УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 149, кн. 1 Физико-математические науки *2007*

УДК 539.189.1

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО ПАРЦИАЛЬНЫМ ВОЛНАМ

Р.Х. Гайнутдинов, А.А. Мутыгуллина, А.С. Петрова

Аннотация

В данной работе проведено разложение обобщенного динамического уравнения в базисе парциальных волн. Это разложение продемонстрировано на примере двухнуклонной системы, при описании которой необходимо учитывать не только орбитальный момент количества движения, но и изотопический спин и симметрии сильных взаимодействий.

Введение

После пионерской работы Вайнберга [1] методы эффективной теории поля стали широко использоваться в различных областях физики. Основная идея эффективных теорий заключается в том, что динамика при низких энергиях не зависит от деталей динамики при высоких энергиях. При описании низкоэнергетической динамики можно ограничиться определенным числом степеней свободы, значимых для данного энергетического масштаба. Вследствие того, что при этом отбрасываются другие степени свободы, эффективное взаимодействие оказывается нелокальным во времени. Для решения этих задач необходимо иметь возможность описывать эволюцию квантовых систем, взаимодействие которых является нелокальным во времени. Однако уравнение Шредингера по своей сути является локальным по времени, и гамильтониан описывает мгновенное взаимодействие. Между тем, в работе [2] было показано, что уравнение Шредингера не является самым общим динамическим уравнением, совместным с современными концепциями квантовой физики, и более общее уравнение движения было выведено как следствие основополагающих физических принципов. Являясь эквивалентным уравнению Шредингера в случае, когда динамика в системе определяется мгновенным взаимодействием, это обобщенное динамическое уравнение позволяет расширить квантовую динамику на случай нелокальных во времени взаимодействий. Развитый таким образом формализм – обобщенная квантовая динамика (ОКД) – открывает новые возможности для построения эффективных теорий. Действительно, нами было показано [3], что после перенормировки динамика нуклонов в лидирующем порядке эффективной теории описывается не уравнением Шредингера, а обобщенным динамическим уравнением с нелокальным во времени взаимодействием. Как было показано в работе [4], формализм ОКД и обобщенное динамическое уравнение открывают также новые возможности для описания открытых квантовых систем. Как и в случае эффективной теории ядерных сил, нелокальность во времени взаимодействия этой системы с ее окружением обусловлена тем, что при ее описании ограничиваются небольшим числом степеней свободы. Степени свободы окружения, которые при этом явно не учитываются, могут проявлять себя в процессе взаимодействия открытой системы. Такое взаимодействие, очевидно, является нелокальным во времени. Формализм ОКД позволяет [4] последовательно учесть эту нелокальность при описании динамики открытой квантовой системы.

Важным является то, что нелокальность во времени взаимодействия открытой системы с ее окружением может существенно влиять на характер динамики этой системы [4].

Таким образом, использование обобщенного динамического уравнения открывает новые возможности для решения многих задач в рамках эффективных теорий, поскольку позволяет учитывать естественную нелокальность эффективного взаимодействия. В то же время для решения многих задач удобнее пользоваться парциальным базисом. Цель данной работы заключается в разложении обобщенного динамического уравнения по парциальным волнам. В работе такое разложение демонстрируется на примере двухнуклонной системы, где наряду с орбитальным и спиновым моментами необходимо учитывать изоспин и симметрии сильных взаимодействий.

