Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 27 января 2026 г.

---

8 класс

1. Числа x и y таковы, что $x < y^3$ и $y < x^3$. Верно ли, что $xy > 0$?

2. Вася выбрал четыре различных числа. Оказалось, что сумма любых трёх из них больше четвёртого. Какое *наименьшее* количество положительных чисел могло оказаться среди выбранных?

3. В школьном клубе ученики увлекаются тремя науками: математикой, физикой и информатикой. При этом каждый ученик может интересоваться несколькими предметами одновременно или не интересоваться ни одним из них. Известно, что математиков в 3 раза меньше, чем учеников, не увлекающихся математикой; физиков в 4 раза меньше, чем учеников, не увлекающихся физикой, а информатиков в 5 раз меньше, чем учеников, не увлекающихся информатикой. Всего в клубе больше 100, но меньше 150 человек. Сколько учеников в клубе?

4. При каком наименьшем k можно отметить k клеток доски 7×7 так, что при любом размещении на доске трёхклеточного уголка (2×2 без одной клетки) он покрывает не менее двух отмеченных клеток?

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $AD = 2BC$. Найдите отношение сторон $BC : CD$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 27 января 2026 г.

---

9 класс

1. Числа от 1 до 24 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое *наибольшее* количество из этих 12 сумм может делиться на 13?

2. Вася выбрал четыре различных числа. Оказалось, что сумма любых трёх из них больше четвёртого. Какое *наименьшее* количество положительных чисел могло оказаться среди выбранных?

3. Даны два квадратных уравнения: $x^2+2bx+c=0$ и $x^2+2cx+b=0,$ где b и c — положительные числа. Произведение всех четырёх корней этих уравнений равно единице. Найдите b и c.

4. В клетках квадрата размером 3×3 расставлены различные целые положительные числа. Суммы чисел в каждой строке, столбце и каждой из двух диагоналей одинаковы и равны 33. Какое наибольшее число может быть в квадрате?

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На продолжении диагонали BD за точку D выбрана точка F такая, что $AF \parallel BC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ADF, касается прямой AC.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Числа от 1 до 30 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое *наибольшее* количество из этих 15 сумм может делиться на 16?

2. Даны два квадратных уравнения: $x^2 = 2bx + c$ и $x^2 = 2cx + b$, где b и c — отрицательные числа. Произведение всех четырёх корней этих уравнений равно единице. Найдите b и c.

3. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 2026$. Петя стёр одно число k, после чего среднее арифметическое оставшихся чисел оказалось целым. Найдите все такие k.

4. В волейбольном турнире участвуют 8 команд, каждая из которых играет со всеми остальными ровно один раз. За победу — 1 очко, за проигрыш — 0 (ничьих в волейболе не бывает). Известно, что ровно половина команд набрала одинаковое количество очков, равное n. Остальные команды набрали попарно различные количества очков, бо́льшие n. Чему равно n?

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую, проведённую через A параллельно BC, в точке K. Докажите, что $\angle KB_1A_1 = 90°$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Числа x, y, z и t таковы, что $x < y^3$, $y < z^3$, $z < t^3$ и $t < x^3$. Верно ли, что $xyzt > 0$?

2. При каких значениях a функция $f(x)$ будет чётной?

$$f(x) = \frac{x}{2^x + a} + \frac{x}{2^x - a}.$$

3. Найдите *наименьшее* натуральное число, у которого ровно 10 чётных и 10 нечётных делителей.

4. В волейбольном турнире участвуют 8 команд, каждая из которых играет со всеми остальными ровно один раз. За победу — 1 очко, за проигрыш — 0 (ничьих в волейболе не бывает). Известно, что ровно половина команд набрала одинаковое количество очков, равное n. Остальные команды набрали попарно различные количества очков, меньшие n. Чему равно n?

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую, проведённую через A параллельно BC, в точке K. Докажите, что $\angle KB_1A_1 = 90^\circ$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

8 класс

1. Числа x и y таковы, что $x < y^3$ и $y < x^3$. Верно ли, что $xy > 0$?

Ответ: *верно.*

Решение. Пусть $x > 0$, тогда из первого неравенства следует, что $0 < y^3$. Значит, числа x и y положительны и их произведение больше нуля.

Если $x < 0$, то $x^3 < 0$ и из второго неравенства получаем $y < 0$. Поэтому $xy > 0$.

Если $x = 0$, то из первого неравенства следует, что $0 < y$, а из второго — $y < 0$, противоречие. Итак, случай $x = 0$ невозможен.

