

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.958

doi: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ МОДАХ МИКРОДИСКОВЫХ ЛАЗЕРОВ

А.И. Репина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе рассмотрен метод численного решения задачи на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости, моделирующей лазерное излучение двумерных микродисковых резонаторов. Метод Галеркина применен к нелинейной задаче на собственные значения для голоморфной фредгольмовой оператор-функции, к которой сводится исходная краевая задача. Доказательство сходимости метода и оценки точности аппроксимации собственных значений основаны на общих результатах теории голоморфных оператор-функций и теории приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра.

Ключевые слова: микродисковый лазер, нелинейная задача на собственные значения, система граничных интегральных уравнений Мюллера, метод Галеркина

Введение

Микрорезонаторные лазеры изучаются уже на протяжении более двадцати лет [1, 2]. Большинство авторов традиционно использовали физическую модель, основанную на поиске комплексных собственных частот пассивных открытых микрорезонаторов. Обычно ее называют задачей на собственные значения относительно комплексной частоты (Complex Frequency Eigenvalue Problem, CFEP, [3]). Для анализа пороговых мод микрорезонаторных лазеров с активными зонами и вычисления вместе с вещественными частотами пороговых значений генерации излучения сейчас широко применяется так называемая лазерная задача на собственные значения (Lasing Eigenvalue Problem, LEP, [4–8]). Существенный прогресс в развитии численных методов для моделирования двумерных микродисковых лазеров был достигнут в работе [9]. В ней LEP была сведена к нелинейной задаче на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера [10], которая была решена приближенно методом Нистрема. Аналогичный подход применялся и для анализа собственных мод пассивных открытых резонаторов в рамках CFEP [3]. Авторы этих статей сосредоточили основное внимание на обсуждении алгоритмических особенностей предложенных ими методов и физической интерпретации результатов вычислений.

Вместе с тем в работе [11] было проведено математическое исследование качественных свойств спектра как задачи на собственные значения с комплексной частотой, так и лазерной задачи на собственные значения, а также представлено доказательство сходимости метода Нистрема. Рассуждения в [11] опираются на фундаментальные результаты теории голоморфных оператор-функций (см., например, [12]). Концепция нелинейных задач на собственные значения для голоморфных фредгольмовых оператор-функций лежит и в основе теории дискретной сходимости, разработанной для численного анализа приближенных методов

решения таких задач [13, 14]. Ее общие результаты использовались для доказательства сходимости самых разнообразных численных алгоритмов решения конкретных нелинейных задач на собственные значения во многих приложениях (см., например, обзор в [11]). В статье [11] эти результаты были использованы для доказательства сходимости метода Нистрема в рамках моделей CFEP и LEP. С этой целью в [11] была предложена более общая задача на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости, чем CFEP и LEP. Она содержит обе из них как частные случаи и была названа обобщенной задачей на собственные значения относительно комплексной частоты (Generalized CFEP, GCFEP).

Для численного решения исследованной в [11] задачи было предложено использовать метод Галеркина с тригонометрическим базисом [15]. Для микродисковых лазеров круглой формы с круглыми отверстиями этот метод оказался существенно более эффективным, чем метод Нистрема, что позволило рассчитать спектральные характеристики таких (микрочольцевых) резонаторов различных конфигураций [16–19]. За счет того, что в этом частном случае в [15] были получены явные выражения для матричных элементов метода Галеркина, скорость вычислений удалось увеличить на порядок по сравнению с методом Нистрема, реализованным для расчета двумерных микрочольцевых лазеров в [20], однако до сих пор теоретического обоснования применения метода Галеркина для решения задачи GCFEP проведено не было.

Основная идея настоящей работы – доказательство сходимости метода Галеркина для GCFEP. Обоснованный в работе [11] метод Нистрема является специальным вариантом метода квадратур, разработанным изначально в [28] для численного решения интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Исследование сходимости метода Нистрема в [11] проводится в банаховом пространстве непрерывных функций и опирается на теорию коллективной компактности и поточечной сходимости последовательности операторов [28]. В настоящей работе метод Галеркина с тригонометрическим базисом обосновывается в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом функций. Это позволяет использовать классические свойства проекционных операторов, что делает доказательство теорем проще и короче. Формулировка краевой задачи и ее операторная постановка описываются в первом разделе статьи. Во втором разделе с помощью метода Галеркина строится последовательность конечномерных голоморфных оператор-функций, которая регулярно сходится к исходной фредгольмовой голоморфной оператор-функции. Это позволяет применить общие методы теории дискретной сходимости [13] к численному анализу метода Галеркина (теорема 1). Затем на основе фундаментальных результатов статьи [14] даются оценки скорости сходимости приближенных собственных значений к точным (теорема 2).

1. Операторная формулировка GCFEP

Прежде всего, следуя [11], сформулируем обобщенную задачу на собственные значения с комплексной частотой для двумерного оптического микрорезонатора произвольной формы (см. рис. 1). Постановка задачи основана на двух физических моделях излучения двумерных микродисковых лазеров: CFEP и LEP (см., например, [3] и [9] соответственно). Предполагаем, что векторы напряженности электрического $E = (E_1, E_2, E_3)$ и магнитного $H = (H_1, H_2, H_3)$ полей изменяются со временем t по гармоническому закону $\sim \exp(-ikct)$, где k – комплексное волновое число, c – скорость света в вакууме. Считаем также, что вектор-функции E и H не меняются вдоль оси x_3 и могут быть охарактеризованы с помощью одной скалярной функции u , которая является компонентой E_3 или H_3 в зависимости от

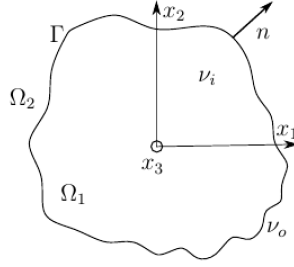


Рис. 1. Геометрия двумерного микродискового лазера

E - или H -поляризации соответственно. Предположим, что все рассматриваемые материалы немагнитны и их свойства описываются показателем преломления ν . Обозначим показатель преломления в ограниченной области Ω_1 через $\nu_i = \alpha_i - i\gamma$. Здесь $\alpha_i > 0$ – известная действительная часть комплексного числа ν_i , $\gamma \in \mathbb{R}$ – коэффициент потерь или усиления (вещественный параметр задачи). Показатель преломления в неограниченной области $\Omega_2 = \mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}_1$ известен и положителен, $\nu_o > 0$.