1. Состояния системы двух нуклонов, парциальные амплитуды

Обязательным этапом исследования нуклон-нуклонных взаимодействий является сравнение вычисленных и экспериментальных величин дифференциальных сечений при малых энергиях. Экспериментальная информация заключена в сдвигах фаз, которые классифицируются по орбитальному моменту L, полному спину S и полному моменту количества движения J. Следует отметить, что изоспин двухнуклонной системы T не указывается, поскольку он определяется автоматически из условия, что $L+S+T$ – нечетно, поскольку нуклоны – тождественные фермионы. Мы будем рассматривать взаимодействие двух нуклонов в терминах состояний $|p;L;S;JM\rangle$, где p – относительный импульс нуклонов и M – проекция полного углового момента на ось z. Существуют четыре возможные комбинации L и S, векторная сумма которых дает заданные значения J:

$$|p;L=J;S=0;JM\rangle, \tag{1}$$

$$|p;L=J;S=1;JM\rangle, \tag{2}$$

$$|p;L=J-1;S=1;JM\rangle, \tag{3}$$

$$|p;L=J+1;S=1;JM\rangle. \tag{4}$$

Из условия нечетности суммы $L+S+T$ следует, что состояниям (1), (3), и (4) соответствует один и тот же изоспин (система двух нейтронов или двух протонов), а состояние 2 имеет противоположное значение изоспина (система из протона и нейтрона). Таким образом, если не учитывать свойств симметрии нуклон-нуклонных взаимодействий, при заданных JM имеется шестнадцать независимых амплитуд, дающих вклад во взаимодействие, которые мы обозначим как $\langle p';L';S';JM|T(z)|p;L;S;JM\rangle$. Общие ограничения, налагаемые законом сохранения четности и зарядовой независимостью, позволяют уменьшить это число до шести. Сохранение четности означает, что для нуклон-нуклонного взаимодействия запрещены переходы между состояниями с $L=J$, то есть состояниями (1) и (2), и состояниями с $L=J\pm1$, то есть состояниями (3) и (4). Нуклон-нуклонное взаимодействие изоскалярно и не может связывать состояний с различным изоспином, то есть состояние (2) не может быть связано с состояниями (1), (3) или (4). Таким образом, мы приходим к шести независимым парциальным амплитудам:

$$\langle p';L'=J;S'=0;JM|T(z)|p;L=J;S=0;JM, \tag{5}$$

$$\langle p';L'=J;S'=1;JM|T(z)|p;L=J;S=1;JM\rangle, \tag{6}$$

$$\langle p';L'=J-1;S'=1;JM|T(z)|p;L=J-1;S=1;JM\rangle, \tag{7}$$

Табл. 1

Возможные переходы для системы двух нуклонов

	Синглетный канал	Триплетный канал
$J=0$	${}^1S_0 \to {}^1S_0$	${}^3P_0 \to {}^3P_0$
$J=1$	${}^1P_1 \to {}^1P_1$	${}^3P_1 \to {}^3P_1$; ${}^3S_1 \to {}^3D_1$, ${}^3D_1 \to {}^3S_1$, ${}^3S_1 \to {}^3S_1$, ${}^3D_1 \to {}^3D_1$.
$J=2$	${}^1D_2 \to {}^1D_2$	${}^3P_2 \to {}^3P_2$, ${}^3F_2 \to {}^3F_2$, ${}^3P_2 \to {}^3F_2$, ${}^3F_2 \to {}^3P_2$; ${}^3D_2 \to {}^3D_2$.
$J=3$	${}^1F_3 \to {}^1F_3$	${}^3D_3 \to {}^3D_3$, ${}^3G_3 \to {}^3G_3$, ${}^3D_3 \to {}^3G_3$, ${}^3G_3 \to {}^3D_3$; ${}^3F_3 \to {}^3F_3$.
$J=4$	${}^1G_4 \to {}^1G_4$	${}^3G_4 \to {}^3G_4$; ${}^3H_4 \to {}^3F_4$, ${}^3F_4 \to {}^3H_4$, ${}^3F_4 \to {}^3F_4$, ${}^3H_4 \to {}^3H_4$.
$J=5$	${}^1H_5 \to {}^1H_5$	${}^3H_5 \to {}^3H_5$; ${}^3G_5 \to {}^3I_5$, ${}^3I_5 \to {}^3G_5$, ${}^3G_5 \to {}^3G_5$, ${}^3I_5 \to {}^3I_5$.
$J=6$	${}^1I_6 \to {}^1I_6$	${}^3I_6 \to {}^3I_6$; ${}^3H_6 \to {}^3K_6$, ${}^3K_6 \to {}^3H_6$, ${}^3H_6 \to {}^3H_6$, ${}^3K_6 \to {}^3K_6$.

