решения этой задачи.

Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя семействами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких, упругих нитей. Предполагается, что узлы сети фиксированы, материал, заполняющий промежутки между нитями, не сопротивляется деформации, и, ни в начальном состоянии, ни в процессе деформации, соседние нити не соприкасаются. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными.

Лагранжевы координаты (α^1, α^2) выберем так, что координатные линии станут сонаправленными с нитями, образующими оболочку; функция ξ по-прежнему удовлетворяет условиям (3.2).

Введем также следующие обозначения (для $k = 1, 2$): $k^* = 3 - k$; $g_k = |\,\partial_k \xi\,|$, $G_k = |\,\partial_k w\,|$ – параметры Ламе соответственно недеформированной и деформированной поверхности оболочки ; R^1, R^2 – вектора, образующие контравариантный локальный базис на деформированной поверхности: $(R_k,\, R^m) = \delta_{km}$.

Обозначим через F^k внутреннюю силу, действующую на единицу длины α^{k^*}– й координатной линии ($\alpha^k = \mathrm{const}$) деформированной оболочки, с той стороны оболочки, куда направлен вектор R^k, $k = 1, 2$, через F^{km} – коэффициенты разложения этой плотности сил по единичным векторам локального базиса:

$$\mathrm{F}^k = \sum_{m=1}^{2} F^{km} R_m / G_m.$$

Тогда компоненты тензора напряжений связаны с погонными усилиями F^{km} соотношениями (см. [3]): $\sqrt{G}\, T^{km} = F^{km} G_{k^*} / G_m$.

Для сетчатой оболочки в силу того, что в выбранной лагранжевой системе координат направления осей совпадают с направлениями нитей, имеем (см. [5], [3]): $F^{12} = F^{21} = 0$ (то есть ячейка сети не оказывает сопротивления повороту нитей в узлах скрепления), $F^{kk} = t_k(\lambda_k)\,\rho_k\, g_{k^*}/G_{k^*}$, где $\lambda_k = G_k/g_k$ – относительные степени удлинения.

Здесь $t_1, t_2 : R_+ \to R_+$ – функции, характеризующие физические свойства нитей, $\rho_k : \Omega \to R_+$ – количество нитей, сонаправленных с α^k– й координатной осью, на единицу длины α^{k^*}– й координатной оси в недеформированном состоянии. Эти функции определены конструкцией сетчатой оболочки, и относительно них считаем выполненными условия:

$$t_k \in C(R_+), \tag{4.1}$$

$$t_k(\lambda) = 0\,, \text{ при } \lambda \leqslant 1 \tag{4.2}$$

(то есть нити не воспринимают сжимающих усилий),

$$t_k(\lambda) > t_k(\nu)\,, \text{ при } \lambda > \nu \geqslant 1, \tag{4.3}$$

существуют $c, c_0, c_1, c_2 > 0, p_1 > 1,\, p_2 > 1$, такие, что при $\lambda \geqslant 0$ для $k = 1, 2$

$$c_0\lambda^{p_k} - c_1 \leqslant t_k(\lambda)\lambda \leqslant c_2\lambda^{p_k}\,, \tag{4.4}$$

$$\rho_k \in C(\bar{\Omega})\,, \tag{4.5}$$

$$\rho_k(\alpha) \geq c > 0 \quad \forall\, \alpha \in \bar{\Omega}\,. \tag{4.6}$$

Заметим, что, вообще говоря, направления R_k не являются главными для тензора T, хотя смешанные компоненты T^{km} $(k \neq m)$ и равны нулю.

Плотность массовых сил $Q : \Omega \to R^3$ считаем известной. В силу закона сохранения массы имеем: $\sqrt{G}\gamma = |[\partial_1\xi(\alpha), \partial_2\xi(\alpha)]|\, \mathring{\gamma}$, где $\mathring{\gamma}$: $\Omega \to R^1$ - заданная плотность материала недеформированной оболочки. Относительно Q и $\mathring{\gamma}$ считаем выполненными условия:

$$Q \in \left[C(\bar{\Omega})\right]^3\,,\ \mathring{\gamma} \in C(\bar{\Omega})\,,\ \mathring{\gamma}\,(\alpha) \geqslant c > 0\,, \forall\alpha \in \bar{\Omega}. \tag{4.7}$$

Поверхностная нагрузка предполагается равной нулю: $P = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае, в соответствии с определением (4.4), для $D(w)$ получаем следующее выражение:

$$D(w) = \sum_{k=1}^{2} \partial_k \left(\frac{t_k(|\partial_k w|/g_k)}{|\partial_k w|} \rho_k g_{k^*} \partial_k w \right) + |\,[\partial_1 \xi, \partial_2 \xi]\,|\, \overset{\circ}{\gamma}\, Q. \tag{4.8}$$

Задачу сформулируем в перемещениях: искомой будет вектор-функция $u(\alpha) = w(\alpha) - \xi(\alpha)$, $\alpha \in \bar{\Omega}$, где функции w, ξ описывают соответственно деформированную и недеформированную поверхности оболочки.

Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_1,p_2}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|\eta\|_{p_1,p_2} \equiv \|\partial_1 \eta\|_{L_{p_1}} + \|\partial_2 \eta\|_{L_{p_2}}. \tag{4.9}$$

Введем пространство $V = \left[\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_1,p_2}(\Omega) \right]^3$ (где $p_k > 1, k = 1, 2$ – параметры из условия (4.4)) с нормой

$$\|v\|_V \equiv \|\partial_1 v\|_{L_{p_1}} + \|\partial_2 v\|_{L_{p_2}}\,, \text{ где } \|\partial_k v\|^{p_k}_{L_{p_k}} = \int\limits_\Omega |\partial_k v|^{p_k} d\alpha, \tag{4.10}$$

обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отношение двойственности между V^* и V, где V^* – пространство сопряженное к V. Очевидно, что пространство V является рефлексивным банаховым пространством.

Введем далее следующие обозначения ($k = 1, 2$):

$$\Lambda_k(v) = \frac{\partial_k(\xi + v)}{g_k}\,,\ v \in V, \tag{4.11}$$

$$T_k(x) = \frac{t_k(|x|)}{|x|}\, x\,,\ x \in R^3, \tag{4.12}$$

и перепишем (4.8) в следующем виде

$$D(\xi + u) = \sum_{k=1}^{2} \partial_k \left(\rho_k g_{k^*} T_k(\Lambda_k(u)) \right) + |\,[\partial_1 \xi, \partial_2 \xi]\,|\, \overset{\circ}{\gamma}\, Q. \tag{4.13}$$

Для произвольной функции η из V имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2} \partial_k \left(\rho_k g_{k^*} T_k(\Lambda_k(u)) \right) d\alpha = - \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} \left(T_k(\Lambda_k(u)) \ , \ \partial_k \eta \right) d\alpha, \tag{4.14}$$

и если u является решением задачи (3.32) то, для рассматриваемого случая сетчатой оболочки, выполнено интегральное неравенство:

$$\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} \left(T_k(\Lambda_k(u)) \ , \ \partial_k (v-u) \right) \, d\alpha \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega} (|\, [\partial_1 \xi, \partial_2 \xi] \,| \overset{\circ}{\gamma} Q, v-u) \, d\alpha. \tag{4.15}$$

Под решением обобщенной задачи (3.32) будем понимать такую функцию $u \in M$,

$$M = \left\{ v \in V : \ \xi_3(\alpha) + v_3(\alpha) \geq F(\xi(\alpha) + v(\alpha)) \ \text{ п. вс. на } \Omega \right\}, \tag{4.16}$$

что для любого $v \in M(u)$,

$$M(u) = \left\{ v \in M : \ u + s(v-u) \in M \, , \, \forall \, s \in [0,1] \right\}, \tag{4.17}$$

справедливо неравенство (4.15).

Определим операторы $A_k : V \to V^*$ и функционал $f \in V^*$ формами:

$$\langle A_k u, v \rangle = \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} \left(T_k(\Lambda_k(u)) \ , \ \partial_k v \right) d\alpha \, , \, k = 1, 2, \tag{4.18}$$

$$\langle f, v \rangle = \int\limits_{\Omega} (|[\partial_1 \xi, \partial_2 \xi]| \overset{\circ}{\gamma} Q, v) d\alpha. \tag{4.19}$$

Убедимся в корректности определений. Из условий (3.2) следует:

$$0 < c_1 \leqslant g_k(\alpha) \leqslant c_2 \ , \ \forall \, \alpha \in \bar{\Omega} \, . \tag{4.20}$$

Из (4.4), учитывая (4.5), (4.20), получаем оценку:

$$|\rho_k g_{k^*} T_k(\Lambda_k(u))| \leqslant c |\partial_k (\xi + u)|^{p_k - 1} \ , \ \alpha \in \bar{\Omega} \, .$$

Из нее получаем корректность определения оператора A_k:

$$|\langle A_k u, v\rangle| \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\partial_k(u+\xi)|^{p_k-1}|\partial_k v| d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c\|\partial_k(u+\xi)\|^{p_k-1}_{L_{p_k}}\|\partial_k v\|_{L_{p_k}} \leqslant c(\|u\|_V + \|\partial_k \xi\|_{L_{p_k}})^{p_k-1}\|v\|_V\,. \qquad (4.21)$$

Пусть $A = A_1 + A_2$. С учетом введенных обозначений обобщенная задача (4.15) эквивалентна квазивариационному неравенству: найти u из множества M, удовлетворяющую неравенству

$$\langle A(u), v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v\in M(u). \qquad (4.22)$$

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия (4.1)–(4.6), (4.20). Тогда оператор A ограничен, хеминепрерывен (то есть функция вещественного аргумента Φ, $\Phi(t) = \langle A(u+tv), w\rangle$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ для любых $u, v, w \in V$), монотонен, и выполняется неравенство:*

$$\langle Au, u-v_0\rangle \geqslant \sum_{k=1}^{2}(c_1\|\partial_k u\|^{p_k}_{L_{p_k}} - c_2\|\partial_k u\|^{p_k-1}_{L_{p_k}} - c_3) \quad \forall\, u\in V, \qquad (4.23)$$

где v_0 – произвольный фиксированный элемент из V.

Доказательство. Ограниченность оператора A следует из оценки (4.21).

Хеминепрерывность оператора A следует из непрерывности функции t_k (условие (4.1)) и свойств оператора Немыцкого (см. [2]).