Обозначим через R_0 минимальный радиус окружности Ω_{R_0} с центром в начале координат такой, что область Ω_1 целиком лежит в Ω_{R_0} . Мы предполагаем, что граница Γ микрорезонатора является дважды непрерывно дифференцируемой замкнутой кривой. Обозначим единичный вектор внешней нормали к этой границе через n , через U – пространство всех комплекснозначных функций, непрерывных на $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ и дважды непрерывно дифференцируемых в открытых областях Ω_1 и Ω_2 , через \mathbb{L} – риманову поверхность функции $\ln k$.

Определение 1. Пусть значение параметра $\gamma \in \mathbb{R}$ фиксировано. Ненулевая функция $u \in U$ называется собственной функцией GCFEP, соответствующей собственному значению $k \in \mathbb{L}$, если выполняются следующие соотношения:

уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_i^2 u = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad (1)$$

$$\Delta u + k_o^2 u = 0, \quad x \in \Omega_2, \quad (2)$$

условия сопряжения

$$u^- = u^+, \quad \eta_i \frac{\partial u^-}{\partial n} = \eta_o \frac{\partial u^+}{\partial n}, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

и парциальные условия излучения [21, 22]

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(k_o r) \exp(il\varphi), \quad r \geq R_0. \quad (4)$$

Здесь $k_j = k\nu_j$ – волновое число в соответствующей области, $\eta_j = \nu_j^{-2}$ в случае H -поляризации и $\eta_j = 1$ для E -поляризованного поля, $j = i$ или o . Как обычно, $H_l^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода порядка l ; (r, φ) – полярные координаты точки x ; $u^-(u^+)$ – предельные значения функции u изнутри (извне) контура Γ . Следуя [23, с. 68], предполагаем, что предельные значения (правильной) нормальной производной

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial n}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} (n(x), \text{grad } u(x \pm hn(x))), \quad x \in \Gamma,$$

существуют равномерно по x на Γ . Для любого решения u уравнения (2) в неограниченной области Ω_2 ряд (4) сходится равномерно и абсолютно в любой замкнутой области $a \leq r \leq b$, где a и b – произвольные числа такие, что $R_0 < a < b < \infty$; и этот ряд бесконечное число раз почленно дифференцируем (см., например, [22]).

Необходимо найти собственные значения k на проколоте в точке ветвления $k = 0$ бесконечно-листной римановой поверхности \mathbb{L} логарифма, поскольку функции Ханкеля $H_l^{(1)}(k\nu_o r)$ являются многозначными функциями переменной k , при этом мы хотим их рассматривать как аналитические (см. например, [22]). Обозначим через \mathbb{L}_0 главный лист римановой поверхности \mathbb{L} с разрезом вдоль отрицательной мнимой полуоси. Если $k \in \mathbb{L}_0$ и одновременно $\text{Im } k > 0$ (< 0), то собственная функция u экспоненциально убывает (растет) при $r \rightarrow \infty$ [22]. Если $\text{Im } k = 0$, то условие излучения (4) эквивалентно [22] условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_o \right) u = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Собственные значения k зависят от параметра $\gamma \in \mathbb{R}$ [11]. Если он неположителен, то резонатор является пассивным (без потерь или с поглощением соответственно). При $\gamma \leq 0$ формулировка задачи GCFEP в точности совпадает с постановкой CFEP [3]. В этом случае, как известно из теоремы Пойнтинга (см., например, [3]), все собственные значения k расположены строго в нижней половине листа \mathbb{L}_0 , то есть $\text{Im } k < 0$. При положительном γ , соответствующем коэффициенту усиления активного вещества микродискового лазера, некоторые собственные значения k могут принадлежать действительной оси и верхней половине \mathbb{L}_0 . Если для некоторого $\gamma > 0$ существует собственное значение $k > 0$, то пара (k, γ) и соответствующая собственная функция u удовлетворяют всем условиям задачи LEP [9]. Важно отметить, что эти значения γ различны для разных k [11].

В работе [11] получен важный результат относительно локализации собственных значений k на главном листе \mathbb{L}_0 римановой поверхности \mathbb{L} . А именно, для каждого $\gamma \in \mathbb{R}$ положительная мнимая полуось \mathbb{L}_+ листа \mathbb{L}_0 не содержит собственных значений k задачи (1)–(4). Аналогичные результаты в теории диэлектрических волноводов были получены в [24–26].

Опишем, как в [11] задача (1)–(4) сводится к нелинейной задаче на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений. Пусть фиксировано некоторое значение параметра $\gamma \in \mathbb{R}$. Если u – собственная функция задачи (1)–(4), соответствующая собственному значению $k \in \mathbb{L}$, то, как доказано в [11], справедливы следующие интегральные представления:

$$u = - \int_{\Gamma} \left(u^-(y) \frac{\partial G_i(k, \gamma; x, y)}{\partial n(y)} - G_i(k, \gamma; x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial n(y)} \right) dl(y), \quad x \in \Omega_1, \quad (5)$$

$$u = \int_{\Gamma} \left(u^+(y) \frac{\partial G_o(k; x, y)}{\partial n(y)} - G_o(k; x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial n(y)} \right) dl(y), \quad x \in \Omega_2, \quad (6)$$

где $G_j(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j |x - y|)$, $j = i$ или o . Используя (3), определим функции

$$u = u^+ = u^-, \quad v = \frac{\eta_o + \eta_i}{2\eta_i} \frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{\eta_o + \eta_i}{2\eta_o} \frac{\partial u^-}{\partial n}, \quad x \in \Gamma.$$

Складывая почленно предельные значения интегралов (5), (6) и их нормальных производных с обеих сторон контура Γ и используя хорошо известные свойства