Таким образом, либо x и y оба положительны, либо оба отрицательны. В обоих случаях $xy > 0$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Рассмотрен только один из случаев ($x > 0$ или $x < 0$) — не более 3 баллов. Доказано, что все числа одного знака — 6 баллов. Пропущен случай, когда одно из чисел равно 0 — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. Вася выбрал четыре различных числа. Оказалось, что сумма любых трёх из них больше четвёртого. Какое *наименьшее* количество положительных чисел могло оказаться среди выбранных?

Ответ: *три.*

Решение. Пусть $a < b < c < d$ — данные числа. Из условия следует, что $d < a + b + c$. Но $c < d$, значит, $c < d < a+b+c$, откуда следует, что $0 < a+b$. Значит, хотя бы одно из двух наименьших чисел (a или b) положительно. Поскольку числа c и d больше каждого из них, числа c и d также положительные. Следовательно, положительных чисел не меньше трёх.

Пример набора $-1, 3, 4, 5$ показывает, что ровно одно из чисел может быть отрицательным, а три других положительными.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что положительных чисел не меньше трёх (без примера) — 5 баллов. Пример набора с тремя положительными числами — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. В школьном клубе ученики увлекаются тремя науками: математикой, физикой и информатикой. При этом каждый ученик может интересоваться несколькими предметами одновременно или не интересоваться ни одним из них. Известно, что математиков в 3 раза меньше, чем учеников, не увлекающихся математикой; физиков в 4 раза меньше, чем учеников, не увлекающихся физикой, а информатиков в 5 раз меньше, чем учеников, не увлекающихся информатикой. Всего в клубе больше 100, но меньше 150 человек. Сколько учеников в клубе?

Ответ: 120 *учеников.*

Решение. Пусть m, f и i — число математиков, физиков и информатиков соответственно, и пусть n — общее число учеников. Из условий получаем: $m = \frac{1}{3}(n - m)$, откуда $n = 4m$, то есть n кратно 4. Аналогично, $f = \frac{1}{4}(n - f)$, откуда $n = 5f$, и, значит, n кратно 5. Точно так же получаем, что $n = 6i$, то есть n кратно 6. Таким образом, n делится на $\text{НОК}(4, 5, 6) = 60$.

Из условия $100 < n < 150$ находим единственное число, кратное 60 в этом интервале: $n = 120$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Составлены верные уравнения из условия, но не доведено до конца — 2 балла. Доказано, что n кратно только одному из чисел 4, 5 или 6 — 3 балла. Доказано, что n кратно 4, 5 и 6, но не указано НОК или не учтен интервал — 4 балла. Найдено, что n кратно $\text{НОК}(4, 5, 6) = 60$, но не проведён отбор по интервалу $(100, 150)$ — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. При каком наименьшем k можно отметить k клеток доски 7×7 так, что при любом размещении на доске трёхклеточного уголка (2×2 без одной клетки) он покрывает не менее двух отмеченных клеток?

Ответ: 33.

Решение. Заметим, что в любом квадрате 2×2 должно быть отмечено не менее трёх клеток, а в каждом прямоугольнике 1×2 — не менее одной клетки. Поскольку из доски 7×7 можно вырезать 9 квадратов 2×2 и 6 прямоугольников 1×2, всего должно быть отмечено по крайней мере $9 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 33$ клетки.

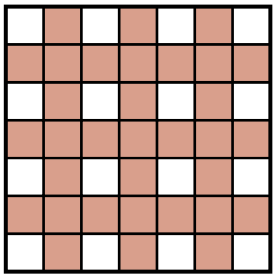

Рис. 1

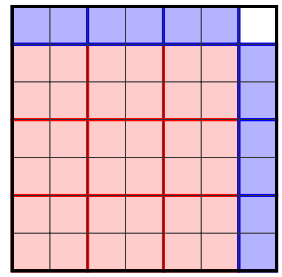

Рис. 2

На рисунке 1 показан пример с 33 отмеченными клетками, удовлетворяющий условию. На рисунке 2 выделены девять квадратов 2×2 и шесть прямоугольников 1×2, которые используются в оценке. Таким образом, наименьшее значение k равно 33.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число отмеченных клеток не меньше 33 (неотмеченных клеток не больше 16) — 4 балла. Пример расстановки 33 отмеченных клеток — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $AD = 2BC$. Найдите отношение сторон $BC : CD$.

Ответ: $BC : CD = 1$.

Решение. (Рис. 3.) Пусть M — середина основания AD. Поскольку $AD = 2BC$, имеем $AM = MD = BC$. Кроме того, $AM \parallel BC$, значит, четырёхугольник $ABCM$ — параллелограмм. Так как $BD \perp AB$ и $AB \parallel CM$, то $BD \perp CM$, поэтому CM — высота в треугольнике BCD.