Докажем монотонность оператора A_k. Для произвольных векторов x, y из R^3 и $k = 1, 2$, пользуясь неравенством $(x, y) \leqslant |x|\ |y|$, получаем оценку:

$$(T_k(x) - T_k(y)\ ,\ x - y) =$$

$$= t_k(|x|)|x| - t_k(|x|)\frac{(x,y)}{|x|} - t_k(|y|)\frac{(x,y)}{|y|} + t_k(|y|)|y| \geqslant$$

$$\geqslant t_k(|x|)|x| - t_k(|x|)|y| - t_k(|y|)|x| + t_k(|y|)|y| =$$

$$= (t_k(|x|) - t_k(|y|))\,(|x| - |y|). \tag{4.24}$$

Поскольку функции t_k не убывают (условия (4.2) и (4.3)), то следует:

$$(t_k(\lambda) - t_k(\nu))\,(\lambda - \mu) \geqslant 0\,,\ \forall \lambda, \mu \geqslant 0. \tag{4.25}$$

Таким образом, выполнены неравенства

$$(T_k(x) - T_k(y)\ ,\ x - y) \geqslant 0 \quad \forall\, x, y \in R^3\,,\ k = 1, 2. \tag{4.26}$$

Воспользовавшись неравенствами (4.6), (4.20) и (4.26), для произвольных функций v, u из V и $k = 1, 2$ получаем неравенства:

$$\langle A_k v - A_k u, v - u\rangle =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} g_k\,(T_k(\Lambda_k(v)) - T_k(\Lambda_k(u))\ ,\ \Lambda_k(v) - \Lambda_k(u))\,d\alpha \geqslant 0. \tag{4.27}$$

Из (4.27) следует монотонность операторов A_k и, тем самым, оператора A.

Далее, пользуясь неравенствами (4.20) и (4.4), получаем оценки ($k = 1, 2$):

$$\langle A_k u, u - v_0\rangle = \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*}\,(T_k(\Lambda_k(u))\,,\ \partial_k u - \partial_k v_0)\,d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} g_k \frac{t_k(|\Lambda_k(u)|)}{|\Lambda_k(u)|}\,(\Lambda_k(u)\ ,\ \Lambda_k(u) - \Lambda_k(v_0))\,d\alpha \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} g_k t_k(|\Lambda_k(u)|)\,(|\Lambda_k(u)| - |\Lambda_k(v_0)|)\,d\alpha \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \rho_k g_{k^*} g_k \left(c_0|\Lambda_k(u)|^{p_k} - c_1 - c_2|\Lambda_k(u)|^{p_k-1}|\Lambda_k(v_0)|\right) d\alpha \geqslant$$

$$\geqslant c_0^*\|\partial_k(u+\xi)\|^{p_k}_{L_{p_k}} - c_2^*\|\partial_k(u+\xi)\|^{p_k-1}_{L_{p_k}}\|\partial_k(v_0+\xi)\|_{L_{p_k}} - c_1^* \geqslant$$

$$\geqslant C_1\|\partial_k u\|^{p_k}_{L_{p_k}} - C_2\|\partial_k u\|^{p_k-1}_{L_{p_k}} - C_3,$$

из которых следует неравенство (4.23). **Лемма доказана.**

Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия (4.1) – (4.7), (4.20). Тогда квазивариационное неравенство (4.22) имеет решение.*

Доказательство. Докажем слабую замкнутость множества M. Пусть последовательность $\left\{v^{(i)}\right\}_{i=0}^{+\infty}$, принадлежащая множеству M, слабо сходится к v в V. Из компактности вложения $W_p^1(\Omega)$ при $p>1$ в $L_1(\Omega)$ следует, что последовательность $\left\{v^{(i)}\right\}_{i=0}^{+\infty}$ сходится сильно к v в $\left[L_1(\Omega)\right]^3$, а значит, у нее найдется подпоследовательность, сходящаяся почти всюду к v. Поэтому v принадлежит множеству M.

Введем для $k=1,2$ функционалы $\Phi_k : V \to R^1$:

$$\Phi_k(v) = \int\limits_{\Omega} I_k(|\partial_k(\xi+v)|/g_k)\, \rho_k\, g_{k^*}\, g_k\, d\alpha\,,\ \text{где}\ I_k(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda} t_k(s) ds.$$

Корректность определения функционалов следует из условий (4.4), (4.5), (4.20) и неравенства

$$I_k(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda} t_k(s) ds \leqslant c_2 \int\limits_0^{\lambda} s^{p_k-1} ds = c\lambda^{p_k}.$$

Непосредственно проверяется, что выполнено равенство:

$$\lim_{s\to 0} \frac{\Phi_k(v+s(u-v))}{s} = \langle A_k v, u\rangle\,,\ \text{то есть}\ \nabla\Phi_k(v) = A_k\, v.$$

Следовательно, функционал $\Phi : V \to R^1$, определенный соотношением $\Phi(v) = \Phi_1(v) + \Phi_2(v) - \langle f, v\rangle, v \in V$, является дифференцируемым: $\nabla\Phi(v) = Av - f$, а в силу свойств оператора A (лемма 4.1), является также выпуклым, слабо полунепрерывным снизу и коэрцитивным.

Из установленных выше свойств функционала Φ, множества M и рефлексивности пространства V следует, по теореме Вейерштрасса [?], существование решения задачи минимизации функционала Φ на множестве M. Пусть u – решение этой задачи:

$$\Phi(u) = \min_{v \in M} \Phi(v).$$

Установим, что u является решением квазивариационного неравенства (4.22). Пусть v – произвольный элемент множества $M(u)$. Из определения множества $M(u)$ следует, что $u+s(v-u) \in M$ для всех $s \in [0,1]$. Элемент u является точкой минимума Φ на множестве M, значит

$$\Phi(u + s(v-u)) \geqslant \Phi(u), \ s \in [0,1]. \tag{4.28}$$

В силу дифференцируемости Φ имеем равенство:

$$\Phi(u + s(v-u)) - \Phi(u) = s \left\langle \nabla\Phi(u + \theta_s s(v-u)), v-u \right\rangle \ , \text{ где } 0 \leqslant \theta_s \leqslant 1,$$

следовательно, из (4.28) получаем:

$$\langle A(u + \theta_s s(v-u)) - f, v-u \rangle \geqslant 0.$$

Устремляя s к нулю и учитывая хеминепрерывность оператора A, получаем неравенство (4.22). **Теорема доказана.**

§ 5. Свойства множества допустимых перемещений в случае невыпуклого множества ограничений.

В этом параграфе будем предполагать, что функция φ, описывающая поверхность препятствия, является вогнутой на всей области её определения, то есть для всех $(x_1, x_2) \in R^2$ и для любого λ из отрезка $[0,1]$ выполняется неравенство:

$$\varphi(\lambda(x_1,x_2) + (1-\lambda)(x_1,x_2)) \geq \lambda\, \varphi(x_1,x_2) + (1-\lambda)\varphi(x_1,x_2),$$

и, таким образом, множество, которое можно считать, без ограничения общности, препятствием, имеет вид

$$\Delta_\varphi = \left\{ x \in R^3 : x_3 \leq \varphi(x_1,x_2) \right\} \tag{5.1}$$

и является выпуклым и замкнутым.

Для рассматриваемого случая дифференциальной задаче (3.5), (3.14) сопоставим вариационную задачу с выпуклым множеством допустимых направлений $M(v)$.

Обозначим, через $P: \ R^3 \to \Delta_\varphi$ оператор проектирования на множество Δ_φ :

$$P(x) = \mathop{\arg\min}_{z \in \Delta_\varphi} \|x - z\|,$$

являющийся, очевидно, липшиц-непрерывным:

$$|P(x) - P(z)| \leq |x - z| \quad \forall\, x, z \in R^3. \tag{5.2}$$

Далее, для $v \in M$ (множество M определено в (4.16)) введем функцию $P^v = (P_1^v, P_2^v, P_3^v): \ \Omega \to \Delta_\varphi$

$$P^v(\alpha) = P(\xi(\alpha) + v(\alpha)), \quad \alpha \in \Omega\,, \tag{5.3}$$

где ξ – функция из (3.1). Определим множество допустимых направлений для $v \in M$ следующим образом:

$$M(v) = \{\eta \in V \ : (\xi(\alpha) + \eta(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) \geq 0, \quad \alpha \in \Omega\}\,, \tag{5.4}$$

оператор $N: R^3 \to R^3$ определен в (3.10).

Таким образом, введенное множество несколько уже, чем множество допустимых направлений $\widetilde{M}\ (u)$ определенное в (3.16). Тем не менее, следуя изложению § 3 настоящей главы, нетрудно установить эквивалентность вариационной задачи (3.21) с множеством (5.4) и дифференциальной задачи (3.15).

Поскольку $v_3(\alpha) \geq \varphi(v_1(\alpha), v_2(\alpha))$ для всех α из Ω, то $P^v(\alpha)$ лежит на границе множества Δ_φ, и, следовательно, множество (5.4) определено корректно.

Очевидно, что $M(v)$ является выпуклым и замкнутым подмножеством из M. В этом параграфе будем предполагать, что Ω является звездной областью, то есть существует внутренняя точка α^* такая, что для любого единичного вектора $e \in R^2$ выполнено условие:

$$\exists\, t_e > 0 \, : \begin{cases} \alpha^* + te \in \Omega & \text{при} \;\; 0 \le t \le t_e, \\ \alpha^* + te \in \Gamma & \text{при} \;\; t = t_e, \\ \alpha^* + te \notin \overline{\Omega} & \text{при} \;\; t > t_e. \end{cases} \tag{5.5}$$

Поскольку α^* – внутренняя точка Ω, то существует такое ε^*, что $t_e > \varepsilon^*$ для всех $e \in R^2$.

Введем для $\varepsilon > 0$ функцию $\theta_\varepsilon : \; \Omega \to R^1$

$$\theta_\varepsilon(\alpha) = \theta_\varepsilon(\alpha^* + te) = \begin{cases} \varepsilon & \text{при} \;\; 0 \le t \le t_e - \varepsilon, \\ -t + t_e & \text{при} \;\; t_e - \varepsilon \le t \le t_e. \end{cases} \tag{5.6}$$

Очевидно, что $\theta_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_1,p_2}(\Omega)$, и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\theta_\varepsilon(x)\|_{\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_1,p_2}(\Omega)} = 0.$$

Будем считать, что край оболочки лежит строго над поверхностью препятствия, то есть

$$\xi_3(\alpha) > \varphi(\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha)), \alpha \in \Gamma \tag{5.7}$$

Поскольку, по предположению (3.2), ξ – непрерывная функция, то множество (край оболочки)

$$\Delta_\Gamma = \{x : \; x = \xi(\alpha), \;\; \alpha \in \Gamma\} \tag{5.8}$$

замкнуто.