потенциалов простого и двойного слоя (см., например, [23, с. 47]), получаем следующую однородную систему интегральных уравнений относительно функций u и v :

$$u + \int_{\Gamma} K_{1,1}(k, \gamma; x, y)u(y) dl(y) + \int_{\Gamma} K_{1,2}(k, \gamma; x, y)v(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (7)$$

$$v + \int_{\Gamma} K_{2,1}(k, \gamma; x, y)u(y) dl(y) + \int_{\Gamma} K_{2,2}(k, \gamma; x, y)v(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (8)$$

Здесь ядра определяются выражениями

$$K_{1,1}(k, \gamma; x, y) = \frac{\partial G_i(k; x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial G_o(k, \gamma; x, y)}{\partial n(y)}, \quad x, y \in \Gamma, \quad (9)$$

$$K_{1,2}(k, \gamma; x, y) = \frac{2\eta_i}{\eta_o + \eta_i} G_o(k, \gamma; x, y) - \frac{2\eta_o}{\eta_o + \eta_i} G_i(k; x, y), \quad x, y \in \Gamma, \quad (10)$$

$$K_{2,1}(k, \gamma; x, y) = \frac{\partial^2 G_i(k; x, y)}{\partial n(x)\partial n(y)} - \frac{\partial^2 G_o(k, \gamma; x, y)}{\partial n(x)\partial n(y)}, \quad x, y \in \Gamma, \quad (11)$$

$$K_{2,2}(k, \gamma; x, y) = \frac{2\eta_i}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_o(k, \gamma; x, y)}{\partial n(x)} - \frac{2\eta_o}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_i(k; x, y)}{\partial n(x)}, \quad x, y \in \Gamma. \quad (12)$$

Система уравнений (7), (8) называется системой граничных интегральных уравнений Мюллера (см., например, [9]).

Следующее утверждение доказано в [27]. Для всех $k \in \mathbb{L}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $x \in \Gamma$ справедливы предельные выражения

$$\lim_{y \rightarrow x} K_{1,1}(k, \gamma; x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{K_{1,2}(k, \gamma; x, y)}{\ln|x-y|} = \frac{(\eta_o - \eta_i)}{\pi(\eta_o + \eta_i)}, \quad (13)$$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{K_{2,1}(k, \gamma; x, y)}{\ln|x-y|} = \frac{k_o^2 - k_i^2}{4\pi}, \quad \lim_{y \rightarrow x} K_{2,2}(k, \gamma; x, y) = \frac{\xi(x)}{2\pi} \left(\frac{\eta_o - \eta_i}{\eta_o + \eta_i} \right), \quad (14)$$

где ξ – кривизна кривой Γ в точке x .

Как обычно, через $C(\Gamma)$ обозначим банахово пространство непрерывных на Γ функций с максимум нормой (см., например, [28, с. 3]),

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in \Gamma} |u(x)|.$$

Введем в рассмотрение следующие интегральные операторы с ядрами (9)–(12):

$$(B_{i,j}(k, \gamma)w_j)(x) = \int_{\Gamma} K_{i,j}(k, \gamma; x, y)w_j(y) dl(y), \quad x \in \Gamma, \quad (15)$$

где $k \in \mathbb{L}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Из равенств (13), (14) вытекает (см., например, теорему 2.8 и задачу 2.3, [28, с. 17, 27]), что для каждого $k \in \mathbb{L}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ операторы $B_{i,j} : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ ограничены по норме:

$$\|B_{i,j}(k, \gamma)\|_{\infty} = \max_{x \in \Gamma} \int_{\Gamma} |K_{i,j}(k, \gamma; x, y)| dl(y), \quad i, j = 1, 2.$$

Более того, эти интегральные операторы компактны (см., например, теорему 2.23 [28, с. 26]). Отсюда следует [11], что для всех $k \in \mathbb{L}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ компактен оператор B , действующий в пространстве $W = C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ и определенный равенством

$$B(k, \gamma)w = \begin{bmatrix} B_{1,1}(k, \gamma) & B_{1,2}(k, \gamma) \\ B_{2,1}(k, \gamma) & B_{2,2}(k, \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad w = (u, v)^T, \quad u, v \in C(\Gamma). \quad (16)$$

Теперь перепишем систему (7), (8) в виде однородного операторного уравнения

$$w + B(k, \gamma)w = 0. \quad (17)$$

В [11] доказано следующее утверждение. Пусть фиксировано некоторое значение параметра $\gamma \in \mathbb{R}$. Если $u \in U$ – собственная функция задачи (1)–(4), отвечающая собственному значению $k \in \mathbb{L}$, то вектор

$$w = \left(u^+, \frac{\eta_o + \eta_i}{2\eta_i} \frac{\partial u^+}{\partial n} \right)^T = \left(u^-, \frac{\eta_o + \eta_i}{2\eta_o} \frac{\partial u^-}{\partial n} \right)^T$$

принадлежит пространству W и является нетривиальным решением однородного уравнения (17) с теми же самыми значениями k и γ .

Зафиксируем некоторое значение $\gamma \in \mathbb{R}$ и положим $A(k) = I + B(k)$, где, как обычно, $I : W \rightarrow W$ – тождественный оператор, а $B(k) : W \rightarrow W$ определен равенством (16). Этот оператор компактен, следовательно, $A(k)$ фредгольмов по определению. Обозначим через $\mathcal{L}(W, W)$ пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из W в W .

Оператор-функция $A(k) \in \mathcal{L}(W, W)$ называется голоморфной по $k \in \mathbb{L}$, если ее можно представить в виде степенного ряда

$$A(k) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(k - k_0)^p, \quad A_p \in \mathcal{L}(W, W),$$

сходящегося на $\mathcal{L}(W, W)$ в окрестности каждой точки $k_0 \in \mathbb{L}$. В [11] доказано, что оператор-функция $A(k) = I + B(k) \in \mathcal{L}(W, W)$, определенная равенством (16), голоморфна по $k \in \mathbb{L}$ для каждого фиксированного $\gamma \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Ненулевой вектор $w \in W$ называется собственным вектором оператор-функции $A(k)$, отвечающим характеристическому значению $k \in \mathbb{L}$, если выполняется равенство

$$A(k)w = (I + B(k))w = 0. \quad (18)$$

Множество $\sigma(A)$ всех $k \in \mathbb{L}$, для которых оператор $A(k)$ не имеет ограниченного обратного оператора на W , называется характеристическим множеством $A(k)$, а множество $\rho(A) = \{k \in \mathbb{L} : A(k)^{-1} \in \mathcal{L}(W, W)\}$ – регулярным множеством оператор-функции $A(k)$.