Рассмотрим прямоугольные треугольники BEC и DEM (E — точка пересечения CM и BD). В них $BC = DM$ (по построению) и $\angle CBE = \angle MDE$ (как накрест лежащие при $BC \parallel DM$ и секущей BD). Значит, треугольники BEC и DEM равны (по катету и острому углу), откуда $BE = DE$, то есть E — середина BD. Поэтому CE — медиана треугольника BCD.

Итак, в треугольнике BCD отрезок CE является одновременно медианой и высотой, поэтому треугольник BCD равнобедренный, $BC = CD$. Следовательно, $BC : CD = 1$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Отмечена точка M — середина AD и доказано, что $ABCM$ – параллелограмм — 2 балла. Доказано, что CM — высота треугольника BCD — 3 балла. Доказано равенство треугольников BEC и DEM — 4 балла. Доказано, что CE — медиана треугольника BCD — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

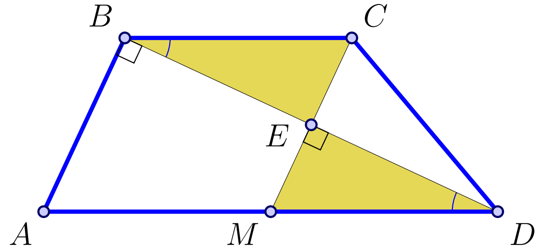

Рис. 3

9 класс

1. Числа от 1 до 24 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое *наибольшее* количество из этих 12 сумм может делиться на 13?

Ответ: 11.

Решение. Число 13 — единственное число набора, которое делится на 13, поэтому при сложении его с любым другим числом сумма не будет делиться на 13. Таким образом, все 12 сумм не могут делиться на 13, и значит, их не более 11.

С другой стороны, пример

$$2+24=3+23=4+22=\ldots=12+14=26$$

показывает, как получить 11 требуемых пар. Последняя сумма $1+13=14$ не делится на 13.

Замечание. Если бы все 12 пар чисел давали суммы, делящиеся на 13, то и сумма всех этих сумм, то есть сумма всех 24 чисел, делилась бы на 13. Однако эта сумма равна $12\cdot 25=300$ и не делится на 13, поэтому получить 12 сумм, кратных 13, невозможно. Отсюда также следует, что таких пар не более 11.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Только пример для 11 сумм — 3 балла. Доказано, что 12 сумм получить нельзя (без примера) — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Вася выбрал четыре различных числа. Оказалось, что сумма любых трёх из них больше четвёртого. Какое *наименьшее* количество положительных чисел могло оказаться среди выбранных?

Ответ: *три.*

Решение. Пусть $a<b<c<d$ — данные числа. Из условия следует, что $d<a+b+c$. Но $c<d$, значит, $c<d<a+b+c$, откуда следует, что $0<a+b$. Значит, хотя бы одно из двух наименьших чисел (a или b) положительно. Поскольку числа c и d больше каждого из них, числа c и d также положительные. Следовательно, положительных чисел не меньше трёх.

Пример набора $-1,3,4,5$ показывает, что ровно одно из чисел может быть отрицательным, а три других положительными.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что положительных чисел не меньше трёх (без примера) — 5 баллов. Пример набора с тремя положительными числами — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Даны два квадратных уравнения: $x^2+2bx+c=0$ и $x^2+2cx+b=0$, где b и c — положительные числа. Произведение всех четырёх корней этих уравнений равно единице. Найдите b и c.

Ответ: $b=1,\ c=1$.

Решение. По теореме Виета для первого уравнения произведение корней равно c, для второго — b. Поэтому произведение всех четырёх корней равно $c\cdot b$. По условию $bc=1$.

Уравнения имеют действительные корни, поэтому их дискриминанты неотрицательны:

$$b^2-c\geqslant 0 \quad \text{и} \quad c^2-b\geqslant 0.$$

Так как $bc=1$, из первого неравенства $b^2\geqslant c$ получаем $b^2\geqslant \frac{1}{b}$. Поскольку $b>0$, отсюда следует $b^3\geqslant 1$, то есть $b\geqslant 1$. Из второго неравенства $c^2\geqslant b$ аналогично получаем $c\geqslant 1$, или $\frac{1}{b}\geqslant 1$, то есть $b\leqslant 1$.

Значит, $b=1$, а из равенства $bc=1$ следует, что $c=1$. При этих значениях b и c уравнения совпадают, корни каждого из них равны -1, и произведение всех четырёх корней равно 1.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Получено равенство $bc=1$ — 1 балл. Доказано, что $b^2\geqslant 1/b$ или $c^2\geqslant 1/c$ — 2 балла. Получены неравенства $b\geqslant 1$ или $c\geqslant 1$ — 4 балла. Получены неравенства $b\leqslant 1$ или $c\leqslant 1$ — 5 баллов. Найдено значение только b (или c) — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В клетках квадрата размером 3×3 расставлены различные целые положительные числа. Суммы чисел в каждой строке, столбце и каждой из двух диагоналей одинаковы и равны 33. Какое наибольшее число может быть в квадрате?

