УДК 517.544

ЭФФЕКТИВНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.Н. Киясов

Аннотация

Получено матричное представление для H_μ-непрерывной матрицы-функции третьего порядка, заданной на простом гладком замкнутом контуре. Выделены классы матриц-функций, допускающих эффективную факторизацию.

Ключевые слова: голоморфные функции, факторизация матриц-функций.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(\infty \in D^-)$. Под факторизацией H_μ-непрерывной на Γ матрицы-функции (сокращенно м-ф) $G(t)$ будем понимать ее представление в виде $G(t) = G^+(t)G^-(t),\ t \in \Gamma$, где $G(z)$ – м-ф конечного порядка на бесконечности ([1], с. 12), $\det G(z) \neq 0$ в конечной части плоскости, а на бесконечности порядок $\det G^-(z)$ равен сумме порядков $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ строк м-ф $G^-(z)$. Эти числа называются частными индексами, а их сумма $\varkappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ – суммарным индексом м-ф $G(t)$. Если на бесконечности сумма порядков строк $\det G^-(z)$ больше порядка на бесконечности самого определителя, то будем называть такое представление м-ф $G(t)$ нормальным представлением в силу того, что м-ф

$$X(z) = \{G^+(z),\ z \in D^+; [G^-(z)]^{-1},\ z \in D^-\}$$

является нормальной матрицей соответствующей однородной задачи линейного сопряжения и при помощи известного алгебраического алгоритма может быть приведена к канонической матрице [1, с. 30, 40], а значит, факторизуется эффективно.

В работе [2] в качестве приложения рассмотренных в ней сингулярных интегральных уравнений получено представление для H_μ-непрерывной на Γ м-ф второго порядка $G(t) = \|g_{ij}(t)\|,\ i,j = 1,2$, определитель которой $\Delta(t)$, а также элемент $g_{11}(t)$ не имеют нулей на контуре:

$$G(t) = G_{11}^+(t)G_0(t)G_{11}^-(t), \tag{1}$$

где

$$G_{11}^+ = \begin{pmatrix} g_{11}^+ & 0 \\ g_{11}^+ P\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right] + \dfrac{\Delta^+}{g_{11}^+}\left\{P\left[Q\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^+)^2}{\Delta^+}\right]\right\} & \dfrac{\Delta^+}{g_{11}^+} \end{pmatrix},$$

$$G_{11}^- = \begin{pmatrix} g_{11}^- & g_{11}^- Q\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right] + \dfrac{\Delta^-}{g_{11}^-}\left\{Q\left[P\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^-)^2}{\Delta^-}\right]\right\} \\ 0 & \dfrac{\Delta^-}{g_{11}^-} \end{pmatrix},$$

а м-ф

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & P\left[P\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^-)^2}{\Delta^-}\right] \\ Q\left[Q\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^+)^2}{\Delta^+}\right] & 1+\left\{P\left[P\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^-)^2}{\Delta^-}\right]\right\}\left\{Q\left[Q\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^+)^2}{\Delta^+}\right]\right\} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Delta = \Delta^+\Delta^-$, $g_{11} = g_{11}^+ g_{11}^-$ – факторизация на Γ указанных функций с индексами Коши $\varkappa$ и $\varkappa_{11}$ соответственно, а P и Q – операторы $P = [I+S]/2$, $Q = [I-S]/2$ (I – единичный, S – сингулярный операторы). Из представления (1), в частности, получаем, что если отношение g_{21}/g_{11} есть предельное значение на Γ функции, аналитической в D^+, либо отношение g_{12}/g_{11} – предельное значение на Γ функции, аналитической в D^- и исчезающей на бесконечности или полином, степень которого l удовлетворяет неравенству

$$l + 2\varkappa_{11} - \varkappa < 0,$$

то м-ф $G_0(t)$ становится треугольной и м-ф $G(t)$ согласно результатам работы [3], в которой указан алгоритм построения канонической матрицы, факторизуется эффективно. Отметим, что можно указать явные формулы для нормального представления треугольных м-ф второго порядка, но мы их получим ниже как частный случай соответствующих представлений для треугольных м-ф третьего порядка.

Если все элементы $g_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, не имеют нулей на контуре, то, используя перестановочную матрицу, получим для $G(t)$ еще три представления вида (1), позволяющие сформулировать соответствующие утверждения о ее эффективной факторизации.