Следующие утверждения доказаны в статье [11].

1. Для каждого $\gamma \in \mathbb{R}$ регулярное множество оператор-функции $A(k)$ непусто, а именно $\mathbb{I}_+ \subset \rho(A)$.

2. Для каждого $\gamma \in \mathbb{R}$ характеристическое множество $\sigma(A)$ оператор-функции $A(k)$ может быть только набором изолированных точек на \mathbb{L} , которые являются характеристическими значениями оператор-функции $A(k)$ конечной алгебраической кратности.

3. Каждое характеристическое значение k оператор-функции $A(k)$ непрерывно зависит от $\gamma \in \mathbb{R}$ и может появляться и исчезать только на границе ее области аналитичности, то есть в нуле и на бесконечности на римановой поверхности \mathbb{L} .

Первые два утверждения для $\gamma \leq 0$ соответствуют СФЕР, а предложение 3 описывает спектр ЛЕР [11]. Если для некоторого $\gamma > 0$ пересечение характеристического множества $\sigma(A)$ и положительной вещественной полуоси листа \mathbb{L}_0 непусто, то это пересечение может состоять лишь из изолированных точек $k > 0$, которые являются характеристическими значениями оператор-функции $A(k)$ конечной алгебраической кратности.

2. Метод Галеркина

Опишем метод Галеркина численного решения задачи (18). Предположим, что контур Γ задан параметрически функцией $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, где $t \in [0, 2\pi]$. Тогда для любого фиксированного значения $\gamma \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} (B_{l,m}(k)w_m)(x) &= \left(B^{(l,m)}(k)w^{(m)} \right) (t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K^{(l,m)}(k; t, \tau) w^{(m)}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $B_{l,m}$ – интегральные операторы вида (15), где $x = x(t)$, $y = y(\tau) \in \Gamma$,

$$K^{(l,m)}(k; t, \tau) = 2\pi K_{l,m}(k; x, y), \quad w^{(m)}(\tau) = w_m(y) |g'(\tau)|, \quad l, m = 1, 2.$$

При построении и исследовании метода Галеркина операторное уравнение (18) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве $H = L_2 \times L_2$, где $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом, скалярное произведение в котором, как обычно, имеет вид

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \overline{v(\tau)} d\tau, \quad u, v \in L_2.$$

Тогда норма операторов (19) оценивается сверху с помощью неравенства Коши – Буняковского:

$$\|B^{(l,m)}(k)\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K^{(l,m)}(k; t, \tau) \right|^2 dt d\tau, \quad l, m = 1, 2. \quad (20)$$

Через T_n обозначим подпространство пространства L_2 – множество всех тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n . Тогда $H_n = T_n \times T_n$ – подпространство пространства H , состоящее из элементов вида

$$w_n = \begin{pmatrix} w_n^{(1)} \\ w_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad w_n^{(1)}, w_n^{(2)} \in T_n.$$

Пусть $p_n : H \rightarrow H_n$ – оператор проектирования, определенный равенством

$$p_n w = \begin{pmatrix} \Phi_n w^{(1)} \\ \Phi_n w^{(2)} \end{pmatrix}, \quad w^{(1)}, w^{(2)} \in L_2,$$

где $\Phi_n : L_2 \rightarrow T_n$ – оператор Фурье,

$$(\Phi_n w^{(m)})(t) = \sum_{q=-n}^n c_q(w^{(m)}) \varphi_q(t), \quad m = 1, 2.$$

Векторы $\varphi_q(t) = \exp(iqt)$, $q = -n, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в пространстве T_n . Ясно, что, как и для любого другого оператора проектирования,

$$\|p_n\|_{H_n} = 1. \quad (21)$$

Запишем теперь операторное уравнение (18) подробнее в виде следующей системы уравнений:

$$w^{(l)} + \sum_{m=1}^2 B^{(l,m)}(k)w^{(m)} = 0, \quad l = 1, 2. \quad (22)$$

Приближенное решение $w_n = (w_n^{(1)}, w_n^{(2)})^T$, $w_n^{(1)}, w_n^{(2)} \in T_n$ системы (22) будем искать в виде

$$w_n^{(m)}(t) = \sum_{q=-n}^n \alpha_q^{(m)} \varphi_q(t), \quad m = 1, 2.$$

Тогда

$$w_n^{(l)} + \sum_{m=1}^2 B^{(l,m)}(k)w_n^{(m)} = 0, \quad l = 1, 2, \quad n \in N.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты $\alpha_q^{(m)}$ по методу Галеркина из условий

$$(w_n^{(l)}, \varphi_p) + \sum_{m=1}^2 (B^{(l,m)}(k)w_n^{(m)}, \varphi_p) = 0, \quad p = -n, \dots, n, \quad (23)$$

где $l = 1, 2$. Поскольку тригонометрические функции ортонормированы, мы можем переписать уравнения (23) в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_p^{(l)} + \sum_{m=1}^2 \sum_{q=-n}^n h_{pq}^{(l,m)}(k) \alpha_q^{(m)} = 0, \quad p = -n, \dots, n, \quad (24)$$

где $l = 1, 2$,

$$h_{pq}^{(l,m)}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K^{(l,m)}(k; t, \tau) \exp(-ipt) \exp(iq\tau) dt d\tau.$$

Система линейных алгебраических уравнений (24) эквивалентна конечномерному линейному операторному уравнению

$$A_n(k)w_n \equiv p_n A(k)w_n \equiv (I + p_n B(k))w_n \equiv (I + B_n(k))w_n = 0. \quad (25)$$

Здесь $k \in \mathbb{L}$, $A_n : H_n \rightarrow H_n$, I – единичный оператор в пространстве H_n . Как и прежде, обозначим через $\rho(A_n)$ и $\sigma(A_n)$ регулярное и характеристическое множества оператор-функции $A_n(k)$ соответственно. Кроме того, N', N'', N''', \dots – бесконечные последовательности множества всех натуральных чисел N .