Ответ: 21.

Решение. Обозначим числа в клетках квадрата:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Сумма всех чисел квадрата равна $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 33+33+33 = 99$. Сумма чисел на двух диагоналях, средней строки и среднего столбца равна

$$(a+e+i)+(c+e+g)+(d+e+f)+(b+e+h) = 33 \cdot 4 = 132.$$

В левой части каждый из элементов a, b, c, d, f, g, h, i встречается один раз, а элемент e — четыре раза. Поэтому $99 + 3e = 132 \Longrightarrow e = 11$. Таким образом, число в центральной клетке квадрата равно 11.

Пусть M — наибольшее число в квадрате. Рассмотрим строку, столбец или диагональ, содержащую M и центральное число 11. Сумма трёх чисел в этой линии равна 33, то есть $M + 11 + x = 33$, где x — третье число. Отсюда $M = 22 - x$. Так как x — натуральное число ($x \geqslant 1$), получаем оценку $M \leqslant 21$.

Пример квадрата с $M = 21$:

$$\begin{matrix} 2 & 21 & 10 \\ 19 & 11 & 3 \\ 12 & 1 & 20 \end{matrix}$$

Все числа в примере различные и натуральные, наибольшее равно 21.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Найдена сумма всех чисел таблицы — 1 балл. Составлено уравнение для суммы чисел на двух диагоналях, средней строки и среднего столбца — 2 балла. Найдено число в центральной клетке ($e = 11$) — 3 балла. Получена правильная оценка $M \leqslant 21$ (без примера) — 5 баллов. Только ответ и пример таблицы с наибольшим значением 21 — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На продолжении диагонали BD за точку D выбрана точка F такая, что $AF \parallel BC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ADF, касается прямой AC.

Решение. (Рис. 4.) Условие касания равносильно тому, что угол CAD между прямой CA и хордой AD равен половине градусной меры дуги AD, то есть вписанному углу AFD, опирающемуся на эту дугу.

Но из параллельности прямых BC и AF следует, что $\angle AFD = \angle DBC = \angle CAD$. Последнее равенство вытекает из того, что вписанные углы DBC и CAD опираются на одну дугу CD, что и требовалось.

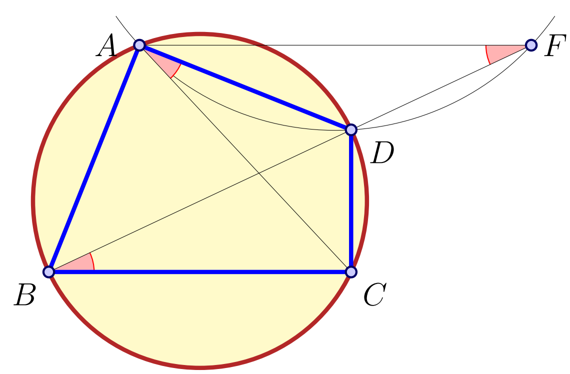

Рис. 4

Критерии. Отмечено равенство вписанных углов $\angle DBC = \angle CAD$ — 1 балл. Верно найдено ключевое равенство углов $\angle AFD = \angle DBC = \angle CAD$, но отсутствует связь с условием касания, — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 27 января 2026 г.

---

10 класс

1. Числа от 1 до 30 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое *наибольшее* количество из этих 15 сумм может делиться на 16?

Ответ: 14.

Решение. Число 16 — единственное число набора, которое делится на 16, поэтому при сложении его с любым другим числом сумма не будет делиться на 16. Таким образом, все 15 сумм на 16 делиться не могут, и значит, их не более 14.

С другой стороны, пример

$$2 + 30 = 3 + 29 = 4 + 28 = \ldots = 15 + 17 = 32$$

показывает, как получить 14 требуемых пар. Последняя сумма $1 + 16$ не делится на 16.

Замечание 1. Существуют и другие разбиения, в которых суммы в 14 парах делятся на 16.

Замечание 2. Если бы все 15 пар чисел давали суммы, делящиеся на 16, то и сумма всех этих сумм, то есть сумма всех 30 чисел, делилась бы на 16. Однако эта сумма равна $15 \cdot 31 = 465$ и не делится на 16, поэтому получить 15 сумм, кратных 16, невозможно. Отсюда также следует, что таких пар не более 14.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Только пример для 14 сумм — 3 балла. Доказано, что 15 сумм получить нельзя (без примера) — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Даны два квадратных уравнения: $x^2 = 2bx + c$ и $x^2 = 2cx + b$, где b и c — отрицательные числа. Произведение всех четырёх корней этих уравнений равно единице. Найдите b и c.