Полученные условия фактически означают, что можно указать м-ф $H^+(t)$ соответственно $H^-(t)$, такие, что м-ф $H^+(t)G(t)$ или $G(t)H^-(t)$ становятся треугольными.

Однако подобное (1) представление для м-ф третьего порядка позволяет получить, на наш взгляд, более содержательный результат.

Пусть $G(t) = ||g_{ij}(t)||$, $i,j = 1,2,3$, $\Delta(t) = \det G(t) \neq 0$ – H_μ-непрерывная на Γ м-ф, элементы g_{ij} которой, а также соответствующие им миноры G_{ij} не обращаются в нуль на контуре. Пусть $\Delta = \Delta^+\Delta^-$, $g_{ij} = g_{ij}^+ g_{ij}^-$, $G_{ij} = G_{ij}^+ G_{ij}^-$, $i,j = 1,2,3$, – факторизация указанных функций с индексами Коши $\varkappa$, $\varkappa_{ij}$ и $\varkappa^{ij}$, $i,j = 1,2,3$, соответственно. Непосредственно проверяется справедливость на Γ представления

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{g_{21}}{g_{11}} & 1 & 0 \\ \dfrac{g_{31}}{g_{11}} & \dfrac{G_{23}}{G_{33}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{G_{33}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Delta}{G_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{g_{12}}{g_{11}} & \dfrac{g_{13}}{g_{11}} \\ 0 & 1 & \dfrac{G_{32}}{G_{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

и представления

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda & \mu \\ 0 & \beta & \nu \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = H^+H^-, \tag{3}$$

в котором $\alpha=\alpha^+\alpha^-$, $\beta=\beta^+\beta^-$, $\gamma=\gamma^+\gamma^-$ – факторизация на на Γ H_μ-непрерывных функций α, β, γ, а

$$H^+=\begin{pmatrix} \alpha^+ & \alpha^+P\left[\frac{\lambda}{\alpha^+\beta^-}\right] & \alpha^+\left(P\left[\frac{\mu}{\alpha^+\gamma^-}\right]-P\left[Q\left[\frac{\nu}{\beta^+\gamma^-}\right]\frac{\lambda}{\alpha^+\beta^-}\right]\right) \\ 0 & \beta^+ & \beta^+P\left[\frac{\nu}{\beta^+\gamma^-}\right] \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$H^-=$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha^- & \beta^-Q\left[\frac{\lambda}{\alpha^+\beta^-}\right] & \gamma^-\left(Q\left[\frac{\lambda}{\alpha^+\beta^-}\right]Q\left[\frac{\nu}{\beta^+\gamma^-}\right]+Q\left[\frac{\mu}{\alpha^+\gamma^-}\right]-Q\left[Q\left[\frac{\nu}{\beta^+\gamma^-}\right]\frac{\lambda}{\alpha^+\beta^-}\right]\right) \\ 0 & \beta^- & \gamma^-Q\left[\frac{\nu}{\beta^+\gamma^-}\right] \\ 0 & 0 & \gamma^- \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Представление (3)–(5) есть, вообще говоря, нормальное представление H_μ-непрерывной на Γ треугольной м-ф H, позволяющее эффективно построить ее факторизацию. В частном случае $\mu=\nu=0$,$\gamma=1$, миноры второго порядка, стоящие в левом верхнем углу м-ф (3)–(5), определяют нормальное представление соответствующей м-ф второго порядка.

Пусть $F_{i,j,k}$, $i,j,k=1,2,3$, $i\neq j\neq k$ – перестановочная матрица третьего порядка: ($f_{1i}=f_{2j}=f_{3k}=1$, а остальные элементы нулевые). При умножении м-ф G слева на $F_{i,j,k}$ первой становится строка м-ф G с номером i, второй – с номером j и третьей – с номером k, а при умножении справа – первым становится столбец с номером i, вторым – с номером j и третьим – с номером k ($F_{1,2,3}=E$, где E – единичная матрица). Очевидно, обратная к перестановочной матрице $F_{i,j,k}$ совпадает с транспонированной матрицей $F'_{i,j,k}$.

Домножая м-ф H слева и (или) справа на соответствующую перестановочную матрицу, получим нормальные представления для треугольных м-ф другого вида.