В силу (5.4) $\Delta_\Gamma \bigcap \Delta_\varphi = \emptyset$, и существует $d > 0$:

$$d = \inf_{\substack{x \in \Delta_\Gamma, \\ z \in \Delta_\varphi}} \|x - z\|. \tag{5.9}$$

В этом параграфе будем предполагать, что показатели степенного роста функций, характеризующих физические свойства нитей в неравенстве (4.4), удовлетворяют условию

$$p = \min\{p_1, p_2\} > 2. \tag{5.10}$$

Замечание 5.1. *Поскольку область Ω принадлежит пространству R^2, ограничена и имеет липшиц-непрерывную границу, то пространство $W_p^{(2)}(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $C(\Omega)$ при любом $p \in (2, +\infty)$. Таким образом, имеется компактное вложение пространства $[W_p^{(2)}(\Omega)]^3$ (а в силу неравенства (5.10) и пространства V) в пространство $[C(\Omega)]^3$ при $p \in (1, +\infty)$.*

Имеет место

Лемма 5.1. *Пусть выполнено неравенство (5.10), последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ из M слабо сходится к v в V при $n \to +\infty$. Тогда для произвольной функции w из $M(v)$ существует такая константа $\varepsilon_w > 0$, не зависящая от n, что для всякого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_w]$ найдется номер n_ε, начиная с которого выполнено включение*

$$w_\varepsilon \in M(v_n)\,, \tag{5.11}$$

где

$$w_\varepsilon = w + \theta_\varepsilon e_3\,,\; e_3 = (0,0,1)\,, \tag{5.12}$$

функция θ_ε определена согласно (5.6).

Доказательство. Установим принадлежность v множеству M. Из слабой сходимости в пространстве V последовательности $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ к v и компактного вложения (см. замечание (5.1)) пространства V в $[C(\Omega)]^3$ имеем равномерную сходимость этой последовательности к v, что и обеспечивает принадлежность v множеству M.

Очевидно, что $w_\varepsilon \in M$. Далее, имеем

$$(\xi(\alpha) + w_\varepsilon(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v_n}(\alpha) \pm P^{v}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)) \pm N(P^{v}(\alpha)))+$$

$$+(P^{v}(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v}(\alpha), N(P^{v}(\alpha)))+$$

$$+((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)) - N(P^{v}(\alpha)))+$$

$$+(P^{v}(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha))). \tag{5.13}$$

Оценим первое слагаемое в правой части снизу, а два оставшихся – сверху. В силу (5.12)

$$((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v}(\alpha), N(P^{v}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v}(\alpha), N(P^{v}(\alpha))) + \theta_\varepsilon(\alpha)(e_3, N(P^{v}(\alpha))). \tag{5.14}$$

Положим $r = d/4$, где d определено в (5.6) и выберем $\varepsilon_r > 0$ так, чтобы

$$|(\xi+v)(\alpha^*+te)-(\xi+v)(\alpha^*+t_e e)| < r \quad \forall \{t,e\} \in \chi_\varepsilon,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_r, \tag{5.15}$$

$$|(\xi+w)(\alpha^*+te)-(\xi+w)(\alpha^*+t_e e)| < r \quad \forall \{t,e\} \in \chi_\varepsilon,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_r, \tag{5.16}$$

где множество

$$\chi_\varepsilon = \left\{ \{t,e\} \in R^1 \times R^3 \ :\ t_e - \varepsilon \le t \le t_e,\ e \in R^3\ ,\ |e| = 1 \right\} \tag{5.17}$$

порождает, согласно (5.5), ε-полоску вдоль границы Γ области Ω:

$$\Omega_\varepsilon = \{\alpha \in R^2 : \alpha = \alpha^* + te\ \ \forall \{t,e\} \in \chi_\varepsilon\}. \tag{5.18}$$

В силу непрерывности функций ξ, v и w на замкнутом и ограниченном множестве $\overline{\Omega}$, и, следовательно, равномерной непрерывности, такое ε_r найдется.

Введем для $r > 0$ множество Δ_Γ^r являющееся r-окрестностью края оболочки в пространстве R^3:

$$\Delta_\Gamma^r = \bigcup_{\eta \in \Delta_\Gamma} \left\{ x \in R^3 : \ |\eta - x| \le r \right\}, \tag{5.19}$$

где множество Δ_Γ – край оболочки (см. (5.8)).

Поскольку $w(\alpha^* + t_e e) = v(\alpha^* + t_e e) = 0$ для всех e, то из (5.15), (5.16) имеем

$$(\xi + w)(\alpha^* + t_e e) \in \Delta_\Gamma^r, \ (\xi + v)(\alpha^* + t_e e) \in \Delta_\Gamma^r. \tag{5.20}$$

Для ε из отрезка $[0, \varepsilon_r]$ получаем следующую оценку

$$((\xi + w)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) =$$

$$= (w(\alpha) - v(\alpha), N(P^v(\alpha))) + ((\xi + v)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) \ge$$

$$\ge -|w(\alpha) - v(\alpha)| + |(\xi + v)(\alpha) - P^v(\alpha)| \ge$$

$$-2\,r + d - r \ge \frac{1}{4d} > 0 \quad \forall\, \alpha \in \Omega_\varepsilon\,. \tag{5.21}$$

Поскольку в силу (3.10)

$$(N(x_1, x_2, x_3), e_3) = \frac{([\tau_1(x_1, x_2), \tau_2(x_1, x_2)], e_3)}{|[\tau_1(x_1, x_2), \tau_2(x_1, x_2)]|} =$$

$$= \frac{1}{|[\tau_1(x_1, x_2), \tau_2(x_1, x_2)]|} > 0 \quad \forall\, x \in R^3,$$

а функция $(e_3, N(P^v(\cdot))$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то имеем:

$$\min_{\alpha \in \overline{\Omega}} (e_3, N(P^v(\alpha)) = \delta_m > 0, \tag{5.22}$$

и, учитывая (5.6), получаем неравенство

$$\theta_\varepsilon(\alpha)(e_3, N(P^v(\alpha))) \ge \theta_\varepsilon(\alpha)\delta_m \ge \delta_m \varepsilon \quad \forall\, \alpha \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon\,. \tag{5.23}$$

Из (5.21) и (5.23) получаем неравенство

$$((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) \ge \delta_m\, \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_w] \quad \forall\, \alpha \in \Omega, \tag{5.24}$$

где

$$\varepsilon_w = \min\left\{\varepsilon_r, \frac{1}{4\,d}\right\}.$$

Перейдем к рассмотрению оставшихся двух слагаемых в правой части неравенства (5.13). Из слабой сходимости в пространстве V последовательности $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ к v и компактности вложения (см. замечание (5.1)) пространства V в $[C(\Omega)]^3$ имеем равномерную сходимость этой последовательности:

$$\forall\,\delta > 0\,\exists\,n_\delta:\ |\,v_n(\alpha) - v(\alpha)\,| < \delta \quad \forall\,n > n_\delta\,, \quad \forall\,\alpha \in \overline{\Omega} \tag{5.25}$$

и ее ограниченность:

$$\exists R > 0 : v_n(\alpha), v(\alpha), w(\alpha) \in B_R(0) \quad \forall\,\alpha \in \overline{\Omega}\,, \tag{5.26}$$

где $B_R(0) = \{x : |x| < R, x \in R^3\}$. Пользуясь (5.3), (5.2) и (5.26) для оценки второго слагаемого в (5.13), получаем:

$$|((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)) - N(P^v(\alpha)))| \le$$
$$\le \max_{\alpha\in\Omega} |(\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha)|\,|N(P^{v_n}(\alpha)) - N(P^v(\alpha))| \le$$
$$\le c\,|N(P^{v_n}(\alpha)) - N(P^v(\alpha))|. \tag{5.27}$$

Из (5.2) и (5.25), следует равномерная сходимость последовательности функций $\{P^{v_n}(\alpha)\}_{n=1}^{+\infty}$, и, поскольку в силу (3.7) N является непрерывным оператором, а значит, равномерно непрерывным на компакте, из оценки (5.27) имеем:

$$\forall\,\delta > 0\,\exists\,n_\delta :$$
$$|((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)) - N(P^v(\alpha)))| < \delta\,\forall\,n > n_\delta, \forall\,\alpha \in \Omega. \tag{5.28}$$

Для третьего слагаемого в правой части (5.13), в силу (5.2), (5.3), получаем неравенство:

$$|(P^v(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)))| \le$$

$$\leq |P^v(\alpha) - P^{v_n}(\alpha)| \leq |v(\alpha) - v_n(\alpha)|, \tag{5.29}$$

и, таким образом, выполнено условие:

$$\forall \, \delta > 0 \, \exists \, n_\delta :$$

$$|(P^v(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)))| < \delta \, \forall \, n > n_\delta \, , \, \forall \, \alpha \in \Omega \, . \tag{5.30}$$

Итак, для любого $\varepsilon \in [\, 0, \, \varepsilon_w \,]$, положив $n_\varepsilon = n_\delta$ для $\delta = \delta_m \varepsilon / 3$, из неравенств (5.24), (5.27), (5.28) и (5.30) получаем, что

$$((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha))) \geq ((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) +$$

$$-|((\xi + w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)) - N(P^v(\alpha)))| -$$

$$-|(P^v(\alpha) - P^{v_n}(\alpha), N(P^{v_n}(\alpha)))| >$$

$$> \varepsilon - \varepsilon/3 - \varepsilon/3 > 0 \qquad \forall \, n > n_\delta \, , \, \forall \, \alpha \in \Omega, \tag{5.31}$$

что и означает принадлежность w_ε множеству $M(v_n)$. **Лемма доказана.**

Теорема 5.1. *Пусть выполнено неравенство (5.10) и последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ из M слабо сходится к v в пространстве V. Тогда для произвольной функции w из $M(v)$ найдется такая последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что*

$$w_n \in M(v_n) \, , \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.32}$$

и

$$\lim_{n \to +\infty} \|w_n - w\|_V = 0. \tag{5.33}$$

Доказательство. Зададим убывающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{+\infty}$, сходящуюся к нулю и принадлежащую отрезку $[0, \varepsilon_\omega]$, где ε_w – константа из леммы 5.1 для функции w. Для каждого ε_k согласно лемме 5.1 выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы $w_{\varepsilon_k} \in M(v_n)$ для

$n \geq n_k$. Положим $w_n = v_n$ при $1 \leq n < n_1$ и $w_n = w_{\varepsilon_k}$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$ Очевидно, что для построенной последовательности выполнено условие (5.32).