$$\langle p'; L'=J+1; S'=1; JM|T(z)|p; L=J+1; S=1; JM\rangle, \tag{8}$$

$$\langle p'; L'=J-1; S'=1; JM|T(z)|p; L=J+1; S=1; JM\rangle, \tag{9}$$

$$\langle p'; L'=J+1; S'=1; JM|T(z)|p; L=J-1; S=1; JM\rangle \tag{10}$$

В табл. 1 указаны возможные переходы для синглетного и триплетного каналов. В табл. 2 указаны возможные переходы для системы тождественных частиц – pp или nn, и для системы разных частиц – pn.

2. Обобщенное динамическое уравнение в базисе парциальных волн

Обобщенное динамическое уравнение в терминах T-матрицы, которое было получено в работе [2] как следствие наиболее общих принципов современной квантовой физики, имеет следующий вид:

$$\frac{d\langle n_2|T(z)|n_1\rangle}{dz} = -\sum_n \frac{\langle n_2|T(z)|n\rangle\langle n|T(z)|n_1\rangle}{(z-E_n)^2}, \tag{11}$$

где n_1 и n_2 обозначают дискретные и непрерывные наборы параметров, полностью характеризующих систему в начальный и конечный моменты времени соответственно, $|n\rangle$ – собственные векторы оператора H_0. Следует отметить, что определение T-матрицы в формализме ОКД совпадает с ее определением в стандартной теории лишь в частном случае локальных взаимодействий. В импульсном представлении обобщенное динамическое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d\langle \mathbf{p}_2|T(z)|\mathbf{p}_1\rangle}{dz} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\langle \mathbf{p}_2|T(z)|\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|T(z)|\mathbf{p}_1\rangle}{(z-E_k)^2}. \tag{12}$$

Табл. 2

Возможные переходы для тождественных и разных частиц

	$T=1$: pp или nn	$T=0$: pn
$J=0$	${}^1S_0 \to {}^1S_0$; ${}^3P_0 \to {}^3P_0$	
$J=1$	${}^3P_1 \to {}^3P_1$	${}^1P_1 \to {}^1P_1$; ${}^3S_1 \to {}^3D_1$, ${}^3D_1 \to {}^3S_1$, ${}^3S_1 \to {}^3S_1$, ${}^3D_1 \to {}^3D_1$.
$J=2$	${}^3D_2 \to {}^3D_2$; ${}^3P_2 \to {}^3F_2$, ${}^3F_2 \to {}^3P_2$, ${}^3P_2 \to {}^3P_2$, ${}^3F_2 \to {}^3F_2$.	${}^3D_2 \to {}^3D_2$
$J=3$	${}^3F_3 \to {}^3F_3$	${}^3D_3 \to {}^3D_3$, ${}^3G_3 \to {}^3G_3$, ${}^3D_3 \to {}^3G_3$, ${}^3G_3 \to {}^3D_3$; ${}^1F_3 \to {}^1F_3$.
$J=4$	${}^1G_4 \to {}^1G_4$; ${}^3H_4 \to {}^3F_4$, ${}^3F_4 \to {}^3H_4$, ${}^3F_4 \to {}^3F_4, {}^3H_4 \to {}^3H_4$.	${}^3G_4 \to {}^3G_4$
$J=5$	${}^3H_5 \to {}^3H_5$	${}^1H_5 \to {}^1H_5$; ${}^3G_5 \to {}^3I_5$, ${}^3I_5 \to {}^3G_5$, ${}^3G_5 \to {}^3G_5$, ${}^3I_5 \to {}^3I_5$.
$J=6$	${}^1I_6 \to {}^1I_6$; ${}^3H_6 \to {}^3K_6$, ${}^3K_6 \to {}^3H_6$, ${}^3H_6 \to {}^3H_6$, ${}^3K_6 \to {}^3K_6$.	${}^3I_6 \to {}^3I_6$

Здесь используется нормировка для плоских волн:

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}),$$

и $|\mathbf{p}_i\rangle = |\mathbf{p}_i; L_i; S; JM\rangle$.