Определение 3. Приближением по методу Галеркина к решению задачи (18) будем называть характеристические значения и собственные векторы оператор-функции $A_n(k)$, определенной равенством (25).

Теорема 1. Для каждого фиксированного значения параметра $\gamma \in \mathbb{R}$ последовательность оператор-функций $A_n(k)$ на \mathbb{L} регулярно сходится к оператор-функции $A(k)$. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Для любого характеристического значения k_0 оператор-функции $A(k)$ существует некоторая последовательность характеристических значений $\{k_n\}_{n \in N}$ оператор-функций $A_n(k)$, сходящаяся к k_0 при $n \rightarrow \infty$, $n \in N$.

2. Пусть $\{k_n\}_{n \in N}$ – некоторая последовательность характеристических значений k_n оператор-функций $A_n(k)$, а $\{w_n\}_{n \in N}$ – последовательность соответствующих нормированных собственных векторов оператор-функций $A_n(k)$ таких, что $k_n \rightarrow k_0 \in \mathbb{L}$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in N$. Тогда

- a) k_0 – характеристическое значение оператор-функции $A(k)$,
- b) $\{w_n\}_{n \in N}$ – дискретно компактная последовательность и ее предельные точки – нормированные собственные векторы оператор-функции $A(k_0)$.

3. На каждом компакте $L_0 \subset \rho(A)$ последовательность $\{A_n(k)\}_{n \in N}$ стабильна, иными словами, существуют такие числа $n(L_0)$ и $c(L_0)$, зависящие от этого компакта, что $L_0 \subset \rho(A_n)$, $\|A_n(k)^{-1}\|_{H_n} \leq c(L_0)$ для всех $k \in L_0$ и $n \geq n(L_0)$.

Доказательство теоремы основано на общих результатах теории дискретной сходимости [13], потому предварим его некоторыми определениями из этой статьи.

Говорят, что последовательность $\{w_n\}_{n \in N'}$ векторов из пространства H_n дискретно сходится к пределу $w \in H$, если $\|w_n - p_n w\|_{H_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in N'$. Дискретную сходимость векторов будем обозначать как обычно: $w_n \rightarrow w$ ($n \in N'$).

Последовательность элементов $\{w_n\}_{n \in N'}$ называется дискретно компактной, если для каждой подпоследовательности $\{w_n\}_{n \in N''}$, $N'' \subseteq N'$, существуют такое подмножество $N''' \subseteq N''$ и такой вектор $w \in H$, что $w_n \rightarrow w$ ($n \in N'''$).

Пусть дан оператор $A \in \mathcal{L}(H, H)$ и последовательность операторов $\{A_n\}_{n \in N}$, где $A_n \in \mathcal{L}(H_n, H_n)$. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n \in N}$ аппроксимирует оператор A , если для любого вектора $w \in H$ имеем

$$\|A_n p_n w - p_n A w\|_{H_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Если из дискретной сходимости векторов $w_n \rightarrow w$ ($n \in N$) следует дискретная сходимость их образов $A_n w_n \rightarrow A w$ ($n \in N$), то говорят что последовательность операторов $\{A_n\}_{n \in N}$ дискретно сходится к A .

Последовательность операторов $\{A_n\}_{n \in N}$ регулярна, если из ограниченности последовательности векторов $\{w_n\}_{n \in N}$, то есть из оценки $\|w_n\|_{H_n} \leq \text{const}$ ($n \in N$), и из дискретной компактности последовательности их образов $\{A_n w_n\}_{n \in N}$ следует дискретная компактность исходной последовательности векторов $\{w_n\}_{n \in N}$. Если последовательность операторов $\{A_n\}_{n \in N}$ регулярна и при этом аппроксимирует оператор A , то говорят, что она регулярно аппроксимирует A . Аналогично определяется регулярная сходимость последовательности операторов.

Говорят, что последовательность оператор-функций $\{A_n(k)\}_{n \in N}$ регулярно сходится на \mathbb{L} к оператор-функции $A(k)$, если для каждой сходящейся числовой последовательности $k_n \rightarrow k_0 \in \mathbb{L}$ ($n \rightarrow \infty$) последовательность операторов $\{A_n(k_n)\}_{n \in N}$ регулярно сходится к оператору $A(k_0)$.

Доказательство. Проверим, что в рассматриваемом нами случае выполняются все условия b1)–b5) [13, теоремы 2].

b1) Оператор-функция $A(k) : H \rightarrow H$ голоморфна и фредгольмова на \mathbb{L} , а ее регулярное множество непусто. Голоморфность и фредгольмовость $A(k) : W \rightarrow W$ доказаны в теоремах 4.3 и 4.1 [11] соответственно. Для $A(k) : H \rightarrow H$ эти свойства устанавливаются аналогично с заменой оценок всех норм в пространстве непрерывных функций W на соответствующие оценки в пространстве функций, интегрируемых с квадратом H .

В теореме 5 работы [29] установлено, что при любом $k \in \mathbb{I}_+$ уравнение (18) имеет лишь нулевое решение в пространстве W . Оператор $B(k)$ слабо сингулярен,

следовательно, любое решение уравнения (18) из H обязательно принадлежит пространству W и может быть только тривиальным при $k \in \mathbb{I}_+$. Оператор-функция $A(k) : H \rightarrow H$ фредгольмова, значит, для нее $\mathbb{I}_+ \subset \rho(A)$.

b2) При любом $n \in N$ оператор-функция $A_n(k) : H_n \rightarrow H_n$ голоморфна и фредгольмова на \mathbb{L} . Действительно, оператор-функция $A(k) : H \rightarrow H$ голоморфна на \mathbb{L} . В силу линейности и ограниченности оператора p_n таким же свойством обладает и $A_n(k) = p_n A(k) : H_n \rightarrow H_n$. Фредгольмовость оператор-функции $A_n(k)$ очевидна в силу ее конечномерности.