Далее, по построению для функций w_{ε_k} имеем

$$\|w_{\varepsilon_k} - w\|_V = \|\theta_{\varepsilon_k} e_3\|_V \to 0$$

при $\varepsilon_k \to 0$, то есть при $k \to +\infty$. Итак соотношение (5.33) установлено. **Теорема доказана.**

§ 6. Задача с выпуклым допустимым множеством при наличии следящей поверхностной нагрузки.

В этом параграфе будем предполагать, что граница препятствия является выпуклой функцией, то есть всех $(x_1, x_2) \in R^2$ и для любого λ из отрезка $[0, 1]$ выполняется неравенство:

$$\varphi(\lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(x_1, x_2)) \geq \lambda\, \varphi(x_1, x_2) + (1 - \lambda)\varphi(x_1, x_2). \qquad (6.1)$$

Замечание 6.1. *Из определений множеств (4.16),(4.17) и неравенства (6.1) получаем выпуклость и замкнутость множества M и равенство*

$$M(\eta) = M \qquad \forall\, \eta \in M. \qquad (6.2)$$

Будем также предполагать, что на оболочку, помимо массовой нагрузки, действует постоянная следящая поверхностная нагрузка P интенсивности q^*, то есть функция $\sqrt{G}P$ из (3.3) имеет следующий вид:

$$\sqrt{G}P(\alpha_1, \alpha_2) = q^*[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)] \quad \forall \alpha \in \Omega. \qquad (6.3)$$

Под решением обобщенной задачи (3.32) будем понимать такую функцию $u \in M$, что для любого $v \in M$ справедливо интегральное неравенство:

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{t_k(|\partial_k(\xi+u)|/g_k)}{|\partial_k(\xi+u)|}\rho_k g_{k^*}(\partial_k(\xi+u),\partial_k(v-u))d\alpha-$$

$$-q^*\int\limits_{\Omega}([\partial_1(\xi+u),\partial_2(\xi+u)],v-u)d\alpha\geq$$

$$\geq\int\limits_{\Omega}(|[\partial_1\xi,\partial_2\xi]|\overset{\circ}{\gamma}Q,v-u)d\alpha. \tag{6.4}$$

В этом параграфе будем предполагать, что показатели степенного роста функций, характеризующих физические свойства нитей, в неравенстве (4.4) удовлетворяют условию

$$p_2>p_1\geqslant 2. \tag{6.5}$$

Замечание 6.2. *Поскольку область Ω принадлежит пространству R^2, ограничена и имеет липшиц-непрерывную границу, то пространство $W_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_r(\Omega)$ при любом $r\in[1,+\infty)$. Таким образом, имеется компактное вложение пространства $[W_2^1(\Omega)]^3$ (а в силу неравенства (6.5) и пространства V) в пространство $\mathrm{L}_r=[L_r(\Omega)]^3$ при $r\in[1,+\infty)$.*

Определим оператор $B:V\to V^*$, следующей формой:

$$\langle Bu,v\rangle=\int\limits_{\Omega}([\partial_1(u+\xi),\partial_2(u+\xi)],v)\,d\alpha\quad\forall\,u,v\in V. \tag{6.6}$$

В силу условия (6.5) существует $r>1$, при котором выполнено равенство

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r}=1. \tag{6.7}$$

Корректность определения оператора B, пользуясь неравенством Гельдера с показателями p_1,p_2,r и учитывая замечание 6.2, получаем из следующей оценки:

$$|\langle Bu, v\rangle| \leqslant \int\limits_{\Omega} |\partial_1(u+\xi)|\,|\partial_2(u+\xi)|\,|v|d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \|\partial_1(u+\xi)\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|\partial_2(u+\xi)\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \|v\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant$$

$$\leqslant (\|u\|_V + c)^2 \|v\|_V. \tag{6.8}$$

Пользуясь определениями (4.18), (4.19), (6.6), задачу (6.4) запишем в операторном виде: найти u из множества M, удовлетворяющую неравенству

$$\langle A(u), v-u\rangle - q^* \langle B(u), v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in M. \tag{6.9}$$

Для исследования задачи (6.9) нам понадобятся следующие свойства оператора B (Леммы 6.1 – 6.3).

Лемма 6.1. *Пусть выполнено неравенство (6.5). Тогда для произвольных u и v из V имеет место равенство:*

$$\int\limits_{\Omega} ([\partial_1(u+\xi), \partial_2(u+\xi)], v)d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} ([\partial_1(u+\xi), (u+\xi)], \partial_2 v)d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} ([(u+\xi), \partial_2(u+\xi)], \partial_1 v)d\alpha.$$

Доказательство. Для достаточно гладкой функции $\eta(\alpha)$ имеем:

$$\partial_2[\partial_1\eta, \eta] = [\partial_2\partial_1\eta, \eta] + [\partial_1\eta, \partial_2\eta]\,,$$

$$\partial_1[\eta, \partial_2\eta] = [\partial_1\eta, \partial_2\eta] + [\eta, \partial_1\partial_2\eta]\,.$$

Складывая эти соотношения, получим:

$$[\partial_1\eta, \partial_2\eta] = \frac{1}{2}(\partial_2[\partial_1\eta, \eta] + \partial_1[\eta, \partial_2\eta])\,. \tag{6.10}$$

Пусть $w = u+\xi$, $w_i = u_i + \xi$, где последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty} \in [C_2(\bar{\Omega})]^3$ такая, что $u_i \to u$ в V при $i \to \infty$. Тогда для любого $v \in V$, используя

(6.10) и интегрируя по частям, получаем равенство:

$$\int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, \partial_2 w_i], v) d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, w_i], \partial_2 v) d\alpha + \int\limits_\Omega ([w_i, \partial_2 w_i], \partial_1 v) d\alpha \right). \tag{6.11}$$

Далее, имеем оценку (показатели p_1, p_2, r – из (6.7)):

$$\left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, \partial_2 w_i], v) d\alpha - \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, \partial_2 w], v) d\alpha \right| =$$

$$= \left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, \partial_2 (w_i - w)], v) d\alpha + \int\limits_\Omega ([\partial_1 (w_i - w), \partial_2 w], v) d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\partial_1 w_i\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|\partial_2 (w_i - w)\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \|v\|_{\mathrm{L}_r} +$$

$$+ \|\partial_1 (w_i - w)\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|\partial_2 w\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \|v\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant c \|u_i - u\|_V \|v\|_V. \tag{6.12}$$

(в последнем неравенстве мы воспользовались ограниченностью в пространстве V сходящейся последовательности $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ и замечанием 6.2).

Аналогично получаем оценку для слагаемых из правой части равенства (6.11):

$$\left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, w_i], \partial_2 v) d\alpha - \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, w], \partial_2 v) d\alpha \right| =$$

$$= \left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 (w_i - w), w_i)], \partial_2 v) d\alpha + \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, w_i - w], \partial_2 v) d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \|\partial_1 (w_i - w)\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|\partial_2 v\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \|w_i\|_{\mathrm{L}_r} + \|\partial_1 w\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|\partial_2 v\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \|w_i - w\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant$$

$$\leqslant c \|u_i - u\|_V \|v\|_V, \tag{6.13}$$

и

$$\left| \int\limits_\Omega ([w_i, \partial_2 w_i], \partial_1 v) d\alpha - \int\limits_\Omega ([w, \partial_2 w], \partial_1 v) d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\|u_i - u\|_V \|v\|_V \,. \tag{6.14}$$

Переходя теперь в (6.11) к пределу при $i \to \infty$ с учетом оценок (6.12) – (6.14), получим требуемое равенство.

Лемма 6.2. *Пусть выполнено неравенство (6.5). Тогда оператор B секвенциально слабо непрерывен, то есть, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset V$ слабо сходится к u в V, v – произвольный элемент из V, то выполнено равенство:*

$$\lim_{i\to\infty} \langle Bu_i, v\rangle = \langle Bu, v\rangle.$$

Доказательство. Полагая $w_i = u_i+\xi$, $w = u+\xi$ и пользуясь леммой 6.1, получаем:

$$|\langle Bu_i, v\rangle - \langle Bu, v\rangle| =$$

$$= \left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, \partial_2 w_i], v)d\alpha - \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, \partial_2 w], v)d\alpha \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| \left(\int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, w_i], \partial_2 v)d\alpha - \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, w], \partial_2 v)d\alpha \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_\Omega ([w_i, \partial_2 w_i], \partial_1 v)d\alpha - \int\limits_\Omega ([w, \partial_2 w], \partial_1 v)d\alpha \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, w_i], \partial_2 v)d\alpha - \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, w], \partial_2 v)d\alpha \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_\Omega ([w_i, \partial_2 w_i], \partial_1 v)d\alpha - \int\limits_\Omega ([w, \partial_2 w], \partial_1 v)d\alpha \right|. \tag{6.15}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (6.15) :

$$D_i = \left| \int\limits_\Omega ([\partial_1 w_i, w_i], \partial_2 v)d\alpha - \int\limits_\Omega ([\partial_1 w, w], \partial_2 v)d\alpha \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} ([\partial_1 w_i, u_i - u], \partial_2 v) d\alpha - \langle g, u - u_i \rangle \right|.$$

Здесь $g : V \to R^1$ линейный непрерывный функционал, заданный формой:

$$\langle g, \eta \rangle = \int\limits_{\Omega} ([\partial_1 \eta, w], \partial_2 v) d\alpha.$$

Корректность определения функционала следует из оценки:

$$\left| \int\limits_{\Omega} ([\partial_1 \eta, w], \partial_2 v) d\alpha \right| \leqslant \int\limits_{\Omega} |\partial_1 \eta| \, |w| \, |\partial_2 v| d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \|\partial_1 \eta\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|w\|_{\mathrm{L}_r} \|\partial_2 v\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \leqslant c \|\eta\|_V.$$

Из слабой сходимости последовательности u_i к u получаем:

$$\lim_{i \to \infty} \langle g, u - u_i \rangle = 0,$$

также имеем ограниченность (в силу рефлексивности пространства V) последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty}$: $\|u_i\|_V \leqslant c$, $i = 1, 2, \ldots$, и из компактности вложения пространства V в L_r (см. замечание 6.2) сильную сходимость:

$$\lim_{i \to \infty} \|u_i - u\|_{\mathrm{L}_r} = 0. \qquad (6.16)$$

Пользуясь последним равенством и следующей оценкой:

$$\left| \int\limits_{\Omega} ([\partial_1 w_i, u_i - u], \partial_2 v) d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\partial_1 (u_i + \xi)\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|u_i - u\|_{\mathrm{L}_r} \|\partial_2 v\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \leqslant c \|u_i - u\|_{\mathrm{L}_r}$$

получаем, что

$$\lim_{i \to +\infty} D_i \leqslant \lim_{i \to +\infty} \left| \int\limits_{\Omega} ([\partial_1 w_i, u_i - u], \partial_2 v) d\alpha \right| + |\langle g, u - u_i \rangle| = 0.$$

Аналогично доказывается стремление к нулю и второго слагаемого в правой части неравенства (6.15). **Лемма доказана.**

Лемма 6.3. *Пусть выполнено неравенство (6.5). Тогда оператор B псевдомонотонен, то есть выполнены следующие условия:*

(i) B *- ограниченный оператор;*

(ii) *из слабой сходимости последовательности* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$ *к* u *в* V *и неравенства*

$$\limsup_{i\to\infty} \langle Bu_i, u_i - u\rangle \leqslant 0$$

следует, что

$$\liminf_{i\to\infty} \langle Bu_i, u_i - v\rangle \geqslant \langle Bu, u - v\rangle \quad \forall\, v \in V.$$

Доказательство. Ограниченность оператора B (условие (i)) следует из оценки (6.8).