Ответ: $b = -1,\ c = -1$.

Решение. По теореме Виета для первого уравнения произведение корней равно $-c$, для второго равно $-b$. Поэтому произведение всех четырёх корней равно $(-c) \cdot (-b) = bc$. По условию $bc = 1$.

Уравнения имеют действительные корни, поэтому их дискриминанты неотрицательны:

$$b^2 + c \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c^2 + b \geqslant 0.$$

Так как $bc = 1$, из первого неравенства $b^2 \geqslant -c$ получаем $b^2 \geqslant -\frac{1}{b}$. Поскольку $b < 0$, отсюда следует $b^3 \leqslant -1$, то есть $b \leqslant -1$. Из второго неравенства $c^2 \geqslant -b$ аналогично получаем $c \leqslant -1$, или $\frac{1}{b} \leqslant -1$, то есть $b \geqslant -1$.

Значит, $b = -1$, а из равенства $bc = 1$ следует, что $c = -1$. При этих значениях b и c уравнения совпадают, корни каждого из них равны -1, и произведение всех четырёх корней равно 1.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Получено равенство $bc = 1$ — 1 балл. Доказано, что $b^2 \geqslant -1/b$ или $c^2 \geqslant -1/c$ — 2 балла. Доказано неравенство $b \leqslant -1$ или $c \leqslant -1$ — 4 балла. Доказано, что $b \geqslant -1$ или $c \geqslant -1$ — 5 баллов. Найдено значение только b (или c) — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 2026$. Петя стёр одно число k, после чего среднее арифметическое оставшихся чисел оказалось целым. Найдите все такие k.

Ответ: $k = 1$ *и* $k = 2026$.

Решение. Сумма всех чисел от 1 до 2026 равна $S = 1 + 2 + \ldots + 2026 = \frac{1}{2}2026 \cdot 2027 = 1013 \cdot 2027$. После стирания числа k остаётся 2025 чисел, их сумма равна $S - k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{1}{2025}(S - k)$. По условию это число целое, следовательно, $S - k$ должно делиться на 2025.

Представим число S в виде $(2025 + 2) \cdot 1013 = 2025 \cdot 1013 + 2026 = 2025 \cdot 1014 + 1$. Тогда разность $S - k$ равна $2025 \cdot 1014 + 1 - k$. Для того чтобы это выражение делилось на 2025, необходимо и достаточно, чтобы разность $1 - k$ делилась на 2025. Поскольку k — число от 1 до 2026, это возможно только при $k = 1$ и $k = 2026$.

Критерии. Указаны оба ответа (с проверкой) — 1 балл. Установлено, что $S - k$ должно делиться на 2025 — 2 балла. Получено условие делимости $1 - k$ на 2025 — 5 баллов. Доказано, что в пределах $1 \leqslant k \leqslant 2026$ есть только одно число ($k = 1$ или $k = 2026$) — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В волейбольном турнире участвуют 8 команд, каждая из которых играет со всеми остальными ровно один раз. За победу — 1 очко, за проигрыш — 0 (ничьих в волейболе не бывает). Известно, что ровно половина команд набрала одинаковое количество очков, равное n. Остальные команды набрали попарно различные количества очков, бо́льшие n. Чему равно n?

Ответ: $n = 2$.

Решение. Общее количество матчей в турнире равно $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$. Поскольку за каждый матч разыгрывается 1 очко, сумма очков всех команд равна 28.

Пусть 4 команды имеют по n очков, тогда остальные 4 команды набрали $28 - 4n$ очков. Заметим, что каждая команда играет 7 матчей, поэтому максимально возможное количество очков у одной команды равно 7. Значит, максимальная сумма четырёх попарно различных чисел, не превышающих 7, достигается при наборе $7, 6, 5, 4$ и равна $7 + 6 + 5 + 4 = 22$. Следовательно, $28 - 4n \leqslant 22$, то есть $n \geqslant 1,5$. Поскольку n — целое, $n \geqslant 2$.

С другой стороны, минимальная сумма четырёх различных чисел, больших n, равна

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 4n + 10.$$

С учётом очков команд, набравших одинаковое число очков, равное n, имеем

$$4n + (4n + 10) \leqslant 28 \implies 8n \leqslant 18 \implies n \leqslant 2,25.$$

Отсюда $n \leqslant 2$. Таким образом, единственное возможное значение — $n = 2$.