b3) На каждом компакте $\mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}$ нормы $\|A_n(k)\|_{H_n}$ ограничены равномерно по $n \in N$ и $k \in \mathbb{L}_0$. Действительно, из определения оператора $A_n(k)$ и равенства (21) вытекает оценка

$$\|A_n(k)\|_{H_n} \leq \|A(k)\|_H, \quad n \in N, \quad k \in \mathbb{L},$$

а в силу (20) верна оценка

$$\|A(k)\|_H \leq c(k), \quad k \in \mathbb{L}, \quad (26)$$

где $c(k)$ – непрерывная на \mathbb{L} функция:

$$c(k) = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=1}^2 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |K^{(l,m)}(k; t, \tau)|^2 dt d\tau \right)^{1/2}.$$

Нетрудно видеть, что для завершения проверки требуемого свойства достаточно вычислить максимум функции $c(k)$ на каждом компакте $\mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}$.

b4) Для каждого фиксированного значения $k \in \mathbb{L}$ последовательность операторов $\{A_n(k)\}_{n \in N}$ аппроксимирует оператор $A(k)$. Действительно, по определению операторов $A(k) : H \rightarrow H$ и $p_n : H \rightarrow H_n$, для любого вектора $w \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_n(k)p_n w - p_n A(k)w\|_{H_n} &= \|p_n A(k)p_n w - p_n A(k)w\|_{H_n} \leq \\ &\leq \|p_n\|_{H \rightarrow H_n} \|A(k)\|_H \|p_n w - w\|_H \rightarrow 0 \quad (n \in N). \end{aligned}$$

Стремление к нулю – следствие стремления к нулю нормы остаточного члена отрезка ряда Фурье для любой функции из L_2 , оценки (26) и равенства (21).

b5) Для каждого фиксированного значения $k \in \mathbb{L}$ последовательность операторов $\{A_n(k)\}_{n \in N}$ регулярна. Действительно, дискретная компактность последовательности векторов $\{A_n(k)w_n\}_{n \in N}$ означает, что для любого $N' \subseteq N$ существует такое $N'' \subseteq N'$, что последовательность $\{A_n(k)w_n = w_n + B_n(k)w_n\}_{n \in N''}$ дискретно сходится к некоторому $z \in H$. Если последовательность $\{w_n\}_{n \in N''}$ ограничена, то существует слабо сходящаяся подпоследовательность $\{w_n\}_{n \in N'''}$, $N''' \subset N''$. Вполне непрерывный оператор $B(k)$, как известно, переводит ее в сильно сходящуюся к некоторому вектору $u \in H$:

$$\|B(k)w_n - u\|_H \rightarrow 0, \quad n \in N'''.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|B_n(k)w_n - p_n u\|_{H_n} \leq \|p_n\|_{H \rightarrow H_n} \|B(k)w_n - u\|_H$$

и равенства (21) следует, что последовательность $\{B_n w_n\}_{n \in N'''}$ дискретно сходится к $u \in H$. Таким образом, $\{w_n\}_{n \in N'''}$ дискретно сходится к вектору $w = z - u \in H$, и определение регулярности последовательности $\{A_n(k)\}_{n \in N}$ выполнено. \square

Оператор проектирования $p_n : H \rightarrow H_n$ линейный, поэтому следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 2 и замечания 1 работы [14, с. 394, 395].

Теорема 2. Пусть значение параметра $\gamma \in \mathbb{R}$ фиксировано, а $L_0 \subset \mathbb{L}$ – такой компакт с границей $\Gamma \subset \rho(A)$, что $L_0 \cap \sigma(A) = \{k_0\}$. Обозначим символом ε_n максимальную ошибку аппроксимации при $k \in \Gamma$ и $w \in G(A, k_0)$,

$$\varepsilon_n = \sup\{\|A_n(k)p_n w - p_n A(k)w\|_{H_n} : k \in \Gamma, w \in G(A, k_0), \|w\|_H = 1\}.$$

Здесь $G(A, k_0)$ – обобщенное собственное подпространство, соответствующее характеристическому значению k_0 , то есть замкнутая линейная оболочка всех обобщенных собственных векторов оператор-функции $A(k)$, отвечающих k_0 . Тогда $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), и за исключением конечного числа таких $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:

a) $|k_n - k_0| \leq c\varepsilon_n^{1/\kappa}$, для всех $k_n \in \sigma(A_n) \cap L_0$, где $\kappa = \kappa(k_0, A)$ порядок полюса оператор-функции $A^{-1}(k)$;

b) $|\bar{k}_n - k_0| \leq c\varepsilon_n$, где \bar{k}_n – среднее всех характеристических значений оператор-функции $A_n(k)$, лежащих в компакте L_0 , взвешенное пропорционально их алгебраическим кратностям $\nu(A_n, k_n)$,

$$\bar{k}_n = \sum_{k_n \in \sigma(A_n) \cap L_0} k_n \frac{\nu(A_n, k_n)}{\nu(A, k_0)},$$

где $\nu(A, k_0)$ – алгебраическая кратность характеристического значения k_0 оператор-функции $A(k)$.

c) $\max\{|k_n - k_0| : k_n \in \sigma(A_n) \cap L_0\} \leq c\varepsilon_n^{1/l_n}$, где l_n – общее число попарно разных характеристических значений оператор-функции $A_n(k)$, лежащих в компакте L_0 .

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

Литература

1. Du W., Li C., Sun J., Xu H., Ren A., Wu J., Wang Z. Nanolasers based on 2D materials // Laser Photonics Rev. – 2020. – V. 14, No 12. – Art. 2000271, P. 1–16. – doi: 10.1002/lpor.202070066.
2. Nosich A.I., Smotrova E.I., Boriskina S.V., Benson T.M., Sewell P. Trends in microdisk laser research and linear optical modelling // Opt. Quantum Electron. – 2007. – V. 39, No 15. – P. 1253–1272. – doi: 10.1007/s11082-008-9203-z.
3. Boriskina S.V., Sewell P., Benson T.M., Nosich A.I. Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization // J. Opt. Soc. Am. A. – 2004. – V. 21, No 3. – P. 393–402. – doi: 10.1364/josaa.21.000393.
4. Smotrova E.I., Nosich A.I. Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity // Opt. Quantum Electron. – 2004. – V. 36, No 3. – P. 213–221. – doi: 10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c.
5. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Benson T.M., Nosich A.I. Why elliptic microcavity lasers emit light on bow-tie-like modes instead of whispering-gallery-like modes // Opt. Commun. – 2019. – V. 439. – P. 112–117. – doi: 10.1016/j.optcom.2019.01.056.