Докажем справедливость (ii). Пусть последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty}$ из V слабо сходится к u в V, v – произвольный элемент из V. Имеем:

$$|\langle Bu, u - v\rangle - \langle Bu_i, u_i - v\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant |\langle Bu - Bu_i, u - v\rangle| + |\langle Bu_i, u - u_i\rangle|. \tag{6.17}$$

Первое слагаемое в правой части (6.17) стремится к нулю при $i \to +\infty$ в силу слабой непрерывности оператора B (Лемма 6.2). Для второго слагаемого выполнена оценка (см. 6.8):

$$|\langle Bu_i, u - u_i\rangle| \leqslant (\|u_i\|_V + c)^2 \|u - u_i\|_{\mathrm{L}_r} \,,$$

из которой, пользуясь (6.16), заключаем, что и второе слагаемое в правой части (6.17) стремится к нулю при $i \to +\infty$.

Таким образом, получили, что

$$\lim_{i\to\infty} \langle Bu_i, u_i - v\rangle = \langle Bu, u - v\rangle \,.$$

Условие (ii) выполнено. **Лемма доказана.**

Замечание 6.3. *Из доказательства леммы 6.3 следует, что оператор B удовлетворяет условию более сильному, чем условие* (ii) *из определения псевдомонотонности:*

из слабой сходимости последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty}$ к u в V следует равенство

$$\lim_{i\to\infty} \langle Bu_i, u_i - v\rangle = \langle Bu, u - v\rangle \ \ \forall v \in V \ .$$

Нам потребуется также следующий результат [1].

Теорема 6.1. *Пусть X – рефлексивное банахово пространство, M – замкнутое, выпуклое подмножество X, $T : X \to X^*$ – псевдомонотонный оператор. Тогда при любом $f \in X^*$ задача:*

найти такую функцию $u \in M$, что

$$\langle Tu, v - u\rangle \geqslant \langle f, v - u\rangle \qquad \forall\, v \in M$$

имеет решение, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

i) T *– коэрцитивный оператор на M, то есть существует такое $v_0 \in M$, что*

$$\langle Tv, v - v_0\rangle \geq \rho(\|v - v_0\|_V)\|v\|_V \ \forall\, v \in M, \ \lim_{\xi\to+\infty} \rho(\xi) = +\infty. \tag{6.18}$$

ii) M *– ограниченное множество.*

Имеет место следующая

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия (4.1)–(4.7), (4.20) тогда*

1) если выполнены условия:

$$p_2 > p_1 > \frac{2p_2}{p_2 - 1}, \tag{6.19}$$

то неравенство (6.9) имеет решение при любых $f \in V^*$, $q^* \in R$;

2) если выполнены условия:

$$p_2 > p_1 = \frac{2p_2}{p_2 - 1}, \tag{6.20}$$

то существует такое $q_0 > 0$, что неравенство (6.9) имеет решение при любых $f \in V^*$ и всех q^*, удовлетворяющих неравенству:

$$|q^*| < q_0; \tag{6.21}$$

3) если выполнены неравенства (6.5), то для любого $c_0 > 0$ найдется такое $q_0 > 0$, что задача (6.9) имеет решение при условиях:

$$\|f\|_{V^*} \leqslant c_0\ ,\ |q^*| \leqslant q_0\ . \tag{6.22}$$

Доказательство. Из (6.19) следует, что $p_2 > 2p_2/(p_2 - 1)$, или $p_2 > 3$, тогда $p_1 > 2/(1 - p_2^{-1}) > 2$. Таким образом, выполнены неравенства (6.5) и оценка (см. (6.8)):

$$|\langle Bu, v\rangle| \leqslant \int\limits_{\Omega} |\partial_1(u+\xi)|\,|\partial_2(u+\xi)|\,|v| d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \|\partial_1(u+\xi)\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \|\partial_2(u+\xi)\|_{\mathrm{L}_{p_2}} \|v\|_{\mathrm{L}_r}, \tag{6.23}$$

где показатель r в силу условия (6.7) имеет вид:

$$r = \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 - p_1 - p_2}\,. \tag{6.24}$$

Из неравенства (6.19) получаем последовательность неравенств:

$$p_1(p_2 - 1) > 2p_2,$$

$$p_1(p_2 - 1) - p_2 > p_2,$$

$$1 > \frac{p_2}{p_1(p_2 - 1) - p_2},$$

и, таким образом,

$$p_1 > p_1 \frac{p_2}{p_1(p_2 - 1) - p_2} = r. \tag{6.25}$$

В силу непрерывной зависимости r от p_1, p_2 и неравенства (6.24) найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и $r_\varepsilon > r$, что выполнены условия:

$$\frac{1}{(p_1 - \varepsilon)} + \frac{1}{(p_2 - \varepsilon)} + \frac{1}{r_\varepsilon} = 1, \tag{6.26}$$

$$p_1 - \varepsilon > r_\varepsilon\,. \tag{6.27}$$

Далее, пользуясь следующим неравенством:

$$abc \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} + \frac{c^r}{r}\,,\ \text{где}\,\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1\,,\ p,q,r > 1\,,\ a,b,c \geqslant 0 \tag{6.28}$$

с показателями, удовлетворяющими равенству (6.26), из неравенства (6.23) получаем оценку:

$$|\langle Bu, v\rangle| \leqslant c\left(\|\partial_1(u+\xi)\|^{(p_1-\varepsilon)}_{\mathrm{L}_{p_1}} + \|\partial_2(u+\xi)\|^{(p_2-\varepsilon)}_{\mathrm{L}_{p_2}} + \|v\|^{r_\varepsilon}_{\mathrm{L}_{r_\varepsilon}}\right). \tag{6.29}$$

В силу теорем вложения Соболева (см. замечание 6.2) и неравенства (6.27) получаем оценку

$$\|v\|^{r_\varepsilon}_{\mathrm{L}_{r_\varepsilon}} \leqslant c\left(\|\partial_1(v+\xi)\|^{r_\varepsilon}_{\mathrm{L}_{p_1}} + \|\partial_2(v+\xi)\|^{r_\varepsilon}_{\mathrm{L}_{p_2}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\|\partial_1(v+\xi)\|^{(p_1-\varepsilon)}_{\mathrm{L}_{p_1}} + \|\partial_2(v+\xi)\|^{(p_2-\varepsilon)}_{\mathrm{L}_{p_2}} + 1\right). \tag{6.30}$$

Зафиксируем произвольный элемент v_0 из множества M, тогда из неравенства (4.23) в лемме 4.1 и неравенств (6.29), (6.30) получаем оценку

$$\langle Au, u-v_0\rangle - q^*\langle Bu, u-v_0\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{2}(c_1\|\partial_k u\|^{p_k}_{L_{p_k}} - c_2\|\partial_k u\|^{p_k-1}_{L_{p_k}} - c_\varepsilon|q^*|\,\|\partial_k u\|^{p_k-\varepsilon}_{L_{p_k}} - c_3)\forall\, u \in M, \tag{6.31}$$

из которой в условиях пункта 1) настоящей теоремы следует коэрцитивность оператора $A - q^*\,B$:

$$\lim_{\|u\|_V\to\infty}\frac{\langle Au, u-v_0\rangle - q^*\langle Bu, u-v_0\rangle}{\|u\|_V} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{(a_1+a_2)\to+\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{2}(c_1{a_k}^{p_k} - c_2{a_k}^{p_k-1} - c_\varepsilon|q^*|\,{a_k}^{p_k-\varepsilon} - c_3)}{(a_1+a_2)} = +\infty.$$

Из условий (6.20) также следует, что $p_2 > 3$ и $p_1 > 2$, а равенство (6.7) выполнено с показателем $r = p_1$. Из неравенства (6.23), пользуясь неравенством (6.28) с показателями, удовлетворяющими условию (6.7) и теоремой вложения Соболева получаем оценку:

$$|\langle Bu,u\rangle| \leqslant c\left(\|\partial_1(u+\xi)\|^{p_1}_{\mathrm{L}_{p_1}} + \|\partial_2(u+\xi)\|^{p_2}_{\mathrm{L}_{p_2}} + \|u\|^{r}_{\mathrm{L}_r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_*\left(\|\partial_1 u\|^{p_1}_{\mathrm{L}_{p_1}} + \|\partial_2 u\|^{p_2}_{\mathrm{L}_{p_2}} + 1\right), \tag{6.32}$$

из которой получаем неравенство:

$$\langle Au, u-v_0\rangle - q^*\langle Bu, u-v_0\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{2}((c_1 - c_*|q^*|)\|\partial_k u\|^{p_k}_{L_{p_k}} - c_2\|\partial_k u\|^{p_k-1}_{L_{p_k}} - c_3),\ \forall u \in M. \tag{6.33}$$

Положив теперь в условиях пункта 2) настоящей теоремы $q_0 = c_1/c_*$, получим, что при выполнении условия (6.21) оператор $A - q^* B$ коэрцитивен:

$$\lim_{\|u\|_V\to\infty} \frac{\langle Au, u-v_0\rangle - q^*\langle Bu, u-v_0\rangle}{\|u\|_V} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{(a_1+a_2)\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{2}((c_1 - c_*|q^*|)a_k{}^{p_k} - c_2 a_k{}^{p_k-1} - c_3)}{(a_1+a_2)} = +\infty.$$

Из монотонности оператора A (лемма 4.1) и псевдомонотонности оператора B (лемма 6.3), следует псевдомонотонность оператора $A - rB$ (см. замечание 2.2.12 из [1]). Таким образом, существование решения задачи (6.9) в случаях 1) и настоящей теоремы следует из условия i) теоремы 6.1.