Факторизуя в (2) диагональную м-ф, записывая нормальные представления треугольных м-ф, переставляя диагональные факторизационные множители с соседними множителями полученных нормальных представлений и вновь записывая нормальные представления для полученных треугольных м-ф, после соответствующих объединений получим на Γ представление

$$G(t)=H^+(t)\Omega(t)H^-(t), \tag{6}$$

в котором элементы м-ф соответственно равны

$$h_{11}^+=g_{11}^+,\quad h_{12}^+=h_{13}^+=0,$$

$$h_{21}^+=g_{11}^+P\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]+\frac{G_{33}^+}{g_{11}^+}P\left[\frac{[g_{11}^+]^2}{G_{33}^+}Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right],\quad h_{22}^+=\frac{G_{33}^+}{g_{11}^+},\quad h_{23}^+=0,$$

$$h_{31}^+=g_{11}^+P\left[\frac{g_{31}}{g_{11}}-P\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right]+\frac{G_{33}^+}{g_{11}^+}P\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]P\left[\frac{[g_{11}^+]^2}{G_{33}^+}Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right]+$$
$$+\frac{\Delta^+}{G_{33}^+}P\left[\frac{g_{11}^+G_{33}^+}{\Delta^+}Q\left[\frac{g_{31}}{g_{11}}-P\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right]-\right.$$
$$\left.-P\left[\frac{[G_{33}^+]^2}{g_{11}^+\Delta^+}Q\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]\right]Q\left[\frac{[g_{11}^+]^2}{G_{33}^+}Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right]\right],$$

$$h_{32}^{+}=\frac{G_{33}^{+}}{g_{11}^{+}}P\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]+\frac{\Delta^{+}}{G_{33}^{+}}P\left[\frac{[G_{33}^{+}]^2}{g_{11}^{+}\Delta^{+}}Q\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]\right],\quad h_{33}^{+}=\frac{\Delta^{+}}{G_{33}^{+}},$$

$$\omega_{11}=1,\quad \omega_{12}=P\left[\frac{[g_{11}^{-}]^2}{G_{33}^{-}}P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right],$$

$$\omega_{13}=P\left[\frac{g_{11}^{-}G_{33}^{-}}{\Delta^{-}}P\left[\frac{g_{13}}{g_{11}}-Q\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right]-\right.$$
$$\left.-Q\left[\frac{[G_{33}^{-}]^2}{g_{11}^{-}\Delta^{-}}P\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]\right]P\left[\frac{[g_{11}^{-}]^2}{G_{33}^{-}}P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right]\right],$$

$$\omega_{21}=Q\left[\frac{[g_{11}^{+}]^2}{G_{33}^{+}}Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right],\quad \omega_{22}=1+\omega_{12}\omega_{21},\quad \omega_{23}=P\left[\frac{[G_{33}^{-}]^2}{g_{11}^{-}\Delta^{-}}P\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]\right]+\omega_{21}\omega_{13},$$

$$\omega_{31}=Q\left[\frac{g_{11}^{+}G_{33}^{+}}{\Delta^{+}}Q\left[\frac{g_{31}}{g_{11}}-P\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right]-\right.$$
$$\left.-P\left[\frac{[G_{33}^{+}]^2}{g_{11}^{+}\Delta^{+}}Q\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]\right]Q\left[\frac{[g_{11}^{+}]^2}{G_{33}^{+}}Q\left[\frac{g_{21}}{g_{11}}\right]\right]\right],$$

$$\omega_{32}=Q\left[\frac{[G_{33}^{+}]^2}{g_{11}^{+}\Delta^{+}}Q\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]\right]+\omega_{12}\omega_{31},$$

$$\omega_{33}=1+\omega_{13}\omega_{31}+Q\left[\frac{[G_{33}^{+}]^2}{g_{11}^{+}\Delta^{+}}Q\left[\frac{G_{23}}{G_{33}}\right]\right]P\left[\frac{[G_{33}^{-}]^2}{g_{11}^{-}\Delta^{-}}P\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]\right],$$

$$h_{11}^{-}=g_{11}^{-},\quad h_{12}^{-}=g_{11}^{-}Q\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]+\frac{G_{33}^{-}}{g_{11}^{-}}Q\left[\frac{[g_{11}^{-}]^2}{G_{33}^{-}}P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right],$$