6. *Zolotukhina A.S., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Lasing modes of a microdisk with a ring gain area and of an active microring // *Opt. Quantum Electron.* – 2015. – V. 47, No 12. – P. 3883–3891. – doi: 10.1007/s11082-015-0240-0.
7. *Zolotukhina A.S., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Electromagnetic analysis of optimal pumping of a microdisk laser with a ring electrode // *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* – 2017. – V. 123, No 1. – Art. 32, P. 1–6. – doi: 10.1007/s00340-016-6625-3.
8. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Mathematical and numerical analysis of the spectral characteristics of dielectric microcavities with active regions // *Proc. Int. Conf. Days in Diffraction (DD-2016)*. – IEEE, 2016. – P. 390–395. – doi: 10.1109/DD.2016.7756880.
9. *Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I.* Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2013. – V. 30, No 6. – P. 1732–1742. – doi: 10.1364/JOSAB.30.001732.
10. *Müller C.* Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1969. – 356 p.
11. *Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities // *SIAM J. Appl. Math.* – 2020. – V. 80, No 4. – P. 1977–1998. – doi: 10.1137/19M1261882.
12. *Kozlov V., Maz'ya V.* Differential Equations with Operator Coefficients with Applications to Boundary Value Problems for Partial Differential Equations. – Heidelberg: Springer, 1999. – 444 p.
13. *Karma O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions I // *Numer. Funct. Anal. Optim.* – 1996. – V. 17, No 3–4. – P. 365–387. – doi: 10.1080/01630569608816699.
14. *Karma O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions II (convergence rate) // *Numer. Funct. Anal. Optim.* – 1996. – V. 17, No 3–4. – P. 389–408. – doi: 10.1080/01630569608816700.
15. *Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Numerical modeling of on-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method // *Opt. Commun.* – 2020. – V. 476. – Art. 126311, P. 1–9. – doi: 10.1016/j.optcom.2020.126311.
16. *Repina A.I., Oktyabrskaya A.O., Ketov I.V., Karchevskii E.M.* Laser modes of active eccentric microring cavities // *Proc. Int. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON-2020)*. – IEEE, 2020. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ICTON51198.2020.9203752.
17. *Repina A.I., Oktyabrskaya A.O.* Mathematical modeling of photonic crystal resonators based on the Lasing Eigenvalue Problem // *Proc. Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA-2019)*. – 2019. – P. 472–477. – doi: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947540.
18. *Repina A.I., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M.* Unidirectional emission of active eccentric microring cavities // *Proc. 2020 IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS-2020)*. – 2020. – P. 274–278. – doi: 10.1109/EWDTS50664.2020.9225153.
19. *Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Karchevskii E.M.* Laser modes of active circular microcavity with circular piercing hole // *Proc. Int. Conf. on Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2020)*. – 2020. – P. 207–210. – doi: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088894.
20. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes // *Axioms*. – 2019. – V. 8, No 3. – Art. 101, P. 1–16. – doi: 10.3390/axioms8030101.

21. *Reichardt H.* Ausstrahlungsbedingungen fur die Wellengleichung // Abh. Math. Semin. Hamburg. – 1960. – V. 24. – P. 41–53.
22. *Kartchevski E.M., Nosich A.I., Hanson G.W.* Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber // SIAM J. Appl. Math. – 2005. – V. 65, No 6. – P. 2033–2048.
23. *Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. – Philadelphia, SIAM, 2013. – xvi, 271 p.
24. *Frolov A., Kartchevskiy E.* Integral equation methods in optical waveguide theory // Springer Proc. Math. Stat. – 2013. – V. 52. – P. 119–133.
25. *Karchevskii E.M.* The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides // Diff. Equat. – 2000. – V. 36, No 7. – P. 1109–1111. – doi: 10.1007/BF02754515.
26. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides // Proc. Int. Conf. Days in Diffraction (DD-2013). – 2013. – P. 131–135. – doi: 10.1109/DD.2013.6712817.
27. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No 8. – P. 1148–1157. – doi: 10.1134/S1995080218080127.
28. *Kress R.* Linear integral equations // Springer Monographs in Mathematics. V. 82. – N. Y.: Springer, 1999. – XVI, 412 p. – doi: 10.1007/978-1-4614-9593-2.
29. *Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem // Lobachevskii J. Math. – 2020. – V. 41, No 7. – P. 1377–1384. – doi: 10.1134/S1995080220070343.

Поступила в редакцию
15.01.21

Репина Анна Игоревна, аспирант кафедры прикладной математики, ассистент кафедры системного анализа и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: airepinas@gmail.com

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2021, vol. 163, no. 1, pp. 5–20

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20

**Convergence of the Galerkin Method
for Solving a Nonlinear Problem
of the Eigenmodes of Microdisk Lasers**

*A.I. Repina**Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: *airepinas@gmail.com*

Received January 15, 2021

Abstract

This paper investigates an eigenvalue problem for the Helmholtz equation on the plane modeling the laser radiation of two-dimensional microdisk resonators. It was reduced to an eigenvalue problem for a holomorphic Fredholm operator-valued function $A(k)$. For its numerical solution, the Galerkin method was proposed, and its convergence was proved. Namely, a sequence of the finite-dimensional holomorphic operator functions $A_n(k)$ that converges regularly to $A(k)$ was constructed. Further, it was established that there is a sequence of eigenvalues k_n of the operator-valued functions $A_n(k)$ converging to k_0 for each eigenvalue k_0 of the operator-valued function $A(k)$. If $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of eigenvalues of the operator-valued functions $A_n(k)$ converging to a number of k_0 , then k_0 is an eigenvalue of $A(k)$. The estimates for the rate of convergence of $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ to k_0 depend either on the order of the pole k_0 of the operator-valued function $A^{-1}(k)$, or on the algebraic multiplicities of all eigenvalues of $A_n(k)$ in a neighborhood of k_0 , or on the number of different eigenvalues of $A_n(k)$ in this neighborhood. The reasoning is based on the fundamental results of the theory of holomorphic operator-valued functions and is important for the theory of microdisk lasers, because it significantly expands the class of devices interesting for applications that allow mathematical modeling based on numerical methods that are strictly justified.