Для многих приложений удобно работать в канале для отдельной парциальной волны (например, при описании системы двух нуклонов для синглетного канала). В этом случае, выполняя интегрирование по углам в (12), можно прийти к следующему уравнению

$$\frac{d\langle p_2 | T^{(J)}_{LL}(z) | p_1 \rangle}{dz} = -\frac{2}{\pi m} \int k^2 dk \, \frac{\langle p_2 | T^{(J)}_{LL}(z) | k \rangle \langle k | T^{(J)}_{LL}(z) | p_1 \rangle}{(z - E_k)^2},$$

где $T^{(J)}_{L_1 L_2}(z) = \langle L_1; S; JM | T(z) | L_2; S; JM \rangle$, m – приведенная масса рассматриваемой системы, а энергия $E_k = k^2/m$. Состояния $|k\rangle$ в этом уравнении представляют собой ненормированные сферические функции Бесселя $j_l(kr)$, которые удовлетворяют соотношению

$$\langle k' | k \rangle = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k' - k).$$

Таким образом, для ${}^1S_0$ канала получим следующее уравнение

$$\frac{d\langle p_2 | T^{(0)}_{00}(z) | p_1 \rangle}{dz} = -\int \frac{2k^2 dk}{\pi m} \, \frac{\langle p_2 | T^{(0)}_{00}(z) | k \rangle \langle k | T^{(0)}_{00}(z) | p_1 \rangle}{(z - E_k)^2}.$$

Для ${}^1P_1$ канала:

$$\frac{d\langle p_2 | T^{(1)}_{11}(z) | p_1 \rangle}{dz} = -\int \frac{2k^2 dk}{\pi m} \, \frac{\langle p_2 | T^{(1)}_{11}(z) | k \rangle \langle k | T^{(1)}_{11}(z) | p_1 \rangle}{(z - E_k)^2}.$$

Для триплетного канала мы будем иметь уже систему уравнений:

$$\frac{d\langle p_2|T^{(J)}_{L_1L_2}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\sum_{L'}\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(J)}_{L_1L'}(z)|k\rangle\langle k|T^{(J)}_{L'L_2}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2}.$$

Суммирование в этом уравнении производится по всем возможным L'.

Таким образом, для возможных переходов ${}^3S_1 \to {}^3S_1$, ${}^3S_1 \to {}^3D_1$, ${}^3D_1 \to {}^3S_1$, ${}^3D_1 \to {}^3D_1$ получим следующую систему уравнений

$$\frac{d\langle p_2|T^{(1)}_{00}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(1)}_{00}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{00}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(1)}_{02}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{20}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T^{(1)}_{02}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(1)}_{00}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{02}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(1)}_{02}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{22}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T^{(1)}_{20}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(1)}_{20}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{00}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(1)}_{22}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{20}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T^{(1)}_{22}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(1)}_{20}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{02}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(1)}_{22}(z)|k\rangle\langle k|T^{(1)}_{22}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2}.$$

Для переходов ${}^3P_2 \to {}^3P_2$, ${}^3F_2 \to {}^3F_2$, ${}^3P_2 \to {}^3F_2$, ${}^3F_2 \to {}^3P_2$:

$$\frac{d\langle p_2|T^{(2)}_{13}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(2)}_{11}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{13}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(2)}_{13}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{33}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T^{(2)}_{31}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(2)}_{31}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{11}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(2)}_{33}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{31}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T^{(2)}_{11}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(2)}_{11}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{11}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(2)}_{13}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{31}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T^{(2)}_{33}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int\frac{2k^2dk}{\pi m}\,\frac{\langle p_2|T^{(2)}_{31}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{13}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T^{(2)}_{33}(z)|k\rangle\langle k|T^{(2)}_{33}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2}.$$