Покажем, что при $n = 2$ действительно существует турнир, удовлетворяющий условиям. Оставшиеся 4 команды должны набрать в сумме $28 - 4 \cdot 2 = 20$ очков. Пример набора попарно различных очков, больших 2, сумма которых равна 20: $3, 4, 6, 7$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	*Очки*
A		1	1	0	0	0	0	0	2
B	0		1	1	0	0	0	0	2
C	0	0		1	1	0	0	0	2
D	1	0	0		1	0	0	0	2
E	1	1	0	0		1	0	0	3
F	1	1	1	1	0		0	0	4
G	1	1	1	1	1	1		0	6
H	1	1	1	1	1	1	1		7

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Отмечено, что остальные 4 команды набрали в сумме $28 - 4n$ очков, – 1 балл. Получена нижняя оценка для n (например, из неравенства $28 - 4n \leqslant 22$ следует $n \geqslant 2$), – 3 балла. Получена верхняя оценка для n (например, из минимальной суммы $4n + (4n + 10) \leqslant 28$ следует $n \leqslant 2$), – 4 балла. Доказано, что $n = 2$ – единственное возможное значение, – 5 баллов. Пример турнира для $n = 2$ – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую, проведённую через A параллельно BC, в точке K. Докажите, что $\angle KB_1A_1 = 90°$.

Решение. (Рис. 5.) Треугольник C_1BA_1 — равнобедренный, его стороны BC_1 и BA_1 равны как отрезки касательных, поэтому $\angle BC_1A_1 = \angle BA_1C_1$. Углы KC_1A и BC_1A_1 равны как вертикальные. Так как $AK \parallel BC$, то $\angle AKC_1 = \angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle KC_1A$. Отсюда следует, что треугольник KAC_1 — равнобедренный, и значит, $AK = AC_1$.

Далее, из равенства отрезков касательных AC_1 и AB_1, проведённых из точки A, имеем $AK = AB_1$. В равнобедренном треугольнике KAB_1 углы при основании KB_1 равны, поэтому $\angle KB_1A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KAB_1)$. Так как $AK \parallel BC$, то углы $\angle KAB_1$ и $\angle BCA$ внутренние односторонние при параллельных прямых и секущей AC, поэтому $\angle KAB_1 = 180^\circ - \angle BCA$. Значит,

$$\angle KB_1A = \frac{1}{2}\left(180^\circ - (180^\circ - \angle BCA)\right) = \frac{1}{2}\angle BCA.$$

Остаётся заметить, что треугольник B_1CA_1 тоже равнобедренный ($CB_1 = CA_1$), поэтому $\angle A_1B_1C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA)$, откуда $\angle KB_1A_1 = 180^\circ - \angle KB_1A - \angle A_1B_1C = 90^\circ$.

Критерии. Доказано равенство углов $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1$ — 1 балл. Доказано, что $\angle AKC_1 = \angle KC_1A$ или показано, что треугольник KAC_1 равнобедренный — 3 балла. Получено равенство $AK = AC_1 = AB_1$ и сделано заключение о равнобедренности треугольника KAB_1 — 4 балла. Доказано, что $\angle KB_1A = \frac{1}{2}\angle BCA$ — 5 баллов. Найдено выражение для $\angle KB_1A$ и $\angle A_1B_1C$ через угол $\angle BCA$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

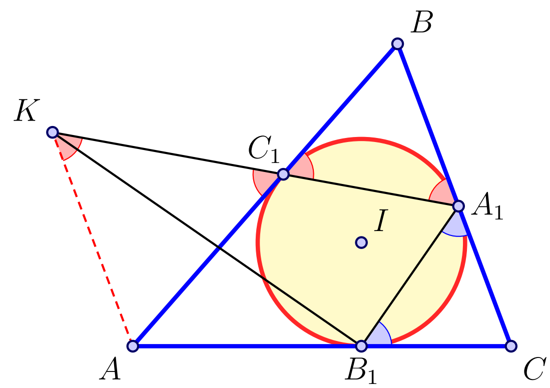

Рис. 5

11 класс

1. Числа x, y, z и t таковы, что $x < y^3$, $y < z^3$, $z < t^3$ и $t < x^3$. Верно ли, что $xyzt > 0$?

Ответ: *верно.*

Решение. Пусть $x > 0$, тогда из первого неравенства следует, что $0 < y^3$, то есть $0 < y$. Далее аналогично $0 < z$ и $0 < t$. Значит, все четыре числа положительны и их произведение положительно.

Если $x < 0$, то $x^3 < 0$ и из последнего неравенства получаем $t < 0$. Далее аналогично получаем $z < 0$ и $y < 0$. Поэтому $xyzt > 0$.