Докажем теперь пункт 3) теоремы. Пусть число R_0 выбрано так, что при $R \geqslant R_0$ будет не пусто следующее множество:

$$M_R = \{u \in M : \|u\|_V \leqslant R\}.$$

Это – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, и из условия ii) теоремы 6.1 следует, что задача:

найти такую функцию $u_R \in M_R$, что

$$\langle (A - q^* B) u_R, v - u_R \rangle \geqslant \langle f, v - u_R \rangle \ \ \forall\, v \in M_R \tag{6.34}$$

имеет по крайней мере одно решение.

Пусть v_0 – некоторый элемент из множества M_{R_0}, $c_0 > 0$ – произвольное число. Из коэрцитивности оператора A следует существование такого $R_\nu > R_0$, что при $\|v\|_V \geqslant R_\nu$ для всех $f \in V^* : \|f\|_{V^*} \leqslant c_0$ выполнено неравенство:

$$\langle Av, v - v_0 \rangle - \langle f, v - v_0 \rangle \geqslant \langle Av, v - v_0 \rangle - c\|v - v_0\|_V > \nu > 0\ . \tag{6.35}$$

Поскольку B – ограниченный оператор, то, значит, найдется такое $q_0 > 0$, что при $\|v\|_V \leqslant R$ и $|q^*| \leqslant q_0$ выполнено неравенство:

$$|q^* \langle Bv, v - v_0 \rangle| \leqslant |q^*| \|Bv\|_{V^*} \|v - v_0\|_V \leqslant \nu/2. \tag{6.36}$$

Из (6.35) и (6.36) получаем, что при выполнении условий (6.22) имеет место неравенство:

$$\langle Av, v - v_0 \rangle - q^* \langle Bv, v - v_0 \rangle > \langle f, v - v_0 \rangle \ \ \forall v \in S_{R_\nu}\ , \tag{6.37}$$

где $S_{R_\nu} = \{v \in M : \|v\|_V = R_\nu\}$. Следовательно, если $\|u_{R_\nu}\| = R_\nu$, то выполнено неравенство

$$\langle (A - q^* B) u_{R_\nu}, u_{R_\nu} - v_0 \rangle > \langle f, u_{R_\nu} - v_0 \rangle \ \ v_0 \in M_{R_\nu}\ ,$$

противоречащее неравенству (6.34), и, таким образом, выполнено условие $\|u_{R_\nu}\|_V < R_\nu$.

Покажем, что u_{R_ν} будет решением задачи (6.9). Действительно, если $v \in M$, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ при котором

$$v_\varepsilon = (1 - \varepsilon) u_{R_\nu} + \varepsilon v \in M_{R_\nu}\ .$$

Используя в неравенстве (6.34) в качестве v функцию v_ε получим

$$\varepsilon \langle (A - q^* B) u_{R_\nu}, v - u_{R_\nu} \rangle \geqslant \varepsilon \langle f, v - u_{R_\nu} \rangle,$$

и, следовательно,

$$\langle (A - q^* B) u_{R_\nu}, v - u_{R_\nu} \rangle \geqslant \langle f, v - u_{R_\nu} \rangle \ \ \forall\, v \in M.$$

Теорема доказана.

Глава 3

Численное решение стационарных задач теории теории мягких сетчатых оболочек

§ 7. Аппроксимация квазивариационных неравенств.

В настоящем параграфе предлагаются и исследуются конечномерные аппроксимации квазивариационных неравенств с псевдомонотонными операторами. Исследуется разрешимость приближенных задач, близость их решений к точному и итерационные методы решения приближенных задач.

Пусть V – рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным пространством V^*, $\|\cdot\|_V$ – норма в V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*, M – замкнутое в слабой топологии, вообще говоря, невыпуклое подмножество пространства V. Каждому элементу $u \in M$ сопоставлено множество $M(u) \subseteq M$.

Каждому параметру h из множества $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ поставим в соответствие конечномерное подпространство V_h пространства V, замкнутое множество M_h из V_h, а каждому элементу $u_h \in M_h$ сопоставим замкнутое множество $M_h(u_h) \subseteq M_h$, $u_h \in M_h(u_h)$. Предполагаем, что выполнено

условие (I): *пусть последовательность* $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *сходится к нулю, последовательность* $\{v_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *из* M_{h_k} *слабо сходится к* v *в* V *при* $k \to +\infty$*. Тогда* v *принадлежит* M*, и для произвольной функции* w *из* $M(v)$ *найдется такая последовательность* $\{w_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$*, что*

$$w_{h_k} \in M_{h_k}(v_{h_k}), \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.1}$$

и

$$\lim_{k\to+\infty} \|w_{h_k} - w\|_V = 0. \qquad (7.2)$$

Квазивариационному неравенству:

$$\text{найти}\, u \in M \ : \ \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in M(u), \qquad (7.3)$$

где $f \in V^*$ – заданный элемент, поставим в соответствие аппроксимирующую задачу:

$$\text{найти}\, u_h \in M_h \ : \ \langle Au_h, v_h-u_h\rangle \geq \langle f, v_h-u_h\rangle \quad \forall v_h \in M_h(u_h). \qquad (7.4)$$

Справедлива

Теорема 7.1. *Пусть оператор A – псевдомонотонный, последовательность $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ решений задачи (7.4) слабо сходится в V к u^* при $h_k \to 0$, тогда ее предел u^* является решением задачи (7.3).*

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ слабо сходится к u в V при $h_k \to 0$. Поскольку $u_{h_k} \in M_h(u_{h_k}) \subseteq M_{h_k}$, то в силу условия (I) элемент u принадлежит множеству M, и существует последовательность $\{u^*_{h_k} \in M_{h_k}(u_{h_k})\}_{k=1}^{+\infty}$, для которой

$$\lim_{h_k\to 0} \|u^*_{h_k} - u\|_V = 0\ . \qquad (7.5)$$

Далее, из (7.4) с $v_{h_k} = u^*_{h_k}$ получаем неравенство

$$\langle Au_{h_k}\ ,\ u_{h_k} - u\rangle =$$

$$= \langle Au_{h_k}\ ,\ u_{h_k} - u^*_{h_k}\rangle + \langle Au_{h_k}\ ,\ u^*_{h_k} - u\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle f\ ,\ u_{h_k} - u^*_{h_k}\rangle + \|Au_{h_k}\|_{V^*}\|u^*_{h_k} - u\|_V\ .$$

Переходя в нем к пределу при $h_k \to 0$, пользуясь слабой сходимостью $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ к u, а также соотношением (7.5), получаем

$$\limsup_{h_k\to 0} \langle Au_{h_k}, u_{h_k} - u\rangle \leqslant 0.$$

Из последнего неравенства и псевдомонотонности оператора A имеем:

$$\liminf_{h_k\to 0} \langle Au_{h_k}, u_{h_k} - v\rangle \geqslant \langle Au, u - v\rangle \ \ \forall v \in M. \tag{7.6}$$

Согласно условию (I) для произвольной функции $v \in M(u)$ существует последовательность $\{v_{h_k} \in M_{h_k}(u_{h_k})\}_{k=1}^{+\infty}$, для которой

$$\lim_{h_k\to 0} \|v_{h_k} - v\|_V = 0 \ .$$

Используя это равенство и слабую сходимость последовательности $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ к u, получаем

$$\begin{gathered}\limsup_{h_k\to 0} \langle Au_{h_k}, u_{h_k} - v\rangle \leqslant \\ \leqslant \limsup_{h_k\to 0} \langle Au_{h_k}, u_{h_k} - v_{h_k}\rangle + \limsup_{h_k\to 0} \langle Au_{h_k}, v_{h_k} - v\rangle \leqslant \\ \leqslant \limsup_{h_k\to 0} \langle f, u_{h_k} - v_{h_k}\rangle + \limsup_{h_k\to 0} \|Au_{h_k}\|_{V^*}\|v_{h_k} - v\|_V = \\ = \langle f, u - v\rangle \ .\end{gathered} \tag{7.7}$$

Собирая вместе неравенства (7.6) и (7.7), имеем

$$\langle Au^* \ , \ v - u^*\rangle \geqslant \langle f, v - u^*\rangle \ \ \forall v \in M,$$

то есть u – решение задачи (7.3). **Теорема доказана**.

Пусть теперь, в дополнение условию (I), выполнены

условие (II): *пусть последовательность $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ из M_h сходится к v в V при $k \to +\infty$. Тогда v принадлежит M_h, и для произвольной функции w из $M_h(v)$ найдется такая последовательность $\{w^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$, что*

$$w^{(k)} \in M_h(v^{(k)})\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.8}$$

и

$$\lim_{k\to +\infty} \|w^{(k)} - w\|_V = 0; \tag{7.9}$$

условие (III): *пусть параметр h принадлежит множеству $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$. Тогда множество $M_h(v)$, сопоставленное элементу v из M_h, является выпуклым и замкнутым.*

Далее будем предполагать, также, что оператор $A: V \to V^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным, псевдомонотонным, потенциальным и коэрцитивным, то есть удовлетворяет условиям (1.3)–(1.7).

Пусть последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится к нулю при $k \to +\infty$, последовательность элементов $\{u_{h_k}^{(0)}\}_{k=1}^{+\infty}$ из M_{h_k} ограничена в V:

$$\exists\, c > 0 \ :\ \|u_{h_k}^{(0)}\|_V \leqslant c\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.10}$$

и, следовательно

$$\exists\, c_0 > 0 \ :\ F(u_{h_k}^{(0)}) \leqslant c_0\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.11}$$

где функционал $F: V \to R^1$ определен соотношением (1.8).

Для решения задачи (7.4) при каждом $h = h_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\text{для } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ найти } u_h^{(n+1)} \in M_h(u_h^{(n)}) \ :\ \langle J(u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}), v - u_h^{(n+1)}\rangle \geq$$

$$\geq \tau\langle f - Au_h^{(n)}, v - u_h^{(n+1)}\rangle \quad \forall\, v \in M_h(u_h^{(n)}), \tag{7.12}$$

где $\tau > 0$– итерационный параметр, $J: V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Ψ и удовлетворяющий условиям (1.11)

Существование и единственность решения вариационного неравенства (7.12) следует из условия (III) и строгой монотонности и хеминепрерывности оператора двойственности [1, стр. 186–187].