Keywords: microdisk laser, nonlinear eigenvalue problem, system of Muller boundary integral equations, Galerkin method

Acknowledgments. The study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program.

Figure Captions

Fig. 1. Geometry of a two-dimensional microdisk resonator.

References

1. Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z. Nanolasers based on 2D materials. *Laser Photonics Rev.*, 2020, vol. 14, no. 12, art. 2000271, pp. 1–16. doi: 10.1002/lpor.202070066.

2. Nosich A.I., Smotrova E.I., Boriskina S.V., Benson T.M., Sewell P. Trends in microdisk laser research and linear optical modelling. *Opt. Quantum Electron.*, 2007, vol. 39, no. 15, pp. 1253–1272. doi: 10.1007/s11082-008-9203-z.
3. Boriskina S.V., Sewell P., Benson T.M., Nosich A.I. Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, vol. 21, no. 3, pp. 393–402. doi: 10.1364/josaa.21.000393.
4. Smotrova E.I., Nosich A.I. Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity. *Opt. Quantum Electron.*, 2004, vol. 36, no. 3, pp. 213–221. doi: 10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c.
5. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Benson T.M., Nosich A.I. Why elliptic microcavity lasers emit light on bow-tie-like modes instead of whispering-gallery-like modes. *Opt. Commun.*, 2019, vol. 439, pp. 112–117. doi: 10.1016/j.optcom.2019.01.056.
6. Zolotukhina A.S., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Lasing modes of a microdisk with a ring gain area and of an active microring. *Opt. Quantum Electron.*, 2015, vol. 47, no. 12, pp. 3883–3891. doi: 10.1007/s11082-015-0240-0.
7. Zolotukhina A.S., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Electromagnetic analysis of optimal pumping of a microdisk laser with a ring electrode. *Appl. Phys. B: Lasers Opt.*, 2017, vol. 123, no. 1, art. 32, pp. 1–6. doi: 10.1007/s00340-016-6625-3.
8. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Mathematical and numerical analysis of the spectral characteristics of dielectric microcavities with active regions. *Proc. Int. Conf. Days in Diffraction (DD-2016)*. IEEE, 2016, pp. 390–395. doi: 10.1109/DD.2016.7756880.
9. Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742. doi: 10.1364/JOSAB.30.001732.
10. Müller C. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1969. 356 p.
11. Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities. *SIAM J. Appl. Math.*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 1977–1998. doi: 10.1137/19M1261882.
12. Kozlov V., Maz'ya V. *Differential Equations with Operator Coefficients with Applications to Boundary Value Problems for Partial Differential Equations*. Heidelberg, Springer, 1999. 444 p.
13. Karma O. Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions I. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1996, vol. 17, nos. 3–4, pp. 365–387. doi: 10.1080/01630569608816699.
14. Karma O. Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions II (convergence rate). *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1996, vol. 17, nos. 3–4, pp. 389–408. doi: 10.1080/01630569608816700.
15. Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Numerical modeling of on-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method. *Opt. Commun.*, 2020, vol. 476, art. 126311, pp. 1–9. doi: 10.1016/j.optcom.2020.126311.
16. Repina A.I., Oktyabrskaya A.O., Ketov I.V., Karchevskii E.M. Laser modes of active eccentric microring cavities. *Proc. Int. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON-2020)*. IEEE, 2020, pp. 1–4. doi: 10.1109/ICTON51198.2020.9203752.

17. Repina A.I., Oktyabrskaya A.O. Mathematical modeling of photonic crystal resonators based on the Lasing Eigenvalue Problem. *Proc. Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA-2019)*, 2019, pp. 472–477. doi: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947540.
18. Repina A.I., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M. Unidirectional emission of active eccentric microring cavities. *Proc. 2020 IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS-2020)*, 2020, pp. 274–278. doi: 10.1109/EWDTS50664.2020.9225153.
19. Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Karchevskii E.M. Laser modes of active circular microcavity with circular piercing hole. *Proc. Int. Conf. on Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2020)*, 2020, pp. 207–210. doi: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088894.
20. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes. *Axioms*, 2019, vol. 8, no. 3, art. 101, pp. 1–16. doi: 10.3390/axioms8030101.
21. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung. *Abh. Math. Semin. Hamburg*, 1960, vol. 24, pp. 41–53. (In German)
22. Kartchevskii E.M., Nosich A.I., Hanson G.W. Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber. *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, vol. 65, no. 6, pp. 2033–2048.
23. Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Philadelphia, SIAM, 2013. xvi, 271 p.
24. Frolov A., Kartchevskiy E. Integral equation methods in optical waveguide theory. *Springer Proc. Math. Stat.*, 2013, vol. 52, pp. 119–133.
25. Karchevskii E.M. The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides. *Diff. Equat.*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 1109–1111. doi: 10.1007/BF02754515.
26. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides. *Proc. Int. Conf. Days in Diffraction (DD-2013)*, 2013, pp. 131–135. doi: 10.1109/DD.2013.6712817.
27. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1148–1157. doi: 10.1134/S1995080218080127.
28. Kress R. Linear integral equations. In: *Springer Monographs in Mathematics*. Vol. 82. New York, Springer, 1999. xvi, 412 p. doi: 10.1007/978-1-4614-9593-2.
29. Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1377–1384. doi: 10.1134/S1995080220070343.

⟨ **Для цитирования:** Репина А.И. Сходимость метода Галеркина решения нелинейной задачи о собственных модах микродисковых лазеров // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 1. – С. 5–20. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20. ⟩

⟨ **For citation:** Repina A.I. Convergence of the Galerkin method for solving a nonlinear problem of the eigenmodes of microdisk lasers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 1, pp. 5–20. doi: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20. (In Russian) ⟩