Если $x = 0$, то из первого неравенства следует, что $0 < y$. Далее аналогично $0 < z$ и $0 < t$. Теперь из последнего неравенства следует, что $0 < x$, противоречие. Итак, случай $x = 0$ невозможен.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Рассмотрен только один из случаев ($x > 0$ или $x < 0$) — не более 3 баллов. Доказано, что все числа одного знака — 6 баллов. Пропущен случай, когда одно из чисел равно 0 — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. При каких значениях a функция $f(x)$ будет чётной?

$$f(x) = \frac{x}{2^x + a} + \frac{x}{2^x - a}.$$

Ответ: *при* $a = -1$ *и* $a = 1$.

Решение. Проверим свойство чётности для функции $f(x)$. Имеем

$$f(x) = \frac{x}{2^x + a} + \frac{x}{2^x - a} = x \cdot \frac{2^{x+1}}{2^{2x} - a^2}, \qquad f(-x) = -x \cdot \frac{2^{-x+1}}{2^{-2x} - a^2} = -x \cdot \frac{2^{x+1}}{1 - a^2 \cdot 2^{2x}}.$$

Разность этих значений функции равна:

$$f(x) - f(-x) = x \cdot 2^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2^{2x} - a^2} + \frac{1}{1 - a^2 \cdot 2^{2x}} \right) = x \cdot 2^{x+1} \cdot \frac{(1 - a^2)(1 + 2^{2x})}{(2^{2x} - a^2)(1 - a^2 \cdot 2^{2x})}.$$

Равенство $f(x) = f(-x)$ для всех допустимых x возможно только тогда, когда числитель тождественно равен нулю, то есть при $1 - a^2 = 0$, откуда $a = \pm 1$. При этих значениях область определения функции f — вся числовая ось, за исключением $x = 0$ — симметрична относительно начала координат. Таким образом, при $a = \pm 1$ выполняются оба условия в определении свойства чётности функции f.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Правильно составлено уравнение $f(x) = f(-x)$ (или $f(x) - f(-x) = 0$) для нахождения параметра a — 3 балла. Получены значения $a = \pm 1$, но отсутствует проверка симметричности области определения $f(x)$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Найдите *наименьшее* натуральное число, у которого ровно 10 чётных и 10 нечётных делителей.

Ответ: 810.

Решение. Разложим искомое натуральное число n на простые множители: $n = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots$, где p_i — нечётные простые числа. Нечётные делители числа n — это в точности все делители числа $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots$, поэтому их количество равно $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots$. Каждый чётный делитель числа n равен удвоенному делителю числа $2^{a-1} p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots$, их количество равно $a(b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots$. По условию эти значения равны; значит, $a = 1$ и $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots = 10$. Число 10 раскладывается в произведение натуральных чисел двумя способами: $1 \cdot 10$ и $2 \cdot 5$. В первом случае $b_1 + 1 = 1$, $b_2 + 1 = 10$ или $b_1 + 1 = 10$, $b_2 + 1 = 1$. Во втором — $b_1 + 1 = 2$, $b_2 + 1 = 5$ или $b_1 + 1 = 5$, $b_2 + 1 = 2$.

Таким образом, условию удовлетворяют только числа вида $n = 2p^9$ или $n = 2p^4q$, где p и q — нечётные простые. Наименьшее число первого вида — это $n = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$, так как $p \geqslant 3$. Наименьшее число второго вида — $n = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 810$, поскольку $p \geqslant 3$ и $q \geqslant 5$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Получена формула для подсчёта нечётных делителей — 2 балла. Получена формула для подсчёта чётных делителей — ещё 2 балла. Доказано, что $a = 1$ и $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots = 10$ — 5 баллов. Получены возможные формы числа p^9 и $2p^4q$, но выбор наименьшего числа неполный или содержит ошибки — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В волейбольном турнире участвуют 8 команд, каждая из которых играет со всеми остальными ровно один раз. За победу — 1 очко, за проигрыш — 0 (ничьих в волейболе не бывает). Известно, что ровно половина команд набрала одинаковое количество очков, равное n. Остальные команды набрали попарно различные количества очков, меньшие n. Чему равно n?

Ответ: $n = 5$.

Решение. Общее количество матчей в турнире равно $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$. Поскольку за каждый матч разыгрывается 1 очко, сумма очков всех команд равна 28.

Пусть 4 команды имеют по n очков, а остальные 4 команды набрали очки a, b, c, d, причём $a < b < c < d < n$ и все они различны. Тогда $4n + a + b + c + d = 28$. Максимальная сумма $a + b + c + d$ при условии, что все слагаемые — различные целые числа, меньшие n, достигается, когда эти числа равны $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, $n - 4$. Следовательно,

$$a + b + c + d \leqslant (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4) = 4n - 10.$$

Минимальная сумма четырёх различных неотрицательных целых чисел равна $0+1+2+3 = 6$ (при условии $n \geqslant 4$, чтобы все они были меньше n). Поэтому $a + b + c + d \geqslant 6$. Из равенства $a + b + c + d = 28 - 4n$ получаем двойное неравенство:

$$6 \leqslant 28 - 4n \leqslant 4n - 10,$$

откуда $4,75 \leqslant n \leqslant 5,5$. Поскольку n — целое число, единственное возможное значение — это $n = 5$.