Аналогично теореме 1.1 доказывается следующая

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия* (I)–(III), *оператор A удовлетворяет условиям (1.3)–(1.7), и, кроме того,*

$$0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}, \quad \mu_0 = \mu(d_0 + \Psi^{-1}(d_1)), \tag{7.13}$$

где

$$d_0 = \sup_{u \in S^0} \|u\|_V, \quad d_1 = \sup_{u \in S^0} \|Au - f\|_{V^*},$$
$$S^0 = \{u \in V : F(u) \leqslant c_0\}, \tag{7.14}$$

константа c_0 *– из неравенства (7.11). Тогда итерационная последовательность* $\{u_h^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ *содержится в* S^0*, следовательно, ограничена в* V*, и все ее предельные точки являются решениями задачи (7.4).*

Замечание 7.1. *Из теоремы 7.2 следует существование решения квазивариационного неравенства (7.4) при любом* h*. Более того, пусть* u_{h_k} *– предельная точка итерационной последовательности* $\{u_h^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ *при каждом* $h = h_k$*,* $k = 1, 2, 3, \ldots$*. Тогда последовательность* $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *принадлежит множеству* S^0 *и, следовательно, ограничена в* V*. Таким образом, пользуясь теоремой 7.1, получаем, что все слабо предельные точки последовательности* $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *являются решениями задачи (7.3).*

§ 8. Исследование приближенных методов решения задач о равновесии сетчатой оболочки с препятствием.

Ниже рассмотренную выше абстрактную схему аппроксимации квазивариационных неравенств используем для исследования конечноэлементных аппроксимаций задач (4.22) и (6.9) с множествами M, $M(u)$, соответственно, определенными в (4.16) и (5.4).

Будем предполагать, что область $\Omega \subset R^2$ является многоугольником. Пусть $\mathcal{T}_h$ – некоторое семейство (триангуляция) треугольников K, обладающее следующими свойствами:

1.

$$\bigcup_{K \subset \mathcal{T}_h} K = \Omega;$$

2.
$$\mathrm{int}K\bigcap\mathrm{int}K^*=\emptyset \qquad \forall K,K^*\in\mathcal{T}_h;$$

3. для любых $K,K^*\in\mathcal{T}_h$ множество $K\bigcap K^*$, если не пусто, то является либо стороной, либо вершиной одновременно треугольников K и K^*;

4. триангуляция $\mathcal{T}_h$ является регулярной :

$$\sigma(h)\leqslant c<+\infty \text{ при } h\to 0.$$

Здесь
$$h=\max_{K\subset\mathcal{T}_h}R_K\ ,\ \sigma(h)=\max_{K\subset\mathcal{T}_h}\frac{R_K}{\rho_K}\ ,$$
R_K – диаметр наименьшей окружности, содержащей K, ρ_K – диаметр наибольшей окружности, содержащейся в K.

Определим теперь конечномерные пространства W_h и V_h, ассоциируемые с триангуляцией $\mathcal{T}_h$:

$$W_h=X_h\times X_h\times X_h\ ,\ \ V_h=\overset{\circ}{X}_h\times\overset{\circ}{X}_h\times\overset{\circ}{X}_h\ ,$$

где X_h $(\overset{\circ}{X}_h)$ – пространство непрерывных функций (равных нулю на границе множества Ω), являющихся на каждом K из $\mathcal{T}_h$ полиномами не выше первого порядка.

Очевидно, что $X_h\subset W_p^1(\Omega)$ $(\overset{\circ}{X}_h\subset\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$, и значит, $W_h\subset W$ $(V_h\subset V)$.

Пусть
$$\overline{\Omega}_h=\left\{\alpha_l\in\overline{\Omega}\ ,\ l=1,2,\ldots,N_h\right\} \tag{8.1}$$
– множество всех вершин треугольников $K\in\mathcal{T}_h$,

$$\Omega_h=\left\{\alpha\in\overline{\Omega}_h:\alpha\in\Omega\right\} \tag{8.2}$$

– множество вершин, находящихся в области Ω.

Для произвольной функции $\psi \in [C(\Omega)]^3$ определим интерполянт $\Pi_h \psi \in W_h$ соотношением

$$\Pi_h \psi(x_l) = \psi(x_l) \;\; l = 1, 2, \ldots, N_h \, . \tag{8.3}$$

Множеству $M \subseteq V$, определенному в (4.16), сопоставим множество $M_h \subseteq V_h$:

$$M_h = \{ v \in V_h : \; \xi_3(\alpha) + v_3(\alpha) \geq F(\xi(\alpha) + v(\alpha)) \; , \; \alpha \in \Omega_h \} \, , \tag{8.4}$$

множеству $M(u) \subseteq M$, определенному в (5.4), сопоставим множество $M_h(u_h) \subseteq M_h$:

$$M_h(u_h) = \{ v \in V_h \; : (\xi_3(\alpha) + v_3(\alpha) - P^{u_h}(\alpha), N(P^{u_h}(\alpha))) \geq 0, \quad \alpha \in \Omega_h \} \, . \tag{8.5}$$

Квазивариационной задаче (4.22) поставим в соответствие аппроксимирующую задачу (7.4) с множествами V_h, M_h и $M_h(v)$, определенными в (8.4), (8.5).

Проверим, что при выполнении условия (5.10), а также некоторых дополнительных к (4.1)–(4.4) условий на функции $t_k : R_+ \to R_+$, выполнены условия (I)–(III), а также (1.3)–(1.7). При этом в силу теоремы 7.2 и замечания 7.1, построенная выше схема МКЭ и итерационный метод (7.12) решения аппроксимирующей задачи будут обоснованы.

Очевидно, что при наличии неравенства (5.10) (см. замечание (5.1)), условие (III) выполнено. Несложно проверяется для построенной схемы аппроксимации, и выполнение условия (II).

Для доказательства справедливости условия (I) нам понадобится следующая

Лемма 8.1. *Пусть выполнено неравенство (5.10), последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится к нулю, последовательность $\{v_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ из M_{h_k} слабо сходится к v в V при $k \to +\infty$. Тогда v принадлежит M, и* *для произвольной функции w из $M(v)$ существует такая константа $\varepsilon_w > 0$, не зависящая от k, что для всякого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_w]$ найдется номер k_ε, начиная с которого выполнено включение*

$$w_\varepsilon^{(k)} \in M_{h_k}(v_{h_k}) \,, \tag{8.6}$$

где

$$w_\varepsilon^{(k)} = \Pi_{h_k}(w_\varepsilon) \equiv \Pi_{h_k}(w + \theta_\varepsilon e_3) \,,\, e_3 = (0,0,1) \,, k = 1,2,3,\ldots, \tag{8.7}$$

а функция θ_ε определена согласно (5.6).

Доказательство. Установим принадлежность v множеству M. Из слабой сходимости в пространстве V последовательности $\{v_{h_k}\}$ к v и компактного вложения (см. замечание (5.1)) пространства V в $[C(\Omega)]^3$ имеем равномерную сходимость этой последовательности:

$$\forall\, \delta > 0 \,,\, \exists\, i_\delta : \; |\, v_{h_k}(\alpha) - v(\alpha)\, | < \delta \quad \forall\, i > i_\delta \,, \quad \forall\, \alpha \in \Omega \,. \tag{8.8}$$

Поскольку последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится к нулю, то для всякой точки $\alpha \in \Omega$ найдется последовательность $\alpha_{h_k} \in \mathcal{T}_{h_k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, сходящаяся к α. Функции ξ, v непрерывны, следовательно, учитывая (8.8) и определение (4.16), для произвольного $\alpha \in \Omega$ получаем неравенство:

$$F(\xi(\alpha) + v(\alpha)) = \lim_{k\to+\infty} F(\xi(\alpha_{h_k}) + v(\alpha_{h_k}) \pm v_{h_k}(\alpha_{h_k})) =$$
$$= \lim_{k\to+\infty} F(\xi(\alpha_{h_k}) + v_{h_k}(\alpha_{h_k})) \leqslant \lim_{i\to+\infty} \xi_3(\alpha_{h_k}) + (v_{h_k}(\alpha_{h_k}))_3 =$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \xi_3(\alpha_{h_k}) + (v_{h_k}(\alpha_{h_k}))_3 \pm v_3(\alpha_{h_k}) = \xi_3(\alpha) + v_3(\alpha), \tag{8.9}$$

означающее принадлежность v множеству M.

Поскольку функция w принадлежит множеству M, то $w_\varepsilon^{(k)} \in M_{h_k}$. Далее, для произвольного $\alpha \in \overline{\Omega}$ имеем

$$(\xi(\alpha) + w_\varepsilon^{(k)}(\alpha) - P^{v_{h_k}}(\alpha), N(P^{v_{h_k}}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + \Pi_{h_k} w_\varepsilon)(\alpha) - P^{v_{h_k}}(\alpha) \pm P^v(\alpha), N(P^{v_{h_k}}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + \Pi_{h_k} w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^{v_{h_k}}(\alpha)) \pm N(P^v(\alpha)))+$$

$$+(P^v(\alpha) - P^{v_{h_k}}(\alpha), N(P^{v_{h_k}}(\alpha))) =$$

$$= ((\xi + \Pi_{h_k} w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha)))+$$

$$+((\xi + \Pi_{h_k} w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^{v_{h_k}}(\alpha)) - N(P^v(\alpha)))+$$

$$+(P^v(\alpha) - P^{v_{h_k}}(\alpha), N(P^{v_{h_k}}(\alpha))). \tag{8.10}$$

Оценим первое слагаемое в правой части снизу. В силу (8.7) и (8.3) имеем

$$((\xi + \Pi_{h_k} w_\varepsilon)(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) =$$

$$= ((\xi+w_\varepsilon)(\alpha)-P^v(\alpha), N(P^v(\alpha)))+\theta_\varepsilon(\alpha)(e_3, N(P^v(\alpha))),\ \alpha \in \bar\Omega_{h_k}. \tag{8.11}$$

Поскольку для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место включение $\bar\Omega_{h_k} \subset \bar\Omega$, то неравенство (5.24) выполнено при $\alpha \in \bar\Omega_{h_k}$.

Оценка сверху оставшихся двух слагаемых в правой части (8.10) и получение включения (8.6) проводится так же, как и при доказательстве леммы 5.1. **Лемма доказана**.

На основании Леммы 8.1 при наличии неравенства (5.10), следуя доказательству теоремы 5.1, устанавливается справедливость условия (I). Таким образом, для построенной схемы выполнены условия (I)–(III).

В следующих утверждениях (Леммы 8.2-8.4) устанавливаются свойства ограниченной липшиц-непрерывности и неравенство подчинения для оператора A, участвующего в формулировке задач (4.22) и (6.9), которые будут использованы при исследовании сходимости итерационного метода (7.12).