$$h_{13}^{-}=g_{11}^{-}Q\left[\frac{g_{13}}{g_{11}}-Q\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right]+\frac{G_{33}^{-}}{g_{11}^{-}}Q\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]Q\left[\frac{[g_{11}^{-}]^2}{G_{33}^{-}}P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right]+$$
$$+\frac{\Delta^{-}}{G_{33}^{-}}Q\left[\frac{g_{11}^{-}G_{33}^{-}}{\Delta^{-}}P\left[\frac{g_{13}}{g_{11}}-Q\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right]-\right.$$
$$\left.-Q\left[\frac{[G_{33}^{-}]^2}{g_{11}^{-}\Delta^{-}}P\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]\right]P\left[\frac{[g_{11}^{-}]^2}{G_{33}^{-}}P\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\right]\right]\right],$$

$$h_{21}^{-}=0, h_{22}^{-}=\frac{G_{33}^{-}}{g_{11}^{-}},\quad h_{23}^{-}=\frac{G_{33}^{-}}{g_{11}^{-}}Q\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]+\frac{\Delta^{-}}{G_{33}^{-}}Q\left[\frac{[G_{33}^{-}]^2}{g_{11}^{-}\Delta^{-}}P\left[\frac{G_{32}}{G_{33}}\right]\right],$$

$$h_{31}^{-}=h_{32}^{-}=0,\quad h_{33}^{-}=\frac{\Delta^{-}}{G_{33}^{-}}.$$

Рассмотрим частные случаи м-ф третьего порядка, для которых представление (6) позволяет получить нормальное представление, а значит, эффективно построить ее факторизацию. Это, очевидно, будет возможным, если м-ф $\Omega(t)$ будет треугольной, либо станет таковой при умножении ее на перестановочные матрицы.

Пусть отношения g_{21}/g_{11}, g_{31}/g_{11}, G_{23}/G_{33} есть предельные значения на Γ функций, аналитических в D^+. Тогда элементы ω_{21}, ω_{31}, ω_{32} м-ф $\Omega(t)$ будут равны нулю и она становится треугольной.

Пусть каждое из отношений g_{12}/g_{11}, g_{13}/g_{11}, G_{32}/G_{33} есть предельное значение на Γ функции, аналитической в области D^- и исчезающей на бесконечности, либо полином, степень которого l, m, или p удовлетворяет соответствующему неравенству

$$l + 2\varkappa_{11} - \varkappa^{33} < 0, \tag{7}$$

$$m + \varkappa_{11} + \varkappa^{33} < 0, \tag{8}$$

$$p + 2\varkappa^{33} - \varkappa_{11} - \varkappa < 0. \tag{9}$$

Кроме того, если отношение g_{12}/g_{11} является полиномом степени l, а отношение G_{32}/G_{33} есть предельное значение функции, аналитической в D^-, то порядок этой функции на бесконечности должен быть меньше $-l$. В этом случае элементы ω_{12}, ω_{13}, ω_{23} равны нулю, и м-ф $\Omega(t)$ также будет треугольной.

Пусть отношения g_{21}/g_{11}, g_{31}/g_{11} являются предельными значениями на Γ функций, аналитических в D^+, а отношение G_{32}/G_{33} есть предельное значение функции, аналитической в области D^- и исчезающей на бесконечности, либо полином, степень которого p удовлетворяют неравенству (9), тогда элементы ω_{21}, ω_{31}, ω_{23} равны нулю, и м-ф $\Omega(t)$ становится треугольной при домножении ее слева и справа на перестановочную матрицу $F_{1,3,2}$. Поэтому представление (6) принимает вид

$$G(t) = H^+(t)F^{'}_{1,3,2}\Omega_1(t)F^{'}_{1,3,2}H^-(t), \tag{10}$$

в котором

$$\Omega_1(t) = F_{1,3,2}\Omega(t)F_{1,3,2}$$

есть треугольная м-ф.