Для переходов ${}^3D_3 \to {}^3D_3$, ${}^3G_3 \to {}^3G_3$, ${}^3D_3 \to {}^3G_3$, ${}^3G_3 \to {}^3D_3$:

$$\frac{d\langle p_2|T_{22}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int \frac{2k^2dk}{\pi m}\frac{\langle p_2|T_{22}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{22}^{(3)}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T_{24}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{42}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T_{24}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int \frac{2k^2dk}{\pi m}\frac{\langle p_2|T_{24}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{44}^{(3)}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T_{22}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{24}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T_{42}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int \frac{2k^2dk}{\pi m}\frac{\langle p_2|T_{42}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{22}^{(3)}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T_{44}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{42}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2},$$

$$\frac{d\langle p_2|T_{44}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{dz} = -\int \frac{2k^2dk}{\pi m}\frac{\langle p_2|T_{44}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{44}^{(3)}(z)|p_1\rangle + \langle p_2|T_{42}^{(3)}(z)|k\rangle\langle k|T_{24}^{(3)}(z)|p_1\rangle}{(z-E_k)^2}.$$

Заключение

В работе проведено разложение обобщенного динамического уравнения по парциальным волнам для двухнуклонной системы. Мы рассмотрели возможные переходы между различными каналами двухнуклонной системы. Было показано, что из 16-ти возможных при заданном полном моменте J и его проекции M парциальных амплитуд, дающих вклад во взаимодействие, законами сохранения четности и зарядовой независимости разрешены лишь шесть, выражения для которых приведены в п. 1. В табл. 1 приведены возможные переходы между каналами двухнуклонной системы для различных значений J. Условием нечетности суммы $L+S+T$ определяется, какие из них возможны только для системы тождественных частиц (pp или nn), а какие – только для системы разных частиц (pn), что отражено в табл. 2. Обобщенное динамическое уравнение для матричных элементов оператора $T(z)$, соответствующих этим переходам, записано в моментном базисе, или в базисе парциальных волн, что удобно для многих приложений.

Несмотря на то, что в работе основное внимание уделяется исследованию двухнуклонной системы, методы разложения обобщенного динамического уравнения могут быть использованы при исследовании других систем, например, при описании двухчастичного рассеяния в атомной физике.

Summary

R.Kh. Gainutdinov, A.A. Mutygullina, A.S. Petrova. Partial wave expansion of the generalized dynamical equation.

A partial wave expansion of the generalized dynamical equation is performed. This expansion is demonstrated by using the example of the two-nucleon system. In describing such a system one has to take into account not only the orbital angular momentum and spin but also the isospin and symmetries of strong interactions.

Литература

1. *Weinberg S.* Nuclear forces from chiral lagrangians // Phys. Lett. B. – 1990. – V. 251 – P. 288–292.
2. *Gainutdinov R.Kh.* Nonlocal interactions and quantum dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 5657–5677.
3. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A.* Nonlocality of the NN interaction in an effective field theory // Phys. Rev. C. – 2002. – V. 66. – Art. 014006.
4. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A., Scheid W.* Effects of nonlocality in time of interactions of an atom with its surroundings on the broadening of spectral lines of atoms // Phys. Lett. A. – 2002. – V. 306. – P. 1–9.

Поступила в редакцию
15.01.07

Гайнутдинов Ренат Хамитович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.
E-mail: *Renat.Gainutdinov@ksu.ru*

Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Казанского государственного университета.
E-mail: *Aigul.Mutygullina@ksu.ru*

Петрова Александра Сергеевна – студент кафедры оптики и спектроскопии Казанского государственного университета.