Лемма 8.2. *Пусть $p \geqslant 2$, и функция $t : R_+ \to R_+$ удовлетворяет неравенству:*

$$t(\lambda) - t(\nu) \leqslant c_0(1 + \lambda + \nu)^{p-2}(\lambda - \nu)\ \ \forall\, \lambda > \nu \geqslant 0\ , \tag{8.12}$$

где $c_0 > 0$. Тогда существуют такие постоянные $c_1, c_2 > 0$, что для любых $x, y \in R^3$ выполнены неравенства:

$$\left| \frac{t(|x|)}{|x|}x - \frac{t(|y|)}{|y|}y \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left(\frac{t(|x|)}{|x|}x - \frac{t(|y|)}{|y|}y \; , \; x-y \right) (1+|x|^p+|y|^p)^{1-2/p}, \tag{8.13}$$

$$\left| \frac{t(|x|)}{|x|}x - \frac{t(|y|)}{|y|}y \right| \leqslant c_2 \,|\; x-y \;|\, (1+|x|+|y|)^{p-2}. \tag{8.14}$$

Лемма 8.3. *Пусть для $k = 1, 2$ функции $t_k : R_+ \to R_+$ удовлетворяют неравенству (8.12) с показателем $p_k \geqslant 2$. Тогда операторы A_k, определенные в (4.18), удовлетворяют неравенствам:*

$$\|T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(v))\|^2_{L_{q_k}} \leqslant$$

$$\leqslant c\langle A_k u - A_k v, u - v\rangle (c_* + \|\partial_k u\|_{L_{p_k}} + \|\partial_k v\|_{L_{p_k}})^{p_k-2} \,\forall u, v \in V, \tag{8.15}$$

$$\|A_k u - A_k v\|_{V^*} \leqslant \|T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(v))\|_{L_{q_k}} \,\forall u, v \in V, \tag{8.16}$$

где $q_k = p_k/(p_k - 1)$ и $c, c^* > 0$.

Доказательство. Пользуясь неравенством (8.13), получаем:

$$\int\limits_\Omega |T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(v))|^{q_k} d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \int\limits_\Omega (T_k(x) - T_k(y), x-y)^{q_k/2} (1+|\Lambda_k(u)|^{p_k} + |\Lambda_k(v)|^{p_k})^{(1-2/p_k)(q_k/2)} d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \left(\int\limits_\Omega (T_k(x) - T_k(y) \; , \; x-y)\, d\alpha \right)^{q_k/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega c_1 + |\Lambda_k(u)|^{p_k} + |\Lambda_k(v)|^{p_k} d\alpha \right)^{(2-q_k)/2}.$$

Далее, возводя в степень $2/q_k$ обе части последнего неравенства, получаем:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(v))|^{q_k} d\alpha\right)^{2/q_k} \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \int\limits_{\Omega} (T_k(x) - T_k(y), x - y)\, d\alpha \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} c_1 + |\Lambda_k(u)|^{p_k} + |\Lambda_k(v)|^{p_k} d\alpha\right)^{(p_k-2)/p_k} \leqslant$$

$$\leqslant c\langle A_k u - A_k v, u - v\rangle (c_* + \|\partial_k u\|_{L_{p_k}} + \|\partial_k v\|_{L_{p_k}})^{p_k-2},$$

то есть неравенство (8.15) имеет место.

Справедливость неравенства (8.16) следует из оценки:

$$|\langle A_k u - A_k v, w\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(v))|\, |\partial_k w| d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \|T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(v))\|_{L_{q_k}} \|\partial_k w\|_{L_{p_k}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 8.4. *Пусть выполнены условия леммы 8.3. Когда оператор A удовлетворяет неравенству:*

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leqslant (c_0 + c_1\|u\|_V^{p-2} + c_1\|v\|_V^{p-2})\|u - v\|_V \, \forall u, v \in V, \quad (8.17)$$

где $p = \max\{p_1, p_2\}$, $c_0, c_1 > 0$, и, следовательно, для оператора A выполнено условие (1.3) со следующими функциями Φ, μ:

$$\Phi(t) = t, \quad (8.18)$$

$$\mu(t) = c_0 + c_1 t^{p-2} \quad (8.19)$$

Доказательство. Возведем неравенство (8.16) в квадрат и воспользуемся неравенством (8.15), тогда получим:

$$\|A_k u - A_k v\|_{V^*}^2 \leqslant$$
$$\leqslant c\langle A_k u - A_k v, u - v\rangle (c_* + \|\partial_k u\|_{L_{p_k}} + \|\partial_k v\|_{L_{p_k}})^{p_k - 2} \leqslant$$
$$\leqslant c\|A_k u - A_k v\|_{V^*}\|u - v\|_V (c_* + \|\partial_k u\|_{L_{p_k}} + \|\partial_k v\|_{L_{p_k}})^{p_k - 2}.$$

Таким образом, выполнена оценка:

$$\|A_k u - A_k v\|_{V^*} \leqslant c\|u - v\|_V (c_* + \|\partial_k u\|_{L_{p_k}} + \|\partial_k v\|_{L_{p_k}})^{p_k - 2} \leqslant$$
$$\leqslant \|u - v\|_V (c_0 + c_1\|u\|_V^{p-2} + c_1\|v\|_V^{p-2}).$$

При этом для оператора $A = A_1 + A_2$ получаем неравенство (8.17).

Лемма доказана.

Из леммы 4.1 следует, что оператор A, участвующий в задаче (4.22), является псевдомонотонным и коэрцитивным, в ходе доказательства теоремы 4.1 установлена потенциальность оператора A, в лемме 8.4 доказана ограниченная липшиц-непрерывность этого оператора. Таким образом, для A выполнены условия (1.3)–(1.7).

Далее рассматривается свойство аппроксимаций решений задачи (4.22) при дополнительной гладкости правой части и решения этой задачи. Будем предполагать, что выполнено неравенство (6.1), и множество M является выпуклым. В этом случае задача (4.22) преобразуется в вариационное неравенство, и соответствующая конечномерная задача является вариационным неравенством (множество M_h определено в (8.4)):

$$\text{найти}\, u_h \in M_h \,:\, \langle Au_h, v_h - u_h\rangle \geq \langle f, v_h - u_h\rangle \quad \forall v_h \in M_h. \tag{8.20}$$

Обозначим через L_p^* пространство сопряженное к L_p (см. замечание 6.2, стр. 45). Очевидно, что V плотно вкладывается в L_p, следовательно, если $g \in \mathrm{L}_p^* \subset V^*$, то выполнено неравенство

$$\langle g, v\rangle \leqslant \|g\|_{\mathrm{L}_p^*}\|v\|_{\mathrm{L}_p} \;\; \forall v \in V\ . \tag{8.21}$$

Имеет место

Лемма 8.5. *Пусть выполнено неравенство* $p = \min\{p_1, p_2\} \geqslant 2$, *решение* u *задачи (7.3) и правая часть* f *удовлетворяют условиям* $u \in V_2 = [W_p^{(2)}(\Omega)]^3$, $(f - Au) \in \mathrm{L}_p^*$. *Тогда, если* u_h *– решение задачи (7.4), то выполнена оценка:*

$$\sum_{k=1}^{2} \|T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(u_h))\|_{\mathrm{L}_{q_k}} \leqslant ch \tag{8.22}$$

с константой c, *не зависящей от* h.

Доказательство. Сложим неравенства (4.22) и (8.20):

$$\langle Au_h, v_h - u_h\rangle + \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v_h - u_h\rangle + \langle f, v - u\rangle \pm \langle Au_h - Au, u_h - u\rangle.$$

Далее, имеем

$$\langle Au_h - Au, u_h - u\rangle \leqslant \langle f - Au, u_h - v + u - v_h\rangle + \langle Au_h - Au, v_h - u\rangle.$$

Из определения M_h и условия (6.1) следует включение $M_h \subseteq M$. Выбирая $v = u_h \in M_h \subseteq M$, $v_h = \Pi_h u$ и учитывая (8.21), получаем

$$\langle Au_h - Au, u_h - u\rangle \leqslant \|f - Au\|_{\mathrm{L}_p^*}\|u - \Pi_h u\|_{\mathrm{L}_p} + \|Au_h - Au\|_{V^*}\|\Pi_h u - u\|_V.$$

Обозначим

$$D = \sum_{k=1}^{2} \|T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(u_h))\|_{\mathrm{L}_{q_k}}.$$

Из коэрцитивности оператора A следует равномерная ограниченность по h в V решений $\{u_h\}$ задачи (8.20), следовательно, в силу (8.15) и (8.16) имеем

$$D^2 \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{2} \|T_k(\Lambda_k(u)) - T_k(\Lambda_k(u_h))\|^2_{\mathrm{L}_{q_k}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{k=1}^{2} \langle A_k u_h - A_k u, u_h - u\rangle = c_1\langle Au_h - Au, u_h - u\rangle$$

$$\|Au_h - Au\|_{V^*} \leqslant \sum_{k=1}^{2} \|A_k u_h - A_k u\|_{V^*} \leqslant c_2 D$$

с константами $c_1, c_2 > 0$ не зависящими от h.

В силу гладкости u и использованной схемы МКЭ имеем оценки (см. [11])

$$\|u - \Pi_h u\|_{L_p} \leqslant c\|u\|_{V_2} h^2 \ , \ \|u - \Pi_h u\|_V \leqslant c\|u\|_{V_2} h \ .$$

Из полученных неравенств следует, что

$$D^2 \leqslant c(h^2 + 2Dh)$$

а значит,

$$D \leqslant h(c + \sqrt{c^2 + c}) \ .$$

Лемма доказана.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир, 1972. - 588 с.

2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1978. - 336 с.

3. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. - М.: Наука, 1990. - 206 с.

4. *Шагидуллин Р.Р.* Проблемы математического моделирования мягких оболочек. - Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2001. - 235 с.

5. *Бидерман В.Л., Бухин Б.Л.* Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Инж. журн. МТТ. - 1966. - N 1. - С 84-89.

6. *Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р.* Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения// Известия ВУЗов. Математика. - 1992. - N 1. - С. 7-17.

7. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек// Известия ВУЗов. Математика. - 1992. - N 11. - С. 3-7.

8. *Байокки К., Капелло А.* Вариационные и квазивариационные неравенства Приложения к задачам со свободной границей. - М.: Наука, 1988. - 448 с.

9. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. - М.: Мир, 1989. - 496 с.

10. *Задворнов О.А.* Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием// Известия ВУЗов. Математика. - 2003. - N 1. - С. 45-52.

11. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. - М.: Мир, 1980. - 512 с.

12. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. - 156 с.

13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. - 348 с.