Пусть каждое из отношений g_{12}/g_{11}, g_{13}/g_{11} является предельным значением на Γ функции, аналитической в области D^- и исчезающей на бесконечности, либо полином, степень которого l или m удовлетворяет соответствующему неравенству (7), (8). Пусть также порядок на бесконечности $Q[G_{32}/G_{33}]$ меньше $-l$, если отношение g_{12}/g_{11} является полиномом степени l, а отношение G_{23}/G_{33} является предельным значением на Γ функции, аналитической в области D^+. Тогда элементы ω_{12}, ω_{13}, ω_{32} м-ф $\Omega(t)$ равны нулю, и мы снова приходим к представлению (10).

Таким образом, оказывается справедливой

Теорема 1. *Пусть $G(t) = \|g_{ij}(t)\|$, $i,j = 1,2,3$, $\Delta(t) = \det G(t) \neq 0$ – H_μ-непрерывная на Γ м-ф, элемент g_{11} которой, а также соответствующие элементам g_{ij} миноры G_{ij} не обращаются в нуль на контуре. Пусть, далее, $\Delta = \Delta^+\Delta^-$, $g_{11} = g_{11}^+g_{11}^-$, $G_{ij} = G_{ij}^+G_{ij}^-$, $i,j = 1,2,3$, – факторизация указанных функций с индексами Коши $\varkappa$, $\varkappa_{11}$ и $\varkappa^{ij}$, $i,j = 1,2,3$, соответственно. Если выполняется одно из следующих условий:*

отношения g_{21}/g_{11}, g_{31}/g_{11}, G_{23}/G_{33} есть предельные значения на Γ функций, аналитических в D^+;

каждое из отношений g_{12}/g_{11}, g_{13}/g_{11}, G_{32}/G_{33} есть предельное значение на Γ функции, аналитической в области D^- и исчезающей на бесконечности, либо полином, степень которого l, m или p удовлетворяет соответствующему неравенству (7)–(9), причем если отношение g_{12}/g_{11} – полином степени l, а G_{32}/G_{33} – предельное значение функции, аналитической в D^-, то порядок ее на бесконечности меньше $-l$;

отношения g_{21}/g_{11}, g_{31}/g_{11} *– предельные значения на* Γ *функций, аналитических в* D^+, *а отношение* G_{32}/G_{33} *– предельное значение функции, аналитической в области* D^- *и исчезающей на бесконечности, либо полином, степень которого* p *удовлетворяют неравенству* (9);

каждое из отношений g_{12}/g_{11}, g_{13}/g_{11} *есть предельное значения на* Γ *функции, аналитической в области* D^- *и исчезающей на бесконечности, либо полином, степень которого* l *или* m *удовлетворяет соответствующему неравенству* (7), (8) *и порядок на бесконечности* $Q[G_{32}/G_{33}]$ *меньше* $-l$, *если отношение* g_{12}/g_{11} *– полином степени* l, *а отношение* G_{23}/G_{33} *– предельное значение функции, аналитической в* D^+.

Тогда факторизация м-ф $G(t)$ *сводится к факторизации треугольной м-ф.*

Рассматривая м-ф $G_1 = F_{1,3,2}G$, $G_2 = GF_{1,3,2}$, $G_3 = F_{1,3,2}GF_{1,3,2}$ и записывая для них соответствующее представление (6), получим еще три представления для м-ф:

$$G = F'_{1,3,2}G_1 = G_2F'_{1,3,2} = F'_{1,3,2}G_3F'_{1,3,2}.$$

При помощи перестановочных матриц, подставляя вместо элемента $g_{11}(t)$ м-ф $G(t)$ другие ее элементы (это можно сделать для каждого элемента четырьмя различными способами), получим еще 32 представления вида (6), позволяющие сформулировать аналогичные указанным в теореме условия ее эффективной факторизации.

Summary

S.N. Kiyasov. Effective Factorization of Some Classes of Third-Order Matrix-Functions.

A matrix representation is derived for H_μ-continues third-order matrix-functions which are defined at a simple smooth closed curve. Some classes of matrix-functions admitting effective factorization are revealed.

Key words: holomorphic functions, factorization of matrix-functions.

Список литературы

1. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 379 с.

2. *Киясов С.Н.* Исследование разрешимости и оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений // Сиб. матем. журн. – 2000. – № 6. – С. 1357–1362.

3. *Чеботарев Н.Г.* Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // Успехи матем. наук. – 1956. – Т. II, Вып. 3. – С. 199–202.

Поступила в редакцию
13.09.07

Киясов Сергей Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *Kiyasov@mi.ru*