Покажем, что при $n = 5$ действительно существует турнир, удовлетворяющий условиям. Для этого оставшиеся 4 команды должны набрать в сумме $28 - 4 \cdot 5 = 8$ очков. Приведём набор из четырёх различных чисел, меньших 5, с суммой 8, например, $0, 1, 3, 4$. Турнир с таким распределением очков:

	A	B	C	D	E	F	G	H	*Очки*
A		0	0	0	0	0	0	0	0
B	1		0	0	0	0	0	0	1
C	1	1		1	0	0	0	0	3
D	1	1	0		1	1	0	0	4
E	1	1	1	0		1	1	0	5
F	1	1	1	0	0		1	1	5
G	1	1	1	1	0	0		1	5
H	1	1	1	1	1	0	0		5

Критерии. Отмечено, что остальные 4 команды набрали $28 - 4n$ очков – 1 балл. Получена верхняя оценка для n (например, из неравенства $28 - 4n \geqslant 6$ следует $n \leqslant 5{,}5$) – 3 балла. Получена нижняя оценка для n (например, из неравенства $28 - 4n \leqslant 4n - 10$ следует $n \geqslant 4{,}75$) – 4 балла. Доказано, что $n = 5$ – единственное возможное значение, – 5 баллов. Пример турнира ($n = 5$) – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую, проведённую через A параллельно

BC, в точке K. Докажите, что $\angle KB_1A_1 = 90°$.

Решение. (Рис. 6.) Треугольник C_1BA_1 — равнобедренный, его стороны BC_1 и BA_1 равны как отрезки касательных, поэтому $\angle BC_1A_1 = \angle BA_1C_1$. Углы KC_1A и BC_1A_1 равны как вертикальные. Так как $AK \parallel BC$, то $\angle AKC_1 = \angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle KC_1A$. Отсюда следует, что треугольник KAC_1 — равнобедренный, и значит, $AK = AC_1$.

Далее, из равенства отрезков касательных AC_1 и AB_1, проведённых из точки A, имеем $AK = AB_1$. В равнобедренном треугольнике KAB_1 углы при основании KB_1 равны, поэтому $\angle KB_1A = \frac{1}{2}(180° - \angle KAB_1)$. Так как $AK \parallel BC$, то углы $\angle KAB_1$ и $\angle BCA$ внутренние односторонние при параллельных прямых и секущей AC, поэтому $\angle KAB_1 = 180° - \angle BCA$. Значит,

$$\angle KB_1A = \frac{1}{2}\left(180° - (180° - \angle BCA)\right) = \frac{1}{2}\angle BCA.$$

Остаётся заметить, что треугольник B_1CA_1 тоже равнобедренный ($CB_1 = CA_1$), поэтому $\angle A_1B_1C = \frac{1}{2}(180° - \angle BCA)$, откуда $\angle KB_1A_1 = 180° - \angle KB_1A - \angle A_1B_1C = 90°$.

Критерии. Доказано равенство углов $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1$ — 1 балл. Доказано, что $\angle AKC_1 = \angle KC_1A$ или показано, что треугольник KAC_1 равнобедренный — 3 балла. Получено равенство $AK = AC_1 = AB_1$ и сделано заключение о равнобедренности треугольника KAB_1 — 4 балла. Доказано, что $\angle KB_1A = \frac{1}{2}\angle BCA$ — 5 баллов. Найдено выражение для $\angle KB_1A$ и $\angle A_1B_1C$ через угол $\angle BCA$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

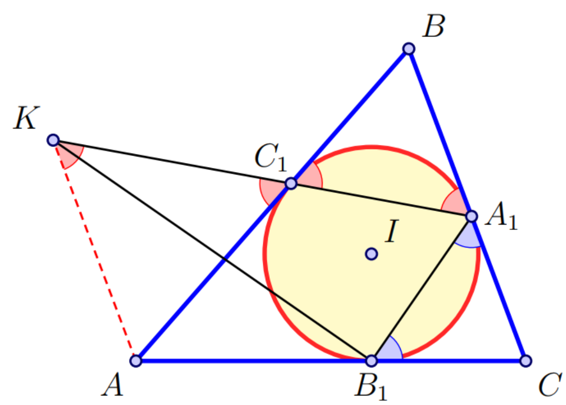

Рис. 6